Über das Plateausche Problem.

Von

Alfred Haar in Szeged (Ungarn).

Einleitung.

Riemann widmete der Theorie der Minimalflächen eine grundlegende Abhandlung; von ihm rührt einer der schönsten Sätze dieses Ideenkreises her, der einer der Ausgangspunkte der gesamten Theorie wurde. Dieser Satz findet eine Anwendung in der folgenden Lösung des bekannten Plateauschen Problems.

Unter dem Plateauschen Problem versteht man die Aufgabe, die Existenz einer solchen Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

zu beweisen, daß die entsprechende Fläche im xyz-Raume eine vorgelegte Raumkurve C enthalte; diese Fläche ist bekanntlich eine Minimalfläche, indem der von der gegebenen Raumkurve begrenzte Teil einen kleineren Flächeninhalt besitzt als der entsprechende Teil irgendeiner andern durch diese Raumkurve hindurchgehenden Fläche.

Dieses Problem wurde für solche Raumkurven C, deren Projektion auf die xy-Ebene konvex ist, und die so beschaffen sind, daß keine ihrer Schmiegungsebenen auf der xy-Ebene senkrecht steht, zuerst von Herrn S. Bernstein in tiefsinnigen Untersuchungen mit Hilfe seiner Normalreihen in Angriff genommen[1]). Ohne dieses Hilfsmittel behandelt Herr Ch. Müntz in einer ausführlichen Abhandlung[2]) dasselbe Problem, in der er auch auf verschiedene Lücken der Bernsteinschen Arbeit — die bereits Herr

[1]) „Sur les surfaces définies au moyen de leur courbure moyenne ou totale." Annales de l'École Normale (3) 27 (1910) und „Sur les équations du calcul des variations." Annales de l'École Normale (3) 29 (1912).

[2]) „Die Lösung des Plateauschen Problems über konvexen Bereichen." Mathematische Annalen 94 (1925).

Lichtenstein in seinem Enzyklopädieartikel (Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, S. 1326, Anmerkung 127) bemängelt — hinweist; eine Replik[3]) Bernsteins ist kürzlichst erschienen. Gegen den Müntzschen Beweis hat neuerdings Herr Radó einen wesentlichen Einwand veröffentlicht[4]). Während diese Autoren durch sukzessive Näherung das Integral der Differentialgleichung zu gewinnen suchen, teile ich im folgenden eine wesentlich verschiedene Lösungsmethode durch Heranziehung der direkten Methode der Variationsrechnung mit, und glaube daher mich an dieser Stelle mit der erwähnten Diskussion über die angeführten Arbeiten nicht beschäftigen zu müssen.

Die strenge Theorie dieser direkten Methode ist eine der schönsten Schöpfungen Hilberts; an seine Untersuchungen, die für den Fall der Potentialtheorie ausgearbeitet sind, schließen eine Reihe von Arbeiten an, die, soweit es sich um Variationsprobleme von Doppelintegralen handelt, zum größten Teil das Ziel verfolgen, die Randwertaufgabe der linearen partiellen Differentialgleichungen auf gleichem Weg zu behandeln. Der Ausgangspunkt ist stets derselbe. Wenn ein reguläres Variationsproblem

$$\iint F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy = \text{Min.}$$

bei gegebenen Randbedingungen vorgelegt ist, so bestimmt man die Extremalfunktion $z(x, y)$ mit Hilfe einer Minimalfolge

$$z_1(x, y),\ z_2(x, y), \ldots, z_n(x, y), \ldots$$

(deren Funktionen die gegebene Randbedingung erfüllen), die so beschaffen ist, daß der limes

$$\lim_{n=\infty} \iint F\left(\frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}\right) dx\, dy$$

gleich der unteren Grenze des Wertevorrates des betrachteten Integrals (bei den gegebenen Randbedingungen) ist. Die Weiterführung der Hilbertschen Methoden beruht im wesentlichen auf zwei verschiedenen Gedanken, die wegen des Umstandes notwendig werden, daß die Minimalfolge keineswegs konvergieren muß. Der eine Gedanke besteht darin, daß man die Minimalfolge durch eine spezielle ersetzt, deren gleichmäßige Konvergenz man beweisen kann; diese Idee wurde zuerst von den Herren B. Levi und H. Lebesgue in höchst eleganter Weise durchgeführt; später ist derselbe Gedanke von Herrn Courant mit großem Erfolg angewandt worden.[5]) Der

---

[3]) „Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du type elliptique." Mathematische Annalen 95 (1926).

[4]) Mathematische Annalen 96 (1926).

[5]) Die Ritzsche Methode benutzt denselben Gedanken; freilich ist die Konvergenz der Minimalfolge bei den von Ritz behandelten Problemen eine Folge des Um-

zweite Gedanke, den man den Arbeiten von Herrn G. Fubini verdankt, besteht darin, auf die gleichmäßige Konvergenz zu verzichten und statt dessen die Existenz mit Hilfe einer Minimalfolge zu beweisen, die nur fast überall konvergiert. Diese Arbeiten von Herrn Fubini sind in verschiedener Hinsicht grundlegend geworden; mit Recht verweist er darauf, daß die wahre Schwierigkeit nicht in der Konstruktion der Extremalfunktion besteht, sondern in dem Beweise, daß sie Differentialquotienten besitzt[6]).

Auf das Plateausche Problem wurde die Hilbertsche Methode von Herrn Lebesgue in seiner berühmten These[7]) angewandt; er bezeichnet seine Resultate als Vorbereitungen zum Plateauschen Problem. Für dieselben Randkurven, wie Herr Bernstein, beweist er die Existenz einer Funktion $z(x, y)$, die der Lipschitzschen Bedingung genügt, auf der die gegebene Randkurve einen Flächenteil vom minimalen Inhalt abgrenzt. Freilich ist dabei der Flächeninhalt in dem dort festgelegten Sinne zu verstehen, und nur neuere Untersuchungen zeigen die Identität des Lebesgueschen Inhaltsbegriffes mit dem üblichen Doppelintegral; die Frage, ob die erhaltene Funktion die Plateausche Differentialgleichung befriedigt, ist gleichbedeutend damit, ob sie überhaupt zweite Ableitungen besitzt; diese Frage bleibt unentschieden.

2. In der vorliegenden Arbeit wird der Beweis des Plateauschen Problems mit Hilfe der direkten Methode der Variationsrechnung geführt, für dieselben Randkurven, die in den erwähnten Untersuchungen von Lebesgue und Bernstein auftreten.

Wir beginnen unsere Untersuchungen mit einem Hilfssatz, der in der heute üblichen Terminologie die Halbstetigkeit nach unten des Integrals

$$\iint F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy$$

aussagt, falls das entsprechende Variationsproblem regulär ist, d. h. die Bedingungen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\, \partial q}\right)^2 > 0 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} > 0$$

---

standes, daß das zugrunde gelegte Integral die zweiten Ableitungen der unbekannten Funktion enthält, in welchen Fällen eine Verallgemeinerung des bekannten Osgoodschen Satzes anwendbar ist. Auf diesen glättenden Einfluß der höheren Ableitungen habe ich in einem Vortrag in der mathematischen Gesellschaft in Göttingen (26. Juli 1910) aufmerksam gemacht.

[6]) „Sul principio di minimo di Dirichlet." Annali di Matematica (3) **15** (1908) S. 125.

[7]) „Intégrale, Longueur, Aire." Annali di Matematica (3) **7** (1902).

für alle Wertsysteme p, q erfüllt sind. Die schönen Untersuchungen, die Herr L. Tonelli in bezug auf die direkte Methode bei eindimensionalen Variationsproblemen angestellt hat, weisen auf die Wichtigkeit hin, die der Halbstetigkeit in diesem Gedankenkreis zukommt. Sodann wird die Extremalfunktion selbst konstruiert mit Hilfe eines Verfahrens, das für alle regulären Variationsprobleme anwendbar ist. Ein wesentliches Hilfsmittel ist dabei ein Satz topologischer Natur; von einem Spezialfall dieses Satzes macht bereits Herr Hilbert Gebrauch, und die erwähnten Untersuchungen von H. Lebesgue und S. Bernstein enthalten ebenfalls Sätze ähnlicher Art. Ich gelangte zur Aufstellung dieses Satzes, indem ich das Ziel verfolgte, die oben erwähnte Lebesguesche Konstruktion der Extremalfläche durch eine andere zu ersetzen, die von der speziellen Natur des Plateauschen Variationsproblems keinen Gebrauch macht. Den Beweis dieses wichtigen Hilfssatzes hat auf meine Anregung Herr T. Radó in eleganter Weise erbracht[8]).

§ 2 ist der Ableitung von Differentialgleichungssystemen gewidmet, denen die in § 1 konstruierte Extremalfunktion genügt. Da von dieser Funktion zunächst nur bekannt ist, daß sie der Lipschitzschen Bedingung genügt, so kann man nicht unmittelbar zur Ableitung der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichung schreiten. Es kommen dabei Überlegungen von der Art zur Anwendung, wie die in meiner im Journal für Mathematik **149** (1919) erschienenen Arbeit „Über die Variation von Doppelintegralen". Ich habe daselbst, ohne die Existenz der zweiten Ableitungen der Extremalfunktion vorauszusetzen, auf Grund der Stetigkeit der ersten Ableitungen, aus dem Verschwinden der ersten Variation für die Extremalfunktion ein partielles Differentialgleichungssystem erster Ordnung abgeleitet, in dem außer der Extremalfunktion noch eine Hilfsfunktion auftritt. Freilich sind die entsprechenden Entwicklungen in der vorliegenden Arbeit etwas verwickelter, da auch die Stetigkeit der ersten Ableitungen der Extremalfunktion nicht angenommen werden darf. Die wertvollen Untersuchungen, die Herr H. Rademacher[9]) über die Differenzierbarkeit der Funktionen zweier Variablen, die der Lipschitzschen Bedingung genügen, veröffentlicht hat, helfen über die neuen Schwierigkeiten hinweg.

Im letzten Abschnitt wird endlich die Analytizität der Extremalfunktion bewiesen und damit gezeigt, daß sie der üblichen partiellen Differentialgleichung genügt. Dabei wende ich dieselbe Schlußweise an,

---

[8]) „Geometrische Betrachtungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme." Acta scientiarum universitatis Franc. Jos. Szeged 2 (1926).

[9]) „Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen." I und II. Mathematische Annalen 79 und 81 (1919 und 1920).

mit welcher Herr Radó[10]) gezeigt hat, daß jede einmal stetig differenzierbare Extremalfunktion analytisch ist; dieser Beweis beruht auf klassischen, auf Riemann und Weierstraß zurückgehenden Sätzen über Minimalflächen.

Als interessantes Moment in dem vorliegenden Beweise des Plateauschen Problems erblicke ich, daß darin neben geometrischen — und zwar teils flächentheoretischen, teils topologischen — Sätzen die feinen Resultate der von Herrn Lebesgue herrührenden Theorie der reellen Funktionen zur Anwendung gelangen.

In meinen Untersuchungen und bei der Redaktion der vorliegenden Arbeit wurde ich von Herrn Dr. Tibor Radó lebhaft unterstützt. Ihm verdanke ich außer dem bereits erwähnten Beweis des Satzes im § 1 verschiedene literarische Hinweise, die mir von großem Nutzen waren.

§ 1.

Konstruktion der Extremalfunktion.

3. Bevor wir unser eigentliches Problem angreifen, wollen wir zwei Hilfssätze begründen; diese treten naturgemäß auf, sowie man die Existenz der Lösungen eines Variationsproblems mit der direkten Methode zu beweisen versucht. Obwohl in der vorliegenden Arbeit die folgenden Hilfssätze nur für den speziellen Fall des Plateauschen Variationsproblems benutzt werden, so scheint es dennoch angemessen zu sein, diese Sätze gleich für alle regulären Variationsprobleme abzuleiten, da dadurch der wahre Kern des Beweises besser hervortritt. Wir betrachten daher eine Funktion $F(p, q)$, die für alle reellen Werte der Veränderlichen p, q analytisch ist und den Bedingungen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}\right)^2 > 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} > 0$$

genügt, und beweisen vorab zur Vorbereitung den folgenden

Hilfssatz I. *Die in einem Gebiet — etwa in einem Quadrat Q der xy-Ebene — definierten Funktionen*

$$f_1(x, y),\ f_2(x, y),\ \ldots,\ f_n(x, y),\ \ldots$$

mögen daselbst stetige erste Ableitungen $\frac{\partial f_n}{\partial x}$, $\frac{\partial f_n}{\partial y}$ besitzen und gleichmäßig in Q gegen eine Grenzfunktion $f(x, y)$ streben, deren erste Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ebenfalls stetige Funktionen in Q sein mögen; es gilt die Ungleichung:

$$\liminf_{n=\infty} \iint\limits_Q F\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) dx\,dy \geqq \iint\limits_Q F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

---

[10]) „Über den analytischen Charakter der Minimalflächen." Mathematische Zeitschrift **24** (1925).

