

Mathematische Theorie der Diffraction.

(Mit einer Tafel.)

Von

A. SOMMERFELD in Göttingen.

Die Theorie der Diffraction, wie sie von Fresnel begründet und von Kirchhoff analytisch präcisirt ist, genügt aus verschiedenen Gründen nicht den Anforderungen der mathematischen Strenge. Einige Einwendungen dieser Art habe ich bereits früher*) vorgebracht. Ihre relativ gute Uebereinstimmung mit der Erfahrung verdankt diese Theorie lediglich dem Umstande, dass die Wellenlänge des Lichtes eine sehr kleine Grösse ist. Für die Behandlung Hertz'scher Schwingungen und akustischer Wellen, deren Wellenlänge bedeutend grösser ist, muss sie sich als ganz unbrauchbar erweisen. Auch in der Optik giebt es Bedingungen, unter denen die ältere Beugungstheorie nicht mehr ausreicht. Dem gegenüber gebe ich hier eine mathematisch strenge Behandlung, welche lediglich auf den durch die elektromagnetische Theorie sicher gestellten Differentialgleichungen und Grenzbedingungen fusst. Dabei aber muss ich mich auf die allereinfachsten Fälle beschränken, weil es von vornherein aussichtslos scheint, Probleme von so ausserordentlicher Complicirtheit, wie sie die gewöhnliche Optik zu behandeln vorgiebt, mathematisch befriedigend zu lösen. Auf eine Arbeit des Herrn Poincaré**), welche gleichfalls mit der älteren Theorie bricht, komme ich später zu sprechen.

§ 1.

Allgemeine Problemstellung.

Wir betrachten einen optischen Zustand, wie er sich bei Anwesenheit eines leuchtenden Punktes unter dem Einfluss eines fremden Körpers ausbildet. Die (elektrischen) Componenten des Lichtvectors

*) Zur mathematischen Theorie der Beugungserscheinungen. Göttinger Nachr. 1894. Nr. 4.

**) Sur la polarisation par diffraction. Acta Math. Bd. 16.

bezeichnen wir mit X , Y , Z . Dann bestehen die Differentialgleichungen:

$$A^2 \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X, \quad A^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \Delta Y, \quad A^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \Delta Z.$$

Dazu kommt die sog. Incompressibilitätsbedingung:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Die Abhängigkeit von t können wir ein für allemal specialisiren. Wir nehmen an, der Zustand sei stationär periodisch und das Licht einfarbig. Die Periode der Lichtschwingung heisse τ . Dann darf man X , Y , Z in der Form annehmen:

$$X = \Re e(e^{\frac{2i\pi t}{\tau}} \Xi), \quad Y = \Re e(e^{\frac{2i\pi t}{\tau}} H), \quad Z = \Re e(e^{\frac{2i\pi t}{\tau}} Z).$$

wo Ξ , H , Z von t unabhängige Functionen der räumlichen Coordinaten sind, welche den Gleichungen genügen:

$$\Delta \Xi + k^2 \Xi = 0, \quad \Delta H + k^2 H = 0, \quad \Delta Z + k^2 Z = 0,$$

$$\frac{\partial \Xi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Die hier eingeführte Constante k ist gleich $\frac{2\pi A}{\tau}$. Man nennt $\frac{2\pi}{k}$ die Wellenlänge des Lichts.

Um weitere einfache Bedingungen für Ξ , H , Z zu bekommen, nehmen wir an, der fremde Körper sei ein ebener, unendlich dünner, undurchsichtiger Schirm. Die Ebene des Schirmes sei die x, z -Ebene. Wir bezeichnen den Schirm mit S , seine Randcurve mit C . Unter Undurchsichtigkeit verstehen wir, dass das Material des Schirmes ein vollkommener Leiter für die Elektrizität sei. Alsdann ergibt die Lichttheorie, dass die in die Ebene des Schirmes fallenden (elektrischen) Componenten in Punkten des Schirmes verschwinden, dass also auf S : $\Xi = 0$, $Z = 0$. Weiter werden wir verlangen, dass der Lichtvector überall endlich sei, ausser in dem leuchtenden Punkte P . Wir wollen einen leuchtenden Punkt einfachster Art voraussetzen, nämlich annehmen, dass in P die Componenten des Lichtes unendlich werden, wie das Newton'sche Potential $\frac{1}{r}$ für $r = 0$. Wir nennen dann P einen einfachen Pol. Dazu kommt noch eine auf das Unendliche bezügliche Forderung.

Die Bedingungen für Z sind daher folgende:

- a) $\Delta Z + k^2 Z = 0$ im ganzen Raume.
- b) $Z = \infty$ wie $\frac{1}{r}$ in P , sonst überall endlich.
- c) $Z = 0$ in S .

Analoge Bedingungen bestehen für Ξ . Die dritte Componente H ist durch die Incompressibilitätsbedingung mitbestimmt.

Eine so einfache Grenzbedingung, wie die vorliegende (c) wird man nach dem *Symmetrieprincipe* zu befriedigen versuchen; man wird also den leuchtenden Punkt in Bezug auf die Ebene von S spiegeln. Dadurch würde eine zweite Unendlichkeitsstelle von Z in dem Spiegelpunkte P' entstehen. Die Bedingung b) untersagt uns aber, eine solche irgendwo im Raume zu schaffen.

In dem gewöhnlichen Raume ist für den Spiegelungsprocess kein Platz. Wir construiren daher einen doppelt überdeckten Raum, in welchem er möglich wird.

Einen solchen *Riemann'schen Doppelraum* erzeugen wir uns auf folgende Weise. Wir denken uns den gewöhnlichen Raum in zwei Exemplaren angefertigt, welche wir beide längs der Fläche von S aufschneiden und wechselweise an einander fügen. Die Randcurve C bildet für diesen Doppelraum eine Verzweigungslinie.

Wir betrachten nun eine Function u , welche in dem Doppelraume eindeutig ist, der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügt und in dem einen Punkte P des Doppelraumes einen einfachen Pol besitzt. (An der entsprechenden Stelle \bar{P} in dem anderen Exemplare des Raumes soll sie endlich bleiben). Die Function u ist durch die Beschaffenheit des Doppelraumes und durch die Lage ihres Poles bestimmt, wenn man noch eine auf das Unendliche sich beziehende Bedingung hinzufügt. Um die Abhängigkeit von der Lage ihres Poles anzudeuten, mögen wir sie als $u(P)$ schreiben.

Wir construiren nun den Spiegelpunkt P' von P in Bezug auf die Ebene von S ; derselbe fällt jetzt in das zweite Exemplar des Raumes, wenn P in dem ersten liegt. Bilden wir die Differenz

$$v = u(P) - u(P'),$$

so genügt diese den für Z gestellten Bedingungen; denn sie wird nur an der einen Stelle P des physikalischen Raumes unendlich und sie verschwindet in S aus Symmetrierücksichten. Mithin giebt uns die zweiwerthige Function v eine Lösung unseres Beugungsproblemcs. Man bemerke übrigens, dass v nicht auch gleichzeitig in den *ausserhalb* C gelegenen Punkten der Schirmebene verschwindet. Denn es liegen nur die Punkte *innerhalb* C symmetrisch zu P und P' .

Dass wir hier von einem Doppelraume sprechen, bedeutet, abstract zu reden, nichts Anderes, als dass wir die Function über das Gebiet, in dem sie einen physikalischen Sinn hat, hinaus analytisch fortsetzen und dass wir *den physikalischen Zweig der Function und seine analytische Fortsetzung gleichzeitig betrachten*.

Mathematisch interessanter wird das Problem noch, wenn wir es weiter specialisiren. Wir wollen nämlich nur solche Zustände betrachten,

welche von einer Coordinate (z) unabhängig sind. Wir müssen dann auch dem Schirm eine nach der z -Richtung symmetrische Gestalt geben, d. h. seine Begrenzungscurve C in Geraden ausziehen, welche der z -Axe parallel laufen. Ebenso müssen wir statt des *leuchtenden Punktes* eine der z -Axe parallele *leuchtende Linie* annehmen. Der *Riemann'sche Raum* reducirt sich dann auf eine *Riemann'sche Fläche*, von der *Verzweigungscurve* C kommen nur ihre Schnittpunkte mit der x, y -Ebene in Betracht, welche gewöhnliche *Verzweigungspunkte* werden, von der leuchtenden Linie nur der in der x, y -Ebene enthaltene Punkt. Für diesen werden wir ein Unendlichwerden von der Ordnung des zweidimensionalen Potentials $\log \frac{1}{r}$ vorzuschreiben haben. Die Differentialgleichung lautet nunmehr:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0.$$

Die exakte Lösung des so specialisirten Beugungsproblemcs führt also auf die Aufgabe: *diese wohlbekanntc Differentialgleichung auf Riemann'schen Flächen zu integrirren.*

Bei dieser Fragestellung wird man unwillkürlich an die Theorie der complexen *algebraischen Functionen* erinnert, welche ja für den speciellen Fall $k = 0$ sich in die gesuchten Functionen einordnen würden. Können die Methoden, welche zur Aufstellung der algebraischen Functionen führen, auf unsern Fall übertragen werden? Direkt geht das jedenfalls nicht.

Bei der Gleichung $\Delta u = 0$ kann man bekanntlich die Bildung verzweigter Functionen auf die der eindeutigen zurückführen, indem man statt der reellen Function u die complexe $u + iv = w$ betrachtet und die symmetrischen Functionen der Werthe von w in übereinanderliegenden Punkten der Riemann'schen Fläche bildet. Diese symmetrischen Functionen werden natürlich in der schlichten Ebene eindeutig und genügen überdies wieder der Gleichung $\Delta u = 0$. Sie können daher als bekannt angesehen werden. Die Berechnung von u hängt dann nur noch von der Lösung einer algebraischen Gleichung ab.

Bei unserer Differentialgleichung fehlt uns zunächst der Begriff der conjugirten Function. Die symmetrischen Functionen der Werthe u_1, u_2, \dots, u_n von u in übereinander liegenden Punkten der Riemann'schen Fläche sind natürlich auch hier in der einfachen Ebene eindeutig; aber sie sind nicht mehr Lösungen derselben Differentialgleichung. Das trifft vielmehr nur bei der *symmetrischen Function ersten Grades* $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ zu. Diese kann in der Folge stets als bekannt angesehen werden; sie ist nämlich gleich der Lösung des entsprechenden Problems in der schlichten Ebene.

Dennoch ist die Analogie mit den algebraischen Functionen auch hier sehr nützlich. Wir werden nämlich einen Weg kennen lernen, auf welchem man aus einer Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ mit gewissen Eigenschaften geradezu eine Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ mit ähnlichen Eigenschaften herstellt.

Eine weitere Schwierigkeit bildet das *Verhalten unserer Functionen im Unendlichen*. Hier wird jede Lösung unserer Differentialgleichung *wesentlich singular*. Es geht daher nicht an, zu verlangen, dass unsere Functionen auf der ganzen Riemann'schen Fläche mit Einschluss des Unendlich-Fernen stetig sind und der Differentialgleichung Genüge leisten. Vielmehr müssen wir uns die Ebene (bez. die Riemann'sche Fläche) durch einen Kreis mit sehr grossem Radius begrenzt denken und für Punkte dieses Kreises Randwerthe vorschreiben. Diese können vom theoretischen Standpunkte aus willkürlich angenommen werden. Wollen wir aber zu physikalisch brauchbaren Functionen kommen, so werden wir ganz bestimmte Randwerthe wählen müssen, welche sich aus der physikalischen Betrachtung ergeben,

§ 2.

Entwickelungen nach Bessel'schen Functionen.

Bevor wir zur Aufstellung specieller verzweigter Functionen schreiten, wollen wir einige allgemeine Eigenschaften der Lösungen unserer Differentialgleichung ableiten. Es soll sich um diejenigen *Reihenentwickelungen**) handeln, welche den *Potenzreihen der Potentialtheorie entsprechen*.

1. Es sei u eine irgendwie bekannte Lösung der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, welche in der Umgebung des Punktes $x = 0, y = 0$ eindeutig und stetig ist. Wir beschreiben um diesen Punkt einen Kreis mit dem Radius R , so dass im Innern und auf dem Rande desselben die Function denselben Charakter hat. Die Werthe von u auf diesem Kreise entwickeln wir in eine Fourier'sche Reihe mit dem Argumente $\varphi = \text{artg } \frac{y}{x}$ was immer möglich ist, weil die stetigen Lösungen unserer Differentialgleichung nothwendig analytische Functionen sind**). Es ergebe sich:

$$u = \sum A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi.$$

Wir setzen diese Reihe in das Innere des Kreises R so fort, dass sie gliedweise der in Polarcoordinaten transformirten Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$

*) Diese Reihen sind nach ihrer formalen Seite bereits in dem mehrfach zu citirenden Buche von F. Pockels: Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891, aufgestellt. Vgl. Theil IV § 6.

**) Vgl. F. Pockels: l. c. pag. 214.

Genüge leistet und dass sie für $r = R$ gliedweise in die vorstehende Entwicklung übergeht. Dann müssen die Factoren von $\frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}$ Bessel'sche Functionen mit dem Argumente kr und dem Index m sein, und zwar „Bessel'sche Functionen erster Art“, da u für $r = 0$ der Voraussetzung nach endlich ist. Wir werden so zu der folgenden Reihe geführt:

$$(1) \quad u_1 = \sum J_m(kr) \{ \alpha_m \cos m\varphi + \beta_m \sin m\varphi \},$$

$$\alpha_m = \frac{A_m}{J_m(kR)}, \quad \beta_m = \frac{B_m}{J_m(kR)}.$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass keine der Grössen $J_m(kR)$ verschwindet.

Hätten wir im Vorstehenden unter u eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ verstanden, so würden wir auf genau demselben Wege zu einer Entwicklung nach aufsteigenden Potenzen von r gekommen sein, in der Form:

$$(1') \quad u = \sum r^m \{ \alpha_m \cos m\varphi + \beta_m \sin m\varphi \},$$

$$\alpha_m = \frac{A_m}{R^m}, \quad \beta_m = \frac{B_m}{R^m}$$

Unsere Reihe (1) entspricht also *formal* der Potenzentwicklung (1') der Potentialtheorie.

2. Es sei der Punkt $x=0, y=0$ für die Function u ein $(n-1)$ -facher Windungspunkt. Wir beschreiben um diesen Punkt einen Kreis mit dem Radius R so, dass im Innern und auf dem Rande desselben kein Unstetigkeitspunkt und ausser dem Nullpunkte kein weiterer Windungspunkt vorhanden ist. Auf der Peripherie dieses Kreises können wir die Function in eine Fourier'sche Reihe entwickeln, welche nach Vielfachen des Argumentes $\frac{\varphi}{n} = \frac{1}{n} \text{artg} \frac{y}{x}$ fortschreitet. Die Reihe laute:

$$u = \sum A_m \cos \frac{m}{n} \varphi + B_m \sin \frac{m}{n} \varphi.$$

Diese Reihe setzen wir in's Innere des n -fach überdeckten Kreises nach der Bedingung fort, dass sie gliedweise der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ Genüge leisten solle. Dann müssen die Coefficienten von $\frac{\cos \frac{m}{n} \varphi}{\sin \frac{m}{n} \varphi}$ Bessel'sche Functionen mit dem Argumente kr und dem Index $\frac{m}{n}$ sein, und zwar „Bessel'sche Functionen erster Art“. So kommen wir zu der folgenden Entwicklung:

$$(2) \quad u_1 = \sum \frac{J_{\frac{m}{n}}(kr)}{n} \{ \alpha_m \cos \frac{m}{n} \varphi + \beta_m \sin \frac{m}{n} \varphi \},$$

$$\alpha_m = \frac{A_m}{J_{\frac{m}{n}}(kR)}, \quad \beta_m = \frac{B_m}{J_{\frac{m}{n}}(kR)},$$

unter der abermaligen Voraussetzung, dass keine der Grössen $J_m(kR)$ verschwindet.

