# Ueber trinomische Gleichungen.

Von

P. Nekrassoff in Moskau.

Im Folgenden möchte ich über die Resultate einer Arbeit Bericht erstatten, welche von der S. Petersburger Akademie der Wissenschaften preisgekrönt wurde und im Jahre 1883 in der von der Moskauer Mathematischen Gesellschaft herausgegebenen „*Mathematischen Sammlung*" unter dem Titel „*Die Untersuchung der Gleichungen der Form:* $u^m - pu^n - q = 0$" gedruckt worden ist*).

## I. Die Grundsätze der Vertheilung der Wurzeln der trinomischen Gleichung auf der Fläche, verbunden mit ihrer Reihenentwickelung und ihrer Ausdrucksweise durch Integrale.

Es sollen $m$, $n$ positive ganze Zahlen bedeuten, wobei $m > n$ genommen ist. Wir wollen ferner setzen:

$$(1) \qquad P = \frac{n^n (n-m)^{m-n} p^m}{m^m q^{m-n}}.$$

Die Veränderliche $z$ wollen wir als einen Punkt auf der Fläche der rechtwinkeligen Coordinaten darstellen. Der Wurzel

$$(2) \qquad a_h = q^{\frac{1}{m}} \cdot e^{\frac{2h\pi i}{m}}$$

der Gleichung $z^m - q = 0$ wird der bestimmte Punkt $a_h$ dieser Fläche entsprechen; dabei werden die Punkte $a_0, a_1, \cdots a_{m-1}$ auf den Spitzen des regelmässigen Vieleckes liegen, welches sein Centrum im Nullpunkte $O$ hat (Fig. 1).

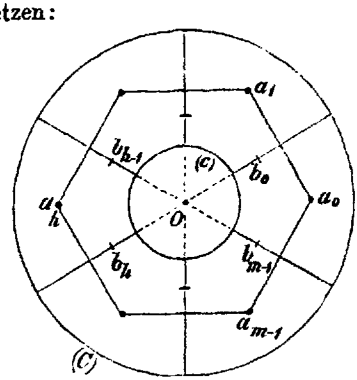


Fig. 1.

*) Математическій Сборникъ, томъ XI, выпускъ I, 1883.

Wir wollen noch $m$ Punkte $b_0, b_1, \cdots b_{m-1}$ hinzunehmen, denen die Grössen entsprechen, die durch die Formel ausgedrückt werden:

(3) $$b_h = \left(\frac{n}{m-n}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot a_h e^{\frac{\pi i}{m}}.$$

Wir werden jetzt die Linien ziehen, die von dem Nullpunkte $O$ nach den Punkten $b_0, b_1, \ldots b_{m-1}$ gerichtet sind. Es versteht sich von selbst, dass der Punkt $a_h$ im Inneren des Winkels $b_{h-1}Ob_h$ liegen wird (Fig. 1).

Wir wollen ferner mit $\varrho$ und $r$ positive Zahlen bezeichnen, die folgenden Bedingungen genügen:

(4) $$\begin{cases} \varrho > 1 \text{ und } \varrho^{m-n} - \varrho^{-n} \geqq \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} \left(\frac{m}{m-n}\right)^{\frac{m-n}{m}}, \\ r < 1 \text{ und } r^{-n} - r^{m-n} \geqq \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} \left(\frac{m}{m-n}\right)^{\frac{m-n}{m}}. \end{cases}$$

Es versteht sich, dass ein unendlich grosses $\varrho$ und ein unendlich kleines $r$ diesen Bedingungen genügen werden. Aber diesen Bedingungen genügen auch endliche Zahlen, z. B. die Zahlen, welche aus den Gleichungen

(5) $$\varrho^{m-n} - 1 = r^{-n} - 1 = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} \left(\frac{m}{n-m}\right)^{\frac{m-n}{n}}$$

gefunden werden.

Nachdem wir auf diese Weise die Zahlen $\varrho$ und $r$ bestimmt haben, wollen wir uns zwei concentrische Kreise $(C)$ und $(c)$ vorstellen, welche ihr Centrum im Nullpunkte $O$ haben und mit den Halbmessern, die resp. den Moduln der Grössen $\varrho q^{\frac{1}{m}}$ und $r q^{\frac{1}{m}}$ gleich sind, beschrieben sind. Die Grundfläche zwischen den concentrischen Kreisen $(C)$ und $(c)$ wird durch die Linien $Ob_0, Ob_1, \ldots Ob_{m-1}$ in $m$ gleiche Theile getheilt. Die Contour, welche denjenigen von diesen Theilen umgiebt, in dessen Inneren sich der Punkt $a_h$ befindet, wollen wir durch $A_h$ bezeichnen. Auf solche Weise werden wir $m$ Contouren $A_0, A_1, \ldots A_{m-1}$ haben, in deren Inneren sich beziehungsweise die Punkte $a_0, a_1, \ldots a_{m-1}$ befinden.

**Satz I.** — *Wenn mod. $P < 1$, so liegen die Punkte, welche die Wurzeln $z$ der Gleichung*

(6) $$z^m - pz^n - q = 0$$

*darstellen, beziehungsweise im Inneren der Contouren $A_0, A_1, \ldots A_{m-1}$. Bezeichnen wir insbesondere die Wurzel von (6), welche der Contour $A_h$ zugehört, mit $z_h$, so lässt sich die Grösse $z_h$ durch die convergirende Reihe ausdrücken:*

$$(7)\qquad z_k^k = \frac{k}{m}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Phi\left(\frac{k+ns}{m},\, s-1\right)}{\Gamma(1+s)}\, p^s a_k^{k-(m-n)s}.$$

Hier bedeutet $\Phi(k, s)$, wie immer im Folgenden, eine Factorialfunction, welche auf folgende Weise definirt ist:

$$(8)\begin{cases}\Phi(x, s) = (x-1)(x-2)\cdots(x-s), \text{ wenn } s \text{ eine ganze, positive Zahl ist;}\\ \Phi(x, s) = 1, \text{ wenn } s = 0;\\ \Phi(x, s) = \dfrac{1}{\Phi(x-s, -s)}, \text{ wenn } s \text{ eine ganze, negative Zahl ist.}\end{cases}$$

Der Beweis dieses Satzes gründet sich darauf, dass für alle Punkte der Contour $A_k$:

$$\text{mod.}\ \frac{pz^n}{z^m - q} \leqq \text{mod.}\ P^{\frac{1}{m}} < 1.$$

Mit Rücksicht hierauf können wir nämlich — wenn wir überhaupt das längs einer Contour $S$ im positiven Sinne genommene Integral

$$\int F(z)\, dz$$

mit

$$\int_S F(z)\, dz$$

bezeichnen, das Integral

$$(9)\qquad J = \frac{1}{2\pi i}\int_{A_k}\frac{d\log(z^m - pz^n - q)}{dz}\, dz$$

in eine convergirende Reihe nach Potenzen von $p$ entwickeln. Mittels dieser Reihe werden wir finden, dass $J = 1$. Dieses Resultat zeigt, dass im Innern der Contour $A_k$ nur eine Wurzel der Gleichung (6) liegt. Hierauf werden wir, wie es bekannt ist, haben:

$$(10)\qquad z_k^k = \frac{1}{2\pi i}\int_{A_k} z^k \cdot \frac{d\log(z^m - pz^n - q)}{dz}\, dz.$$

Diese Formel erlaubt uns, die Grösse $z_k^k$ entweder mittels der Reihe (7) oder mittels bestimmter Integrale auszudrücken.