Ist insbesondere $F = (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}$, so drückt dieser Satz eine einfache Tatsache über den Flächeninhalt aus; Herr Lebesgue hat bereits diese Eigenschaft des Flächeninhaltes hervorgehoben und mit Anwendung seiner Definition des Flächeninhaltes bewiesen[11]). Der folgende Beweis (den ich gleich für den allgemeinen Fall führe) kann in dem erwähnten Spezialfall $F = (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}$ in recht einfacher Weise geometrisch gedeutet werden.

Setzen wir zur Abkürzung

$$(1)\qquad F(p,q) - F(\alpha,\beta) - \frac{\partial F(\alpha,\beta)}{\partial \alpha}(p-\alpha) - \frac{\partial F(\alpha,\beta)}{\partial \beta}(q-\beta) = \frac{1}{2} R(p,q;\alpha,\beta),$$

so ist nach dem Taylorschen Lehrsatze

$$(1')\qquad R(p,q;\alpha,\beta) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\right)_{\substack{\alpha=\tilde{\alpha}\\ \beta=\tilde{\beta}}}(p-\alpha)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right)_{\substack{\alpha=\tilde{\alpha}\\ \beta=\tilde{\beta}}}(p-\alpha)(q-\beta) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}\right)_{\substack{\alpha=\tilde{\alpha}\\ \beta=\tilde{\beta}}}(q-\beta)^2,$$

wobei die Zwischenwerte $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ mittels einer geeignet gewählten Größe θ, die zwischen 0 und 1 liegt, in der folgenden Form darstellbar sind:

$$\tilde{\alpha} = \theta\alpha + (1-\theta)p, \qquad \tilde{\beta} = \theta\beta + (1-\theta)q.$$

Zufolge der über $F(p,q)$ gemachten Annahmen ist für alle Werte von p, q, α, β die Funktion $R(p,q;\alpha,\beta) \geqq 0$. Betrachten wir nun irgendein innerhalb Q liegendes, von einer regulären und doppelpunktlosen Kurve K begrenztes Gebiet T, dessen Inhalt wir durch denselben Buchstaben bezeichnen; die Ungleichung

$$\begin{aligned}\iint_T F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy &\geqq \iint_T \left[F(\alpha,\beta) + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \alpha\right) + \frac{\partial F}{\partial \beta}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \beta\right)\right] dx\, dy \\ &= \left[F(\alpha,\beta) - \alpha\frac{\partial F}{\partial \alpha} - \beta\frac{\partial F}{\partial \beta}\right] T + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\int_K f(x,y)\, dy - \frac{\partial F}{\partial \beta}\int_K f(x,y)\, dx \\ &= J_T(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

---

[11]) S. 344 der in [7]) angeführten Abhandlung. Es ist das Verdienst von Herrn L. Tonelli, die Wichtigkeit der Halbstetigkeit des Integrals bei der Anwendung der direkten Methode der Variationsrechnung hervorgehoben zu haben. Vgl. sein inhaltsreiches Werk „Fondamenti di calcolo delle variazioni I. II., Bologna.

[Anmerkung während der Korrektur.] Für den speziellen Fall des Plateauschen Variationsproblems folgt dieser Hilfssatz, sowie auch der folgende Hilfssatz II, aus den wichtigen Ergebnissen, die Herr L. Tonelli kürzlichst (nach Einreichen der vorliegenden Arbeit) über den Flächeninhalt veröffentlicht hat. Vgl. „Sulla quadratura delle superficie". Atti della Reale Accademia dei Lincei (6) **3** (1926), S. 357, 445, 633.

in der die rechte Seite eine analytische Funktion von α und β darstellt, gilt für alle Werte dieser Veränderlichen. Wir bezeichnen mit m die obere Grenze von $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$ und $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ in Q und beschränken uns auf solche Werte von α und β, deren Betrag unterhalb m liegt; es sei endlich M so groß gewählt, daß

$$\left|\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\right| \leqq M, \qquad \left|\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta}\right| \leqq M, \qquad \left|\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}\right| \leqq M$$

sei, sowie $|\alpha| \leqq m$, und $|\beta| \leqq m$ ist. Alsdann erhalten wir für die Differenz

$$\iint_T F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy - J_T(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \iint_T R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}; \alpha, \beta\right) dx\, dy$$

mit Rücksicht auf (1′) die folgende Ungleichung:

$$\iint_T F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy - J_T(\alpha, \beta) \leqq \frac{M}{2} \iint_T \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x} - \alpha\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y} - \beta\right|\right)^2 dx\, dy,$$

da die Zwischenwerte $\tilde{\alpha} = \theta\alpha + (1-\theta)\frac{\partial f}{\partial x}$, $\tilde{\beta} = \theta\beta + (1-\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$ dieselben Ungleichungen $|\tilde{\alpha}| \leqq m$, $|\tilde{\beta}| \leqq m$ erfüllen. Nun wählen wir für α bzw. β solche Werte, die dem Wertevorrat der Funktionen $\frac{\partial f}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial f}{\partial y}$ in T angehören; und bezeichnen mit ω irgendeine Zahl, die größer als die Oszillationen der stetigen Funktionen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ in T ist. Man gelangt zu der Ungleichung:

$$\iint_T F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy - J_T(\alpha, \beta) \leqq 2 M \omega^2 T$$

und damit zu dem Resultat, daß, wenn das Gebiet T so klein ist, daß daselbst die Oszillation der Funktionen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ kleiner als δ ist, die Größen α und β derart bestimmbar sind, daß

$$\iint_T F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy - J_T(\alpha, \beta) \leqq 2 M \delta^2 T$$

sei, während die Ungleichung

$$\iint_T F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy \geqq J_T(\alpha, \beta)$$

für jedes Gebiet T und für alle Werte von α, β erfüllt ist.

Wir zerlegen nun unser Quadrat Q, dessen Inhalt wir durch denselben Buchstaben bezeichnen, durch äquidistante und zu den Seiten parallele Gerade in kongruente Quadrate

$$q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_N,$$

so daß in jedem die fragliche Oszillation kleiner als die beliebig kleine Zahl δ sei. Sodann bestimmen wir — was nach dem Vorangehenden möglich ist — die Größen

$$\alpha_k,\ \beta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

derart, daß

$$0 \leqq \iint\limits_{q_k} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy - J_{q_k}(\alpha_k, \beta_k) \leqq 2\,M\delta^2\,\frac{Q}{N}$$

ausfalle. Durch Summation über k ergibt sich daraus

$$(2) \qquad \iint\limits_{Q} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy \geqq \sum_{k=1}^{N} J_{q_k}(\alpha_k, \beta_k) \geqq \iint\limits_{Q} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy - 2\,MQ\,\delta^2.$$

Nun betrachten wir irgendeine unserer Funktionen $f_n(x, y)$ und bilden zu ihr die entsprechenden Ausdrücke:

$$J_{q_k}^{(n)}(\alpha, \beta) = \left[F(\alpha, \beta) - \alpha\frac{\partial F}{\partial \alpha} - \beta\frac{\partial F}{\partial \beta}\right]\frac{Q}{N} + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\int\limits_{q_k} f_n(x, y)\,dy - \frac{\partial F}{\partial \beta}\int\limits_{q_k} f_n(x, y)\,dx;$$

die Ungleichungen

$$(3) \qquad J_{q_k}^{(n)}(\alpha, \beta) \leqq \iint\limits_{q_k} F\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) dx\,dy$$

gelten wiederum für alle Werte von k, α und β; sie gelten auch, wenn man darin α bzw. β durch die oben gewählten Größen α_k, β_k ersetzt. Nun kann man bei festem k den Zeiger n so groß wählen, daß $J_{q_k}^{(n)}(\alpha_k, \beta_k)$ sich beliebig wenig von $J_{q_k}(\alpha_k, \beta_k)$ unterscheidet, da die Differenz beider Ausdrücke

$$J_{q_k}(\alpha_k, \beta_k) - J_{q_k}^{(n)}(\alpha_k, \beta_k) = \frac{\partial F(\alpha_k, \beta_k)}{\partial \alpha_k}\int\limits_{q_k}(f - f_n)\,dy - \frac{\partial F(\alpha_k, \beta_k)}{\partial \beta_k}\int\limits_{q_k}(f - f_n)\,dx$$

wegen der angenommenen gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge $f_n(x, y)$ gegen $f(x, y)$ mit wachsendem n gegen Null strebt. Wir wählen n so groß, daß für alle Werte $k = 1, 2, \ldots, N$ diese Differenz dem Betrage nach kleiner als $\frac{2\,MQ\,\delta^2}{N}$ sei, und erhalten durch Summation über k die Ungleichung:

$$-2\,MQ\,\delta^2 \leqq \sum_{k=1}^{N} J_{q_k}(\alpha_k, \beta_k) - \sum_{k=1}^{N} J_{q_k}^{(n)}(\alpha_k, \beta_k) \leqq 2\,MQ\,\delta^2.$$

Mit Rücksicht auf die Ungleichungen (2) und (3) können wir daher schließen, daß für hinreichend große Werte von n

$$\iint\limits_Q F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy - 2\,M Q\,\delta^2 \leqq \sum_{k=1}^{N} J_{q_k}(\alpha_k, \beta_k)$$

$$\leqq 2\,M Q\,\delta^2 + \iint\limits_Q F\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

d. h.

$$\iint\limits_Q F\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) dx\,dy \geqq \iint\limits_Q F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy - 4\,M Q\,\delta^2$$

ist. Da δ eine beliebig kleine positive Größe bedeuten kann, so folgt daraus

$$\liminf_{n=\infty} \iint\limits_Q F\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) dx\,dy \geqq \iint\limits_Q F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

w. z. b. w.

4. Durch dasselbe Verfahren beweist man den folgenden etwas allgemeineren

Hilfssatz II.[12]) *Die in Q definierten Funktionen*

$$f_1(x, y),\ f_2(x, y),\ \ldots,\ f_n(x, y),\ \ldots$$

mögen daselbst die Lipschitzsche Bedingung erfüllen und gleichmäßig in Q gegen die Grenzfunktion $f(x, y)$ streben, die ebenfalls der Lipschitzschen Bedingung genügt; es gilt die Ungleichung:

$$\liminf_{n=\infty} \iint\limits_Q F\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) dx\,dy \geqq \iint\limits_Q F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Um den Beweis in diesem allgemeinen Falle zu erbringen, zerlege man Q — wie oben — in die kongruenten Quadrate

$$q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_N$$

und führe wiederum zur Abkürzung die oben mit $J_{q_k}(\alpha, \beta)$ bzw. $J_{q_k}^{(n)}(\alpha, \beta)$ bezeichneten Ausdrücke ein. Da $f(x, y)$ und $f_n(x, y)$ der Lipschitzschen Bedingung genügen, so sind die ersten Ableitungen dieser Funktionen beschränkte meßbare Funktionen in Q;[13]) daher gelten die bekannten Formeln über die Umkehrung der Integrationsfolgen, und es ist

$$\iint\limits_{q_k} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{q_k} f\,dy, \qquad \iint\limits_{q_k} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{q_k} f\,dy.$$

[12]) Für den speziellen Fall des Flächeninhaltes folgt dieser Satz aus den Untersuchungen von Z. de Geöcze; vgl. seine Thèse: „Quadrature des surfaces courbes." Teubner, 1909. Vgl. auch Anm. [11]).

[13]) Vgl. die in [9]) angeführte erste Arbeit von Herrn Rademacher S. 347.