Dasselbe Verfahren würde uns bei einer Function u , welche der Potentialgleichung genügt, zu der Reihe:

$$(2') \quad u = \sum r^{\frac{m}{n}} \left\{ \alpha_m \cos \frac{m}{n} \varphi + \beta_m \sin \frac{m}{n} \varphi \right\},$$

$$\alpha_m = \frac{A_m}{R^{\frac{m}{n}}}, \quad \beta_m = \frac{B_m}{R^{\frac{m}{n}}}$$

geführt haben. Es entspricht also, wenigstens *formal*, die Reihe (2) der Potenzentwicklung (2') der Potentialtheorie.

3. Die Analogie ist aber keine bloss formale: *wir können zeigen, dass die Reihen (1) und (2) gerade so weit convergiren, wie die entsprechenden Potenzreihen, und dass sie die vorgelegte Function u wirklich darstellen.*

Zu diesem Zwecke untersuchen wir das Verhalten von $J_\nu(x)$ mit wachsendem Index ν , auf Grund der bekannten Reihendarstellung:

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} \left(1 - \frac{x^2}{2^2(\nu + 1)} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 2! (\nu + 1)(\nu + 2)} - \dots \right)$$

Ist $\nu + 1 > \frac{x^2}{4}$, so wird jedes folgende Glied der Reihe kleiner als das vorhergehende. Demnach folgt für reelle positive Werthe von x unter der Bedingung $\nu + 1 > \frac{x^2}{4}$

$$(3) \quad J_\nu(x) < \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}, \quad J_\nu(x) > \frac{\vartheta_\nu x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)},$$

wo ϑ_ν einen echten, von Null verschiedenen Bruch bedeutet, von der Beschaffenheit, dass $\vartheta_{\nu'} > \vartheta_\nu$, falls $\nu' > \nu$.

Prüfen wir darauf hin die Convergenz unserer Reihen, und zwar sogleich der Reihe (2), von der die Reihe (1) nur ein specieller Fall ist. Der Rest der Reihe von einem Gliede N ab sei

$$X_N = \sum_N^{(\infty)} \frac{J_m(kr)}{J_m(kR)} \left(A_m \cos \frac{m}{n} \varphi + B_m \sin \frac{m}{n} \varphi \right),$$

wobei wir N gemäss der Ungleichung $\frac{N}{n} + 1 > \left(\frac{kR}{2}\right)^2$ bestimmen und $r < R$ voraussetzen wollen. Dann giebt sich aus (3):

$$|X_N| < \frac{1}{\vartheta_N} \sum_N^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{m}{n}} \left| A_m \cos \frac{m}{n} \varphi + B_m \sin \frac{m}{n} \varphi \right|.$$

Die Grössen A_m und B_m bleiben unterhalb einer festen Grenze, weil die ursprüngliche Fourier'sche Reihe convergirt. Daher wird:

$$|X_N| < M \sum_N^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{m}{n}} \text{ oder auch } |X_N| < M' \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{N}{n}};$$

wo M und M' gewisse endliche Zahlen bedeuten, die von N unabhängig sind. Wir können mithin, indem wir N nöthigen Falls noch grösser nehmen, den Rest der Reihe (2) für alle Punkte $r < R$ beliebig klein machen.

Andrerseits ist die Summe der ersten N Glieder von (2) eine endliche Grösse immer dann, wenn R nicht Wurzel einer der N Gleichungen $J^{\frac{m}{n}}(kr) = 0$ [$m < N$] ist, was wir einstweilen ausgeschlossen haben. Die Convergenz der Reihe (2) ist also unter dieser Voraussetzung bewiesen.

Wir müssen uns ferner überzeugen, dass unsere Reihe für $\lim r = R$ wirklich in die gegebenen Werthe von u übergeht. Die letzteren haben wir durch eine Fourier'sche Reihe dargestellt. Nun convergirt bekanntlich eine Fourier'sche Reihe absolut, wenn die dargestellte Function im Entwicklungsintervalle stetige erste Differentialquotient hat. Dies ist aber von den Lösungen unserer Differentialgleichung bekannt*). Mithin können wir durch Wahl eines Werthes $m = M$, welcher überdies der Ungleichung $\frac{M}{n} + 1 > \left(\frac{kR}{2}\right)^2$ genügen möge, erreichen, dass

$$\sum_M^{\infty} \left| A_m \cos \frac{m}{n} \varphi + B_m \sin \frac{m}{n} \varphi \right| < \varepsilon \vartheta_{\frac{M}{n}}$$

wird, wo ϑ der in (3) vorkommende echte und von Null verschiedene Bruch sein möge. Dann wird der Rest der Reihe (2) von demselben Gliede M ab für $r \leq R$

$$|X_M| < \frac{1}{\vartheta_{\frac{M}{n}}} \sum_M^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{m}{n}} \left| A_m \cos \frac{m}{n} \varphi + B_m \sin \frac{m}{n} \varphi \right| < \varepsilon.$$

Andrerseits ist die Summe der ersten M Glieder der Reihe (2) eine stetige Function von r , welche stetig in die Summe der ersten M Glieder der Fourier'schen Entwicklung von u übergeht, wenn $r = R$ wird. Mithin haben wir

$$\lim_{r=R} |u - u_1| < \varepsilon + \varepsilon \cdot \vartheta_{\frac{M}{n}},$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

*) Vgl. F. Pockels: l. c. pag. 214.

Die Functionen u und u_1 stehen in folgender Beziehung:

1. für $r < R$ gelten die Gleichungen:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \Delta u_1 + k^2 u_1 = 0,$$

2. für $r = R$ wird $u = u_1$.

Ist der Kreis mit dem Radius R kein „ausgezeichnetes Gebiet“*) unserer Differentialgleichung, d. h. kein solches Gebiet, für welches die Randwerthaufgabe unbestimmt wird, so schliessen wir unmittelbar, dass für $r \leq R$ überhaupt gilt: $u = u_1$. In diesem Falle ist auch sicher nicht $J_n(kR) = 0$, so dass unsere obige Beschränkung in Fort-

fall kommt. Im entgegengesetzten Falle können wir doch einen beliebig wenig verkleinerten Kreis mit dem Radius R' bestimmen, für den dieses nicht zutrifft. Denn es gibt unter den concentrischen Kreisen mit dem Radius $r < R$ nur eine endliche Anzahl, welche ein ausgezeichnetes Gebiet für unsere Differentialgleichung darstellen. Setzen wir nun im Vorhergehenden statt R überall R' , so gelten unsere sämtlichen Behauptungen sicher für diesen Kreis und es ist $J_n(kR') \neq 0$. Wir können daher den folgenden Satz aussprechen:

Jede Lösung unserer Differentialgleichung lässt sich in der Umgebung einer Stelle $x = a, y = b$, für welche u stetig ist, in eine Reihe von der Form (1) oder (2) entwickeln, je nachdem die Function u im Punkte $x = a, y = b$ unverzweigt ist oder einen $(n - 1)$ -fachen Windungspunkt besitzt; diese Reihe convergirt absolut im Innern eines Kreises, welcher den Punkt $x = a, y = b$ zum Mittelpunkte hat und bis an den nächsten Unstetigkeits- oder Verzweigungspunkt heranreicht.

4. Wir betrachten die Werthe von u bei beliebigem festen Azimuthe $\varphi = \varphi_0$ als Function von $r: u = f(r)$, wobei wir annehmen wollen, dass die Function im Punkte $r = 0$ unverzweigt sei. Die Reihe (1) liefert uns eine Darstellung von f durch Bessel'sche Functionen, welche so lauten möge:

$$(4) \quad f(r) = \sum_0^{\infty} a_m J_m(kr),$$

Wir vergleichen den Charakter dieser Darstellung mit dem Charakter der Taylor'schen Reihe für dieselbe Function. Die Taylor'sche Reihe ist dadurch charakterisirt, dass sie, mit dem $(n + 1)$ ten Gliede abgebrochen, die Function f und ihre n ersten Differentialquotienten im Punkte $r = 0$ richtig wiedergiebt. Ganz dasselbe behaupten wir von unserer Reihe (4).

Reihen von der Form (4) sind zuerst von Herrn C. Neumann für complexe Werthe des Argumentes untersucht worden. Wir entnehmen

*) Vgl. F. Pockels: l. c. pag. 37 und pag. 222.

seiner Arbeit das Resultat*), welches sich übrigens auch leicht aus den pag. 8 aufgestellten Grenzwerten der Bessel'schen Functionen herleiten lässt: Man bildet den m^{ten} Differentialquotienten einer solchen Reihe für Punkte des Convergenzgebietes, indem man dieselbe m -mal *gliedweise* differentiirt.

Setzen wir in Gleichung (4) $r = 0$, so ergibt sich, da $J_n(0) = 0$ für $n > 0$ und $J_0(0) = 1$ ist:

$$f(0) = a_0.$$

Sodann erhalten wir mit Rücksicht auf die bekannten Recursionsformeln**) der Bessel'schen Functionen:

$$2 \frac{dJ_n(x)}{dx} = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \quad [n > 0]$$

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$$

durch gliedweise Differentiation von (4)

$$(5) \quad f'(r) = \frac{k}{2} \{ a_1 J_0(kr) + (a_2 - 2a_0) J_1(kr) + (a_3 - a_1) J_2(kr) \\ + (a_4 - a_2) J_3(kr) + \dots \}.$$

Daraus folgt für $r = 0$

$$f'(0) = \frac{k}{2} a_1.$$

Durch abermalige Differentiation ergibt sich:

$$f''(0) = \left(\frac{k}{2}\right)^2 (a_2 - 2a_0).$$

Allgemein erkennt man: durch n -malige Differentiation erhält man für $f^{(n)}(0)$ einen Ausdruck, zu welchem nur die $n+1$ ersten Glieder der Reihe (4) einen Beitrag liefern.

Andrerseits betrachten wir die mit dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede abgebrochene Reihe, d. h. die „Annäherungsfunktion n^{ter} Ordnung“

$$F_n(r) = \sum_0^n a_n J_n(kr).$$

Berechnen wir für diese $F_n(0)$, $F_n'(0)$, \dots $F_n^{(n)}(0)$, so bekommen wir genau dieselben Ausdrücke in den $a_0, a_1 \dots a_n$, wie für $f(0)$, $f'(0) \dots f^{(n)}(0)$. Wir schliessen: $F_n(0) = f(0)$, \dots $F_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$, d. h. die gegebene Function und die Annäherungsfunktion stimmen im Punkte $r = 0$ mitsamt ihren n ersten Differentialquotienten überein. Geometrisch mögen wir dieses so ausdrücken: Die Annäherungscurve $F_n(r)$ hat mit der gegebenen Curve $f(r)$ im Nullpunkte eine n -fache Berührung gerade so, wie es von den Annäherungscurven der

*) C. Neumann: Theorie der Bessel'schen Functionen, Leipzig 1867, § 13.

**) Heine, Handbuch der Kugelfunctionen: 2. Aufl. § 61. Gl. 44c).

Taylor'schen Reihe her bekannt ist. Somit haben wir in der That gezeigt, dass unsere Entwicklung nach Bessel'schen Functionen und die Taylor'sche Entwicklung nach Potenzen die Annäherung der gegebenen Function in analoger Weise bewerkstelligen, nämlich durch einen von Glied zu Glied inniger werdenden Contact.

Wir werden später sehen, dass unsere Reihen geradezu aus entsprechenden Potenzreihen hergeleitet werden können.

5. Neben die Reihenentwicklungen, welche für das Innere eines Kreises gelten, stellen wir solche, welche dann convergiren, wenn sich der Punkt *ausserhalb* eines gewissen Kreises befindet.

Es sei u eine Lösung unserer Differentialgleichung, welche im Innern des Kreises mit dem Radius R beliebige Verzweigungen und Unendlichkeitsstellen besitzen kann, welche *ausserhalb* desselben im Endlichen zunächst überall stetig und unverzweigt sein und im Unendlichen einen $(n-1)$ fachen Windungspunkt besitzen möge. Wir markiren uns den Kreis mit dem Radius R auf sämtlichen Blättern der Fläche und betrachten nur Werthe $r > R$. Hier müssen wir „Bessel'sche Functionen zweiter Art“ heranziehen. Darunter verstehen wir, allgemein zu reden, eine Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung, welche im Nullpunkte ∞ wird. Im allgemeinen Falle, wenn der Index ν der Bessel'schen Function keine ganze Zahl ist, können wir als solche die Function $J_{-\nu}$ wählen. Im Falle eines ganzzahligen ν wird diese mit $J_{+\nu}$ (bis auf den Factor $(-1)^\nu$) identisch. Um beide Fälle zu umfassen, führen wir als „Bessel'sche Function zweiter Art“ eine Function U_ν ein, welche im folgenden Paragraphen abgeleitet wird und welche durch ein complexes Integral folgendermassen definiert werden kann:

$$(6) \quad U_\nu(x) = \frac{1}{2i} \int e^{iz \cos \alpha} e^{i\nu \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} d\alpha;$$

die Integrationsvariable α geht dabei etwa von $-\beta + i\infty$ bis $+\beta - i\infty$ [$0 < \beta < \pi$]. Im Falle eines ganzzahligen ν drückt sich diese Function durch die von Heine benutzten Functionen J_ν und K_ν folgendermassen aus:

$$(7) \quad U_\nu(x) = K_\nu(x) - \frac{i\pi}{2} J_\nu(x).$$

Nun entwickeln wir die gegebene Function u auf dem Kreise R in eine Fourier'sche Reihe;

$$u = \sum A_m \cos \frac{m}{n} \varphi + B_m \sin \frac{m}{n} \varphi.$$

Eine der Differentialgleichung gliedweise genügende Reihe, welche für $r = R$ gliedweise in die vorstehende Reihe übergeht, leiten wir daraus ab durch den Ansatz:

$$(8) \quad \sum_0^{\infty} \binom{m}{n} U_m(kr) \left\{ \alpha_m \cos \frac{m}{n} \varphi + \beta_m \sin \frac{m}{n} \varphi \right\},$$

$$\alpha_m = \frac{A_m}{U_m(kR)}, \quad \beta_m = \frac{B_m}{U_m(kR)}.$$

Um die Convergenz derselben zu prüfen, haben wir vor Allem Ungleichungen nöthig, welche den Ungleichungen (3) für $J_\nu(x)$ entsprechen, und welche uns gestatten, das Verhalten von $U_\nu(x)$ bei wachsendem ν abzuschätzen.

Wir machen in (6) die Substitution $\frac{x}{2} e^{i(\alpha - \frac{\pi}{2})} = z$, wobei sich ergibt:

$$2 U_\nu = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_1^{\infty} e^{-z + \frac{x^2}{4z}} z^{\nu-1} dz.$$

Der Integrationsweg geht in einen dem nebenstehenden äquivalenten über. Lassen wir ν wachsen, so verschwindet

derjenige Theil des Integrales, welcher im Innern des Einheitskreises verläuft. Wir haben daher

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{x}{2}\right)^\nu U_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} e^{-z} e^{\frac{x^2}{4z}} z^{\nu-1} dz,$$

oder, da alle Bestandtheile des Integranden positiv sind:

$$\int_1^{\infty} e^{-z} z^{\nu-1} dz < 2 \left(\frac{x}{2}\right)^\nu U_\nu < e^{x^2} \int_1^{\infty} e^{-z} z^{\nu-1} dz \quad (\text{im Limes } \nu = \infty).$$

Die Ungleichung wird nicht geändert, wenn wir die untere Grenze 1 durch 0 ersetzen. So bekommen wir schliesslich im Limes $\nu = \infty$:

$$(9) \quad U_\nu > \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \Gamma(\nu), \quad U_\nu < \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu e^{x^2} \Gamma(\nu).$$

Die genauere Betrachtung zeigt ferner, dass man auch eine *endliche* Zahl ν angeben kann, so dass für alle grösseren Werthe unsere Ungleichungen (9) richtig sind.