Wir wollen jetzt zur Ableitung des zweiten Satzes, der dem Falle, wo mod. $P > 1$, entspricht, übergehen. Zu dem Zwecke wollen wir uns auf der Fläche zwei Gruppen von Punkten vorstellen (vergl. Fig. 2): erstens die Punkte $d_0, d_1, \ldots d_{m-n-1}$, welche die Wurzeln der Gleichung $z^{m-n} - p = 0$ darstellen, die man aus folgender Formel bekommt:

$$(11)\qquad d_k = p^{\frac{1}{m-n}}\, e^{\frac{2k\pi i}{m-n}},$$

zweitens die Punkte $e_0, e_1, \ldots e_{n-1}$, welche die Wurzeln der Gleichung $pz^n + q = 0$ darstellen, die man aus folgender Formel erhält:

$$(12) \qquad e_h = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{n}} e^{\frac{(2h+1)\pi i}{n}}.$$

Ausserdem wollen wir uns (Fig. 2) die Punkte $f_0, f_1, \ldots f_{m-n-1}$ vorstellen, welche die Grössen

$$(13) \qquad f_h = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}} d_h\, e^{\frac{\pi i}{m-n}}$$

repräsentiren, und die Punkte $g_0, g_1, \ldots g_{n-1}$, welche die Grössen vorstellen:

$$(14) \qquad g_h = \left(\frac{m}{m-n}\right)^{\frac{1}{n}} e_h\, e^{\frac{\pi i}{n}}.$$

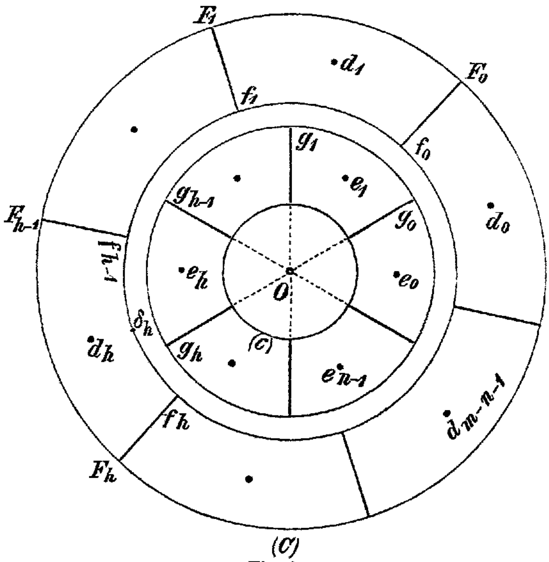

Fig. 2.

Es versteht sich von selbst, dass der Punkt $d_h$ im Innern des Winkels $f_{h-1}\,O\,f_h$, und der Punkt $e_h$ im Innern des Winkels $g_{h-1}\,O\,g_h$ liegen wird. Wir wollen zwei concentrische Kreise, welche durch die Puncte $f_0, f_1, f_h$ und durch die Punkte $g_0, g_1, g_h$ gehen, mit $(f)$ und $(g)$ bezeichnen. Da nach Voraussetzung mod. $P > 1$, so ist:

$$(15) \qquad \text{mod. } d_h > \text{mod. } f_h > \text{mod. } g_h > \text{mod. } e_h.$$

Daher wird der Kreis $(g)$ kleiner als der Kreis $(f)$ sein und zugleich werden alle Punkte $e_0, e_1, \ldots e_{n-1}$ im Innern des Kreises $(g)$ und alle Punkte $d_0, d_1, \ldots d_{n-1}$ ausserhalb des Kreises $(f)$ liegen.

Wir werden uns jetzt noch zwei Kreise $(C)$ und $(c)$ vorstellen, welche mit den Kreisen $(f)$ und $(g)$ concentrisch sind und mit den Halbmessern $\varrho d_k$ und $r e_k$ beschrieben sind, wo $\varrho, r$ positive Zahlen sind, die folgenden Bedingungen genügen:

$$(16)\qquad \varrho > 1 \text{ und } \varrho^n(\varrho^{m-n}-1) \geqq \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}}\left(\frac{m-n}{n}\right),$$

$$(17)\qquad r < 1 \text{ und } r^{-m}(1-r^n) \geqq \frac{n}{m}\left(\frac{m-n}{m}\right)^{\frac{m-n}{n}}.$$

Diesen Bedingungen genügen ein unendlich grosses $\varrho$ und ein unendlich kleines $r$, aber auch die Grössen $\varrho$ und $r$, die man aus folgenden Gleichungen bekommt:

$$\varrho^{m-n}-1 = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}}\left(\frac{m-n}{n}\right),$$

$$1-r^n = \frac{n}{m}\left(\frac{m-n}{n}\right)^{\frac{m-n}{n}}.$$

Die Grundfläche zwischen den concentrischen Kreisen $(f)$ und $(C)$ wird durch die Verlängerungen $f_0F_0, f_1F_1, \ldots$ der Halbmesser $Of_0$, $Of_1, \ldots Of_{m-n-1}$ des Kreises $(f)$ in $(m-n)$ gleiche Theile getheilt [vergl. immer Fig. 2]. Wir werden jetzt die Contour, welche denjenigen dieser Theile umgiebt, in welchem sich der Punkt $d_k$ befindet, mit $D_k$ bezeichnen. Auf solche Weise werden wir $(m-n)$ Contouren haben: $D_0, D_1, \ldots D_{m-n-1}$, in deren Inneren sich beziehungsweise die Punkte $d_0, d_1, \ldots d_{m-n-1}$ befinden. Für alle Punkte der Contour $D_k$ wird dabei die Ungleichung gelten:

$$(18)\qquad \text{mod.}\,\frac{q}{z^m-pz^n} \leqq \text{mod.}\left(\frac{1}{P}\right)^{\frac{1}{m-n}} < 1.$$