Setzt man daher — wie oben —

$$J_{q_k}(\alpha, \beta) = \iint\limits_{q_k} \left[F(\alpha, \beta) + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \alpha\right) + \frac{\partial F}{\partial \beta}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \beta\right)\right] dx\, dy$$

$$= \left[F(\alpha \beta) - \alpha \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \beta \frac{\partial F}{\partial \beta}\right] \frac{Q}{N} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \int\limits_{q_k} f\, dy - \frac{\partial F}{\partial \beta} \int\limits_{q_k} f\, dx$$

und entsprechend die mit den Funktionen $f_n(x, y)$ gebildeten Ausdrücke $J_{q_k}^{(n)}(\alpha, \beta)$, so ergeben sich wiederum aus der Taylorschen Entwicklung (1) der Funktion $F(p, q)$, mit Rücksicht auf die für diese Funktion geltenden Ungleichungen, die für alle Werte von α, β richtigen Beziehungen

$$(4) \qquad \begin{aligned} \iint\limits_{q_k} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy &\geqq J_{q_k}(\alpha, \beta), \\ \iint\limits_{q_k} F\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) dx\, dy &\geqq J_{q_k}^{(n)}(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Wir werden zeigen, daß man bei hinreichend großem Wert von N die Größen

$$\alpha_k, \quad \beta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

derart bestimmen kann, daß die Differenz

$$\iint\limits_{Q} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy - \sum_{k=1}^{N} J_{q_k}(\alpha_k, \beta_k)$$

beliebig klein wird.

Man bestimme zu diesem Ende bei jedem festen N diejenigen Größen $\alpha_1^{(N)}, \alpha_2^{(N)}, \ldots, \alpha_N^{(N)}$, für die die Quadratsumme

$$\sum_{k=1}^{N} \iint\limits_{q_k} \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \alpha_k^{(N)}\right]^2 dx\, dy$$

ein Minimum wird; die so erhaltenen Größen

$$\alpha_k^{(N)} = \frac{N}{Q} \iint\limits_{q_k} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

sind dem Betrage nach nicht größer, als die obere Grenze m der ersten Differentialquotienten der Funktion $f(x, y)$, die — zufolge unserer Annahme — die Lipschitzsche Bedingung erfüllt. Bezeichnen wir mit $\alpha^{(N)}(x, y)$ irgendeine Funktion (Treppenfunktion), die in jedem der Quadrate $q_1, q_2, \ldots, q_N$ konstant ist, so macht unter diesen Funktionen diejenige das Integral

$$\iint\limits_{Q} \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \alpha^{(N)}(x, y)\right]^2 dx\, dy$$

zum Minimum, die in den Quadraten q_k gleich den oben bestimmten Größen $\alpha_k^{(N)}$ ist. Nun muß dieses Minimum mit wachsendem N gegen Null streben, da — wie bekannt — die Gesamtheit aller dieser Treppenfunktionen $\alpha^{(N)}(x, y)$ ein vollständiges Funktionensystem bildet[14]). D. h. man kann N so groß wählen, daß die zu diesem N gehörenden Größen $\alpha_k^{(N)}$ die entsprechende Integralsumme

$$\sum_{k=1}^{N} \iint_{q_k} \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \alpha_k^{(N)}\right]^2 dx\,dy$$

beliebig klein machen. In derselben Weise kann man bei hinreichend großem N die Größen

$$\beta_1^{(N)},\ \beta_2^{(N)}, \ldots, \beta_N^{(N)},$$

deren Betrag ebenfalls kleiner als m ist, so bestimmen, daß

$$\sum_{k=1}^{N} \iint_{q_k} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \beta_k^{(N)}\right]^2 dx\,dy$$

beliebig klein wird; wir nehmen an, daß N so groß gewählt ist, daß beide Summen kleiner als die beliebig vorgeschriebene Größe δ sind.

Die Taylorsche Entwicklung (1) der Funktion $F(p, q)$ liefert daher für diese Werte von $\alpha_k^{(N)}$, $\beta_k^{(N)}$ — mit Rücksicht auf (1') — die Ungleichung

$$\iint_{q_k} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy - J_{q_k}(\alpha_k^{(N)}, \beta_k^{(N)}) = \frac{1}{2}\iint_{q_k} R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial f};\ \alpha_k^{(N)}, \beta_k^{(N)}\right) dx\,dy$$
$$\leqq M \iint_{q_k} \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \alpha_k^{(N)}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \beta_k^{(N)}\right)^2\right\} dx\,dy,$$

wobei wir — wie oben — mit M den größten Wert der Funktionen $\left|\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\right|$, $\left|\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right|$, $\left|\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}\right|$ bezeichnen für solche Werte von α, β, deren Betrag nicht größer als m ist[15]). Summiert man über $k = 1, 2, \ldots, N$, so erhält man die Ungleichung

$$(5) \qquad \iint_{Q} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy - \sum_{k=1}^{N} J_{q_k}(\alpha_k^{(N)}, \beta_k^{(N)}) \leqq 2M\delta.$$

---

[14]) Es gilt sogar mehr, denn diese besten Approximationen $\alpha^{(N)}(x, y)$ konvergieren mit wachsendem N fast überall gegen $\frac{\partial f}{\partial x}$. Durch Benutzung dieses Umstandes kann der folgende Beweis zwar abgekürzt werden, es scheint mir aber interessant, daß schon die mittlere Konvergenz zum Ziele führt und der erwähnte, ziemlich tiefliegende Satz der Lebesgueschen Theorie nicht herangezogen werden muß.

[15]) Da nämlich sowohl $\frac{\partial f}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial f}{\partial y}$, wie auch die Größen $\alpha_k^{(N)}$ bzw. $\beta_k^{(N)}$ dem Betrage nach kleiner als m sind, so gilt dasselbe auch für die Zwischenstellen, die in der Darstellung (1') von R auftreten.

Eine wörtliche Wiederholung des Beweises des vorangehenden Hilfssatzes führt uns wiederum zum Ziel. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge $f_n(x, y)$ gegen $f(x, y)$ kann man bei festem N den Zeiger n so groß wählen, daß alle Differenzen

$$J_{q_k}(\alpha_k^{(N)}, \beta_k^{(N)}) - J_{q_k}^{(n)}(\alpha_k^{(N)}, \beta_k^{(N)}) = \frac{\partial F}{\partial \alpha_k^{(N)}} \int\limits_{q_k} (f - f_n)\, dy - \frac{\partial F}{\partial \beta_k^{(N)}} \int\limits_{q_k} (f - f_n)\, dx$$

dem Betrage nach kleiner als $\frac{2M\delta}{N}$ werden; durch Summation über k und Addition zu der letzten Ungleichung (5) erhält man daraus

$$\iint\limits_Q F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy - \sum_{k=1}^{N} J_{q_k}^{(n)}(\alpha_k^{(N)}, \beta_k^{(N)}) \leqq 4 M \delta.$$

Mit Rücksicht auf die für alle Werte von α, β geltende Ungleichung (4) ergibt sich

$$\iint\limits_Q F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy \leqq \iint\limits_Q F\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) dx\, dy + 4 M \delta,$$

woraus — da δ beliebig klein gewählt werden kann — unser Hilfssatz unmittelbar folgt.

Die soeben bewiesenen Hilfssätze bleiben richtig — wie man sich leicht überzeugt — für alle Bereiche, die man durch endlich viele Quadrate beliebig approximieren kann.

5. Wir legen unseren Untersuchungen eine geschlossene, doppelpunktlose Raumkurve C zugrunde

$$x = \xi(t), \qquad y = \eta(t), \qquad z = \zeta(t),$$

die so beschaffen ist, *daß der Tangens des Winkels, den irgendeine Ebene, die wenigstens drei Punkte dieser Kurve enthält, mit der xy-Ebene bildet, dem Betrage nach unterhalb einer endlichen Grenze $\varDelta$ liegt.* Die Projektion der Raumkurve C auf die xy-Ebene ist notwendigerweise eine konvexe Kurve c, und man kann in elementarer Weise zeigen, daß, falls $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen sind, außerdem die Determinante $\xi'(t)\,\eta''(t) - \eta'(t)\,\xi''(t)$ stets von Null verschieden ist, die obige Bedingung erfüllt ist. Wir werden als *Steilheit* der Ebene $z = ax + by + c$ den Ausdruck $|tg\,\varphi| = |\sqrt{a^2 + b^2}|$ bezeichnen, wo φ den mit der xy-Ebene eingeschlossenen Winkel bedeutet; die Steilheit ist der Maximalwert des Differenzenquotienten

$$\left|\frac{(ax_1 + by_1 + c) - (ax_2 + by_2 + c)}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}}\right|.$$

Es handelt sich zunächst darum, die Existenz einer innerhalb c definierten Funktion $z(x, y)$ zu beweisen, die der Lipschitzschen Bedingung genügt und so beschaffen ist, daß die Fläche $z = z(x, y)$ die Raumkurve C enthält und einen kleineren Flächeninhalt besitzt, als irgendeine andere durch die Raumkurve C hindurchgehende Fläche. Herr Lebesgue hat — wie in der Einleitung bemerkt — den Beweis der Existenz einer solchen Fläche skizziert[16]; obwohl dabei der Flächeninhalt zunächst als limes inferior der Flächeninhalte der gegen die Fläche konvergierenden Polyederfolgen definiert ist, so ist dies in den vorliegenden Fällen äquivalent mit dem Doppelintegral (es bezeichne t das von c berandete Gebiet):

$$\iint_t \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx\, dy,$$

so daß die Lebesgueschen Resultate direkt auf unsere Untersuchungen anwendbar sind. Das Plateausche Problem ist damit darauf zurückgeführt — wie Herr Lebesgue selbst bemerkt —, die Existenz der höheren Ableitungen dieser Fläche zu beweisen. Es soll trotzdem im folgenden ein von dem Lebesgueschen Verfahren verschiedener Weg zum Beweis der Existenz der obigen Funktion gegeben werden, der nicht nur im Falle des Plateauschen Problems, sondern bei allen regulären Variationsproblemen (von der in den Hilfssätzen I, II beschriebenen Art) zum Ziele führt.

Wir verfahren zu diesem Zwecke wie folgt: Wir betrachten alle innerhalb t definierten Funktionen $f(x, y)$, die der Bedingung $f(\xi(t), \eta(t)) = \zeta(t)$ unterworfen und so beschaffen sind, daß der Differenzenquotient

$$\frac{f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)}{\left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

dem Betrage nach kleiner als $\Delta + 1$ ausfalle[17], wobei (x_1, y_1) bzw. (x_2, y_2) zwei beliebige Punkte innerhalb t bedeuten. Wir bilden sodann für jede dieser Funktionen das Integral

$$\iint_t F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy;$$

da die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ fast überall existieren und dem Betrage nach kleiner als $\Delta + 1$ sind, so folgt, daß alle diese Integrale dem Betrage nach unterhalb einer oberen Schranke bleiben. Es sei d der Limes inferior dieser Integralwerte. Wenn dieser Minimalwert d für keine Funktion $f(x, y)$

[16]) a. a. O. S. 348—351.

[17]) Die Gesamtheit dieser Funktionen möge mit (G) bezeichnet werden; übrigens kann man statt $\Delta + 1$ jede Größe, die größer als Δ ist, verwenden.

der obigen Konkurrenz (G) erreicht wird, so können wir eine Folge $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots, f_n(x, y), \ldots$ derart bestimmen, daß

$$\lim_{n=\infty} \iint_t F\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) dx\, dy = d$$

ist. Wir können auch annehmen, daß diese Funktionenfolge in t gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $z(x, y)$ strebt, da man — nach einem vielfach angewandten Satze — aus jeder Folge von Funktionen, die so beschaffen sind, daß ihre Differenzenquotienten dem Betrage nach unterhalb derselben Schranke bleiben, eine gleichmäßig konvergente Folge herausgreifen kann. Diese Grenzfunktion $z(x, y)$ gehört wiederum der obigen Konkurrenz an, da die entsprechende Fläche die Kurve C enthält und der Differenzenquotient

$$\left| \frac{z(x_1, y_1) - z(x_2, y_2)}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}} \right| \leqq \Delta + 1$$

sein muß. Daher ist jedenfalls

$$\iint_t F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy \geqq d.$$

Andererseits folgt aus dem Hilfssatze II — da $z(x, y)$ der gleichmäßige Limes der obigen Funktionen $f_n(x, y)$ ist —

$$\iint_t F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy \leqq d,$$

woraus man schließt, daß

$$\iint_t F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy = d$$

sein muß.