Nunmehr trennen wir von der Reihe (8) ein Restglied X_N ab, wobei wir den Stellenzeiger N so bestimmen, dass für alle Werthe $\nu \geq \frac{N}{n}$ die Ungleichungen (9) statthaben. Dann wird:

$$|X_N| < \sum_N^{\infty} \left| \frac{U_m(kr)}{U_m(kR)} \right| |A_m \cos \frac{m}{n} \varphi + B_m \sin \frac{m}{n} \varphi| < e^{(kr)^2} M \sum_N^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{m}{n}},$$

wo M den grössten Werth von $\left| A_m \cos \frac{m}{n} \varphi + B_m \sin \frac{m}{n} \varphi \right|$ bedeutet, oder auch, unter der Annahme $\infty > r > R$,

$$|X_N| < M' \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{N}{r}}.$$

Hier bedeutet M' eine von N unabhängige Zahl. Es kann also der Rest der Reihe (8) durch Wahl von N beliebig klein gemacht werden für alle Werthe $\infty > r > R$.

Andrerseits ist die Summe der ersten N Glieder in (8) sicher eine endliche Zahl, falls nicht gerade eine der Grössen $U_{\frac{m}{n}}(kR)$ verschwindet. Dies können wir vermeiden, indem wir statt des Kreises R einen etwas grösseren R' beschreiben, für den $U_{\frac{m}{n}}(kR') \neq 0$ ist.

Die Convergenz der Reihe (8) ist daher bewiesen für das ganze Gebiet $\infty > r > R$.

Hätten wir dieselbe Aufgabe für eine Lösung u der Potentialgleichung behandelt, so wären wir auf demselben Wege zu einer Reihe gekommen, welche nach negativen Potenzen von r fortschreitet und für alle Werthe $r > R$ convergirt. Wir sehen:

Die Reihe (8) entspricht nicht nur formal, sondern auch hinsichtlich ihrer Convergenz einer Reihe, welche nach Potenzen von $\frac{1}{r}$ fortschreitet.

Die Analogie ist trotzdem keine vollständige mehr. In der Potentialtheorie können wir nämlich sofort schliessen, dass jene Reihe die Function u wirklich darstellt, falls wir noch die Voraussetzung hinzunehmen, dass u auch im Unendlichen stetig ist. Bei unserer Differentialgleichung ist dieses unmöglich. Denn der unendlich ferne Punkt ist hier, wie erwähnt, stets ein singulärer Punkt. Die Aufgabe: eine Function u , welche nur auf dem Kreise R gegeben ist, für Werthe $r > R$ der Differentialgleichung gemäss fortzusetzen, ist hier überhaupt unbestimmt. Man erkennt dies schon aus Folgendem: Nehmen wir für den Augenblick das Unendliche als unverzweigt an, so hätten wir statt (8) auch eine Reihe anschreiben können, welche nach den Heine'schen Functionen K_m fortschreitet und welche auf dem Kreise R gliedweise in die Fourier'sche Entwicklung von u übergeht. Auch diese würde convergiren für $r > R$, da die Ungleichungen (9) auch für die Functionen K richtig sind. Sie würde aber ersichtlich von der Reihe (8) verschieden sein. *Es kann daher keine Rede davon sein, dass (8) die Function u nothwendiger Weise wirklich darstellt.*

6. Um sicher zu sein, eine Entwicklung der vorgegebenen Function u zu erhalten, muss man vielmehr das Unendliche durch einen

zweiten Kreis $R_1 > R$ ausschliessen und eine Entwicklung für den so entstehenden Kreisring aufstellen, welche sich aus einer nach den Functionen J und einer nach den Functionen U fortschreitenden Reihe zusammensetzt. Die Coefficienten dieser Reihen bestimmen sich theils aus den Werthen, welche u für $r = R$ besitzt, theils aus denjenigen für $r = R_1$. Man beweist dann: die Reihe mit Bessel'schen Functionen erster Art convergirt für alle Werthe $r < R_1$, diejenige mit Bessel'schen Functionen zweiter Art für alle Werthe $r > R$. Die Summe beider convergirt also im Innern des Kreisringes und stellt dort wirklich die Function u dar. So gelangt man zur *Uebertragung des Laurent'schen Satzes in das Gebiet der Differentialgleichung* $\Delta u + k^2 u = 0$.

§ 3.

Uebergang von $\Delta u = 0$ zu $\Delta u + k^2 u = 0$.

Während sich so die *Methode der Potenzreihen* aus der Functionentheorie bei unserer Differentialgleichung mit geeigneten Modificationen aufrecht erhalten lässt, versagt die *Methode der algebraischen Berechnung verzweigter Lösungen*, wie im § 1 auseinandergesetzt ist, zunächst vollkommen. Wir werden von dieser Methode indirekt dennoch Nutzen ziehen, indem wir jetzt ein *Verfahren* angeben, durch welches man aus einer Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ mit gewissen Eigenschaften eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ mit entsprechenden Eigenschaften herleiten kann. Daraufhin können wir die verzweigten Lösungen unserer Differentialgleichung aus den eindeutigen dennoch durch algebraische Operationen erhalten. Wir nehmen diese Operationen nur nicht an der Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ direct vor, sondern an der entsprechenden Function u in der Ebene von $\Delta u = 0$ und übertragen das so erhaltene verzweigte Potential nach unserem Verfahren in die $\Delta u + k^2 u = 0$ -Ebene.

Wir schlagen einen Umweg über die Theorie der *Kugelfunctionen* ein. Wir gehen aus von einer beliebigen complexen Function $f(Z)$ und beziehen die Z -Ebene stereographisch auf eine Kugel vom Radius 1. Der Mittelpunkt der Kugel liege im Nullpunkte der Z -Ebene und sei gleichzeitig Nullpunkt eines räumlichen rechtwinkligen Coordinatensystems ξ, η, ζ . Die ξ -Axe stehe senkrecht auf der Z -Ebene, die ξ -bez. η -Axe falle mit der reellen bez. imaginären Axe der Z -Ebene zusammen. Projectionscentrum sei der Südpol der Einheitskugel, also der Punkt $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = -1$. Die Beziehung zwischen Z -Ebene und Einheitskugel ist bei diesen Festsetzungen gegeben durch die Gleichung:

$$(1) \quad Z = \frac{\xi + i\eta}{\zeta + 1},$$

wenn wir noch die Kugelgleichung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ hinzunehmen.

Die Function

$$f\left(\frac{\xi + i\eta}{\xi + 1}\right)$$

ist in bekannter Weise ein *zweidimensionales Potential* auf der Einheitskugel. Wir erhalten aus ihr eine Function, welche im ganzen Raume defnirt ist und überdies der Differentialgleichung des *räumlichen Potentials* genügt, wenn wir allen Punkten eines und desselben durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Halbstrahles denselben Functionswerth beilegen, wie er dem Durchstossungspunkte des Halbstrahles mit der Einheitskugel zukommt. So gelangen wir zu der Function

$$(2) \quad f\left(\frac{\xi + i\eta}{\xi + \rho}\right), \quad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \xi^2.$$

Ein räumliches Potential, welches eine homogene Function rechtwinkliger Coordinaten ist, bezeichnet man als *räumliche Kugelfunction* (solid spherical harmonic); beschränkt man sich auf Punkte der Einheitskugel, so spricht man von einer *Kugelflächenfunction* (surface spherical harmonic). In (2) haben wir also eine räumliche Kugelfunction vor uns (vom Grade 0, weil sie homogen vom 0^{ten} Grade ist). Wir erhalten weiter eine homogene Function — 1^{ten} Grades, welche gleichfalls der Potentialgleichung Genüge leistet, wenn wir den Raum mittelst reciproker Radien an der Einheitskugel transformiren. Es entsteht

$$(3) \quad \frac{1}{\rho} f\left(\frac{\xi + i\eta}{\xi + \rho}\right).$$

Wir erniedrigen ferner den Grad um 1, 2 . . . Einheiten durch einmalige, zweimalige . . . Differentiation nach einer der Coordinaten, oder allgemeiner durch Differentiation nach einer beliebigen „Richtung“*), So bilden wir sehr allgemeine Kugelfunctionen beliebig hoher Ordnung.

Dieser Gedanke rührt in specieller Form von Maxwell*) her, welcher von der complexen Function $f = 1$ ausgehend die gewöhnlichen rationalen Kugelfunctionen ableitete, indem er über die Differentiationsrichtungen passend verfügte. Die hier benutzte Verallgemeinerung auf beliebige Functionen f hat Herr F. Klein**) in einer Vorlesung über Lamé'sche Functionen 1889—90 vorgetragen.

Wir legen für die Folge die Differentiationsrichtung beständig in die durch ihre Lage zur Z-Ebene allein ausgezeichnete ξ -Axe, bilden also (unter Hinzufügung eines geeigneten Zahlenfactors)

$$(4) \quad \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \xi^m} \frac{1}{\rho} f\left(\frac{\xi + i\eta}{\xi + \rho}\right).$$

*) Vgl. Maxwell in seinem Treatise Cap. IX.

**) Vgl. F. Pockels l. c. pag. 31.

Um den unübersichtlichen Differentiationsprocess bequemer zu gestalten, formen wir diesen Ausdruck nach dem *Cauchy'schen Satze* um. Wir erhalten

$$(5) \quad \frac{1}{2\pi i} \int f\left(\frac{\xi + i\eta}{z + \varrho}\right) \frac{1}{(\xi - z)^{m+1}} \frac{dz}{\varrho},$$

wo jetzt $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + z^2$ einzutragen ist. Das Integral ist, dem Cauchy'schen Satze gemäss auf einem geschlossenen Wege um den Punkt $z = \xi$ in der Ebene der complexen Variablen z herumzuführen, auf welchem man diesen Punkt zur Linken hat.

Wir bemerken noch, dass wir statt dessen auch einen beliebigen anderen Weg, der geschlossen ist und sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen lässt, wählen dürfen. Auch dann noch werden wir eine (allerdings mit (4) nicht nothwendig identische) Kugelfunction — $m - 1$. Grades bekommen*). Ferner können wir unter m auch eine negative ganze oder irgend eine beliebige Zahl verstehen. Im letzteren Falle müssen wir nur auf die Verzweigung des Factors $(z - \xi)^{-m-1}$ bei

*) Der Beweis beruht auf Folgendem: Bezeichnen wir den Ausdruck (3) mit u , so besteht die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Bezeichnen wir denselben Ausdruck, wenn wir darin z statt ξ substituirt haben, mit u_z , so gilt auch für einen ganz beliebigen Integrationsweg (a, b) die folgende Identität:

$$(a) \quad \int_a^b \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \frac{dz}{(\xi - z)^{m+1}} = 0.$$

Nun ist

$$\int_a^b \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \frac{dz}{(\xi - z)^{m+1}} = \left[\frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{1}{(\xi - z)^{m+1}} \right]_a^b - \int_a^b \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{(m+1) dz}{(\xi - z)^{m+2}}$$

und

$$- \int_a^b \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{(m+1) dz}{(\xi - z)^{m+2}} = - \left[u_z \frac{m+1}{(\xi - z)^{m+2}} \right]_a^b + \int_a^b u_z \frac{(m+1)(m+2) dz}{(\xi - z)^{m+3}}.$$

Für das auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehende Integral aber können wir schreiben:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int u_z \frac{dz}{(\xi - z)^{m+1}}.$$

Ist der Integrationsweg ein geschlossener ($a = b$), so verschwinden die in [] stehenden Ausdrücke. Wir schliessen daher aus Gleichung (a) auf die folgende:

$$(b) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \int u_z \frac{dz}{(\xi - z)^{m+1}} = 0.$$

Wir bemerken noch des Späteren wegen, dass diese Gleichung auch für einen nicht geschlossenen Weg richtig ist, falls nur die [] Ausdrücke für die Grenzen a und b des Integrales verschwinden. Dies findet z. B. statt für $a = \infty$.

$z = \xi$ und $z = \infty$ Rücksicht nehmen und als Integrationsweg etwa eine Doppelschlinge wählen, welche die Punkte $z = \xi$ und $z = \infty$ in entgegengesetztem Sinne umkreist. So können wir Kugelfunctionen von beliebigem Grade definiren, welche zu f in einer einfachen Beziehung stehen.

Ist die Ausgangsfunction f verzweigt, so wird es auch die Kugelfunction sein. Jedoch entspricht die Verzweigung des Integranden nicht genau derjenigen von f . Durch die stereographische Projection haben wir nämlich die Verzweigungspunkte $\varrho = 0$, d. i. $z = \frac{+i\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\xi - 1}$ eingeführt, welche der Ausgangsfunction nicht zukommen. Wir können diese nachträglich fortschaffen, indem wir zu dem Integrale (5) das folgende hinzufügen, in welchem ϱ mit $-\varrho$ vertauscht ist:

$$(6) \quad -\frac{1}{2\pi i} \int f\left(\frac{\xi + i\eta}{z - \varrho}\right) \frac{1}{(\xi - z)^{m+1}} \frac{dz}{\varrho}.$$

Geometrisch bedeutet dieses, dass wir die Z-Ebene erstens an dem Nullpunkte spiegeln, (d. h. Z mit $Z' = -Z$ vertauschen), zweitens von dem Nordpole der Einheitskugel aus stereographisch auf diese projiciren (d. h. $Z' = \frac{\xi + i\eta}{1 - \xi}$ setzen) und im Uebrigen alle die vorher beschriebenen Prozesse an der Function f vornehmen. Bezeichnen wir denjenigen Punkt, welcher auf solche Weise in den Punkt ξ, η, ζ der Kugel übergeführt wird, mit Z_1 , so haben wir die zu (1) analoge Gleichung:

$$(1) \quad Z_1 = \frac{\xi + i\eta}{\xi - 1}.$$

Nun bilden die Kugelfunctionen für unseren Zweck nur ein Durchgangsstadium. Wir gelangen aber von den Kugelflächenfunctionen zu Lösungen unserer Differentialgleichung durch einen eigenthümlichen *Grenzübergang*. Wir lassen nämlich m in's Unendliche wachsen und gleichzeitig den Punkt ξ, η, ζ auf einem Meridiane der Einheitskugel in den Nordpol hineinrücken. Genauer ausgedrückt machen wir folgendes: Wir setzen:

$$(7) \quad \xi = \frac{kx}{m}, \quad \eta = \frac{ky}{m}, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

und verstehen unter x und y endliche, unter m eine in's Unendliche wachsende Grösse. Dann geht die Differentialgleichung der Kugelflächenfunctionen in die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ über. Die Grössen x, y werden rechtwinklige Coordinaten in der Ebene dieser Differentialgleichung. Daneben führen wir Polarcoordinaten ein durch die Gleichungen:

$$(8) \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad e^{i\varphi} = \frac{x + iy}{r}.$$

Wegen (7) ergibt sich für ξ der Ausdruck:

$$(9) \quad \xi = \left(1 - \frac{k^2(x^2 + y^2)}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{k^2 r^2}{2m^2} + \dots$$

Um den Grenzübergang bei unsern Integralen übersehen zu können, machen wir auch für z eine analoge Substitution. Es empfiehlt sich:

$$(10) \quad z = i\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \cos \alpha = \frac{ikr}{m} \cos \alpha.$$

Dann wird

$$(11) \quad \varrho = \frac{kr}{m} \sin \alpha, \quad z \pm \varrho = \frac{kr}{m} e^{\mp i\alpha + \frac{i\pi}{2}}, \quad \frac{-dz}{\varrho} = i d\alpha,$$

$$\frac{\xi \pm i\eta}{z \pm \varrho} = e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(\xi - z)^{m+1}} = e^{ikr \cos \alpha}.$$

Aus dem Integral (5) entsteht

$$(12) \quad -\frac{1}{2\pi} \int f(e^{i\left(\varphi + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)}) e^{ikr \cos \alpha} d\alpha$$

und aus der Summe der Integrale (5) und (6)

$$(13) \quad \frac{1}{2\pi} \int \left\{ f(e^{i\left(\varphi - \alpha - \frac{\pi}{2}\right)}) - f(e^{i\left(\varphi + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)}) \right\} e^{ikr \cos \alpha} d\alpha.$$

Der in der z -Ebene geschlossene Weg geht in der α -Ebene in einen Integrationsweg über, dessen Anfangs- und Endpunkt sich möglicher Weise um 2π unterscheiden. Wenn sich der Integrationsweg in's Unendliche erstreckt, so ist er dort so zu bestimmen, dass das Integral einen Sinn hat. Von den Ausdrücken (12) und (13) weist man nun leicht nach, dass sie in der That, bei solcher Bestimmung des Integrationsweges, der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genüge leisten, wodurch unser Grenzübergang nachträglich gerechtfertigt ist.