Die Grundfläche zwischen den concentrischen Kreisen $(g)$ und $(c)$ werde jetzt durch die Linien $Og_0, Og_1, \ldots Og_{n-1}$ in $n$ gleiche Theile zertheilt. Die Contour, welche denjenigen dieser Theile umgiebt, in dessen Inneren sich der Punkt $e_k$ befindet, wollen wir mit $E_k$ bezeichnen. Auf solche Weise werden wir $n$ Contouren haben: $E_0, E_1, \ldots E_{n-1}$, in deren Inneren sich beziehungsweise die Punkte $e_0, e_1, \ldots e_{n-1}$ befinden. Dabei wird für alle Punkte der Contour $E_k$ die Ungleichung gelten:

$$(19)\qquad \text{mod.}\,\frac{z^m}{pz^n+q} \leqq \text{mod.}\left(\frac{1}{P}\right)^{\frac{1}{n}} < 1.$$

**Satz II.** — *Wenn mod. $P > 1$, so werden $(m-n)$ Wurzeln der Gleichung* (6) *beziehungsweise im Inneren der Contouren $D_0, D_1, \ldots D_{m-n-1}$*

*und die anderen $n$ Wurzeln beziehungsweise im Inneren der Contouren $E_0, E_1, \ldots E_{n-1}$ liegen. Dabei werden wir haben, indem wir die Wurzel, die der Contour $D_h$ entspricht, mit $\mathfrak{z}_h$ und die Wurzel, welche der Contour $E_h$ entspricht, mit $\zeta_h$ bezeichnen:*

$$\mathfrak{z}_h^k = \frac{1}{2\pi i}\int_{D_h} z^k \frac{d \lg (z^m - pz^n - q)}{dz} dz \tag{20}$$

$$= \frac{k}{m-n} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Phi\left(\frac{k-ns}{m-n}, s-1\right)}{\Gamma(1+s)} q^s d_h^{k-ms};$$

$$\zeta_h^k = \frac{1}{2\pi i}\int_{E_h} z^k \frac{d \lg (z^m - pz^n - q)}{dz} dz \tag{21}$$

$$= \frac{k}{n} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Phi\left(\frac{k+ms}{n}, s-1\right)}{\Gamma(1+s)} \left(\frac{1}{p}\right)^s e_h^{k+(m-n)s}.$$

Der Beweis dieses Satzes ist dem Beweis von Satz I gleich und auf die Ungleichungen (18) und (19) zu gründen.

Zu den Sätzen I und II werden wir jetzt noch einen dritten hinzufügen, der die beiden ersten Sätze vereinigt und mittels des bekannten allgemeinen Theorems über die Absonderung der Wurzeln abgeleitet wird.

Wenn mod. $P > 1$, also Satz II gilt, verlieren die Wurzeln der Gleichung (6) ihren bestimmten Platz hinsichtlich der Contouren $A_0$, $A_1, \ldots A_{m-1}$ nicht, indem sie ihren bestimmten Platz hinsichtlich der Contouren $D_h$ und $E_h$ einnehmen. Man muss dabei nur von den beiden Kreisen $(C)$ und $(c)$, deren Bogen Bestandtheile der Contouren $A_0, A_1, \ldots A_{m-1}$ sind (Fig. 1), den einen unendlich gross und den anderen unendlich klein werden lassen. Vermöge dieser Auffassung kann man folgenden Satz formuliren:

**Satz III.** — *Wenn $P$ eine beliebige imaginäre Zahl oder wenn $P$ eine reelle Zahl $< 1$ ist, so liegen die Wurzeln der Gleichung*

$$z^m - pz^n - q = 0 \tag{22}$$

*beziehungsweise im Innern der Contouren $A_0, A_1, \ldots A_{m-1}$; wenn aber $P$ eine reelle Grösse $\geqq 1$ ist und $m$ und $n$ relative Primzahlen sind, so werden nur zwei Wurzeln der Gleichung (22) auf einer der Linien $Ob_0, Ob_1, \ldots Ob_{m-1}$ liegen, worauf diejenigen zwei der Contouren $A_0, A_1, \ldots A_{m-1}$, welche neben dieser Linie liegen, in ihrem Inneren keine Wurzeln der Gleichung (22) haben: die übrigen $(m-2)$ Wurzeln aber werden nach wie vor beziehungsweise in den übrigen Contouren $A^0, A_1, \ldots A_{m-1}$ liegen.*

Nach diesem Satze ist die Gleichung:

$$z_k^k = \frac{1}{2\pi i}\int_{A_k} z^k \frac{d\log(z^m - pz^n - q)}{dz}\,dz, \tag{23}$$

wo $z_k$ eine Wurzel von (22) ist, immer gültig, d. h. sowohl für mod. $P < 1$, wie für mod. $P \gtreqq 1$, allein den Fall ausgenommen, dass $P$ eine reelle Grösse $\geqq 1$ und $z_k$ eine von denjenigen Wurzeln ist, welche auf einer der Linien $Ob_0$, $Ob_1$, ... $Ob_{m-1}$ liegen. Für die anderen Wurzeln wird unsere Formel auch im letzten Falle gültig sein. Der Kürze wegen will ich hier von irgend welchen Transformationen des in (23) auftretenden Integrals nicht sprechen.

Die Wichtigkeit der Sätze I, II, III werden wir hernach sehen, wenn wir von der Anwendung derselben auf Integralrechnung handeln.