Es liefert daher die so erhaltene Funktion $z(x, y)$ ein Minimum für das betrachtete Integral, innerhalb der obigen Konkurrenz (G). Wir werden nun zeigen, daß diese Funktion das *absolute Minimum* jenes Integrals liefert, d. h. daß die Ungleichung

$$\iint_t F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy \leqq \iint_t F\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\right) dx\, dy$$

besteht, wobei $\bar{z}(x, y)$ irgendeine in t definierte Funktion bedeutet, die der Lipschitzschen Bedingung (mit *irgendeiner* Lipschitzschen Konstanten) genügt und der Beschränkung $\bar{z}(\xi(t), \eta(t)) = \zeta(t)$ unterworfen ist.

6. Zu diesem Ende beweisen wir vorab, daß *es keine Ebene geben kann, die einen inneren Punkt* P_0 (mit den Koordinaten $x_0, y_0, z_0 = z(x_0, y_0)$)

der Fläche $z=z(x, y)$ *von der Randkurve* C *trennt;* d. h. daß jede Ebene, die P_0 nicht enthält, so beschaffen ist, daß man P_0 durch eine Flächenkurve mit dem Rand C verbinden kann, ohne die Ebene zu treffen. Wäre nämlich

$$z=\alpha x+\beta y+\gamma$$

eine solche trennende Ebene, so könnte man um den Punkt x_0, y_0 der xy-Ebene ein ganz innerhalb c liegendes Gebiet g angeben, auf dessen Rand die Gleichung $z(x, y)=\alpha x+\beta y+\gamma$ richtig wäre, während im Punkte x_0, y_0 selbst $z(x_0, y_0)-\alpha x_0-\beta y_0-\gamma$ von Null verschieden, etwa positiv ausfiele. Wegen der Stetigkeit der Funktion $z(x, y)$ würden dann alle Ebenen

$$z=\alpha x+\beta y+\gamma+\delta$$

dieselbe Eigenschaft besitzen, sofern δ eine hinreichend kleine positive Zahl bedeutet, da auf dem Rande von g $z(x, y)-(\alpha x+\beta y+\gamma+\delta)$ negativ, im Punkte x_0, y_0 aber diese Differenz positiv wäre. Wir bezeichnen mit g_δ diejenige Umgebung der Stelle x_0, y_0, in der $z(x, y)>\alpha x+\beta y+\gamma+\delta$ ist, mit γ_δ den Rand dieses Gebietes[18]); auf γ_δ ist $z(x, y)=\alpha x+\beta y+\gamma+\delta$. Man kann jedenfalls δ derart wählen, daß das Maß der Punktmenge γ_δ gleich Null wird, da bekanntlich die Punktmenge, in der eine meßbare Funktion den Wert δ annimmt, für fast alle δ eine Nullmenge ist.

Wir betrachten nun diejenige Funktion $f(x, y)$, die in dem Gebiete g_δ mit der linearen Funktion $\alpha x+\beta y+\gamma+\delta$, in der Komplementärmenge g_δ' von g_δ aber mit der Funktion $z(x, y)$ übereinstimmt, und behaupten, daß diese stetige Funktion $f(x, y)$ der obigen Konkurrenz (G) angehört, und dem betrachteten Integral einen kleineren Wert als d erteilt. Die Richtigkeit der Ungleichung

$$\left|\frac{f(x_1, y_1)-f(x_2, y_2)}{[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]^{\frac{1}{2}}}\right| \leqq \Delta+1 \tag{6}$$

folgt nämlich unmittelbar, wenn beide Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der Komplementärmenge g_δ' angehören, da daselbst $f(x, y)$ mit $z(x, y)$ übereinstimmt. Sind aber (x_1, y_1) und (x_2, y_2) solche Punkte, die dem Gebiet g_δ oder dessen Rande γ_δ angehören, so ist dieser Differenzenquotient — da innerhalb g_δ $f(x, y)$ eine lineare Funktion ist — gleich dem Differenzenquotienten

$$\left|\frac{f(x_1', y_1')-f(x_2', y_2')}{[(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2]^{\frac{1}{2}}}\right|,$$

[18]) γ_δ gehört der Komplementärmenge von g_δ in bezug auf t an; diese Komplementärmenge wird im folgenden mit g_δ' bezeichnet.

wobei (x_1', y_1') und (x_2', y_2') solche Punkte sind, in denen die durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gelegte Gerade den Rand γ_δ des Gebietes g_δ trifft. Daraus folgt wiederum die Richtigkeit der Ungleichung (6), da γ_δ der Punktmenge g_δ' angehört. Ist endlich (x_1, y_1) ein Punkt von g_δ' und (x_2, y_2) ein Punkt von g_δ, so beweist man die fragliche Ungleichung durch Einschachtelung eines Punktes (x_3, y_3), der gemeinsamer Punkt der die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) verbindenden Strecke mit dem Rand γ_δ von g_δ ist und zwischen diesen beiden Punkten liegt; denn es gelten nach dem Vorangehenden die beiden Ungleichungen

$$|f(x_1, y_1) - f(x_3, y_3)| \leqq (\varDelta + 1)[(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2]^{\frac{1}{2}},$$
$$|f(x_3, y_3) - f(x_2, y_2)| \leqq (\varDelta + 1)[(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2]^{\frac{1}{2}},$$

woraus durch Addition die Ungleichung (6) folgt.

Da ferner $f(x, y)$ außerhalb des ganz im Inneren von c gelegenen Gebietes g_δ mit $z(x, y)$ übereinstimmt, so gilt die Relation $f(\xi(t), \eta(t)) = \zeta(t)$, da dieselbe für $z(x, y)$ richtig war. Damit ist gezeigt, daß $f(x, y)$ tatsächlich eine Funktion der obigen Konkurrenz (G) ist. Wir vergleichen nun das Integral

$$\iint\limits_t F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint\limits_{g_\delta} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy + \iint\limits_{g_\delta' - \gamma_\delta} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy$$

mit dem entsprechenden Integral

$$\iint\limits_t F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint\limits_{g_\delta} F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy + \iint\limits_{g_\delta' - \gamma_\delta} F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy;$$

die angedeutete Zerlegung ist gerechtfertigt in Anbetracht des Umstandes, daß γ_δ eine Nullmenge und Bestandteil von g_δ' ist. Innerhalb $g_\delta' - \gamma_\delta$ stimmen die beiden Funktionen $z(x, y)$ und $f(x, y)$ überein, es gilt daher für jede solche Stelle $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$ (mit etwaiger Ausnahme einer Nullmenge); daher ist

$$\iint\limits_{g_\delta' - \gamma_\delta} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint\limits_{g_\delta' - \gamma_\delta} F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Es erübrigt daher nur zu zeigen, daß

$$(6') \qquad \iint\limits_{g_\delta} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy < \iint\limits_{g_\delta} F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy$$

ist, wobei in g_δ $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma + \delta$ ist und $z(x, y)$ auf dem Rand von g_δ dieselben Werte wie $f(x, y)$ annimmt. Die Anwendung der Taylorschen Entwicklung (1) liefert nun unmittelbar

$$(1'') \quad F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = F(\alpha, \beta) + \frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \alpha\right) + \frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \beta}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \beta\right) + R,$$

wobei R für alle in Betracht kommenden Werte positiv (> 0) ausfällt. Da ferner

$$\iint\limits_{g_\delta} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \alpha\right) dx\, dy = \iint\limits_{g_\delta} \frac{\partial (z-f)}{\partial x} dx\, dy = 0,$$

$$\iint\limits_{g_\delta} \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \beta\right) dx\, dy = \iint\limits_{g_\delta} \frac{\partial (z-f)}{\partial y} dx\, dy = 0$$

ist[19]), so ergibt sich die Ungleichung (6'), indem man das über g_δ genommene Integral der in der Relation (1'') stehenden Ausdrücke bildet. Es würde daher die der betrachteten Konkurrenz (G) angehörige Funktion $f(x, y)$ unserem Integral einen kleineren Wert als d erteilen, dies ist aber unmöglich. Damit ist gezeigt, daß, wie auch die Konstanten α, β, γ gewählt sind, die Differenz $z(x, y) - \alpha x - \beta y - \gamma$ nur dann in allen Randpunkten eines innerhalb c gelegenen Gebietes g_δ verschwinden kann, wenn sie in jedem Punkte dieses Gebietes gleich Null ist, oder — was damit gleichbedeutend ist — daß, falls die Ungleichung

$$m \leqq z(x, y) - \alpha x - \beta y - \gamma \leqq M$$

auf dem Rand eines Gebietes gilt, so gilt sie auch für jeden Punkt dieses Gebietes. Geometrisch drückt dies die Tatsache aus, daß die Fläche $z = z(x, y)$ von keiner Ebene in einer geschlossenen Kurve durchsetzt werden kann.

7. Für solche Flächen bzw. Funktionen gilt ein bemerkenswerter Satz rein topologischer Natur, der — wie mir scheint — in verschiedenen Untersuchungen dieser Art mit Erfolg anwendbar ist. Ich gelangte zu seiner Aufstellung lediglich zu dem Zwecke, um zu zeigen, daß die oben konstruierte Funktion $z(x, y)$ das absolute Minimum des betrachteten

---

[19]) Ist nämlich $f^*(x, y)$ diejenige *stetige* Funktion, die in g_δ mit $(z - f)$ übereinsimmt, in g_δ' aber überall gleich Null ist, so liefert die Produktintegration (da c eine konvexe Kurve ist)

$$\iint\limits_{t} \frac{\partial f^*}{\partial x} dx\, dy = \iint\limits_{g_\delta} \frac{\partial (z-f)}{\partial x} dx\, dy = \int\limits_{c} f^* dy = 0,$$

$$\iint\limits_{t} \frac{\partial f^*}{\partial y} dx\, dy = \iint\limits_{g_\delta} \frac{\partial (z-f)}{\partial y} dx\, dy = -\int\limits_{c} f^* dy = 0.$$

Integrals liefert. Herr Radó hat auf meine Anregung einen eleganten Beweis dieses Satzes gefunden und mit Anwendungen auf die Variationsrechnung kürzlich veröffentlicht[20]). Dieser Satz lautet folgendermaßen:

Die innerhalb und auf c definierte stetige Funktion $z(x, y)$ erfülle die Bedingung, daß bei jeder Wahl der Konstanten a, b, c und in jedem innerhalb c gelegenen Gebiete die Ungleichung

$$m \leqq z(x, y) - \alpha x - \beta y - \gamma \leqq M$$

statthat, wenn diese Ungleichung für alle Randpunkte des Gebietes richtig ist; es besitze ferner diejenige Raumkurve (Randkurve) C der entsprechenden Fläche, deren Projektion auf die xy-Ebene die Kurve c ist, die Eigenschaft, daß jede Ebene, die mindestens drei Punkte mit dieser Kurve gemein hat, eine kleinere Steilheit als Δ besitzt. Dann gilt für alle Punktepaare $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ innerhalb c die Ungleichung:

$$\left| \frac{z(x_1, y_1) - z(x_2, y_2)}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}} \right| < \Delta.$$

Mit Hilfe dieses Lemmas kann man in einfacher Weise die Richtigkeit der Ungleichung

$$\iint_t F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy < \iint_t F\left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y}\right) dx\, dy$$

zeigen, wobei $z(x, y)$ die oben konstruierte Funktion, $\tilde{z}(x, y)$ aber irgendeine innerhalb und auf c definierte, von $z(x, y)$ *verschiedene* Funktion bedeutet, die der Lipschitzschen Bedingung genügt und auf c dieselben Randwerte wie $z(x, y)$ besitzt. In der Tat, die für alle reellen Werte von ε definierte Funktion

$$\varphi(\varepsilon) = \iint_t F\left(\frac{\partial(z + \varepsilon(\tilde{z} - z))}{\partial x}, \frac{\partial(z + \varepsilon(\tilde{z} - z))}{\partial y}\right) dx\, dy$$

erfüllt für alle ε die Ungleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{d \varepsilon^2} > 0;$$