2. Unser Verfahren liefert uns aber zunächst nur sehr *specielle Functionen*, nämlich solche, welche *Verzweigungen und Unstetigkeitsstellen im Endlichen nur an der Stelle $x = 0, y = 0$ besitzen*. Es liegt dieses daran, dass jeder Punkt, welcher auf der Einheitskugel eine endliche Entfernung von dem Nordpole hat, bei unserm Grenzübergang unfehlbar in's Unendliche geworfen wird. Sei z. B. für unsere Ausgangsfunktion Z' eine singuläre Stelle in der complexen Ebene, wobei wir voraussetzen $Z' \neq 0$ und $Z' \neq \infty$. Bei der Projection vom Südpol besteht zwischen der Variablen Z und demjenigen Punkte r, φ , in

welchen Z durch unsern Grenzübergang übergeführt wird, nach Gleichung (1), (7) und (9) die Beziehung

$$(14) \quad |Z| = \frac{kr}{m}.$$

Einem festen und von Null verschiedenen Werthe Z (z. B. dem Werthe $Z = Z'$) entspricht daher ein Punkt, dessen Abstand vom Nullpunkte

$$r = \frac{m|Z|}{k}$$

beim Grenzübergange in's Unendliche wächst. Andererseits gilt bei der Projection vom Nordpole für denjenigen Punkt Z_1 der complexen Ebene, welcher in den Punkt r, φ verwandelt wird, nach Gleichung (1'), (7), und (9) die Beziehung:

$$(15) \quad |Z_1| = \frac{m}{2kr}.$$

Einem festen und von Unendlich verschiedenen Werthe Z_1 (z. B. dem Werthe $Z_1 = Z'$) entspricht daher auch bei dieser Projection ein Punkt, dessen Abstand vom Nullpunkte

$$r = \frac{m}{2k|Z_1|}$$

beim Grenzübergange in's Unendliche wächst. Aus der Betrachtung der geometrischen Verhältnisse folgt dieses übrigens unmittelbar.

Um den singulären Punkt dennoch im Endlichen festzuhalten, müssen wir offenbar sein Bild auf der Einheitskugel, welches die Coordinaten ξ', η', ζ' haben möge, in demselben Maasse in den Nordpol hineintrücken lassen, wie wir m wachsen lassen. Ferner werden wir auch den Grad der Kugelfunction in Bezug auf dies Variabeltripel ξ', η', ζ' successive-erniedrigen, indem wir erst eine Inversion, dann fortgesetzt Differentiationen ausführen. Wir erhalten dann in der Grenze $m = \infty$ statt des *einfachen* Integrales (12) oder (13) ein *complexes Doppelintegral*, in welchem das eine Integralzeichen die fortgesetzte Graderniedrigung in dem einen, das andere in dem anderen Variabeltripel bewirkt. Das Genauere soll aber der Kürze halber nur in speciellen Fällen (vgl. § 6) auseinander gesetzt werden.

§ 4.

Die Bessel'schen Functionen als einfachste Beispiele.

Wir leiten zunächst die Bessel'schen Functionen durch unser Grenzverfahren her. Wir werden sehen, dass dabei die folgenden Functionen in einander übergeführt werden: die Potenzen in der Z -Ebene, die zonalen bez. tesseralen Kugelfunctionen auf der Einheits-

kugel, die Bessel'schen Functionen in der Ebene der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Die Resultate dieses Paragraphen sind nur theilweise neu und dienen wesentlich als Vorbereitung für das Folgende.

1. Wir beginnen mit der 0^{ten} Potenz der Z-Variablen und nehmen $f=1$. Aus (5) pag. 332 erhalten wir eine Kugelflächenfunction $(-m-1)$ ^{ten} Grades in dem folgenden Ausdrucke:

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{(\xi-z)^{m+1}} \frac{dz}{e}, \quad \varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + z^2, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Ein geschlossener Weg in der z -Ebene, welcher den Punkt $z = \xi$ umkreist, ist äquivalent einem gleichzeitigen Umlauf um die beiden Punkte $\varrho = 0$ d. h. $z = \pm i\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Die Substitution (10) pag. 334 führt den Ausdruck über in

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\alpha}{(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \cos \alpha)^{m+1}}.$$

Der entsprechende Integrationsweg in der α -Ebene kann längs der reellen Axe von 0 bis 2π geführt werden, wenn $\xi \neq 0$, sonst etwa von C bis D (vgl. die Fig. 2). Wir kommen hier auf die *gewöhnlichen zonalen Kugelfunctionen* und zwar gerade in der Laplace'schen Integraldarstellung*). Der Grenzübergang $m = \infty$ liefert in bekannter Weise eine Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$, nämlich die *einfachste Bessel'sche Function*:

$$J_0(kr) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ikr \cos \alpha} d\alpha$$

(Integrationsweg etwa von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 2\pi$).

2. Wir nehmen $f = Z^v$ und verstehen unter v eine beliebige positive Zahl. Aus Gleichung (5) pag. 332 ergibt sich die entsprechende Kugelflächenfunction $-m-1$ ^{ten} Grades:

$$\frac{(\xi + i\eta)^v}{2\pi i} \int \frac{(z + \varrho)^{-v}}{(\xi - z)^{m+1}} \frac{dz}{e}.$$

Verzweigungsstellen des Integranden sind die Punkte $z = \pm i\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, für welche $\varrho = 0$, und der Punkt (oder richtiger die Punkte) $z = \infty$, für welche $z + \varrho = \infty$, oder $z + \varrho = 0$ ist, je nachdem ϱ mit positivem oder negativem Vorzeichen gerechnet wird. Der Integrationsweg, den wir uns ursprünglich als einen Umlauf um den Punkt $z = \xi$ denken, darf im allgemeinen Falle (wenn v keine ganze Zahl ist) nur bis an, nicht bis über den Punkt $z = \infty$ gezogen werden. Machen wir die Substitution (10) von pag. 334, so ergibt sich

*) Vergl. Heine, I. c. § 9, Gl. 5 a.

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\xi + i\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right)^\nu \int \frac{e^{i\nu \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right)} d\alpha}{(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \cos \alpha)^{\nu+1}}$$

und nach Ausführung des Grenzüberganges

$$(2) \quad \frac{e^{i\nu\varphi}}{2\pi} \int e^{ikr \cos \alpha} e^{i\nu \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right)} d\alpha.$$

Der vorher beschriebene Integrationsweg geht in der α -Ebene etwa in den Weg (A) über. Die in der Figur schraffirten Gebiete I, II, III werden von denjenigen Stellen gebildet, wo $i \cos \alpha$ einen negativen reellen Theil besitzt. Indem wir den Weg (A) so bestimmt haben, dass seine unendlich fernen Theile in den Gebieten I und II verlaufen, haben wir dafür gesorgt, dass Ausdruck (2) für jedes positive reelle kr einen endlichen Sinn hat.

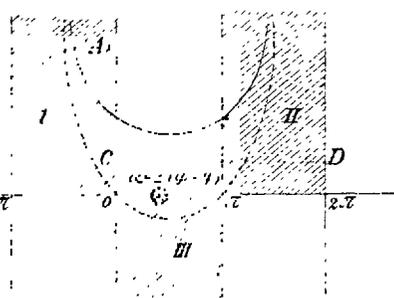


Fig. 2

Der Ausdruck (1) ist eine *tesserales Kugelfunction*, der Ausdruck (2) wird direct gleich der Lösung

$$e^{i\nu\varphi} J_\nu(kr)$$

unserer Differentialgleichung. Die *Besselsche Function* J_ν erscheint hier in einer Integraldarstellung, welche für den speciellen Fall eines ganzzahligen ν , wo sich der Weg (A) auf die Durchlaufung der Strecke 0 bis 2π reduciren lässt, wohlbekannt*) ist.

Bemerken wir noch, dass, wenn wir vom Nordpole aus projiciren, wo wir wie oben Z durch Z_1 ersetzen wollen, aus $Z_1^{-\nu}$ (ν eine beliebige positive Zahl) in Folge von Gleichung (6) pag. 333 beim Grenzübergange entsteht:

$$- e^{-i\nu\varphi} \int e^{ikr \cos \alpha} e^{i\nu \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)} d\alpha = - e^{-i\nu\varphi} \cdot e^{i\nu\pi} J_\nu(kr).$$

3. $f = \lg Z$. Eine zugehörige Kugelfunction $(-m - 1)^{\text{ten}}$ Grades lautet nach Gleichung (5)

$$\frac{1}{2\pi i} \int \lg \left(\frac{\xi + i\eta}{z + \varrho} \right) \frac{1}{(\xi - z)^{\nu+1}} \frac{dz}{\varrho}.$$

Die Verzweigungsstellen des Integranden sind dieselben, wie sub 2. Wir wollen die Punkte $z + \varrho = 0$ und $z + \varrho = \infty$ durch einen Verzweigungsschnitt verbinden und als Integrationsweg eine Curve wählen, welche diesen Schnitt auf beiden Seiten dicht umschliesst. Der Loga-

*) Heine, l. c. Gl. (43, a).

rithmus unterscheidet sich auf den beiden parallelen Ufern um die additive Grösse $2\pi i$. Das Integral über den geschlossenen Weg reducirt sich daher auf $2\pi i$ multiplicirt in ein Integral, welches von $z + \varrho = \infty$ nach $z + \varrho = 0$ einfach hinstreckt ist, während der Logarithmus unter dem Integralzeichen in Fortfall kommt. Bei der Transformation (10) pag. 334 gehen die Grenzen $z + \varrho = \infty$ bez. 0 über in $\alpha = \alpha + i\infty$ bez. $\alpha' - i\infty$, wo α und α' unbestimmt sind.

Damit das Integral auch nach dem Grenzübergange einen Sinn behält, bestimmen wir die Grössen α und α' so, dass $\alpha + i\infty$ im

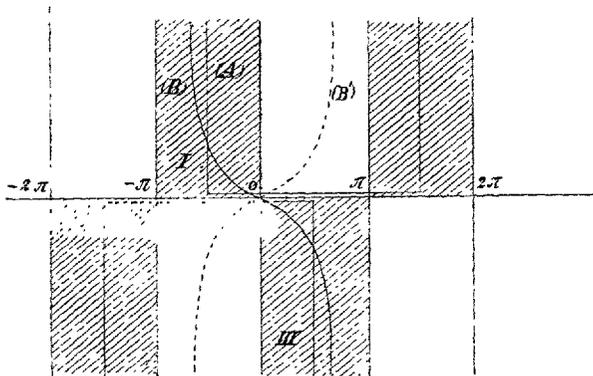


Fig. 3.

Gebiete I, $\alpha' - i\infty$ im Gebiete III liegt. Wir wählen z. B. $\alpha = -\alpha' = -\beta$, $0 < \beta < \pi$. Den so festgelegten Integrationsweg wollen wir als den Weg (B) bezeichnen, wobei wir noch stets dem Integrale über (B) den numerischen Factor $\frac{1}{2i}$ hinzufügen wollen. Unsere Kugelfunction $(-m-1)$ ten Grades lautet dann:

$$\frac{1}{2i} \int \frac{d\alpha}{(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \cos \alpha)^{m+1}}$$

Der Grenzübergang liefert

$$(3) \quad U_0(kr) = \frac{1}{2i} \int d\alpha e^{ikr \cos \alpha},$$

das Integral genommen über den Weg B.

4. $f = \lg Z \cdot Z^n$. n bedeuete eine ganze Zahl. Stellen wir die zugehörige Kugelfunction auf, so ergeben sich dieselben Verzweigungen in der z -Ebene, wie sub (3) im Falle $n = 0$. Wir wählen daher denselben Integrationsweg wie dort und gelangen durch unsern Grenzübergang zu dem Producte

$$e^{in\varphi} U_n(kr),$$

wo

$$(4) \quad U_n(x) = \frac{1}{2i} \int e^{ix \cos \alpha} e^{in\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} d\alpha \quad (\text{Integrationsweg (B)}).$$

Wir bezeichnen die Ausdrücke (3) und (4) als *Bessel'sche Functionen zweiter Art*. Sie sind, wie aus der Integraldarstellung ersichtlich, bei reellem positivem x stets endlich und werden ∞ für $x = 0$. Um die Art des Unendlichwerdens zu finden, dient folgende Betrachtung:

Die Bessel'sche Function erster Art $J_\nu(x)$ und diejenige Bessel'sche Function, welche durch Vertauschung von ν mit $-\nu$ entsteht, drücken sich nach (2) folgendermassen aus:

$$(5a) \quad 2\pi e^{\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(x) = \int e^{ix\cos\alpha} e^{i\nu\alpha} d\alpha,$$

$$(5b) \quad 2\pi e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_{-\nu}(x) = \int e^{ix\cos\alpha} e^{-i\nu\alpha} d\alpha.$$

Der Integrationsweg ist der Weg (A). Wir können ihn insbesondere so gestalten, dass er aus den geradlinigen Verbindungsstücken der Punkte:

$$-\frac{\pi}{2} + i\infty, \quad -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} + i\infty$$

besteht. Vertauschen wir in der Gleichung (5b) $+\alpha$ mit $-\alpha$, so geht der vorher genannte Weg in den folgenden über:

$$-i\infty - \frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{3\pi}{2}, \quad +\frac{\pi}{2}, \quad +\frac{\pi}{2} - i\infty.$$

Die Differenz der rechten Seiten von (5a) und (5b) ist (vgl. Fig. 3) identisch mit der Differenz der Integrale über die folgenden Wege:

$$+\frac{\pi}{2} - i\infty, \quad +\frac{\pi}{2}, \quad +\frac{3\pi}{2}, \quad +\frac{3\pi}{2} + i\infty$$

und

$$-\frac{3\pi}{2} - i\infty, \quad -\frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} + i\infty.$$

Daher haben wir

$$e^{\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(x) - e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_{-\nu}(x) = \frac{(e^{-i\nu\pi} - e^{+i\nu\pi})}{2\pi} \int e^{-ix\cos\alpha} e^{i\nu\alpha} d\alpha,$$

wo das Integral über den an der imaginären Axe gespiegelten Weg (B) (in der Fig. 3 der Weg B) zu nehmen ist.