Anmerkung: Die Gleichung (6) kann in der Form dargestellt werden:

$$z - a_k = p\cdot\frac{z^n(z-a_k)}{z^m - q}, \tag{8'}$$

auf die man die bekannte Formel von Lagrange anwenden kann, welche die Wurzel der Gleichung

$$z - a_k = pf(z)$$

in eine Reihe nach Potenzen von $p$ zu entwickeln gestattet. Ist mod. $P < 1$, so muss augenscheinlich die Lagrange'sche Formel, auf (8') angewandt, die Reihe (7) ergeben. Es ist sehr natürlich, mit der Anwendung der Langrange'schen Formel das Theorem von Rouché hier zu verbinden, welches im 39ten cahier des Journals der Ecole Polytechnique (Mémoire sur la série de Lagrange, t. XXII, 1862) entwickelt ist und welches uns die Möglichkeit giebt, die Entwickelung der Wurzel $z_k$ vermöge der Formel des Lagrange mit der Absonderung derselben durch einen Kreis, der mit einem bestimmten Radius um $a_k$ als Mittelpunkt beschrieben ist, zu begleiten. Aber es zeigt sich, dass diese Art keine ganz bequeme ist. In meiner „Untersuchung" habe ich bewiesen, dass das Gebiet der Anwendbarkeit des Theorems von Rouché, sofern man den genannten Kreis zur Absonderung der Wurzel $z_k$ benutzt, oft enger ist, als das Gebiet der Convergenz der Reihe (7). So ist es z. B. dann, wenn $n$ aus den Grenzwerthen

$$\frac{m\left(\cos\frac{\pi}{m} - \sin\frac{\pi}{m}\right)^m}{1 + \left(\cos\frac{\pi}{m} - \sin\frac{\pi}{m}\right)^m} \quad \text{und} \quad \frac{m\left(\cos\frac{\pi}{m} + \sin\frac{\pi}{m}\right)^m}{1 + \left(\cos\frac{\pi}{m} + \sin\frac{\pi}{m}\right)^m}$$

heraustritt. Aus diesem Grunde sind die zur Absonderung der Wurzeln der Gleichung (6) dienenden Contouren $A_0$, $A_1$, ... $A_{m-1}$ vortheilhafter, als die Kreiscontouren, die man nach der Methode von Rouché erhält.

## II. Die Untersuchung der Convergenz der Reihen und die Eigenschaft ihrer Ergänzungsglieder.

Um die Convergenz der Reihen, in welche sich die Potenzen der Wurzeln der trinomischen Gleichung entwickeln lassen, bequemer zu untersuchen, gruppire ich die Glieder jeder Reihe in folgender Weise.

Alle Glieder der Reihe (7), in welchen $s \equiv l(\text{mod. } m)$, verbinde ich zu *einer* Gruppe. Die Glieder dieser Gruppe werden, nachdem man sie durch

$$\frac{k}{m}\left(\frac{p}{q}\right)^l a_h^{k+nl}$$

getheilt hat, eine Reihe folgender Form bilden:

$$\varphi_l = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{m^{ms}\Phi\left(\frac{k+nl}{m}+ns,\ l+ms-1\right)}{n^{ns}(n-m)^{(m-n)s}\Gamma(1+l+ms)} P^s, \tag{24}$$

wobei:

$$\mathfrak{z}_h^k = \frac{k}{m}\cdot\sum_{l=0}^{l=m-1}\left(\frac{p}{q}\right)^l a_h^{k+nl}\varphi_l. \tag{25}$$

Auf ähnliche Weise gruppire ich die Reihen (20) und (21), wobei in der Reihe (20) solche Glieder, in welchen $s \equiv l\ (\text{mod. } m-n)$, und in der Reihe (21) solche Glieder, in welchen $s \equiv l\ (\text{mod. } n)$, sich in eine Gruppe vereinigen. Nach solcher Gruppirung werden wir haben:

$$z_h^k = \frac{k}{m-n}\sum_{l=0}^{l=m-n-1} q^l d_h^{k-ml}\psi_l, \tag{26}$$

$$\zeta_h^k = \frac{k}{n}\sum_{l=0}^{l=n-1}\left(\frac{-1}{q}\right)^l e_h^{k+ml}\Theta_l, \tag{27}$$

wo

$$\psi_l = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{n^{ns}(n-m)^{(m-n)s}\ \Phi\left(\frac{k-nl}{m-n}-ns,\ l+(m-n)s-1\right)}{m^{ms}\Gamma(1+l+(m-n)s)}\left(\frac{1}{P}\right)^s, \tag{28}$$

$$\Theta_l = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{n^{ns}(m-n)^{(m-n)s}\ \Phi\left(\frac{k+ml}{n}+ms,\ l+ns-1\right)}{m^{ms}\Gamma(1+l+ns)}\left(\frac{1}{P}\right)^s. \tag{29}$$

Die obengenannte Gruppirung wurde unlängst in den Arbeiten des Herrn Heymann angewendet (Mathematische Annalen und Zeitschrift für Mathematik und Physik*)). Die Reihen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{m-1}$ werden

---

*) Mathem. Annalen Bd. XXVIII, Heft 1, p. 72—74. 1886. — Zeitschrift für Mathem. und Phys. 31. Jahrg., 4. Heft, p. 225—226, 230—232. 1886.

für mod. $P \leqq 1$ convergiren und die Reihen $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_{m-n-1}$, $\Theta_0, \Theta_1, \ldots \Theta_{n-1}$ für mod. $P \geqq 1$. Diese Resultate wurden bereits 1850 von Westphal gefunden*), doch auf andere Weise abgeleitet.

Ich werde jetzt einige weitere Eigenschaften der Reihen $\varphi_l$, $\psi_l$ und $\Theta_l$ andeuten, welche noch nicht bemerkt gewesen sind.

Den Coefficienten der Potenz $P$ in dem allgemeinen Gliede irgend einer dieser Reihen werde ich mit $v(s, l)$ bezeichnen, den Quotienten aber:

$$\frac{v(s+1, l)}{v(s, l)}$$

mit $L(s, l)$ oder $M(s, l)$ oder $N(s, l)$, je nachdem eine Reihe $\varphi_l$ oder $\psi_l$ oder $\Theta_l$ in Betracht gezogen wird. Indem ich $k = 1$ setzte, habe ich in meiner Untersuchung folgende Theoreme bewiesen:

*Das 1$^{te}$ Theorem.* Man hat:

$$L(s, l) = \prod_{\sigma=1}^{\sigma=m} \left( \frac{\lambda_\sigma + \frac{l}{m} + s}{\frac{1}{\sigma} + \frac{l}{m} + s} \right), \tag{30}$$

wo $\Pi$ ein Productzeichen ist und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ Zahlen vorstellen, von denen nur eine negativ ist, alle anderen aber positiv sind, und die folgende Bedingungen befriedigen:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sigma} < \lambda_\sigma < \frac{1}{\sigma}, \\ (1-\lambda_1) + \left(\frac{1}{2} - \lambda_2\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m} - \lambda_m\right) = \frac{3}{2}. \end{cases} \tag{31}$$

*Das 2$^{te}$ Theorem.* Man hat:

$$M(s, l) = \prod_{\sigma=1}^{\sigma=m} \left( \frac{\mu_\sigma + \frac{l}{m-n} + s}{\nu_\sigma + \frac{l}{m-n} + s} \right), \tag{30'}$$

wo $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$, $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m$ Zahlen sind, welche folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{cases} \nu_\sigma > 0, \; -\nu_\sigma < \mu_\sigma < +\nu_\sigma, \\ (\nu_1 - \mu_1) + (\nu_2 - \mu_2) + \cdots + (\nu_m - \mu_m) = \frac{3}{2}, \end{cases} \tag{31'}$$

wobei nur eine der Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ negativ ist:

*Das 3$^{te}$ Theorem.* Man hat:

$$N(s, l) = \prod_{\sigma=1}^{\sigma=m} \left( \frac{\varkappa_\sigma + \frac{l}{n} + s}{\varrho_\sigma + \frac{l}{n} + s} \right), \tag{30''}$$

*) Westphal: „Evolutio radicum aequationum algebraicarum e ternis terminis constantium in series infinitas". Gottingae, 1850. Diese Arbeit wurde von der philosophischen Facultät zu Göttingen preisgekrönt.

wo $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_m, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_m$ Zahlen sind, die folgenden Bedingungen genügen:

$$(31'') \qquad \begin{cases} 0 < \pi_\sigma < \varrho_\sigma, \\ (\varrho_1 - \pi_1) + (\varrho_2 - \pi_2) + \cdots + (\varrho_m - \pi_m) = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Aus diesen Theoremen kann man folgende Folgerungen ableiten:

1) Der Quotient

$$\frac{v(s+1, l)}{v(s, l)}$$

ist dem absoluten Werthe nach immer kleiner als die Einheit und nimmt bei der Vergrösserung des $s$ oder $l$ zu.

2) Sind die Bedingungen der Convergenz für irgend eine der Reihen $\varphi_l$, $\psi_l$ und $\Theta_l$ erfüllt, so nehmen die Glieder dieser Reihe dem absoluten Werthe nach von Anfang an ab.

3) Die Coefficienten der Potenzen von $P$ nehmen sehr schnell am Anfange jeder Reihe ab, während sie langsamer abnehmen weit vom Anfange der Reihe, wo die Glieder der Reihe (die Bedingungen der Convergenz als erfüllt vorausgesetzt) minder wichtig werden.

Diese Folgerungen zeigen, dass die Reihen $\varphi_l$, $\psi_l$ und $\Theta_l$ sehr bequem zu berechnen sind.

Ist mod. $P < 1$, so müssen die Glieder der Reihe $\varphi_l$ schneller abnehmen, als die Glieder der geometrischen Progression mit dem Quotienten $r =$ mod. $P$. Wenn wir also das Ergänzungsglied oder den Rest der Reihe $\varphi_l$ mit $R_s$ bezeichnen, werden wir haben:

$$(32) \qquad \text{mod. } R_s < \frac{\text{mod. } u_s}{1 - \frac{1}{r}},$$

unter $u_s$ das erste von den Gliedern der Reihe $\varphi_l$ verstanden, welche dem Ergänzungsgliede zugerechnet werden.

Für die Ergänzungsglieder der Reihen $\psi_l$ und $\Theta_l$ werden wir Ungleichungen folgender Form haben:

$$(33) \qquad \text{mod. } R_s < \frac{\text{mod. } u_s}{1 - \frac{1}{r}},$$

wo $r =$ mod. $P > 1$.

Wir wollen jetzt annehmen, dass $r =$ mod. $P = 1$. In diesem Falle haben wir für das Ergänzungsglied der Reihe $\varphi_l$ folgende Ungleichung:

$$(34) \qquad \text{mod. } R_s < 2 \text{ mod. } u_s \left(\lambda + \frac{1}{2} + \frac{l}{m} + s\right),$$

unter $\lambda$ den grössten unter den Werthen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ verstanden, welche in dem ersten Theoreme angemerkt waren. Für das Ergänzungsglied der Reihe $\psi_i$ werden wir entsprechend haben:

$$\text{(35)} \qquad \text{mod. } R_s < 2 \text{ mod. } u_s \left(\frac{3}{2} - \frac{m-n-1}{m(m-n)} + \frac{l}{m-n} + s\right),$$

und für das Ergänzungsglied der Reihe $\Theta_i$:

$$\text{(36)} \qquad \text{mod. } R_s < 2 \text{ mod. } u_s \left(\frac{3}{2} - \frac{n-1}{mn} + \frac{l}{n} + s\right).$$

In den Ungleichungen (33), (34), (35) und (36) bedeutet $u_s$ das erste von den Gliedern der bezüglichen Reihe, die zu dem Ergänzungsgliede $R_s$ gehören.

## III. Verwendung der Eigenschaften der dreigliedrigen Gleichung zur Reihenentwickelung einiger bestimmter Integrale.

Angenommen, dass mod. $P < 1$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, so wollen wir das Integral betrachten:

$$\text{(37)} \qquad J = \int_0^{z_k} z^{\lambda-1}(q + p z^n - z^m)^{\mu-1} dz,$$

unter $z_k$ diejenige Wurzel der Gleichung

$$\text{(38)} \qquad z^m - p z^n - q = 0$$

verstanden, welche im Inneren der Contour $A_k$ liegt; dabei werden wir die Integration auf die gerade Linie $Oz_k$ beziehen.

Den Radius des Kreises $(c)$ (von welchem ein Bogen Bestandtheil der Contour $A_k$ ist) wollen wir jetzt gleich Null setzen. Wir bemerken ferner, dass für $0 < x < 1$ die Gleichung

$$\text{(39)} \qquad z^m - x(pz^n + q) = 0$$

eine Wurzel $\xi_k$ besitzt, welche innerhalb der Contour $A_k$ liegt und sich in eine convergente Reihe der Form:

$$\xi_k = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Phi\left(\frac{1+ns}{m}, s-1\right)}{\Gamma(1+s)} \cdot \left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(a_k x^{\frac{1}{m}}\right)^{1+ns}$$

entwickeln lässt. Wenn nun hier $x$ von 0 bis 1 wächst, so beschreibt der Punkt, welcher die Wurzel $\xi_k$ vorstellt, eine krumme Linie, die im Inneren der Contour $A_k$ liegt und den Nullpunkt $O$ mit dem Punkte $z_k$ verbindet. Da es zwischen dieser Curve und der geraden Linie $Oz_k$ keine Ausnahmepunkte der unter dem Integralzeichen stehenden Function giebt, so kann man die Integration auf diese Curve beziehen, ohne dass sich die Grösse des Integrals ändert. Mit anderen Worten: man kann die Variable $z$ durch die Variable $x$ ersetzen, vorausgesetzt, dass wir $z = \xi_k$ und

$$dz = \frac{d\xi_h}{dx} \cdot dx$$

nehmen. Hierdurch wird:

$$J = \frac{1}{\lambda + m(\mu - 1)} \int_0^1 x^{1-\mu} (1-x)^{\mu-1} \cdot \frac{d\left(\xi_h^{\lambda+m(\mu-1)}\right)}{dx}\, dx.$$