---

[20]) Für Polyederflächen ist dieser Satz von Herrn H. Lebesgue (a. a. O. S. 349) bewiesen; für stetig gekrümmte Flächen benutzt ihn Herr S. Bernstein, S. 235 der ersten in Anmerkung [1]) genannten Arbeit. Für die vorliegenden Untersuchungen ist es entscheidend, den Satz in voller Allgemeinheit zu besitzen. In seiner ersten Arbeit über diesen Gegenstand: „Über das Dirichletsche Prinzip" (Jahresbericht d. deutschen Mathematiker-Vereinigung 8 (1900)) deutet Herr Hilbert einen Weg für die Behandlung der gewöhnlichen Randwertaufgabe der Potentialtheorie an, der manche Analogie mit diesem Satze aufweist. Vgl. auch [8]).

es ist nämlich

$$\frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2}=\iint\limits_t\left[\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\left(\frac{\partial(\bar{z}-z)}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}\frac{\partial(\bar{z}-z)}{\partial x}\frac{\partial(\bar{z}-z)}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\left(\frac{\partial(\bar{z}-z)}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

wobei der Kürze halber $p=\frac{\partial(z+\varepsilon(\bar{z}-z))}{\partial x}$, $q=\frac{\partial(z+\varepsilon(\bar{z}-z))}{\partial y}$ gesetzt ist. Der Integrand ist wegen der angenommenen Regularität des Variationsproblems nicht negativ und verschwindet nur an solchen Stellen, wo die ersten Ableitungen von $\bar{z}-z$ gleich Null sind; daher ist jenes Integral sicher positiv, da die stetige Funktion $\bar{z}-z$ nicht identisch verschwinden kann. An der Stelle $\varepsilon=0$ muß ferner die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ ein relatives Minimum besitzen, da für hinreichend kleine ε die Funktion $z+\varepsilon(\bar{z}-z)$ so beschaffen ist, daß ihr Differenzenquotient dem Betrage nach kleiner als $\Delta+1$ ausfällt, in dieser Konkurrenz (G) aber die Funktion $z(x,y)$ den kleinsten Wert dem betrachteten Integral erteilt, d. h. es muß für $\varepsilon=0$ $\frac{d\varphi}{d\varepsilon}=0$ sein. In Verbindung mit $\frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2}>0$ (für jedes ε) ergibt sich daraus, daß $\varphi(\varepsilon)$ an der Stelle $\varepsilon=0$ ein absolutes Minimum hat; insbesondere ist

$$\varphi(0)<\varphi(1),$$

und dies ist unsere Behauptung.

Wir gelangen damit zu einer Extremalfunktion, die der Lipschitzschen Bedingung genügt und dem betrachteten Integral einen kleineren Wert erteilt als irgendeine andere der Lipschitzschen Bedingung genügende Funktion, die dieselben Randwerte auf c annimmt. In den folgenden Abschnitten soll für den Fall des Plateauschen Variationsproblems gezeigt werden, daß diese Extremalfunktion an jeder inneren Stelle von t analytisch ist und die bekannte partielle Differentialgleichung befriedigt.

§ 2.

Ableitung der Differentialgleichungen, denen die Extremalfunktion genügt.

8. Obwohl die Untersuchungen dieses Abschnittes ebenfalls für alle regulären Variationsprobleme gelten, so beschränken wir uns doch der Einfachheit halber auf das Plateausche Variationsproblem und schreiten zur Ableitung von gewissen Differentialgleichungssytemen, denen die im vorangehenden Abschnitt konstruierte Extremalfläche $z(x,y)$ genügt. Da die Funktion $z(x,y)$ der Lipschitzschen Bedingung genügt, so existieren — wie Herr Rademacher in seiner erwähnten Abhandlung gezeigt hat — fast überall in t die Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p(x,y),\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=q(x,y),$$

die beschränkte, meßbare Funktionen sind. Wir führen zur Abkürzung die Bezeichnung

$$w = [1 + p^2 + q^2]^{\frac{1}{2}}$$

ein, und bezeichnen mit R irgendein innerhalb c liegendes Rechteck, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind; es gilt der folgende Satz:

Es existieren drei stetige Funktionen $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$, $\omega_3(x, y)$, die in R definiert sind und der Lipschitzschen Bedingung genügen, von der Beschaffenheit, daß die Extremalfunktion $z(x, y)$ in Gemeinschaft mit diesen Hilfsfunktionen f a s t *überall in R die folgenden drei Differentialgleichungssysteme befriedigt:*

$$\text{(A)} \qquad \frac{q}{w} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x}, \qquad \frac{p}{w} = -\frac{\partial \omega_1}{\partial y},$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{1+p^2}{w} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}, \qquad \frac{pq}{w} = \frac{\partial \omega_2}{\partial y},$$

$$\text{(C)} \qquad \frac{pq}{w} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x}, \qquad \frac{1+q^2}{w} = \frac{\partial \omega_3}{\partial y}.$$

Unter der Annahme, daß die Ableitungen p und q stetige Funktionen sind, habe ich die Gleichungen (A) in einer älteren Arbeit[21]) durch Heranziehung eines Hilfssatzes (dessen Verallgemeinerung der hauptsächliche Punkt dieses Abschnittes ist) abgeleitet. Es war dabei mein Ziel, das Verschwinden der ersten Variation in Differentialgleichungen umzusetzen, ohne die Existenz der Ableitungen zweiter Ordnung anzunehmen, und ich beschränkte mich dabei auf die Annahme, daß die ersten Ableitungen der Extremalfunktion stetige Funktionen sind. Die Gleichungen (B) und (C) wurden von Herrn T. Radó auf meine Anregung in einer kürzlich erschienenen Arbeit[22]), unter derselben Annnahme, mit Hilfe desselben Satzes abgeleitet, durch eine strenge Diskussion derjenigen Methode, die bei älteren Autoren als Variation der unabhängigen Variablen bezeichnet wird. Es handelt sich nun darum, zu beweisen, daß diese Differentialgleichungen *fast* überall gültig sind, falls man die Annahme der Stetigkeit der Ableitungen p und q fallen läßt und nur annimmt, daß die Extremalfunktion der Lipschitzschen Bedingung genügt.

Um die Gleichungen (A) abzuleiten, bedienen wir uns der üblichen

---

[21]) Journal für Mathematik **149** (1919). Herr L. Lichtenstein gab am Schlusse seiner Arbeit „Bemerkungen über das Prinzip der virtuellen Verrückungen in der Hydrodynamik inkompressibler Flüssigkeiten". (Annales de la société polonaise de mathématique 1924, S. 20—28) einen äußerst einfachen und eleganten Beweis meines daselbst benutzten Hilfssatzes.

[22]) „Bemerkung über die Differentialgleichungen zweidimensionaler Variationsprobleme", Acta scientiarum universitatis Franc. Joseph. Szeged 2 (1925).

Form der ersten Variation. Es bezeichne $\zeta(x,y)$ eine beliebige in t definierte stetige Funktion, die der Lipschitzschen Bedingung genügt und auf der Kurve c verschwindet; aus der Extremaleigenschaft der Funktion $z(x,y)$ folgt das Bestehen der Ungleichung:

$$\iint_t [1+p^2+q^2]^{\frac{1}{2}}\, dx\, dy \leqq \iint_t \left[1+\left(p+\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(q+\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx\, dy$$

für jeden Wert der Konstante ε, aus der man in bekannter Weise die Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \iint_t \frac{1}{w}\left[p\frac{\partial\zeta}{\partial x}+q\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right] dx\, dy = 0$$

ableitet, die für jede Funktion $\zeta(x,y)$ (von der beschriebenen Art) besteht.

Um die Gleichungen (B) und (C) abzuleiten, bedienen wir uns der entsprechenden Relationen, die sich vermöge der Variation der unabhängigen Variablen ergeben. Sie lauten folgendermaßen: es gelten für dieselben Funktionen $\zeta(x,y)$ die Gleichungen

$$\text{(b)} \qquad \iint_t \frac{1}{w}\left[(1+q^2)\frac{\partial\zeta}{\partial x}-p\,q\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right] dx\, dy = 0,$$

$$\text{(c)} \qquad \iint_t \frac{1}{w}\left[p\,q\frac{\partial\zeta}{\partial x}-(1+p^2)\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right] dx\, dy = 0.$$

Der Beweis dieser Relationen ist fast wörtlich derselbe wie bei Herrn Radó in dem Falle stetiger Ableitungen; er soll in Kürze mitgeteilt werden.

Wir zeichnen in einer Hilfsebene, in der ξ, η die rechtwinkligen Koordinaten bedeuten, diejenige konvexe Kurve γ, die vermöge der Transformation $x=\xi$, $y=\eta$ der Kurve c entspricht, und definieren vermöge der Gleichungen

$$x=\xi+\varepsilon\zeta(\xi,\eta), \qquad y=\eta, \qquad z=z(\xi,\eta)$$

bei jedem festen Wert des Parameters ε eine Fläche F_ε, die im xyz-Raum ausgebreitet ist; dabei ist der Punkt ξ, η stets innerhalb γ veränderlich. Man wähle nun $|\varepsilon|<\frac{1}{M}$, wobei M die obere Schranke des Differenzenquotienten

$$\left|\frac{\zeta(\xi_1,\eta)-\zeta(\xi_2,\eta)}{\xi_1-\xi_2}\right|$$

bedeutet, falls (ξ_1,η) und (ξ_2,η) innere Punkte des von der Kurve γ berandeten Gebietes τ sind; dann ist $\xi+\varepsilon\zeta(\xi,\eta)$ bei jedem η eine monoton wachsende Funktion von ξ, und die Gleichungen

$$\text{(7)} \qquad x=\xi+\varepsilon\zeta(\xi,\eta) \qquad y=\eta$$

vermitteln eine ein-eindeutige Transformation des Gebietes τ der ξ, η-Ebene auf das Gebiet t der xy-Ebene, wobei in Anbetracht dessen, daß $\zeta(\xi, \eta)$ auf der Kurve γ verschwindet, dem Rand γ von τ der Rand c von t entspricht. Daraus folgt aber, daß man die Gleichung jeder dieser Flächen F_ε auf die Form $z = z(x, y; \varepsilon)$ bringen kann, wobei $z(x, y; \varepsilon)$ bei jedem — in Betracht kommenden — Werte von ε eine in t definierte eindeutige Funktion von x, y darstellt. Man zeigt auch ohne Schwierigkeit, daß diese Funktionen der Lipschitzschen Bedingung genügen. In der Tat, man erhält die Funktion $z(x, y; \varepsilon)$, indem man in $z(\xi, \eta)$ die Veränderlichen ξ und η durch diejenigen Ausdrücke von x, y ersetzt, die sich durch Auflösung des Gleichungssystems (7) ergeben. Da ferner $\zeta(\xi, \eta)$ der Lipschitzschen Bedingung genügt, so folgt nach dem Hauptsatz der in der Einleitung angeführten Arbeit von Herrn Rademacher durch Differentiation der Gleichungen (7) nach x, y, daß fast überall in τ die Relationen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{-\varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}}{1 + \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1$$

bestehen. Daraus schließt man aber mit Rücksicht darauf, daß $\zeta(\xi, \eta)$ ebenfalls der Lipschitzschen Bedingung genügt, auf die Beziehungen:

$$\frac{\partial z(x, y; \varepsilon)}{\partial x} = \frac{\partial z(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{p(\xi, \eta)}{1 + \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}},$$

$$\frac{\partial z(x, y; \varepsilon)}{\partial y} = \frac{\partial z(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = q(\xi, \eta) - \frac{\varepsilon\, p(\xi, \eta)}{1 + \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta},$$

die wiederum für fast alle Punkte in τ richtig sind.