Durch Vertauschung von $-i$ mit $+i$ ergibt sich schliesslich das direct über B genommene Integral

$$(6) \quad \frac{1}{2i} \int e^{ix\cos\alpha} e^{i\nu\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} d\alpha = \pi \frac{J_{-\nu}(x) - e^{-i\nu\pi} J_\nu(x)}{2 \sin \nu\pi}.$$

Im Falle eines ganzzahligen $\nu = n$ ist die linke Seite direct gleich der oben definirten Function $U_n(x)$, während Zähler und Nenner der rechten Seite verschwindet. Fassen wir den Ausdruck links in diesem Falle als Grenzwert desselben Ausdrucks für $\nu = n + \varepsilon$ bei ab-

nehmendem ε auf, so können wir seinen Werth durch Differentiation ableiten*). Man findet dann

$$(7) \quad U_n(x) = K_n(x) - \frac{i\pi}{2} J_n(x),$$

wo $K_n(x)$ die von Heine als Bessel'sche Function zweiter Art bezeichnete Grösse ist, für welche die Art des Unendlichwerdens in $x = 0$ untersucht ist. Insbesondere wird $U_0(x)$ unendlich wie $\log \frac{1}{x}$ für $x = 0$, oder in Zeichen

$$(8) \quad U_0(x) = \lg \frac{1}{x} + \dots \quad \text{für } x = 0.$$

Man bemerke übrigens, dass diese Ableitung einer zweiten Lösung U_n der Bessel'schen Differentialgleichung aus den zwei zusammenfallenden Lösungen J_n und J_{-n} genau derjenigen Ableitung entspricht, welche in der Theorie der linearen Differentialgleichungen bei ganzzahliger Exponentendifferenz üblich ist.

Gehen wir, statt von $Z^n \lg Z$, von $Z_1^{-n} \lg Z_1$ aus, indem wir uns die complexe Ebene vom *Nordpole* aus projectirt denken, so erhalten wir durch das gleiche Verfahren die folgende Lösung unserer Differentialgleichung:

$$- e^{-i n \varphi} e^{i n \pi} U_n(kr).$$

5. Das Integral $U_\nu(x)$ wollen wir der Gleichmässigkeit wegen auch *im Falle eines beliebigen* ν als Bessel'sche Function zweiter Art einführen, wie es ja bereits in § 2 unter dieser Bezeichnung gebraucht wurde. Im Falle eines ganzzahligen ν sahen wir $e^{i\nu\varphi} U_\nu(kr)$ aus der complexen Function $\lg Z \cdot Z^\nu$ entstehen durch Integration über einen geschlossenen Weg in der Ebene der z -Variabeln, welcher die Punkte $z + \rho = 0$ und $z + \rho = \infty$ umzog. Wir hätten einfacher sagen können: Jenes Product entsteht aus der Potenz Z^ν , wenn wir als Integrationsweg nicht jenen *geschlossenen* Weg, sondern eine vom Punkte $z + \rho = \infty$ zum Punkte $z + \rho = 0$ *einfach* verlaufende Curve benutzen. Diese Curve spielt nach der Anm. auf pag. 332 für uns die Rolle einer geschlossenen Curve, weil die dort aufgeführten [] Terme für $z + \rho = 0$ und $z + \rho = \infty$ verschwinden. In der α -Ebene geht sie in den Integrationsweg (B) über. Legen wir diesen Weg zu Grunde, so gilt unser obiges Resultat für ein beliebiges ν : Es entsteht nämlich immer aus der Potenz Z^ν auf dem Wege (B) die Lösung $e^{i\nu\varphi} U_\nu(kr)$ unserer Differentialgleichung.

6. Wir fassen die Ergebnisse dieses Paragraphen der leichteren Bezugnahme wegen folgendermassen zusammen:

*) Vergl. Hankel: Cylinderfunctionen erster und zweiter Art, § 1, Math. Ann. Bd. I.

In der Ebene der Variablen a haben wir 2 verschiedene Integrationswege benutzt, *einen Weg* (A), welcher im Unendlichen des Gebietes I beginnt und im Unendlichen des Gebietes II endigt, und *einen Weg* (B), welcher im Unendlichen von I beginnt und im Unendlichen von III endigt. Auf dem Wege (A) fügen wir dem Integral den Factor $\frac{1}{2\pi}$, auf dem Wege (B) den Factor $\frac{1}{2i}$ hinzu. *Es entsteht nun durch unser Verfahren:*

$$\text{aus } Z^v \quad \left| \begin{array}{l} \text{auf dem Wege } (A) \\ e^{i\nu\varphi} J_\nu(kr) \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \text{auf dem Wege } (B) \\ e^{i\nu\varphi} U_\nu(kr) \end{array} \right|$$

bei der Projection vom Südpole; und es entsteht

$$\text{aus } Z_1^{-\nu} \quad | - e^{i\nu\pi} e^{-i\nu\varphi} J_\nu(kr) \quad | - e^{i\nu\pi} e^{-i\nu\varphi} U_\nu(kr)$$

bei der Projection vom Nordpole der Einheitskugel.

§ 5.

Überall endliche Lösungen.

Wir haben im vorigen Paragraphen Lösungen unserer Differentialgleichung aufgestellt, bei denen es uns wesentlich auf die Abhängigkeit von der *einen Variablen* (r) ankam, während die Abhängigkeit von der anderen Variablen (φ) die der trigonometrischen Functionen war. Diese Lösungen waren entweder *in der schlichten Ebene eindeutig* (ν eine ganze Zahl), oder *auf einer Riemann'schen Fläche, welche im Punkte $r = 0$ und im Unendlichen einen $(n - 1)$ -fachen Windungspunkt hat* (ν ein rationaler Bruch mit dem Nenner n), oder *auf einer Windungsfläche von unendlich hoher Ordnung* (ν irrational). Wir werden in diesem Paragraphen Lösungen ableiten, welche wesentlich von *zwei Variablen* abhängen und welche entweder *in der schlichten Ebene, oder auf der genannten n -blättrigen Riemann'schen Fläche oder auf einer Windungsfläche von unendlich hoher Ordnung* eindeutig sind. Dabei soll es sich zunächst um *überall endliche Functionen* handeln.

1. Wir gehen von derjenigen einfachen linearen Function von Z aus, welche in einem Punkte Z' des Einheitskreises ∞ wird, welche im Nullpunkte 1 und im unendlich fernen Punkte 0 ist, d. h. von

$$(1) \quad f = \frac{1}{1 - \frac{1}{Z}}.$$

Wir erhalten hieraus nach dem im § 3 sub 1 angegebenen Verfahren eine überall endliche und in der schlichten Ebene eindeutige Lösung. Wir haben nur die vorstehende specielle Function in Gleichung (13) pag. 334 einzutragen. Die entstehende Function bezeichnen wir mit u_0 :

$$(2) \quad u_0 = \frac{1}{2\pi} \int \left\{ \frac{1}{1 - e^{i(\varphi - \varphi' - \alpha)}} - \frac{1}{1 - e^{i(\varphi - \varphi' + \alpha)}} \right\} e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \\ = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\sin \alpha e^{ikr \cos \alpha} d\alpha}{\cos \alpha - \cos(\varphi - \varphi')}.$$

Dabei haben wir gesetzt:

$$(3) \quad Z' = e^{i\varphi' - \frac{i\pi}{2}} \quad (\varphi' \text{ reell}).$$

Das Integral ist in der α -Ebene auf dem Wege (A) zu führen.

Die reelle Axe, insbesondere also der Punkt $\alpha = \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')$ soll dabei ausserhalb des durch (A) umschlossenen Gebietes liegen. Fassen wir jedoch $\cos \alpha$ als Integrationsvariable auf, so liegt der Punkt $\cos \alpha = \cos(\varphi - \varphi')$ innerhalb des entsprechenden Weges in der $\cos \alpha$ -Ebene. Ueberdies steht dann unter dem Integralzeichen eine eindeutige Function von $\cos \alpha$. Der Integrationsweg kann daher auf den Punkt $\cos \alpha = \cos(\varphi - \varphi')$ zusammengezogen werden. Nach dem Cauchy'schen Satze erhalten wir:

$$(4) \quad u_0 = e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')}$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten x, y :

$$(4') \quad u_0 = e^{ik(x \cos \varphi' + y \sin \varphi')}.$$

Die einfache Function, zu welcher wir so gelangen, ist diejenige Lösung unserer Differentialgleichung, mit welcher man in der gewöhnlichen Optik fast ausschliesslich operirt. Sie besitzt folgende Eigenschaften: *Sie ist in der schlichten Ebene eindeutig, sie ist für alle endlichen Werthe x, y endlich und stetig.* Statt des *ausgezeichneten Punktes* $Z = Z'$ in der complexen Ebene haben wir hier nur mehr eine *ausgezeichnete Richtung* $\varphi = \varphi'$ („Richtung der einfallenden Welle“). Die Function u_0 stellt die *ungestörte Vertheilung des parallelen Lichtes in der unendlichen Ebene* dar.

2. Wir suchen jetzt die zu u_0 analoge Lösung unserer Differentialgleichung auf der oben beschriebenen Riemann'schen Fläche mit $(n-1)$ -fachem Windungspunkte. Zu dem Zwecke gehen wir nicht von der in der schlichten Ebene *eindeutigen* Function (1) aus, sondern von der zu (1) *analogen Function auf unserer Riemann'schen Fläche*. Diese ergibt sich sehr leicht durch *conforme Abbildung*. Wir haben in (1)

nur Z zu ersetzen durch $Z^{\frac{1}{n}}$. Der Bequemlichkeit wegen mögen wir auch $Z'^{\frac{1}{n}}$ statt Z' schreiben und den Factor $\frac{1}{n}$ hinzufügen. Wir benutzen also für das Folgende als Ausgangsfunction:

$$(a) \quad f = \frac{\frac{1}{n}}{1 - \left(\frac{Z}{Z'}\right)^n}.$$

Nach Gleichung (13) pag. 334 erhalten wir als zugehörige Lösung unserer Differentialgleichung

$$(5) \quad u = \frac{1}{2\pi n} \int \left\{ \frac{1}{1 - e^{\frac{i}{n}(\varphi - \varphi' - \alpha)}} - \frac{1}{1 - e^{\frac{i}{n}(\varphi - \varphi' + \alpha)}} \right\} e^{ikr \cos \alpha} d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi i n} \int \frac{\sin \frac{\alpha}{n} e^{ikr \cos \alpha} d\alpha}{\cos \frac{\alpha}{n} - \cos \left(\frac{\varphi - \varphi'}{n}\right)}.$$

Das Integral ist auf dem Wege (A) zu führen; die Punkte $\alpha = \pm(\varphi - \varphi')$ liegen ausserhalb des durch den Integrationsweg eingeschlossenen Gebietes. Man sieht dieser Function sofort die folgenden Eigenschaften an:

a) Sie genügt unserer Differentialgleichung (wie alle Functionen, welche aus Gleichung (13) durch Eintragen einer beliebigen complexen Function f entstehen).

b) Sie ist auf der n -blättrigen Riemann'schen Fläche eindeutig.

c) Sie ist für alle endlichen reellen Werthe von r endlich und stetig. Wir untersuchen

d) ihr Verhalten im Unendlichen. Wir wollen als erstes Blatt der Riemann'schen Fläche die Gesamtheit derjenigen Punkte bezeichnen, für welche $|\varphi - \varphi'| < \pi$, als 2^{tes}, 3^{tes}, . . . n ^{tes} Blatt die Gesamtheit aller übrigen Punkte. Wir behaupten dann:

Im Unendlichen des ersten Blattes wird $u = u_0$, im Unendlichen aller übrigen Blätter wird $u = 0$.

Zum Beweise betrachten wir die Figur 2. Ist $|\varphi - \varphi'| > \pi$, so liegt auf der Strecke 0 bis π der reellen Axe kein singulärer Punkt des Integrales. Wir können daher den Weg (A) über die reelle Axe hinüberziehen, indem wir ihn aus dem Gebiete I durch den Punkt 0 hindurch nach III und durch den Punkt π nach II führen. Er verläuft dann lediglich auf schraffirtem Gebiete, in welchem $e^{ikr \cos \alpha}$ mit wachsendem r verschwindet. In diesem Falle verschwindet auch $\lim_{r=\infty} u$.

Ist aber $|\varphi - \varphi'| < \pi$, so werden wir den Integrationsweg in ähnlicher Weise deformiren, müssen aber dann um denjenigen der Punkte $\alpha = \pm(\varphi - \varphi')$, welcher zwischen 0 und π fällt, eine Schleife legen. Das Integral über diese Schleife giebt nach dem Cauchy'schen Satze geradezu u_0 , das Integral über den übrigen Theil des Integrations-

weges verschwindet in der Grenze für $r = \infty$. In diesem Falle geht also die Function u mit wachsendem r in u_0 über. Unsere Behauptung ist also bewiesen.

Wir können diesem Resultat folgende *anschauliche Deutung* geben. Wir denken uns zunächst n übereinander liegende schlichte Ebenen. In der ersten Ebene stellen wir die Lösung u_0 unserer Differentialgleichung her, in allen übrigen Blättern die Lösung 0. Schneiden wir nun diese Ebenen längs eines vom Nullpunkte ausgehenden Halbstrahles auf und vereinigen sie wechselweise zu unserer Riemann'schen Fläche, so entsteht eine Störung, welche den ursprünglichen Zustand in allen endlichen Punkten abändert. Die Störung erstreckt sich aber nicht in's Unendliche. Hier haben wir fortgesetzt $u = u_0$ bez. $u = 0$.

Zwischen den Functionen u und u_0 besteht ferner folgende bemerkenswerthe Beziehung:

e) Die symmetrische Function $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ der Werthe von u in den „über einander liegenden Punkten“ des 1^{ten}, 2^{ten}, ... n ^{ten} Blattes wird genau gleich u_0 . Ueber einander liegende Punkte sind die folgenden: $r, \varphi; r, \varphi + 2\pi; \dots r, \varphi + 2(n-1)\pi$. Die symmetrische Function lautet daher:

$$(6) \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2\pi i} \int e^{ikr \cos \alpha} \sin \frac{\alpha}{n} \frac{d\alpha}{n} \\ \left\{ \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{n}} + \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi' + 2\pi}{n}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi' + 2(n-1)\pi}{n}} \right\}.$$

Nun besteht die Identität:

$$\cos \alpha - \cos(\varphi - \varphi') = 2^{n-1} \left(\cos \frac{\alpha}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{n} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi' + 2\pi}{n} \right) \dots \\ \dots \left(\cos \frac{\alpha}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi' + 2(n-1)\pi}{n} \right),$$

aus welcher man durch logarithmische Differentiation die folgende ableitet:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \cos(\varphi - \varphi')} = \frac{1}{n} \sin \frac{\alpha}{n} \left\{ \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{n}} + \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi' + 2\pi}{n}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi' + 2(n-1)\pi}{n}} \right\}.$$

Daher geht die rechte Seite von Gleichung (6) direct über in den Ausdruck für u_0 in Gleichung (2) — in Uebereinstimmung mit einer allgemeinen Bemerkung auf pag. 320.

Die Function u , so können wir sagen, stellt die *Bewegung einer in der Richtung $\varphi = \varphi'$ auf unserer Riemann'schen Fläche einfallenden Lichtwelle* dar. Sie hat an die Stelle von u_0 bei allen denjenigen zwei-dimensionalen optischen Problemen zu treten, welche ihrer Natur nach nicht zu einer in der schlichten Ebene, sondern zu einer auf unserer n -blättrigen Riemann'schen Fläche eindeutigen Function Anlass geben, nämlich bei dem Problem der Beugung an einem keilförmigen undurchsichtigen Körper von ebenen Grenzflächen.