Indem wir jetzt die Grösse $\xi_h^{\lambda+m(\mu-1)}$ in eine Reihe entwickeln und mittels dieser Reihe integriren, finden wir:

$$(40) \qquad \int_0^{z_h} z^{\lambda-1}(q+pz^n-z^m)^{\mu-1}\, dz = \frac{q^{\mu-1}\Gamma(\mu)}{m} \sum_{s=0}^{s=\infty} H_s \left(\frac{p}{q}\right)^s a_h^{\lambda+ns},$$

wo:

$$(41) \qquad H_s = \frac{\Phi\left(\frac{\lambda+ns}{m}+\mu,\ s\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\lambda+ns}{m}\right)}{\Gamma(1+s)\cdot\Gamma\left(\mu+\frac{\lambda+ns}{m}\right)}.$$

Das Integral $J$, welches wir betrachtet haben, ist manchmal elliptisch oder hyperelliptisch und überhaupt Abel'sch, worauf wir durch (40) die Perioden der entsprechenden elliptischen oder Abel'schen Integrale dargestellt haben. Man kann hiernach beispielsweise die Perioden der elliptischen Integrale, welche folgende Form haben:

$$(42) \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{q+pz^n-z^m}}$$

(wo $m$ gleich 3 oder 4 ist) oder auch der elliptischen Integrale:

$$(43) \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{z(q+pz^n-z^m)}}$$

(wo $m$ gleich 2 oder 3 ist) in bequeme Reihen entwickeln, ohne die Transformation dieser Integrale auf die Form

$$(43') \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

vorzunehmen. Zu den Integralen (42) gehört insbesondere die canonische Form des elliptischen Integrals des Hrn. Weierstrass.

Wir wollen noch folgende Reihenentwickelungen anführen:

1)

$$(44) \qquad \int_{z_h}^{a_h\cdot\infty} z^{\lambda-1}(z^m-pz^n-q)^{\mu-1}\, dz = \frac{q^{\mu-1}\Gamma(\mu)}{m} \sum_{s=0}^{s=\infty} K_s \left(\frac{p}{q}\right)^s a_h^{\lambda+ns},$$

wo $\mu > 0$, $\lambda < m(1-\mu)$, mod. $P < 1$ und

$$K_s = \frac{\Phi\left(\frac{\lambda + ns}{m}, s\right) \Gamma\left(1 + \mu + s - \frac{\lambda + ns}{m}\right)}{\Gamma(1+s)\,\Gamma\left(1 + s - \frac{\lambda + ns}{m}\right)},$$

wobei $\infty$ ein positives Unendlich ist.

2)

$$(45)\qquad \int_{a_h}^{z_h} z^k (p + qz^{-n} - z^{m-n})^{\nu-\mu-1} \frac{d\left\{(z^{m-n} - qz^{-n})^{\mu}\right\}}{dz} dz$$

$$= \frac{k\mu\,\Gamma(\nu-\mu)}{mp^{1-\nu}} \sum_{s=0}^{s=\infty} L_s \left(\frac{p}{q}\right)^s a_h^{k+ns},$$

wo $\mu > 0$, $\nu > \mu$, mod. $P < 1$ und

$$L_s = \frac{\Phi\left(\frac{k + ns}{m}, s - 1\right) \Gamma(s + \mu)}{\Gamma(1+s)\,\Gamma(\nu + s)}.$$

3)

$$(46)\qquad \int_0^{\zeta_h} z^{\lambda-1}(q + pz^n - z^m)^{\mu-1} dz = \frac{q^{\mu-1}\,\Gamma(\mu)}{n} \sum_{s=0}^{s=\infty} M_s \left(\frac{-1}{q}\right)^s e_h^{\lambda+ms},$$

wo $\zeta_h$ eine der Contour $E_h$ entsprechende Wurzel der Gleichung (38) ist, wobei $\lambda > 0$, $\mu > 0$, mod. $P > 1$ und

$$M_s = \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda + ms}{n}\right)}{\Gamma(1+s)\,\Gamma\left(\mu + \frac{\lambda + ms}{n} - s\right)}.$$

4)

$$(47)\qquad \int_{\mathfrak{z}_h}^{d_h \cdot \infty} z^{\lambda-1}(z^m - pz^n - q)^{\mu-1} dz = \frac{\Gamma(\mu)}{n - m} \sum_{s=0}^{s=\infty} N_s (-q)^s d_h^{\lambda - m(1+s-\mu)},$$

wo $\mathfrak{z}_h$ eine der Contour $D_h$ entsprechende Wurzel der Gleichung (38) ist und $\infty$ ein positives Unendlich vorstellt, während $\lambda < m(1-\mu)$, $\mu > 0$, mod. $P > 1$ und

$$N_s = \frac{\Gamma\left[\frac{m(1+s-\mu) - \lambda}{m - n}\right]}{\Gamma(1+s)\,\Gamma\left[\frac{m + n(s-\mu) - \lambda}{m - n}\right]}.$$

5)

$$(48)\qquad \int_{z_h'}^{z_h} (z^m - apz^n - q)^\lambda (q + pz^n - z^m)^\mu z^{k-1} (z^m - q)^{\nu-\lambda-\mu}\, dz$$

$$= \frac{p^\nu}{m} \sum_{s=1}^{s=\infty} Q_s \left(\frac{p}{q}\right)^s a_h^{k+n(\nu+s)} \varphi(a, s),$$

wo $z_h'$ und $z_h$ die der Contour $A_h$ entsprechenden Wurzeln folgender Gleichungen sind:

$$z^m - apz^n - q = 0,$$
$$z^m - \quad pz^n - q = 0,$$

wobei $\lambda > -1$, $\mu > -1$, $-1 < a < +1$, mod. $P < 1$ und

$$Q_s = \frac{\Phi\left(\frac{k+n\nu+ns}{m}, s-1\right)}{\Gamma(s)},$$

$$\varphi(a, s) = \int_a^1 (1-x)^\mu (x-a)^\lambda x^{\nu+s-\lambda-\mu-1}\, dx.$$

Die Gleichungen (46) und (47) erlauben, die Perioden der elliptischen oder Abel'schen Integrale folgender Form

$$\int \frac{z^{\lambda-1}\, dr}{\sqrt{q + pz^n - r^m}}$$

(wo mod. $P > 1$ genommen sein soll) in bequeme Reihen zu entwickeln. Die Gleichung (48) kann zur Reihenentwickelung der Perioden der Abel'schen Integrale folgender Form dienen:

$$\int \frac{z^{k-1}\, dz}{\sqrt{(z^m - apz^n - q)(q + pz^n - z^m)(z^m - q)}}.$$

Bei der Ableitung der vorgenannten Reihenentwickelungen spielen die Sätze über die Vertheilung der trinomischen Gleichung auf der Fläche selbstverständlich die wichtigste Rolle, insofern sie uns erlauben, uns von der Abwesenheit irgend welcher Ausnahmspunkte zwischen den Wegen der Integration zu überzeugen.