Man beachte nun, daß für $\varepsilon = o$ die Fläche F_ε in unsere Extremalfläche übergeht[23]). Daraus folgt auf Grund der Extremaleigenschaft, daß die Funktion

$$\Phi(\varepsilon) = \iint_t \left[1 + \left(\frac{\partial z(x, y; \varepsilon)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(x, y; \varepsilon)}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx\, dy$$

(die für hinreichend kleine Werte von $|\varepsilon|$ definiert ist) an der Stelle $\varepsilon = o$ ein Minimum hat, und daher ist der Differentialquotient $\Phi'(o)$ gleich Null. Führen wir an Stelle von x, y wiederum die durch Gleichung (7) definierten Veränderlichen ξ und η ein, so ergibt sich

[23]) Alle Flächen F_ε enthalten die Raumkurve C, da, falls ξ, η die Koordinaten irgendeines Punktes von γ bezeichnen, die Transformationsgleichungen (7) wegen $\zeta(\xi, \eta) = 0$ in die Identität $x = \xi$, $y = \eta$ übergehen.

$$\Phi(\varepsilon)=\iint\limits_{\tau}\left[\left(1+\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2+p^2+\left(q\left(1+\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)-\varepsilon p\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}d\xi\,d\eta,$$

da die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}=1+\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}$$

stets positiv und nach einem Satze von Herrn Rademacher[24]) die Einführung der neuen Veränderlichen gerechtfertigt ist. Eine leichte Rechnung ergibt:

$$\Phi'(o)=\iint\limits_{\tau}\frac{1}{w}\left[\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}+q\left(q\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}-p\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)\right]d\xi\,d\eta$$

$$=\iint\limits_{t}\frac{1}{w}\left[(1+q^2)\frac{\partial\zeta}{\partial x}-pq\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]dx\,dy=0,$$

womit die Relation (b) bewiesen ist. Der Beweis von (c) ergibt sich durch Vertauschung der Rolle der beiden Veränderlichen x und y.

9. Die Integralrelationen (a), (b), (c) sind Beziehungen von der Form:

$$\iint\limits_{t}\left[u(x,y)\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v(x,y)\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]dx\,dy=0,$$

wobei $u(x,y)$ und $v(x,y)$ gegebene Funktionen bedeuten, die beschränkt und meßbar sind, $\zeta(x,y)$ aber eine willkürliche Funktion bedeutet, die der Lipschitzschen Bedingung genügt und auf der Randkurve c verschwindet. Man gelangt aus diesen Beziehungen zu den Differentialgleichungen (A), (B), (C) durch Anwendung des folgenden Satzes, den wir nun beweisen wollen:

Sind $u(x,y)$ und $v(x,y)$ zwei Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x und y, die in t beschränkt und meßbar sind, und ist

$$\iint\limits_{t}\left[u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]dx\,dy=0$$

für alle Funktionen $\zeta(x,y)$, welche auf dem Rand c von t verschwinden und innerhalb t die Lipschitzsche Bedingung erfüllen, so existiert eine in R definierte, der Lipschitzschen Bedingung genügende Funktion $\omega(x,y)$, von der Beschaffenheit, daß für fast alle Punkte dieses Gebietes die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=-v(x,y),\qquad\frac{\partial\omega}{\partial y}=u(x,y)$$

erfüllt sind.

---

[24]) S. 359 der ersten in [9]) angeführten Arbeit.

Dieser Satz ist die Verallgemeinerung des entsprechenden Resultates, das ich in meiner angeführten Arbeit gewonnen habe, und kann durch analoge Hilfsmittel bewiesen werden.

Zu diesem Ende führe ich (in etwas allgemeinerer Weise als in der genannten Arbeit) ein besonderes Koordinatensystem ein, das in bestimmter Hinsicht den Polarkoordinaten ähnlich ist, wobei aber konzentrische und ähnliche Rechtecke diejenige Rolle spielen, die bei den Polarkoordinaten den konzentrischen Kreisen zukommt.

Um den Punkt P_0 (dessen Koordinaten x_0, y_0 sein mögen) als Mittelpunkt sei ein Rechteck konstruiert, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind; die Seitenlängen dieses Rechteckes bezeichnen wir mit $2a$ und $2b$ und führen zur Abkürzung den spitzen Winkel α ein, für den

$$\cos\alpha = \frac{a}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ist. Wir denken uns alle Rechtecke um den Punkt P_0 als Mittelpunkt gezeichnet, deren Seiten den Koordinatenachsen parallel laufen und die dem obigen Rechteck ähnlich sind; jeder Punkt P (der von P_0 verschieden ist) liegt auf dem Umfange eines dieser Rechtecke, und wir definieren unsere neuen Koordinaten wie folgt: Die eine Koordinate des Punktes P (dessen Cartesische Koordinaten x und y sind) sei der Winkel θ, den die Gerade P_0P mit der positiven x-Achse bildet, d. h. es sei

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y-y_0}{x-x_0};$$

als zweite Koordinate ϱ nehmen wir die (stets positiv gerechnete) halbe Länge der Diagonale desjenigen der obigen Rechtecke, der durch den Punkt P hindurchgeht. Je nachdem θ eine der vier folgenden Ungleichungen

$$\begin{array}{cccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\ -\alpha \leqq \theta \leqq \alpha, & \alpha \leqq \theta \leqq \pi-\alpha, & \pi-\alpha \leqq \pi+\alpha, & \pi+\alpha \leqq \theta \leqq 2\pi-\alpha \end{array}$$

erfüllt, erhält man die folgenden Ausdrücke für ϱ:

$$\begin{array}{lllll} \text{In I ist} & \varrho = \dfrac{x-x_0}{\cos\alpha} & \text{also } x = x_0 + \varrho\cos\alpha & \text{und} & y = y_0 + \varrho\cos\alpha\operatorname{tg}\theta, \\ \text{„ II „} & \varrho = \dfrac{y-y_0}{\sin\alpha} & \text{„ } y = y_0 + \varrho\sin\alpha & \text{„} & x = x_0 + \varrho\sin\alpha\operatorname{cotg}\theta, \\ \text{„ III „} & \varrho = -\dfrac{x-x_0}{\cos\alpha} & \text{„ } x = x_0 - \varrho\cos\alpha & \text{„} & y = y_0 - \varrho\cos\alpha\operatorname{tg}\theta, \\ \text{„ IV „} & \varrho = -\dfrac{y-y_0}{\sin\alpha} & \text{„ } y = y_0 - \varrho\sin\alpha & \text{„} & x = x_0 - \varrho\sin\alpha\operatorname{cotg}\theta. \end{array}$$

Dementsprechend ist die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varrho,\theta)} = \varrho\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}, \text{ wenn die Ungleichung I oder III } -,$$
$$= \frac{\varrho\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}, \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{II} \quad \text{"} \quad \text{IV} \; -,$$

erfüllt ist.

10. Nach diesen Vorbereitungen definieren wir eine Funktion $\zeta(x,y)$ in folgender Weise: Wir denken uns um den Punkt P_0 (der innerhalb c liegen möge) zwei ähnliche Rechtecke r_1 und r_2 der oben beschriebenen Art konstruiert, die beide innerhalb des Gebietes t liegen; die Länge der Diagonalen sei $2\varrho_1$ bzw. $2\varrho_2$ $(\varrho_1 < \varrho_2)$. Die Funktion $\zeta(x,y)$ sei nun außerhalb des Rechteckes r_2 und innerhalb des Rechteckes r_1 gleich Null; in dem zwischen den beiden Rechtecken liegenden ringförmigen Gebiet sei $\zeta(x,y)$ gleich einer willkürlichen stetig differenzierbaren Funktion der Koordinate ϱ allein: $\zeta(x,y) = w(\varrho)$, die für $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$ verschwindet. Diese Funktion $\zeta(x,y)$ ist stetig und genügt offenbar der Lipschitzschen Bedingung, da ihre Ableitungen $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ und $\frac{\partial\zeta}{\partial y}$ nur längs der Diagonalen unserer Rechtecke unstetig werden können. Da ferner $\zeta(x,y)$ auf der Randkurve c jedenfalls verschwindet, so gilt für alle diese Funktionen

$$\iint_t \left[u\frac{\partial\zeta}{\partial x} + v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right] dx\,dy = 0. \tag{8}$$

Wir führen jetzt für x und y unsere Veränderlichen ϱ und θ ein. Da die Ableitung von ζ nach θ überall gleich Null ist, so findet man in einfacher Weise

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{w'(\varrho)}{\cos\alpha}, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial\zeta}{\partial x} = -\frac{w'(\varrho)}{\cos\alpha}, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0,$$

wenn die Ungleichung I bzw. III stattfindet, und

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial y} = \frac{w'(\varrho)}{\sin\alpha}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial y} = -\frac{w'(\varrho)}{\sin\alpha},$$

wenn die Ungleichung II bzw. IV statthat. Durch Einführung der Veränderlichen ϱ und θ gewinnt man aus (8) die Relation

$$\begin{aligned}\cos\alpha\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\varrho\,u\,w'(\varrho)}{\cos^2\theta}\,d\varrho\,d\theta + \sin\alpha\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\varrho\,v\,w'(\varrho)}{\sin^2\theta}\,d\varrho\,d\theta \\ -\cos\alpha\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha}\frac{\varrho\,u\,w'(\varrho)}{\cos^2\theta}\,d\varrho\,d\theta - \sin\alpha\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha}\frac{\varrho\,v\,w'(\varrho)}{\sin^2\theta}\,d\varrho\,d\theta = 0.\end{aligned} \tag{9}$$

Zufolge der Ungleichung $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ sind die in den Integranden auftretenden Funktionen

$$\frac{\varrho u}{\cos^2\theta}, \quad \frac{\varrho v}{\sin^2\theta}$$

beschränkt und meßbar in den entsprechenden Integrationsbereichen; die erste dieser Funktionen in den durch die Ungleichungen

$$\varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2, \qquad -\alpha \leqq \theta \leqq \alpha$$

und

$$\varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2, \qquad \pi-\alpha \leqq \theta \leqq \pi+\alpha,$$

die zweite aber in den durch die Ungleichungen

$$\varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2, \qquad \alpha \leqq \theta \leqq \pi-\alpha$$

und

$$\varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2, \qquad \pi+\alpha \leqq \theta \leqq 2\pi-\alpha$$

bedingten Gebieten. Es existieren daher für fast alle ϱ (im Intervall $\varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2$) die Integrale

$$\cos\alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\varrho u}{\cos^2\theta}\, d\theta, \qquad \sin\alpha \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{\varrho v}{\sin^2\theta}\, d\theta,$$

$$-\cos\alpha \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \frac{\varrho u}{\cos^2\theta}\, d\theta, \qquad -\sin\alpha \int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} \frac{\varrho v}{\sin^2\theta}\, d\theta$$

und stellen vier meßbare und beschränkte Funktionen von ϱ dar, die wir bzw. mit $f_1(\varrho)$, $f_2(\varrho)$, $f_3(\varrho)$, $f_4(\varrho)$ bezeichnen. Nach dem bekannten Theorem von Herrn Fubini kann die Beziehung (9) auf die folgende Form gebracht werden:

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} [f_1(\varrho) + f_2(\varrho) + f_3(\varrho) + f_4(\varrho)]\, w'(\varrho)\, d\varrho = 0. \tag{10}$$

Die durch die Gleichung:

$$f(\varrho) = \int_{\varrho_1}^{\varrho} [f_1(\varrho) + f_2(\varrho) + f_3(\varrho) + f_4(\varrho)]\, d\varrho$$
$$- \frac{\varrho-\varrho_1}{\varrho_2-\varrho_1} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} [f_1(\varrho) + f_2(\varrho) + f_3(\varrho) + f_4(\varrho)]\, d\varrho$$

definierte total stetige Funktion $f(\varrho)$ verschwindet für $\varrho = \varrho_1$, $\varrho = \varrho_2$ und besitzt an fast allen Stellen des Intervalls $\varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2$ einen Differentialquotienten:

$$f'(\varrho) = [f_1(\varrho) + f_2(\varrho) + f_3(\varrho) + f_4(\varrho)]$$
$$- \frac{1}{\varrho_2-\varrho_1} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} [f_1(\varrho) + f_2(\varrho) + f_3(\varrho) + f_4(\varrho)]\, d\varrho.$$

Wegen (10) gilt daher — da $\int\limits_{\varrho_1}^{\varrho_2} w'(\varrho)\,d\varrho = w(\varrho_2) - w(\varrho_1) = 0$ ist — die Gleichung

$$\int\limits_{\varrho_1}^{\varrho_2} f'(\varrho)\,w'(\varrho)\,d\varrho = 0$$

für alle, an den Stellen $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$ verschwindende Funktionen $w(\varrho)$, die im Intervall $\varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2$ einmal stetig differenzierbar sind, um so mehr für diejenigen, die daselbst zweimal stetig differenzierbar sind. Durch Produktintegration (die wegen der Totalstetigkeit von $f(\varrho)$ gestattet ist) erhält man — mit Rücksicht auf $f(\varrho_1) = f(\varrho_2) = 0$ — die Gleichung

$$\int\limits_{\varrho_1}^{\varrho_2} f(\varrho)\,w''(\varrho)\,d\varrho = 0,$$

woraus man mit Hilfe des bekannten Du Bois Reymondschen Satzes der Variationsrechnung unmittelbar schließt, daß $f(\varrho)$ eine lineare Funktion ist und daher die Summe

$$f_1(\varrho) + f_2(\varrho) + f_3(\varrho) + f_4(\varrho)$$

für fast alle Werte von ϱ (im betrachteten Intervall) derselben Konstanten gleich sein muß.