3. Nach § 2 lässt sich jede Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$, welche innerhalb eines Kreises vom Radius R endlich und stetig ist, in eine Reihe entwickeln, welche nach den Functionen $J_{\frac{m}{n}}(kr) \frac{\cos \frac{m}{n} \varphi}{\sin \frac{m}{n} \varphi}$ fortschreitet, falls der Nullpunkt ein $(n-1)$ -facher Windungspunkt ist. Da unsere Functionen u_0 und u für alle Werthe $r < \infty$ jener Bedingung genügen, so müssen sie durch eine *in der ganzen Ebene* (mit Ausschluss des Unendlichfernen) *convergente Reihe* dargestellt werden können. Solche Reihen wiesen grosse Analogie mit den Potenzreihen der Potentialtheorie auf; *wir leiten sie jetzt direct aus der Potenzentwicklung unserer Ausgangsfunction ab.*

Wollen wir zu dem Zwecke die Resultate des § 4 verwerthen, so müssen wir zwischen der Projection vom Südpole und der vom Nordpole unterscheiden. In dem mittleren Gliede der Gleichung (5) entsteht der zweite Term bei der Projection vom Südpole aus:

$$f(Z) = \frac{\frac{1}{n}}{1 - \left(\frac{Z}{Z'}\right)^n},$$

wo Z denjenigen Punkt bedeutet, welcher in einen bestimmten Punkt r, φ übergeht, der erste Term bei der Projection vom Nordpole aus derselben Function

$$f(Z_1) = \frac{\frac{1}{n}}{1 - \left(\frac{Z_1}{Z'}\right)^n},$$

wo Z_1 derjenige Punkt ist, welcher in denselben Punkt r, φ bei dieser Projection übergeführt wird. Nach den Gleichungen (14) und (15) von pag. 335 und nach Gleichung (3) haben wir:

$$|Z| = \frac{kr}{n}, \quad |Z_1| = \frac{m}{2kr}, \quad |Z'| = 1.$$

Beim Grenzübergange wird also gewiss $|Z| < |Z'|$, $|Z_1| > |Z'|$. Daher

müssen wir in der complexen Ebene $f(Z)$ nach aufsteigenden, $f(Z_1)$ nach absteigenden Potenzen von $\left(\frac{Z}{Z'}\right)^{\frac{1}{n}}$ bez. von $\left(\frac{Z_1}{Z'}\right)^{\frac{1}{n}}$ entwickeln.

Es wird

$$(7) \quad f(Z) + f(Z_1) = \frac{1}{n} \left\{ 1 + \left(\frac{Z}{Z'}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{Z}{Z'}\right)^{\frac{2}{n}} + \dots \dots \dots \right. \\ \left. \dots - \left(\frac{Z_1}{Z'}\right)^{\frac{1}{n}} \left(1 + \left(\frac{Z_1}{Z'}\right)^{\frac{1}{n}} + \dots \dots \right) \right\}.$$

Diese Gleichung wollen wir rechts und links auf dem Wege (A) integriren*). Dann entsteht links, wie in diesem Paragraphen gezeigt, die Function u . Führen wir die Integration rechts gliedweise aus, so können wir das Resultat der Zusammenstellung am Schlusse des § 4 entnehmen. Es wird aus:

$$\left(\frac{Z}{Z'}\right)^{\frac{m}{n}} - \left(\frac{Z_1}{Z'}\right)^{\frac{m}{n}} \left| e^{\frac{im}{n}(\varphi-\varphi')} \cdot e^{\frac{im}{n} \frac{\pi}{2}} J_{\frac{m}{n}}(kr) + e^{\frac{im}{n}(\varphi'-\varphi)} \cdot e^{\frac{im}{n} \frac{\pi}{2}} J_{\frac{m}{n}}(kr) \right. \\ \left. = 2 e^{\frac{im}{n} \frac{\pi}{2}} \cos \frac{m}{n} (\varphi - \varphi') J_{\frac{m}{n}}(kr), \right.$$

während aus dem constanten Gliede 1 gerade $J_0(kr)$ wird. Wir finden daher für unsere Function u die beständig convergente Reihe

$$u = \sum_{\nu}^{\infty} \gamma_{\nu} e^{\frac{i\nu}{n} \frac{\pi}{2}} \cos \frac{\nu}{n} (\varphi - \varphi') J_{\frac{\nu}{n}}(kr) \left\{ \begin{array}{l} \gamma_m = \frac{2}{n} \text{ für } m > 0 \\ \gamma_m = \frac{1}{n} \text{ für } m = 0 \end{array} \right\}.$$

Für den sub 1 behandelten einfachsten Fall $n = 1$ kommt diese Reihe bei Heine**) vor und dient hier geradezu zur Definition der Bessel'schen Functionen.

4. Es wird nun leicht sein, auch für eine Windungsfläche von unendlich hoher Ordnungszahl die entsprechende Function anzugeben. Wir bilden zunächst jene Windungsfläche conform auf die Z -Ebene ab, ersetzen also in der Function (1) Z durch $\lg Z$ und auch Z' durch $\lg Z'$. Demgemäss tragen wir jetzt die folgende Function

$$f = \frac{1}{1 - \frac{\lg Z}{\lg Z'}}$$

*) Wir meinen mit dieser abgekürzten Ausdrucksweise, dass wir auf der rechten und linken Seite der Gleichung (7) alle die genannten Operationen unseres allgemeinen Verfahrens ausführen und dass wir als Integrationsweg für die so entstehende Function von α den Weg (A) wählen.

**) l. c. Gleichung (14 b).

in Gleichung (13) pag. 334 ein. Es entsteht dann durch Integration auf dem Wege (A)

$$u' = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{2\alpha}{(\varphi - \varphi')^2 - \alpha^2} e^{ikr \cos \alpha} d\alpha,$$

ein Ausdruck, welcher auch aus (5) durch den Grenzübergang $n = \infty$ abgeleitet werden kann.

Von dieser Function weist man, ebenso wie sub 2, die Eigenschaften a), c) und d) nach. An die Stelle von b) aber tritt hier:

b') *Die Function ist eindeutig erst auf einer Windungsfläche von unendlich vielen Blättern.*

Wir können schliesslich aus dieser in φ völlig unperiodischen Function u' die obigen Functionen von der Periode 2π bez. $2\pi n$ zusammensetzen und kommen so zu einer Uebertragung und Erweiterung der Eigenschaft e).

Bilden wir nämlich die Summe der Werthe von u' in sämmtlichen auf der Windungsfläche über einander liegenden Punkten, d. h. die Summe von $k = -\infty$ bis $k = +\infty$ der Werthe von u' in den Punkten $r, \varphi + 2kn\pi$, so entsteht die auf der n -blättrigen Fläche eindeutige Function u und insbesondere für $n = 1$ die Function u_0 . In der That finden wir aus der Identität

$$\cos \frac{\alpha}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{n} = \frac{(\varphi - \varphi')^2 - \alpha^2}{2n^2} \prod_{\left[\begin{array}{c} k = -\infty \dots -1 \\ +1 \dots +\infty \end{array} \right]} \frac{\alpha^2 - (\varphi - \varphi' + 2kn\pi)^2}{(2kn\pi)^2}$$

durch logarithmische Differentiation eine Beziehung zwischen

$$\frac{1}{n} \sin \frac{\alpha}{n} : \left(\cos \frac{\alpha}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{n} \right)$$

und einer convergenten unendlichen Reihe, durch welche die genannte Summe direct in den Ausdruck 5) bez. 2) für u bez. u_0 übergeführt wird.

Die Function u' stellt sozusagen die *Bewegung einer in der Richtung $\varphi = \varphi'$ auf unserer unendlich-blättrigen Windungsfläche einfallenden Lichtwelle* dar. Wir können dementsprechend das vorstehende Resultat auch folgendermassen aussprechen:

Lassen wir auf unserer unendlich-vielblättrigen Windungsfläche unendlich viele Lichtstrahlen einfallen, deren Einfallrichtungen sich je um $2n\pi$ unterscheiden, so wird die entstehende Lichtbewegung mit der Bewegung eines Lichtstrahls auf einer n -blättrigen Windungsfläche bez. (im Falle $n = 1$) mit der ungestörten Bewegung des Lichtstrahls in der schlichten Ebene identisch.

§ 6.

Lösungen mit Unendlichkeitsstelle.

Wir stellen in diesem Paragraphen Lösungen unserer Differentialgleichung auf, welche an einer vorgeschriebenen Stelle x', y' unendlich werden, wie $\lg \frac{1}{R}$ für $R=0$, wo R den Abstand des variabeln Punktes x, y von dem Punkte $x' y'$ bedeutet. Eine solche Unendlichkeitsstelle nennen wir einen *Pol* und zwar einen einfachen Pol. Wir leiten diese Lösungen nach der im § 3 sub 2 skizzirten Methode aus derselben Function f ab, aus welcher im vorigen Paragraphen die überall endlichen Lösungen flossen. Lösungen mit mehreren getrennten oder zusammenfallenden Polen können hinterher aus jenen einfachsten Lösungen durch Summation bez. Differentiation nach den Coordinaten des Poles erhalten werden.

1. Die in der schlichten Ebene eindeutige Lösung ergibt sich aus der complexen Function

$$(1) \quad f = \frac{1}{1 - \frac{Z'}{Z}}.$$

Die complexe Ebene beziehen wir durch stereographische Projection vom Südpol auf die Einheitskugel. Sind ξ, η, ζ bez. ξ', η', ζ' die Coordinaten der Bildpunkte von Z bez. Z' , so haben wir

$$(2) \quad Z = \frac{\xi + i\eta}{\zeta + 1}, \quad Z' = \frac{\xi' + i\eta'}{\zeta' + 1}.$$

Aus dem zweidimensionalen Potential auf der Kugeloberfläche entsteht eine räumliche Kugelfunction 0^{ten} Grades, indem wir in den Ausdrücken (2) ϱ und ϱ' an die Stelle von 1 treten lassen

$$[\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \quad \varrho'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2].$$

Durch Inversion hinsichtlich beider Variabelntripel entsteht eine Kugelfunction $\frac{1}{\varrho \varrho'} f$, welche homogen vom -1^{ten} Grade sowohl in den ξ, η, ζ wie in den ξ', η', ζ' ist. Der Grad in den beiden Variabelntripeln wird nun weiter successive m -mal erniedrigt. Wir erreichen dieses durch Integration nach z und z' , indem wir statt ξ und ζ die Integrationsvariablen z und z' substituiren und unter den Integralzeichen die Factoren $(\xi - z)^{-m-1}$, $(\zeta - z')^{-m-1}$ hinzufügen. Mit wachsendem m lassen wir die Punkte ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' gleichzeitig in den Nordpol der Kugel hineinrücken; genauer gesagt: wir machen die Substitution

$$(3) \quad \begin{aligned} \xi &= \frac{kx}{m}, \quad \eta = \frac{ky}{m}, \quad \xi = 1 - \frac{k^2(x^2 + y^2)}{2m^2} + \dots, \\ \xi' &= \frac{-kx'}{m}, \quad \eta' = \frac{-ky'}{m}, \quad \xi' = 1 - \frac{k^2(x'^2 + y'^2)}{2m^2} + \dots \end{aligned}$$

und verstehen unter x, y, x', y' endliche, unter m eine in's Unendliche wachsende Zahl. Statt der rechtwinkligen Coordinaten x, \dots brauchen wir auch Polarcoordinaten r, \dots , welche folgendermassen definiert sind:

$$(4) \quad \begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, \quad e^{i\varphi} = \frac{x + iy}{r}, \\ r'^2 &= x'^2 + y'^2, \quad e^{i\varphi'} = \frac{x' + iy'}{r'}. \end{aligned}$$

Zum Zwecke des Grenzüberganges schreiben wir statt der Variablen z und z' bez. $\frac{ikr \cos \alpha}{m}, \frac{-ikr' \cos \alpha'}{m}$. Dann entsteht das zu (12) pag. 334 analoge Doppelintegral:

$$(5) \quad \frac{1}{2\pi} \int d\alpha e^{ikr \cos \alpha} \frac{1}{2i} \int d\alpha' e^{-ikr' \cos \alpha'} \frac{1}{1 - e^{i(\varphi - \varphi' + \alpha + \alpha')}}.$$

Das erste Integral soll über den Weg (A), das zweite über (B) geführt werden; (letzteres allerdings mit einer unten anzugebenden Modification, vgl. die Anm. auf pag. 350). Wir haben sogleich diejenigen numerischen Factoren hinzugefügt, mit welchen diese Integrale nach der Verabredung in § 4 versehen werden sollten.

Bei der stereographischen Projection vom Nordpole entsteht in derselben Weise das folgende Doppelintegral

$$(6) \quad -\frac{1}{2\pi} \int d\alpha e^{ikr \cos \alpha} \frac{1}{2i} \int d\alpha' e^{-ikr' \cos \alpha'} \frac{1}{1 - e^{i(\varphi - \varphi' - \alpha + \alpha')}}.$$

Die Summe beider schreiben wir in der Form

$$U = \frac{1}{2\pi i} \int d\alpha e^{ikr \cos \alpha} \cdot \frac{1}{2i} \int d\alpha' e^{-ikr' \cos \alpha'} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \cos(\varphi - \varphi' + \alpha')};$$

Hier können wir noch das Integral nach α ausführen, wenn wir den Integranden als Function von $\cos \alpha$ auffassen. Der Weg (A) lässt sich nämlich in der $\cos \alpha$ -Ebene auf den einen Punkt $\cos \alpha = \cos(\varphi - \varphi' + \alpha')$ zusammenziehen, wie in § 5 sub 1 auseinandergesetzt ist. Wir erhalten daher nach dem Cauchy'schen Satz:

$$(7) \quad U = \frac{1}{2i} \int d\alpha' e^{ikr \cos(\varphi - \varphi' + \alpha') - ikr' \cos \alpha'}.$$

Diese Function hängt nur von der geradlinigen Entfernung

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

der Punkte x, y und x', y' ab; wir können sie nämlich in die Form bringen*)

$$(8) \quad U = \frac{1}{2i} \int d\gamma e^{ikR \cos \gamma} = U_0(kR),$$

aus welcher wir sehen, dass unsere Function U direct gleich der Bessel'schen Function 2^{ter} Art mit dem Index 0 und dem Argumente kR wird.

Wir schliessen aus der Gleichung (8) sofort auf folgende Eigenschaften unserer Function.

a) Sie genügt der Differentialgleichung $\Delta U + k^2 U = 0$ vermöge ihrer Herleitung aus der complexen Function f .

b) Sie ist in der schlichten Ebene eindeutig.

c) Sie ist für alle endlichen Werthe von x und y endlich und stetig, ausser in dem Pole $x = x', y = y'$, wo sie logarithmisch unendlich wird (vgl. Gleichung (8), pag. 34). Es ist uns also wirklich durch die im § 3, 2 angegebene Modification unseres allgemeinen Verfahrens gelungen, die Unendlichkeitsstelle im Endlichen zurückzuhalten.

d) Sie verschwindet im Unendlichen. Letzteres folgt aus den bekannten semiconvergenten Entwicklungen**) der Bessel'schen Functionen für grosse Werthe des Argumentes, oder hier noch einfacher daraus, dass der Weg (B) ganz auf schraffirtem Gebiete geführt werden kann, wo $\lim_{R=\infty} e^{ikR \cos \gamma}$ verschwindet.

e) Sie ändert sich nicht, wenn wir die Coordinaten des variabeln Punktes mit denen des Poles vertauschen. Diese Eigenschaft entspricht dem Satze über die Vertauschung von Parameter und Argument aus der Theorie der Abel'schen Functionen***).