## IV. Anwendung der Eigenschaften der trinomischen Gleichung zur Integration einer Differentialgleichung.

Die Differentialgleichungen der Form:

$$(49)\qquad (1 - x^m)\frac{d^m y}{dx^m} = c_0 y + c_1 x \frac{dy}{dx} + c_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \cdots + c_{m-1} x^{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}$$

sind sehr eng mit der Theorie der trinomischen Gleichungen verbunden.

So hat Herr Heymann vor kurzem die Bedingungen gefunden, unter denen $y = z_\lambda^k$ der Differentialgleichung (49) genügt, unter $z_\lambda$ eine Wurzel der folgenden trinomischen Gleichung verstanden:

$$(50)\qquad nz^m - mxz^n + m - n = 0.$$

In meiner „Untersuchung" ist eine allgemeinere Aufgabe gelöst worden: ich habe eine unendliche Zahl solcher Fälle gefunden, in denen das allgemeine Integral der Gleichung (49) durch eine endliche Zahl von algebraischen und logarithmischen Functionen der Veränderlichen $x$ und der Wurzeln folgender Gleichung ausgedrückt werden kann:

$$(51)\qquad nz^m - m\alpha_r xz^n + m - n = 0.$$

Dabei bedeutet $r$ eine beliebige ganze Zahl, während $\alpha_r$ die Einheitswurzel vorstellt:

$$(52)\qquad \alpha_r = e^{\frac{2r\pi i}{n}}.$$

Ich will mit $F(z)$ das folgende Polynom bezeichnen:

$$(53)\quad F(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z(z-1) + \cdots + c_{m-1} z(z-1)\cdots(z-m+2) + z(z-1)\cdots(z-m+1).$$

Hier kann man selbstverständlicherweise setzen:

$$(54)\qquad c_\sigma = \frac{1}{\Gamma(1+\sigma)} \cdot \Delta^\sigma F(0),$$

unter $\Delta^\sigma$ das Zeichen der endlichen Differenz von der Ordnung $\sigma$ verstanden. Ich will nun ferner mit $b_0, b_1, \ldots b_{m-1}$ die Wurzeln der Gleichung

$$(55)\qquad F(z) = 0$$

bezeichnen. Mittels dieser Wurzeln lassen sich die Coefficienten des Polynoms $F(z)$ und mittels der Gleichung (54) die Coefficienten $c_0, c_1, \ldots c_{m-1}$ der Gleichung (49) ausdrücken. Ich werde daher die Function $F(z)$ die *Charakteristik* der Gleichung (49) und die Wurzeln der Gleichung (55) die *Wurzeln der Charakteristik* nennen. Die Gleichung (49) kann mittels ihrer Charakteristik folgendermassen geschrieben werden:

$$(56)\quad F(0)\,y + \frac{\Delta F(0)}{1}\,x\frac{dy}{dx} + \frac{\Delta^2 F(0)}{1\cdot 2}\,x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + \frac{\Delta^{m-1}F(0)}{1\cdot 2\cdots(m-1)}\,x^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{\Delta^m F(0)}{1\cdot 2\cdots m}\,(x^m-1)\,\frac{d^m y}{dx^m} = 0.$$

Indem ich es unternahm, diese Gleichung mittels Reihen zu integriren, habe ich erstens eine Gruppe particulärer Auflösungen folgender Form gefunden:

$$(57)\qquad y_l = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\prod_{\sigma=0}^{\sigma=s-1} F(l+m\sigma)}{\Gamma(1+l+ms)} \cdot x^{l+ms}, \quad \prod_{\sigma=0}^{\sigma=-1} F(l+m\sigma) = 1,$$

unter $\Pi$ ein Productzeichen, unter $l$ eine beliebige der Zahlen 0, 1, 2, ... $m-1$ verstanden, und zweitens eine Gruppe von particulären Auflösungen der folgenden Form:

$$(58)\qquad y_l = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Phi(1+b_l,\, ms)}{\prod_{\sigma=0}^{\sigma=s-1} F(b_l - m - m\sigma)},$$

wo $b_l$ eine beliebige Wurzel der Charakteristik der Gleichung (49) ist.

Die Reihen der ersten Gruppe werden unter der Bedingung mod. $x < 1$ convergiren und sind genügend, um das allgemeine Integral der Gleichung (49) zu finden. Die Reihen der zweiten Gruppe werden unter der Bedingung mod. $x > 1$ convergiren und sind ebenfalls genügend, um das allgemeine Integral der Gleichung (49) zu finden, abgesehen allerdings von den Fällen, in denen es eine ganze positive Zahl $h$ giebt, welche einer Bedingung der Form:

$$(59)\qquad F(b_l - mh) = 0$$

genügt. Aber dieser Mangel wird leicht durch die Methode der Grenzwerthe corrigirt, indem nämlich $b_l$ als Veränderliche angesehen wird, die der Gleichung (59) nur im Grenzfalle genügt, während gleichzeitig statt der Reihe $y_l$ das Product $y_l \cdot F(b_l - mh)$ an der Grenze betrachtet wird.

Aus der Betrachtung der Gleichung (56) und ihrer particulären Integrale (57) und (58) entspringen jetzt folgende Eigenschaften der Gleichung (49):

A) *Wenn* $\varphi(x)$ *das Integral der Gleichung* (49) *ist, welche eine bestimmte Charakteristik* $F(z)$ *hat, so ist der Ausdruck*

$$\frac{d^\lambda \varphi(x)}{dx^\lambda}$$

*ebenso ein Integral einer solchen Gleichung* (49), *deren Charakteristik* $F_1(z) = F(\lambda + z)$ *ist.*

B) *Wenn* $\varphi(x)$ *das Integral der Gleichung* (49) *ist, die eine bestimmte Charakteristik* $F(z)$ *hat, so ist der Ausdruck:*

$$x^{b_l+m} \frac{d^\mu \left( t^{\mu - 1 - \frac{b_l}{m}} \varphi\left(t^{\frac{1}{m}}\right)\right)}{dt^\mu}$$

(*wo* $t = x^m$), *ebenso ein Integral einer solchen Gleichung* (49), *deren*

*Charakteristik, unter $b_i$ eine Wurzel der Charakteristik $F(z)$ verstanden, die folgende ist:*

$$F_1(z) = \frac{z - b_i + m\mu}{z - b_i} \cdot F(z).$$

Nachdem diese Eigenschaften der Gleichung (49) gefunden sind, gehe ich zu der Untersuchung der Bedingungen über, unter denen die Integration dieser Gleichung mittels der Wurzeln der Gleichung (51) erfolgen kann.