Um die Bedeutung dieser Formel zu erkennen, bezeichnen wir mit r_ϱ dasjenige der oben um P_0 als Mittelpunkt konstruierten Rechtecke, dessen Diagonale die Länge 2ϱ besitzt. Wenn man die Seiten dieses Rechteckes, die bzw. in den durch die Ungleichungen I, II, III, IV bedingten Gebieten liegen, bzw. mit $l_I^{(\varrho)}, l_{II}^{(\varrho)}, l_{III}^{(\varrho)}, l_{IV}^{(\varrho)}$ bezeichnet, so verifiziert man leicht die folgenden Zusammenhänge:

$$f_1(\varrho) = \cos\alpha \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\varrho u}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int\limits_{l_I^{(\varrho)}} u\,dy = \int\limits_{l_I^{(\varrho)}} u\,dy - v\,dx,$$

$$f_2(\varrho) = \sin\alpha \int\limits_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{\varrho v}{\sin^2\theta}\,d\theta = -\int\limits_{l_{II}^{(\varrho)}} v\,dx = \int\limits_{l_{II}^{(\varrho)}} u\,dy - v\,dx,$$

$$f_3(\varrho) = -\cos\alpha \int\limits_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \frac{\varrho u}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int\limits_{l_{III}^{(\varrho)}} u\,dy = \int\limits_{l_{III}^{(\varrho)}} u\,dy - v\,dx,$$

$$f_4(\varrho) = -\sin\alpha \int\limits_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} \frac{\varrho v}{\sin^2\theta}\,d\theta = -\int\limits_{l_{IV}^{(\varrho)}} v\,dx = \int\limits_{l_{IV}^{(\varrho)}} u\,dy - v\,dx.$$

Durch Addition dieser Beziehungen resultiert daher die Tatsache, daß für fast alle Werte von ϱ, die im Intervalle $\varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2$ liegen, das über die Peripherie des Rechteckes r_ϱ erstreckte Integral

$$\int_{r_\varrho} u\,dy - v\,dx$$

denselben Wert annimmt. Man zeigt leicht, daß dieser konstante Wert gleich Null ist. In der Tat, die Größen ϱ_1 und ϱ_2 sind nur der Bedingung unterworfen, daß die entsprechenden Rechtecke $r_{\varrho_1} = r_1$ und $r_{\varrho_2} = r_2$ noch innerhalb c liegen; insbesondere kann ϱ_1 beliebig klein gewählt werden. Aus unserem soeben gewonnenen Resultat ergibt sich daher, daß man unterhalb jeder positiven Schranke eine Größe ϱ derart finden kann, daß das letzte Integral jenen konstanten Wert annimmt. Wegen der Beschränktheit von u und v konvergiert aber dieses Integral gegen Null, falls ϱ gegen Null strebt, woraus man unmittelbar schließt, daß die fragliche Konstante gleich Null sein muß.

Wir können unser Resultat folgendermaßen formulieren: *Um den Punkt P_0 (der innerhalb c liegt) als Mittelpunkt konstruieren wir irgendeine einparametrige Schar von ähnlichen und ähnlich orientierten Rechtecken, deren Seiten den Koordinatenachsen parallel sind, und betrachten nur diejenigen Rechtecke dieser Schar, die innerhalb c liegen; unter den für $u(x, y)$, $v(x, y)$ gemachten Voraussetzungen existiert das Integral:*

$$\int u\,dy - v\,dx$$

erstreckt über die Peripherie dieser Rechtecke für fast alle Rechtecke dieser Schar und ist gleich Null.

11. Man gelangt aus diesem Ergebnis zu unserem Satz S. 146 durch eine zweifache Anwendung eines bekannten Theorems von Herrn G. Fubini über mehrdimensionale meßbare Mengen[25]).

Wir betrachten zu diesem Ende alle Rechtecke r, deren Seiten den Koordinatenachsen parallel sind und die innerhalb c liegen. Zur Festlegung jedes dieser Rechtecke mögen die Koordinaten ihrer Mittelpunkte x_0, y_0 und die halben Seitenlängen a, b dienen; deuten wir x_0, y_0 a, b, als rechtwinklige Koordinaten in einem vierdimensionalen Raum, so erhalten wir eine daselbst meßbare Punktmenge $\mathfrak{M}$. Erstreckt man das Integral

$$\int_r u\,dy - v\,dx$$

längs des Umfanges jedes dieser Rechtecke, so erhält man eine in $\mathfrak{M}$ definierte meßbare Funktion $\Omega(x_0, y_0, a, b)$. Das vorangehende Resultat lehrt nun, daß, wenn man x_0, y_0 und das Verhältnis $\frac{a}{b}$ festhält, d. h. wenn

[25]) Vgl. etwa C. Carathéodory: Reelle Funktionen. Leipzig 1918, S. 627 u. 628.

man sich auf den Durchschnitt der Punktmenge $\mathfrak{M}$ mit der „Geraden" $x_0 =$ konst., $y_0 =$ konst., $\frac{a}{b} =$ konst. beschränkt, die Funktion $\Omega(x_0, y_0, a, b)$ in dieser eindimensionalen Punktmenge fast überall gleich Null ist. Da dies für alle Werte von $x_0, y_0, \frac{a}{b}$ richtig ist, so folgt, daß jene vierdimensionale Ausnahmemenge $\mathfrak{M}_0$, in der $\Omega(x_0, y_0, a, b)$ nicht gleich Null ist, sicherlich vom Maße Null sein muß, da sie meßbar ist und alle Durchschnitte mit jenen „Geraden" das (lineare) Maß Null besitzen.

Als Anfangspunkt bzw. Endpunkt jedes dieser Rechtecke r betrachten wir die Punkte mit den Koordinaten $x_0 - a$, $y_0 - b$ bzw. $x_0 + a$, $y_0 + b$. Halten wir etwa den Anfangspunkt fest und lassen den Endpunkt variieren, so erhält man in dem obigen vierdimensionalen Raum eine zweidimensionale „Ebene": $x_0 - a =$ konst., $y_0 - b =$ konst. Jede dieser Ebenen kann natürlich Punkte der Ausnahmemenge $\mathfrak{M}_0$ enthalten; nach dem erwähnten Satze von Fubini muß es aber solche Anfangspunkte von Rechtecken, d. h. solche „Ebenen" $x_0 - a =$ konst., $y_0 - b =$ konst. geben, deren Durchschnitt mit $\mathfrak{M}_0$ vom (zweidimensionalen) Maße Null ist. Es gilt noch mehr, indem diejenigen „Ebenen" bzw. Anfangspunkte, für die dies nicht der Fall ist, selbst eine (zweidimensionale) Punktmenge vom Maße Null bilden. Da in jeder dieser „Ebenen" die Lage eines Punktes durch den Endpunkt des entsprechenden Rechteckes bestimmt ist, so sind wir zu dem folgenden Resultate gelangt:

Erstreckt man das Integral

$$\int u\,dy - v\,dx$$

längs des Rechteckes mit dem Anfangspunkt A und dem Endpunkt B (dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind und das ganz innerhalb t liegt), so gilt für fast alle A in t die Tatsache, daß diejenigen Stellen B, für die dieses Integral nicht gleich Null ist, eine Punktmenge vom Maße Null bilden.

Ein entsprechender Satz gilt, wenn man die Rolle des Anfangspunktes und Endpunktes vertauscht; daraus folgt auch die *für fast alle Punkte A von t geltende Tatsache, daß das obige Integral erstreckt über irgendein innerhalb t liegendes Rechteck, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind und das in A einen Eckpunkt hat, stets verschwindet, es sei denn, daß der A gegenüberliegende Eckpunkt des Rechtecks in einer Punktmenge vom Maße Null liegt.*

12. Man erstrecke nun das Integral $\int u\,dy$ längs des innerhalb t liegenden Stückes einer zur y-Achse parallelen Geraden; bekanntlich existiert dieses Integral *für fast alle* Geraden dieser Art. Dasselbe findet statt, wenn man das Integral $\int v\,dx$ längs der zur x-Achse parallelen

Geraden erstreckt. Die Punktmenge $\mathfrak{M}_0'$, die aus den Punkten dieser Ausnahmegeraden (längs deren die obigen Integrale nicht existieren) gebildet wird, ist daher eine Nullmenge. Wenn die Punkte A, B dieser Nullmenge nicht angehören, so existiert das Integral

$$\int_A^B u\,dy - v\,dx,$$

wobei als Integrationsweg zwei zusammenstoßende Seiten desjenigen Rechteckes genommen sind, dessen Anfangspunkt bzw. Endpunkt A bzw. B ist.

Wir betrachten nun irgendein Rechteck R, das innerhalb t liegt und dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind; durch Weglassung der Punkte der obigen Nullmenge $\mathfrak{M}_0'$ erhält man eine mit dem Rechteck R maßgleiche Punktmenge. Es sei A ein Punkt dieser Punktmenge von der Beschaffenheit, daß das Integral

$$\int u\,dy - v\,dx,$$

erstreckt über den Umfang aller Rechtecke, deren Seiten zu den Koordinatenachsen parallel sind und in A eine Ecke haben, stets gleich Null ausfalle, mit Ausnahme bestimmter solcher Rechtecke, bei denen aber der dem Punkt A gegenüberliegende Eckpunkt in einer Menge $\tilde{\mathfrak{M}}_0$ vom Maße Null liegt. Das vorher gewonnene Resultat lehrt, daß fast alle Punkte von t diese Eigenschaft besitzen. Nach dem erwähnten Fubinischen Theorem ist der Durchschnitt der Punktmenge $\tilde{\mathfrak{M}}_0 + \mathfrak{M}_0'$ mit fast allen zur x- bzw. y-Achse parallelen Geraden eine (lineare) Nullmenge. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}_0''$ diejenige Punktmenge, die von den Punkten jener zur x- bzw. y-Achse parallelen Geraden gebildet wird, an denen die obige Bedingung nicht statthat; $\mathfrak{M}_0''$ ist ebenfalls eine Nullmenge[26]).

Der Punkt P mit den Koordinaten x, y liege innerhalb des Rechteckes R und gehöre der Nullmenge $\mathfrak{M}_0'$ nicht an; die Koordinaten des festen Punktes A mögen mit x_A, y_A bezeichnet werden. Wir definieren eine Funktion $\omega(x, y)$ vermöge der beiden Ausdrücke:

$$(11) \qquad -\int_{x_A}^{x} v(x, y_A)\,dx + \int_{y_A}^{y} u(x, y)\,dy = \int_{y_A}^{y} u(x_A, y)\,dy - \int_{x_A}^{x} v(x, y)\,dx,$$

die — zufolge der oben festgesetzten Wahl der Punkte A und P — an fast allen Stellen derjenigen Punktmenge übereinstimmen, die aus R durch Weglassung von $\mathfrak{M}_0''$ entsteht. Diejenige Teilmenge von $R - \mathfrak{M}_0''$, an der die Beziehung (11) nicht besteht, besitzt nämlich — zufolge der Kon-

[26]) $\mathfrak{M}_0''$ ist also diejenige Punktmenge, die gebildet wird von jenen zu den Koordinatenachsen parallelen Geraden, deren Durchschnitt mit den Nullmengen $\tilde{\mathfrak{M}}_0$ und $\mathfrak{M}_0'$ ein positives (lineares) Maß besitzt.

struktion von $\mathfrak{M}_0''$ — die Eigenschaft, daß ihr Durchschnitt mit *jeder* zur x- bzw. y-Achse parallelen Geraden eine Nullmenge ist. Aus der Beschränktheit der Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$ folgt unmittelbar, daß der erste Ausdruck längs jeder zur y-Achse parallelen Geraden, die bei der Bildung von $\mathfrak{M}_0'$ nicht benutzt wurde, stetig ist und eine solche Funktion von y darstellt, deren Ableitung nach y an fast allen Stellen existiert und gleich $u(x, y)$ ist. Da dies für fast alle Werte von x statthat[27]), so ist diejenige (zweidimensionale) Punktmenge, in der die Gleichung

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = u(x, y)$$

nicht gilt, eine Nullmenge. In gleicher Weise zeigt man, durch Heranziehung des zweiten Ausdruckes von $\omega(x, y)$ in (11), daß für fast alle Punkte in R die Gleichung

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -v(x, y)$$

besteht.