Unsere Function $U_0(kR)$ ist in der Optik immer dann anzuwenden, wenn es sich um die *exacte Beschreibung einer zweidimensionalen Lichtbewegung* handelt, welche durch einen im Endlichen gelegenen leuchtenden

*) Zum Beweise schreibe man erst β statt $\varphi' - \alpha'$, dann drücke man nach (4) die Polarcoordinaten durch rechtwinklige Coordinaten aus, ferner mache man $x - x' = R \cos \psi$, $y - y' = R \sin \psi$, so dass ψ den von der x -Axe aus gerechneten Gesichtswinkel bedeutet, unter dem der Punkt x, y von x', y' aus erscheint. Endlich schreibe man γ statt $\beta - \psi$. Dann entsteht (8) aus (7).

Die genauere Bestimmung des Integrationsweges soll nun dahin getroffen werden, dass der Weg in (8) direct der Weg (B) sei. Dadurch ist auch der Weg in (7) zufolge der Gleichung $-\alpha' = \gamma + \psi - \varphi'$ bestimmt. In (7) können wir also den Weg (B) direct nur dann benutzen, wenn der Punkt x, y auf dem Halbstrahle $\psi = \varphi'$ oder in seiner Umgebung liegt. Bei Variabilität des Punktes x, y ändert sich der Integrationsweg stetig mit der Lage des Punktes.

**) Vgl. H. Hankel: Cylinderfunctionen erster und zweiter Art. Math. Ann. Bd. I, § 6.

***) Vgl. F. Pockels: l. c. p. 283, wo die entsprechende Eigenschaft für „Green'sche Functionen“ von beliebigen begrenzten Gebieten ausgesprochen ist.

Punkt (x', y') hervorgerufen wird. Allerdings benutzt man in der gewöhnlichen Optik bei diesem Probleme nicht die Function U_0 selbst, sondern begnügt sich unbewusst mit dem ersten Gliede ihrer semiconvergenten Entwicklung, welches an sich überhaupt keine Lösung unserer Differentialgleichung ist.

2. Indem wir nun dazu übergehen, die analoge Function für unsere Riemann'sche Fläche mit $(n-1)$ -fachem Windungspunkte aufzustellen, werden wir nicht von der in der schlichten Z -Ebene eindeutigen Function (1) ausgehen, sondern, wie im § 5 sub 2 von der Function

$$f = \frac{1}{n} \frac{1}{1 - \left(\frac{Z}{Z'}\right)^n},$$

welche aus (1) dadurch entsteht, dass wir unsere Riemann'sche Fläche hinsichtlich der Variablen Z und Z' conform auf die Z - bez. Z' -Ebene abbilden. Diese Function behandeln wir genau so, wie im Vorhergehenden die Function (1). Wir geben sogleich das Resultat in der definitiven Form an:

$$(9) \quad U = \frac{1}{2i\pi n} \int \frac{\sin \frac{\alpha}{n}}{\cos \frac{\alpha}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{n}} U_0(kR) da$$

$$[R'^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha],$$

wo wir das ursprünglich auftretende Doppelintegral durch Einführung der Bessel'schen Function U_0 in die Form eines einfachen Integrals gebracht haben. Der Integrationsweg ist der Weg (A).

Wir haben uns zunächst davon zu überzeugen, dass dieses Integral im Allgemeinen einen endlichen Werth hat. Da die Function U_0 hier mit complexem Argumente auftritt, ist es wichtig, ihr Verhalten in der complexen Ebene zu kennen. Diesbezüglich bemerken wir: 1) die Function $U_0(z)$ ist im Punkte $z = 0$ der complexen z -Ebene verzweigt; sie vermehrt sich nämlich um $2\pi i J_0(z)$ bei Umkreisung desselben.

2) Sie verhält sich im Unendlichen wie $-\sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{i\left(z + \frac{\pi}{4}\right)}$, sie verschwindet also im Unendlichen der positiven Halbebene (d. h. derjenigen Halbebene, wo z einen positiven imaginären Bestandtheil hat). Ersteres folgt aus Gleichung (6), pag. 339, letzteres aus den semiconvergenten Entwicklungen der Besselschen Functionen*).

*) H. Hankel: l. c.

Dem Verzweigungspunkte $R' = 0$ entspricht in der α -Ebene eine unendliche Anzahl von Punktepaaren

$$\alpha = \pm ia + 2k\pi \quad \left[k = -\infty \text{ bis } +\infty, a = \arccos \frac{r^2 + r'^2}{2rr'} \right],$$

von denen für uns hauptsächlich das auf der imaginären α -Axe gelegene Paar $\alpha = \pm ia$ in Betracht kommt. Desgleichen findet sich natürlich die reelle Axe der R' -Ebene in unendlich vielen Exemplaren der

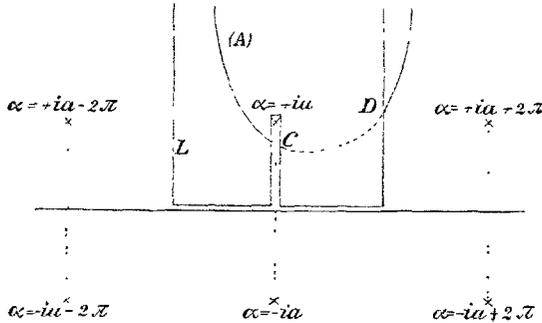


Fig. 4.

α -Ebene wieder. Eines derselben haben wir ausgezeichnet. Es ist der gebrochene Linienzug L $(-\pi + i\infty, -\pi, 0, ia, 0, \pi, \pi + i\infty)$. Der positiven R' -Halbebene entspricht das Innere des von L umschlossenen Gebietes. Beim Ueberschreiten von L kommt man jedesmal in einen der negativen R' -Halbebene entsprechenden Theil.

Wir wollen nun unsere obige Angabe über den Integrationsweg noch dahin präzisiren, dass derselbe den Punkt $\alpha = ia$ zur Linken, die auf der reellen Achse gelegenen singulären Punkte zur Rechten lässt. Im Uebrigen kann er natürlich beliebig deformirt werden, nur darf er über die Punkte $\alpha = \pm ia, \pm (\varphi - \varphi') + 2k\pi$ nicht hinübergezogen werden.

Der in Fig. 4 punktirt gezeichnete Theil (CD) des Integrationsweges entspricht in der R' -Ebene Punkten der negativen Halbebene. Anfang und Ende des Integrationsweges sind voll ausgezeichnet, um anzudeuten, dass die zugehörigen Punkte der R' -Ebene in der positiven Halbebene liegen. In den unendlich fernen Theilen des Integrationsweges verschwindet also die Function $U_0(kR')$.

Wir ersehen daraus, dass das Integral (8) im Allgemeinen einen endlichen Werth besitzt; eine Ausnahme tritt nur ein in dem speciellen Falle $r = r', \varphi = \varphi'$. Lassen wir nämlich $r = r'$ werden, so rücken die beiden Verzweigungspunkte $\alpha = \pm ia$ in den einen Punkt $\alpha = 0$ zusammen. Der Integrationsweg, welcher zwischen beiden Punkten sozusagen eingepflockt ist, zieht dann nothgedrungen durch den

Punkt $\alpha = 0$ hindurch. Deshalb braucht das Integral noch nicht unendlich zu werden. Lassen wir aber auch $\varphi = \varphi'$ werden, so wird

der Factor $\frac{\sin \frac{\alpha}{n}}{\cos \frac{\alpha}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{n}}$ in diesem Punkte unendlich. *Dann und nur dann wird das Integral unendlich.*

Um die Art des Unendlichwerdens zu untersuchen, bilden wir die symmetrische Function $U_1 + U_2 + \dots + U_n$ der Werthe von U in den übereinander liegenden Punkten der Fläche. Dabei bezeichnen wir, wie früher, als erstes Blatt die Gesamtheit derjenigen Punkte, in welchen $|\varphi - \varphi'| < \pi$, als 2^{tes} . . . n ^{tes} Blatt alle übrigen Punkte. U_1 bezieht sich auf das erste, $U_2 \dots U_n$ auf das 2 . . . n ^{te} Blatt. Nach der im § 5, pag. 344 angegebenen Rechnung wird nun

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \cos(\varphi - \varphi')} U_0(kR) d\alpha.$$

Fassen wir diesen Ausdruck als ein Integral in der complexen Ebene der Variablen $\cos \alpha$ auf, so können wir es nach dem Cauchy'schen Satze ausführen. Der Integrand ist nämlich eine eindeutige Function von $\cos \alpha$; wir erhalten:

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = U_0(kR) [R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')].$$

Die Function $U_0(kR)$ wird für $R = 0$ nach Gleichung (8), pag. 340 logarithmisch unendlich. Nun haben aber nach dem Vorhergehenden die Grössen $U_2 \dots U_n$ sicher endliche Werthe. Das Unendlichwerden ist also lediglich auf Rechnung von U_1 zu setzen. Mithin wird die Function U im ersten Blatte an der Stelle $r = r'$, $\varphi = \varphi'$ unendlich, wie $\lg \frac{1}{R}$.

Hiernach können wir von unserer Function U Folgendes aussagen:

- a) Sie erfüllt die Differentialgleichung $\Delta U + k^2 U = 0$.
- b) Sie ist auf unserer n -blättrigen Windungsfläche eindeutig.
- c) Sie ist für alle endlichen Werthe von x und y endlich und stetig ausser im Punkte $x = x'$, $y = y'$, wo sie einen einfachen Pol besitzt.
- d) Sie verschwindet im Unendlichen. Wenn nämlich $r = \infty$ wird, so rücken die Punkte $\alpha = \pm i\alpha$ auf der imaginären Axe gleichfalls unendlich weit auseinander. Dann dürfen wir den Integrationsweg in der Richtung der positiv imaginären Axe beliebig weit verschieben, wobei das Integral wegen des Factors $\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi'}{n}}$ beliebig klein wird.

e) Die Function U bleibt ungeändert, wenn wir die Rolle des variabeln Punktes und des Poles vertauschen.

f) Die symmetrische Function $U_1 + U_2 + \dots + U_n$ der Werthe von U in übereinander liegenden Punkten der Fläche ist gleich der analogen eindeutigen Lösung $U_0(kR)$.

Bemerken wir noch, dass eine vollkommene Uebereinstimmung in der Bildungsweise der Functionen u, u_0 des vorigen und der Functionen U, U_0 dieses Paragraphen besteht. Die Function u , so können wir sagen, entstand aus der eindeutigen Lösung u_0 , wenn wir in dieser die reelle Grösse $\cos(\varphi - \varphi')$ durch die complexe $\cos \alpha$ ersetzten, den

Factor $\frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\alpha}{n}}{\cos \frac{\alpha}{n} - \cos \frac{(\varphi - \varphi')}{n}}$ hinzufügten und nach α auf dem Wege (A)

integrirten. Genau auf dieselbe Weise entsteht die Function U aus der eindeutigen Lösung U_0 .

Die Function U stellt eine Lichtbewegung auf unserer Riemann'schen Fläche dar, welche ein im Punkte r', φ' befindlicher leuchtender Punkt hervorruft. Sie hat an die Stelle der Function U_0 in solchen optischen Problemen zu treten, welche ihrer Natur nach zu Functionen Anlass geben, welche mit ihren analytischen Fortsetzungen erst auf unserer n -blättrigen Riemann'schen Fläche eindeutig sind, nämlich in dem Problem der Beugung an einem keilförmigen undurchsichtigen Körper bei Vorhandensein eines im Endlichen gelegenen leuchtenden Punktes.

3. Nach § 3 lassen sich alle Lösungen unserer Differentialgleichung, welche sich im Innern eines Kreises bez. Kreisringes regulär verhalten, in eine nach Bessel'schen Functionen 1^{ter} bez. 2^{ter} Art fortschreitende Reihe entwickeln. Wir wollen jetzt diese Entwicklungen für unsere Function U wirklich aufstellen. (Die Function U_0 brauchen wir nicht ausdrücklich zu behandeln, da sie nur einen speciellen Fall von U darstellt). Und zwar werden wir sie direct aus der Potenzentwicklung der complexen Ausgangsfunction ableiten. Wir kommen dabei allerdings nicht zu einer einheitlichen Entwicklung, wie bei der Function u des vorigen Paragraphen, sondern wir müssen zwei Gebiete unterscheiden, in denen verschiedene Entwicklungen gelten, nämlich das Innere und das Aeusserere des Kreises $r = r'$.

Die Function U berechnet sich als Summe zweier Integrale, von denen das eine bei der Projection der Function f vom Südpole, das andere bei der Projection vom Nordpole erhalten wird (in derselben Weise, wie es für die Function U_0 oben explicite ausgeführt ist vgl. (5) und (6), pag. 349). Dementsprechend betrachten wir mit Benutzung der Bezeichnungsweise aus § 5, 3

$$(10) \quad f(Z) + f(Z_1) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{1 - \left(\frac{Z}{Z'}\right)^n} + \frac{1}{1 - \left(\frac{Z_1}{Z'}\right)^n} \right\}.$$

Hier bestehen zwischen dem Radiusvector r eines Punktes der x, y -Ebene und den Radienvectoren $|Z|, |Z_1|$ derjenigen Punkte der complexen Ebene, welche in den Punkt x, y bei der einen oder anderen Projection übergehen, wie auf pag. 345 die Beziehungen:

$$(11a) \quad |Z| = \frac{kr}{m}, \quad |Z_1| = \frac{m}{2kr}.$$

Die entsprechende Gleichung besteht zwischen r' und $|Z'|$, nämlich:

$$(11b) \quad |Z'| = \frac{kr'}{m},$$

1) $r < r'$. Aus den Gleichungen (11a) und (11b) folgt:

$$|Z| < |Z'| \quad \text{und} \quad |Z_1| > |Z'|.$$

In diesem Falle haben wir für die Function (10) die folgende convergente Potenzentwicklung anzusetzen:

$$f(Z) + f(Z_1) = \frac{1}{n} \left\{ 1 + \left(\frac{Z}{Z'}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{Z}{Z'}\right)^{\frac{2}{n}} + \dots - \left(\frac{Z}{Z'}\right)^{\frac{1}{n}} \left(1 + \left(\frac{Z}{Z_1}\right)^{\frac{1}{n}} + \dots \right) \right\}.$$

Diese Gleichung integriren*) wir links und rechts auf dem Wege (A) und (B) nach α bez. α' . Dann entsteht links unsere Function U . Rechts führen wir die Integration gliedweise aus. Der Zusammenstellung am Schlusse des § 4 entnehmen wir: es wird

$$\begin{array}{l|l} \text{aus } \left(\frac{Z}{Z'}\right)^{\frac{m}{n}} & e^{\frac{im}{n}(\varphi - \varphi')} J_{\frac{m}{n}}(kr) U_{\frac{m}{n}}(kr'), \\ \text{aus } \left(\frac{Z}{Z_1}\right)^{\frac{m}{n}} & - e^{-\frac{im}{n}(\varphi - \varphi')} J_{\frac{m}{n}}(kr) U_{\frac{m}{n}}(kr'), \\ \text{aus } 1 & J_0(kr) U_0(kr'). \end{array}$$

Wir erhalten somit:

$$(12) \quad U = \sum_{m=0}^{m=\infty} \gamma_m J_{\frac{m}{n}}(kr) U_{\frac{m}{n}}(kr') \cos \frac{m}{n}(\varphi - \varphi')$$

$$\left[\begin{array}{l} \gamma_m = \frac{2}{n} \text{ für } m > 0 \\ \gamma_m = \frac{1}{n} \text{ „ } m = 0 \end{array} \right].$$

Wir kommen so zu einer für das Innere des Kreises $r = r'$ geltenden Entwicklung, welche nach Bessel'schen Functionen erster Art fortschreitet, in Uebereinstimmung mit dem allgemeinen Satze aus § 2, pag. 325.