Mittels der Formeln (24), (25) und (57) überzeugt man sich leicht, dass $y = z_h^k$, unter $z_h$ eine beliebige Wurzel der Gleichung (51) verstanden, eine particuläre Auflösung der Gleichung (49) wird, sobald man die Charakteristik $F(z)$ der Gleichung (49) nach der Formel bestimmt:

$$(60) \qquad F(z) = M\Phi\left(\frac{k+nz}{m} + n,\ n\right) \cdot \Phi\left(\frac{k+(n-m)z}{m} + 1,\ m-n\right),$$

wo:

$$M = \frac{m^m}{n^n (n-m)^{m-n}}.$$

Dieses Resultat wird von Herrn Heymann bestätigt. Verbindet man dasselbe mit der unter A) angegebenen Eigenschaft der Gleichung (49), so folgt, dass der Ausdruck

$$y = \frac{d^\lambda z^k}{dx^\lambda}$$

eine particuläre Auflösung einer solchen Gleichung (49) ist, deren Charakteristik lautet:

$$(61) \qquad F_1(z) = M \cdot \Phi\left(\frac{k+n(z+\lambda)}{m} + n, n\right) \cdot \Phi\left(\frac{k+(n-m)(z+\lambda)}{m} + 1, m-n\right).$$

Die Folgerung gilt nur für positive ganze Zahlen $\lambda$. Aber das Integral der Gleichung (49) kann mittels der Wurzeln der Gleichung (51) in endlicher Form auch in dem Falle ausgedrückt werden, dass $\lambda$ eine ganze negative Zahl $-\varrho$ ist. Setzen wir nämlich, unter $\varrho$ eine ganze positive Zahl verstanden, in die Formel (45)

$$\mu = 1,\ \nu = \varrho + 1,\ p = \frac{m}{n}\alpha_r x,\ q = -\frac{m-n}{n},\ a_h = \left(\frac{m-n}{n}\right)^{\frac{1}{m}} e^{\frac{(2h+1)i\pi}{m}},$$

so kommt:

$$(62) \qquad \int_{a_h}^{z_h} z^{k-1}\left(m\alpha_r x + \frac{n-m}{z^n} - z^{m-n}\right)^{\varrho-1} (z^m - 1)\frac{dz}{z^n}$$

$$= B\sum_{s=\varrho}^{s=\infty} \frac{\Phi\left(\frac{k+n(s-\varrho)}{m},\ s-\varrho-1\right)}{\Gamma(1+s)} \left(\frac{m\alpha_r}{n-m}\right)^s x^s a_h^{k+n(s-\varrho)},$$

wo $B$ eine Constante bedeutet und $z_h$ die der Contour $A_h$ entsprechende Wurzel der Gleichung (51) ist. Nun lässt sich das Integral der linken Seite von (62) durch eine Function ausdrücken, welche algebraische und logarithmische Operationen in endlicher Zahl enthält. Nennen wir diese Function $U$ und bezeichnen mit $V$ ein Polynom der folgenden Form:

$$(63)\quad V = B\sum_{s=0}^{s=\varrho-1} \frac{\Phi\left(\frac{k+n(s-\varrho)}{m}, s-\varrho-1\right)}{\Gamma(1+s)} \left(\frac{m\alpha_r}{n-m}\right)^s x^s a_h^{k+n(s-\varrho)},$$

so haben wir:

$$(64)\quad U+V = B\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Phi\left(\frac{k+n(s-\varrho)}{m}, s-\varrho-1\right)}{\Gamma(1+s)} \left(\frac{m\alpha_r}{n-m}\right)^s x^s a_h^{k+n(s-\varrho)}.$$

Jetzt ist aus dieser Reihenentwickelung leicht einzusehen, dass die Function $(U+V)$ ein Integral einer solchen Gleichung (49) ist, deren Charakteristik aus der Formel (61) für $\lambda = -\varrho$ gefunden wird. Der Charakteristik $F_1(z)$ also, welche aus (61) gefunden wird, entspricht bei beliebigem ganzzahligem Werthe von $\lambda$ eine solche Gleichung (49), die in endlicher Form mittels der Wurzeln der Gleichung (51) integrirt wird.

Indem wir jetzt diese Ableitung mit der oben unter B) angeführten Eigenschaft der Gleichung (49) combiniren, so kommen wir zu folgendem allgemeinen Satze:

**Theorem.** — *Es seien $\lambda, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{m-1}$ beliebige ganze Zahlen (die auch Null sein können) und es sei die Charakteristik $F(z)$ der Gleichung* (49) *durch die Formel definirt:*

$$(65)\quad F(z) = \prod_{\sigma=0}^{\sigma=m-n-1}\left(z+\lambda+m\mu_\sigma - \frac{k-m\sigma}{m-n}\right)\cdot\prod_{\sigma=m-n}^{\sigma=m-1}\left(z+\lambda+m\mu_\sigma - \frac{m(\sigma+1-m)-k}{n}\right),$$

*so lässt sich das allgemeine Integral der Gleichung* (49) *in endlicher Form mittels algebraischer Functionen der Veränderlichen $x$, der Wurzeln der Gleichung* (51) *und der Logarithmen dieser Wurzeln ausdrücken.*

Anmerkung. Wenn die Bedingungen dieses Theorems erfüllt sind und es sind $m$ und $n$ relative Primzahlen, so reichen die Wurzeln der Gleichung (50) allein aus, um das allgemeine Integral der Gleichung (49) zu bekommen; sind aber $m$ und $n$ keine relativen Primzahlen, so reichen die Wurzeln der Gleichung (50) zu dem genannten Zwecke nicht aus, so dass es in diesem Falle nöthig wird, die Gleichung (51) heranzuziehen und der Zahl $r$ die Werthe $0, 1, \ldots m-1$ zu geben.

Moskau, $\frac{\text{3. Januar 1887}}{\text{22. December 1886}}$.