Der Definitionsbereich $\tilde{\mathfrak{M}}$ der Funktion $\omega(x, y)$ ist zunächst — wie bemerkt — diejenige Punktmenge, die aus $R - \mathfrak{M}_0''$ entsteht durch Weglassen derjenigen Nullmenge, an der (11) nicht gilt. Um zu zeigen, daß $\omega(x, y)$ in $\tilde{\mathfrak{M}}$ der Lipschitzschen Bedingung genügt, verfahre man wie folgt: Es seien P_1 und P_2 zwei Stellen von $\tilde{\mathfrak{M}}$; mit Q bezeichnen wir den Schnittpunkt der durch P_1 hindurchgehenden zur x-Achse parallelen Geraden mit der durch P_2 hindurchgehenden zur y-Achse parallelen Geraden. Natürlich muß Q nicht notwendigerweise $\tilde{\mathfrak{M}}$ angehören; man kann aber — da $\tilde{\mathfrak{M}}$ mit R maßgleich ist — in beliebiger Nähe von Q einen solchen Punkt S bestimmen, der $\tilde{\mathfrak{M}}$ angehört und außerdem so beschaffen ist, daß seine Projektionen auf den Geraden $P_1 Q$ und $P_2 Q$ (die wir mit S_1 bzw. S_2 bezeichnen) ebenfalls $\tilde{\mathfrak{M}}$ angehören, da diejenigen Punkte dieser beiden Geraden, die $\tilde{\mathfrak{M}}$ nicht angehören, Nullmengen bilden. Die Differenz $\omega(P_1) - \omega(P_2)$ kann alsdann durch das Integral $\int u\,dy - v\,dx$ dargestellt werden, erstreckt auf den gebrochenen Polygonzug $P_1 S_1 S S_2 P_2$; daraus folgt aber unmittelbar die Ungleichung

$$|\omega(P_1) - \omega(P_2)| \leqq M(\overline{P_1 S_1} + \overline{S_1 S} + \overline{S S_2} + \overline{S_2 P_2}) = M(\overline{P_1 Q} + \overline{P_2 Q}),$$

wobei M die obere Schranke der Funktionen $|u(x, y)|$ und $|v(x, y)|$ bedeutet. Mit Rücksicht auf $\overline{P_1 Q} + \overline{P_2 Q} \leqq \sqrt{2}\ \overline{P_1 P_2}$ lehrt die letzte Bedingung, daß $\omega(x, y)$ in $\tilde{\mathfrak{M}}$ tatsächlich der Lipschitzschen Bedingung genügt. Man kann endlich an den Ausnahmestellen — an denen $\omega(x, y$

[27]) Die Abszissen der bei der Bildung von $\mathfrak{M}_0$ benutzten zur y-Achse parallelen Geraden bilden nämlich eine Nullmenge.

nicht definiert ist, d. h. in $R - \mathfrak{M}$ — solche Werte vorschreiben, daß die so ergänzte Funktion $\omega(x, y)$ die Lipschitzsche Bedingung im ganzen Rechteck R erfüllt.

Damit ist unsere Behauptung in allen Teilen bewiesen.

§ 3.

Beweis der Analytizität der Extremalfunktion.

13. Wir haben noch zu beweisen, daß die im ersten Abschnitt konstruierte Extremalfunktion — von der wir nur gezeigt haben, daß sie der Lipschitzschen Bedingung genügt — an jeder inneren Stelle des Gebietes t analytisch ist. Wir gelangen zu diesem Resultat durch dieselben Schlüsse, mit deren Hilfe Herr Radó[28]) gezeigt hat, daß jede einmal stetig differenzierbare Extremalfunktion bzw. Extremalfläche, die bei gegebener Begrenzung möglichst kleinen Flächeninhalt hat, analytisch ist, indem wir die Rademacherschen Sätze über die Differentialquotienten der Funktionen, die die Lipschitzsche Bedingung befriedigen, heranziehen. Die geometrische Bedeutung des folgenden Verfahrens besteht — wie Herr Radó a. a. O. bemerkt — in einer Anwendung des *Riemannschen Satzes*, daß die Minimalfläche durch jede Schar paralleler Ebenen in den Kurven einer Isothermenschar geschnitten wird.

Es sei R irgendein ganz innerhalb t liegendes Rechteck, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind. Das Resultat des vorangehenden Abschnittes lehrt die Existenz dreier in R definierten Funktionen $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$, $\omega_3(x, y)$, die der Lipschitzschen Bedingung genügen und so beschaffen sind, daß fast überall in R die Differentialgleichungen

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{w}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x}, \qquad \frac{1}{w}\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial \omega_1}{\partial y},$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{w}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}, \qquad \frac{1}{w}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \omega_2}{\partial y},$$

$$\text{(C)} \qquad \frac{1}{w}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x}, \qquad \frac{1}{w}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{\partial \omega_3}{\partial y},$$

$$\left(w^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)$$

bestehen.

Durch die Abbildung

$$\text{(12)} \qquad X = x, \qquad Y = \omega_3(x, y)$$

wird das Rechteck R umkehrbar eindeutig auf ein Gebiet G der X, Y-Ebene abgebildet, da die Funktion $\omega_3(x, y)$ bei jedem festen x eine monoton

[28]) a. a. O. [10]) und [22]).

wachsende Funktion von y ist. Dies folgt leicht aus dem Umstande, daß für fast alle Punkte von R

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial y} = \frac{1}{w}\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] \geqq \frac{1}{\sqrt{1+2\Delta^2}} = \tilde{\Delta}$$

ist, wenn Δ die in § 1 bestimmte obere Grenze des Differenzenquotienten der Funktion $z(x, y)$ bedeutet. Man schließt nämlich aus dieser Ungleichung, daß für fast alle Werte von x die Ungleichung

$$\omega_3(x, y') - \omega_3(x, y'') \geqq \tilde{\Delta}(y' - y'') \qquad (y' > y'')$$

richtig ist, da für fast alle x die Funktion $\omega_3(x, y)$ als Funktion von y betrachtet, für jeden Wert dieser Veränderlichen — mit etwaiger Ausnahme einer (linearen) Nullmenge — eine Ableitung besitzt, die nicht kleiner als $\tilde{\Delta}$ ausfällt. Wegen der Stetigkeit von $\omega_3(x, y)$ kann sodann die letzte Ungleichung für alle Werte von x gefolgert werden, womit die fragliche Monotonität bewiesen ist. Da die Abbildung des Gebietes R der x, y-Ebene auf das Gebiet G der X, Y-Ebene ein-eindeutig ist, so definiert die Transformation (12) — oder was damit gleichbedeutend ist — die Gleichung

$$Y = \omega_3(X, y)$$

eine innerhalb G erklärte stetige Funktion $y(X, Y)$, von der man leicht zeigen kann, daß sie der Lipschitzschen Bedingung genügt. In der Tat, sind x_0, y_0 und x_1, y_1 zwei beliebige Stellen des Gebietes R und setzen wir zur Abkürzung

$$X_0 = x_0, \quad Y_0 = \omega_3(x_0, y_0); \quad X_1 = x_1, \quad Y_1 = \omega_3(x_1, y_1),$$

so gilt für fast alle Stellen x_0, y_0 die Gleichung[29])

$$Y_1 - Y_0 = \frac{\partial \omega_3(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x_1 - x_0) + \frac{\partial \omega_3(x_0, y_0)}{\partial y_0}(y_1 - y_0)$$
$$+ \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\,\overline{R}(x_1 - x_0,\ y_1 - y_0),$$

wobei die Funktion $\overline{R}$ gegen Null strebt, falls der Punkt x_1, y_1 zu dem Punkt x_0, y_0 konvergiert. Da $\frac{\partial \omega_3}{\partial y}$ für fast alle Punkte größer als $\tilde{\Delta}$ ausfällt, so folgt daraus — wiederum für fast alle Stellen —

$$y_1 - y_0 = \frac{1}{\frac{\partial \omega_3(x_0, y_0)}{\partial y_0}}\left\{(Y_1 - Y_0) - \frac{\partial \omega_3(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x_1 - x_0)\right.$$
$$\left. - \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\,\overline{R}\right\},$$

woraus man — mit Rücksicht darauf, daß, falls der Punkt (x_1, y_1) gegen

---

[29]) vgl. H. Rademacher, a. a. O. [9]), S. 347, Gleichung (27).

(x_0, y_0) strebt, der entsprechende Punkt $X_1 = x_1, Y_1$ des Gebietes G gegen den Punkt $X_0 = x_0, Y_0$ strebt — auf die Richtigkeit der Beziehungen

$$(13)\qquad \frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{1}{\frac{\partial \omega_3}{\partial y}} = \frac{w}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}, \qquad \frac{\partial y}{\partial X} = -\frac{\frac{\partial \omega_3}{\partial x}}{\frac{\partial \omega_3}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

schließt, die für fast alle Stellen X, Y des Gebietes G gültig ist, da jede Nullmenge von R vermöge der Transformation (12) wiederum in eine Nullmenge übergeführt wird.

Fassen wir nun die Funktionen $z(x, y)$, $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$ als Funktionen der Variablen X, Y auf; wir erhalten auf diese Weise drei in dem Gebiet G der X, Y-Ebene definierte Funktionen

$$Z(X, Y) = z(x, y), \qquad \Omega_1(X, Y) = \omega_1(x, y), \qquad \Omega_2(X, Y) = \omega_2(x, y),$$

die der Lipschitzschen Bedingung genügen. Nach dem erwähnten Satze von Herrn Rademacher existieren fast überall in G die partiellen Ableitungen dieser Funktionen, und es ist (fast überall) mit Rücksicht auf (A), (B), (C) und (13)

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial Y} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}w}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial X} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X} = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}w}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}, \qquad \frac{\partial \Omega_1}{\partial Y} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial X} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X} = \frac{w}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}, \qquad \frac{\partial \Omega_2}{\partial Y} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

da die Transformation (12) Nullmengen in Nullmengen überführt. Aus diesen Gleichungen entnimmt man mit Rücksicht auf (13) die Beziehungen:

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = -\frac{\partial \Omega_1}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial y}{\partial X} = -\frac{\partial \Omega_2}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial X}, \qquad \frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial X}.$$

Es genügen daher die Funktionenpaare $Z(X, Y)$, $\Omega_1(X, Y)$ und $y(X, Y)$, $\Omega_2(X, Y)$ den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen; nach einem wichtigen Satze aber, der von Herrn De la Vallée Poussin[30]) und Herrn

[30]) „Réduction des intégrales doubles de Lebesgue". Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Sciences) 1910.

Rademacher[31]) gefunden wurde, sind die den Lipschitzschen Bedingungen genügenden Lösungen, dieser Gleichungen analytische, und zwar harmonische Funktionen. Folglich ist auch die aus den Gleichungen

$$x = X, \qquad y = y(X, Y)$$

berechnete Funktion $Y = Y(x, y)$ eine in R erklärte *analytische* Funktion, da

$$\frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{w}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

stets von Null verschieden ist. Man erkennt nun unmittelbar, indem man in der analytischen Funktion $Z(X, Y)$ die Argumente X, Y durch x bzw. durch die analytische Funktion $Y(x, y)$ ersetzt, daß die so entstehende Funktion, die mit unserer Extremalfunktion $z(x, y)$ übereinstimmt, eine analytische Funktion von x, y ist.

Damit ist unser Satz in allen Teilen bewiesen, und man kann für $z(x, y)$ die übliche Euler-Lagrangesche Differentialgleichung der Minimalflächen ableiten, indem man etwa $\omega_1(x, y)$ aus den beiden Gleichungen (A) eliminiert.

---

[31]) „Über streckentreue und winkeltreue Abbildung." Mathematische Zeitschrift 4 (1919).

(Eingegangen am 14. 3. 1926.)