*) Ueber die Bedeutung dieser abgekürzten Ausdrucksweise vgl. die Anm. auf pag. 346.

Die Reihe erscheint dort nur in etwas anderer Form, indem $J_{\frac{m}{n}}(kr)$ dort nicht mit $U_{\frac{m}{n}}(kr')$ sondern mit $1 : J_{\frac{m}{n}}(kr')$ multiplicirt ist. Vergleicht man aber die für die Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art angegebenen Grenzwerte von pag. 323 und 328 bei unendlich wachsendem Index, so sieht man, dass $\lim_{\nu \rightarrow \infty} U_{\nu} : \frac{1}{J_{\nu}}$ kleiner ist als $\frac{1}{\nu}$ multiplicirt in eine von ν unabhängige Zahl. Unsere Reihe (12) convergirt daher immer dann, wenn die Reihe (2) aus § 2 convergirt, d. h. im Innern des Kreises vom Radius r' und stellt hier wirklich die Function U dar.

2. $r > r'$. Sehen wir für den Augenblick nicht r, φ sondern r', φ' als den variablen Punkt an, so liefert uns die Reihe (12) gleichzeitig eine Darstellung von $U(r', \varphi')$ durch Bessel'sche Functionen zweiter Art, welche der Ableitung zufolge gültig ist, sofern $r' > r$. Nun bleibt die Function U auf Grund ihrer Reciprocitätseigenschaft e) ungeändert, wenn wir r', φ' mit r, φ vertauschen. Wir kommen dann zu der folgenden Reihe

$$(13) \quad U(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \gamma_m J_{\frac{m}{n}}(kr') U_{\frac{m}{n}}(kr) \cos \frac{m}{n}(\varphi - \varphi')$$

$$\left[\begin{array}{l} \gamma_m = \frac{2}{n} \text{ für } m > 0 \\ \gamma_m = \frac{1}{n} \text{ „ } m = 0 \end{array} \right]$$

welche für alle endlichen Punkte ausserhalb des Kreises $r = r'$ gilt. Es ist dieses eine Reihe von der im § 2 sub 5 betrachteten Form, nur ist hier im allgemeinen Gliede $J_{\frac{m}{n}}(kr')$ an die Stelle von $1 : U_{\frac{m}{n}}(kr')$

getreten. Nach unserer obigen Bemerkung über den Grenzwert von J, U , bei unendlich wachsendem ν wird dadurch die Convergenz der Reihe nur verbessert. Die Reihe (13) convergirt daher für alle Werthe $\infty > r > r'$. Dass eine solche Reihe die vorgelegte Lösung in demselben Gebiete wirklich darstellt, konnte im Allgemeinen nicht behauptet werden. Es folgt hier aber, wegen der besonderen Reciprocitätseigenschaft von U daraus, dass die Reihe (12) die Function U in dem Gebiete $r < r'$ wirklich darstellt.

Spalten wir die Reihen (12) und (13) nach Gleichung (7), pag. 340 in ihren reellen und imaginären Bestandtheil, so ergeben sich im einfachsten Falle $n = 1$, d. h. im Falle der eindeutigen Lösung $U_0(kR)$ die sogenannten *Additionstheoreme der Bessel'schen Functionen* $J_0(kR)$ und $K_0(kR)$, wie sie von Heine, jedoch ohne Angabe ihres Gültigkeitsbereiches, aufgestellt sind. Wir bemerken noch, dass auch

die entsprechenden *Additionstheoreme der Kugelfunctionen* auf demselben Wege entspringen, wenn wir unser Verfahren vor Ausführung des Grenzüberganges abbrechen.

4. Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass unser Ansatz auch die auf einer *unendlich-viel-blättrigen Windungsfläche* eindeutige Function mit einfachem Pole liefert, in der Form

$$U = \frac{1}{2\pi} \int \frac{2\alpha d\alpha}{(\varphi - \varphi')^2 - \alpha^2} U_0(kR').$$

Für diese gelten *mutatis mutandis* gleichfalls die Eigenschaften a)–f) von pag. 353, 354 und die bisher betrachteten Lösungen U können aus ihr rückwärts aufgebaut werden.

§ 7.

Graphische Behandlung der einfachsten mehrdeutigen Lösung.

Dieser Paragraph verfolgt den doppelten Zweck, ein möglichst klares Bild von dem Verlauf unserer mehrdeutigen Lösungen in einem speciellen Falle zu geben und die Formeln zur numerischen Rechnung bereit zu stellen.

Zur numerischen Rechnung eignen sich weder die Darstellungen durch ein complexcs Integral, noch die Reihen nach Bessel'schen Functionen. Letztere convergiren allerdings im Falle der überall endlichen Lösungen, wie wir gesehen haben, für alle endlichen Punkte der x, y -Ebene. Die Convergenz verschlechtert sich jedoch mit wachsenden Werthen des Argumentes kr . Nun bedeutet physikalisch $\frac{k}{2\pi}$, wie pag. 318 bemerkt, die reciproke Wellenlänge der betreffenden Schwingung. Die Convergenz wird also immer dann schlecht sein, wenn der Abstand r vom Windungspunkte der Riemann'schen Fläche eine grössere Anzahl von Wellenlängen beträgt.

Für die optischen Anwendungen, wo die Wellenlänge so ausserordentlich klein ist, sind unsere *convergenten* Reihen sicher nicht brauchbar. Für akustische oder Hertz'sche Schwingungen mögen sie immerhin nützlich sein. Jedoch werden wir sogleich *divergente* Reihen angeben, welche für optische Zwecke sehr praktisch sind. Dabei beschränken wir uns auf den einfachsten und zugleich wichtigsten Fall derjenigen Lösung u , welche auf einer zweiblättrigen Windungsfläche eindeutig und überall endlich ist.

Zunächst verwandeln wir das complexc Integral (5), durch welches diese Lösung pag. 343 erklärt wurde, in ein Integral auf reellem Wege. Dabei wollen wir zur Abkürzung $\varphi - \varphi' = \psi$ setzen, oder mit anderen

Worten, wir wollen die „Einfallrichtung der Welle“ als x -Axe wählen, so dass jetzt r und ψ gewöhnliche Polarcordinaten bedeuten. Die Punkte, für welche $|\psi| < \pi$ bez. $|\psi| > \pi$ ist, bezeichnen wir wie früher als erstes bez. zweites Blatt. Nach e) pag. 344 haben wir

$$(1) \quad u_1 + u_2 = u_0 = e^{ikr \cos \psi}.$$

Ferner berechnet man aus (5) pag. 343

$$(2) \quad u_1 - u_2 = \frac{\cos \frac{\psi}{2}}{\pi i} \int \frac{e^{ikr \cos \alpha} \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha}{\cos \alpha - \cos \psi},$$

wobei $|\psi| < \pi$ angenommen ist. Setzen wir vorübergehend

$$X = \frac{u_1 - u_2}{u_0},$$

so wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial r} &= \frac{k}{\pi} \cos \frac{\psi}{2} \int e^{ikr(\cos \alpha - \cos \psi)} \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha \\ &= \frac{k}{\pi} \cos \frac{\psi}{2} e^{-2ikr \cos^2 \frac{\psi}{2}} \int e^{2ikr \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha. \end{aligned}$$

Wenn wir in dem zuletzt hingeschriebenen Integrale $\cos \frac{\alpha}{2}$ als Integrationsvariable ansehen und den Integrationsweg, wie er sich für diese Variable aus dem Wege (A) der α -Ebene ergibt, in die imaginäre Axe der $\cos \frac{\alpha}{2}$ -Ebene deformieren, so können wir es ausführen; es wird

$$\int e^{2ikr \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Mithin ist

$$\frac{\partial X}{\partial r} = \sqrt{\frac{2k}{-i\pi r}} \cos \frac{\psi}{2} e^{-2ikr \cos^2 \frac{\psi}{2}} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{2}{\sqrt{-i\pi}} \int_0^{\sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}} e^{-i\tau^2} d\tau.$$

Integrieren wir zwischen 0 und r , so kommt, da $X = 0$ für $r = 0$:

$$X = \frac{2}{\sqrt{-i\pi}} \int_0^T e^{-i\tau^2} d\tau.$$

und

$$(3) \quad u_1 - u_2 = \frac{2}{\sqrt{-i\pi}} e^{ikr \cos \psi} \int_0^T e^{-i\tau^2} d\tau, \quad T = \sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2},$$

wobei das Integral jetzt auf reellem Wege genommen ist. Gleichung (1) können wir auch so schreiben:

$$(4) \quad u_1 + u_2 = \frac{2}{\sqrt{-i\pi}} e^{ikr \cos \psi} \int_{-\infty}^0 e^{-i\tau^2} d\tau.$$

Aus Gleichung (3) und (4) folgen Ausdrücke für u_1 und u_2 , welche zunächst für $|\psi| < \pi$ gelten, welche aber in einander übergehen, wenn wir ψ mit $\psi + 2\pi$ vertauschen. Wir erhalten daher einen einheitlichen Ausdruck für u , welcher sowohl im ersten wie im zweiten Blatte gilt, wenn wir die Beschränkung $|\psi| < \pi$ aufheben, nämlich den folgenden:

$$(5) \quad u = e^{ikr \cos \psi} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^T e^{-i\tau^2} d\tau, \quad T = \sqrt{2kr} \cos \frac{\psi}{2}.$$

Die Grösse T ist positiv im ersten, negativ im zweiten Blatte.

Auf Grund dieser Formel gelingt es nun, sich ein anschauliches Bild von dem Verlaufe der Function u zu verschaffen und eine Zeichnung zu entwerfen. Da Anschauung sowohl wie Zeichnung die Functionsverhältnisse nur ungenau erfassen können, so werden wir uns hier mit Annäherungswerthen begnügen dürfen, so jedoch, dass wir den begangenen Fehler genau abschätzen können. *Dementsprechend soll für den ganzen Rest dieser Arbeit eine bestimmte Genauigkeit ε massgebend sein.* Die Grösse von ε kann beliebig vorgeschrieben sein. Alle folgenden Angaben machen nur den Anspruch richtig zu sein bis auf einen Fehler, welcher absolut genommen kleiner als ε ist. Dabei wird eine abgekürzte Ausdrucksweise gestattet sein. Wir werden sagen: u ist gleich einem gewissen Werthe, wo wir genauer sagen müssten: Die Differenz zwischen dem angegebenen und dem wahren Werthe von u ist absolut genommen kleiner als ε .

Angenäherte Berechnung von u im zweiten Blatte. Es handelt sich zunächst darum, Näherungswerthe für das in (5) vorkommende Integral aufzufinden. Wir entwickeln dieses durch n -malige partielle Integration in die folgende Reihe, wobei wir, da T im zweiten Blatte negativ ist, $T = -|T|$ setzen wollen:

$$(6) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-|T|} e^{-i\tau^2} d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|T|}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau$$

$$= \frac{e^{-i|T|^2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{2i|T|} - \frac{1}{(2i)^2|T|^3} + \frac{1 \cdot 3}{(2i)^3|T|^5} - \dots \right.$$

$$\left. + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-3}{(2i)^n} \frac{1}{|T|^{2n-1}} + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{(2i)^n} \int_{|T|}^{\infty} e^{-i\tau^2} \frac{d\tau}{\tau^{2n}} \right\}.$$

Lässt man n in's Unendliche wachsen, so wird die Reihe *divergent*. Man darf daher nur bis zu einem endlichen n gehen und muss das zuletzt hingeschriebene Restglied berücksichtigen. Dieses ist stets kleiner als das vorhergehende Glied, wie eine leichte Betrachtung zeigt, so dass die Reihe (6) als *semiconvergent* bezeichnet werden kann.

Wir werden zur angenäherten Berechnung lediglich das *erste* Glied benutzen. Es ist dieses gestattet, wenn das zweite Glied bereits absolut genommen kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist, d. h. wenn

$$\left| e^{-i T^2} \frac{1}{\sqrt{\pi} (2i)^2 |T|^2} \right| = \frac{1}{4\sqrt{\pi} |T|^3} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{|T|^3} < 2\sqrt{\pi} \varepsilon.$$

Denn dann ist auch der ganze Rest kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ und der begangene Fehler kleiner als ε . Es ist bequem, diese Bedingung durch eine noch etwas schärfere zu ersetzen, nämlich durch

$$(7) \quad \frac{1}{4T^2} < \varepsilon.$$

Das untere Blatt zerlegt sich für unsere fernere Betrachtung in *zwei Gebiete, je nachdem diese Ungleichung erfüllt ist oder nicht*. Dasjenige Gebiet, in dem sie nicht erfüllt ist, nennen wir den „*Uebergangsstreifen*“. Die Begrenzung des Uebergangsstreifens wird durch die Gleichung gegeben:

$$\frac{1}{8kr \cos^2 \frac{\psi}{2}} = \varepsilon \quad \text{oder} \quad r(\cos \psi + 1) = \frac{\lambda}{8\pi \varepsilon},$$

wo $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ die Wellenlänge bedeutet. Die Grenzcurve ist eine *Parabel*. In rechtwinkligen Coordinaten $x = r \cos \psi$, $y = r \sin \psi$ lautet die Gleichung nämlich

$$(8) \quad y^2 + 4e(x - e) = 0, \quad e = \frac{\lambda}{16\pi \varepsilon},$$

wo e die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel bedeutet. Der Scheitel liegt im Punkte $x = e$, $y = 0$, der Brennpunkt $x = 0$, $y = 0$ fällt mit dem Windungspunkte zusammen. Die Parabel umschliesst den negativen Theil der x -Axe. Um bestimmte Verhältnisse vor Augen zu haben, wollen wir vorübergehend für λ den ungefähren Werth der D -Linie 5.10^{-4} mm , für 16π die Zahl 50 nehmen und die Genauigkeit so bestimmen, dass $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ ist. Dann wird $e = \frac{1}{10} \text{ mm}$. Die Parabel ist also äusserst schmal*).

In allen Punkten ausserhalb der Parabel ist die Ungleichung (7) erfüllt. Daher genügt es, unter den in der Optik vorliegenden Ver-

*) Wenn die Wellenlänge oder die vorgeschriebene Genauigkeit grösser (d. h. wenn λ grösser oder ε kleiner) wird, nimmt die Parabel etwas grössere Dimensionen an. Daher rührt es, dass in den Figuren der Tafel das Uebergangsbereich ziemlich gross erscheint. Die Wellenlänge musste hier mindestens gleich 10 mm genommen werden, wenn die Zeichnung deutlich sein sollte. Als Genauigkeit wurde gewählt $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}$, so dass sich $e = 10 \text{ mm}$ bestimmte.

hältnissen für den weitaus grössten Theil des zweiten Blattes, die Reihe (6) durch ihr erstes Glied zu ersetzen.

Für u selbst ergibt sich dementsprechend aus (5) der folgende Näherungswerth:

$$u = \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \frac{e^{-\frac{2\pi ir}{\lambda} + \frac{\pi i}{4}}}{4\pi i \cos \frac{\psi}{2}}$$

oder

$$(9) \quad u = -\sqrt{\frac{\lambda}{r}} \frac{e^{-\frac{2\pi ir}{\lambda} - \frac{\pi i}{4}}}{4\pi \cos \frac{\psi}{2}}$$

Diese Gleichung gilt mit der Genauigkeit ε in allen Punkten des zweiten Blattes, welche nicht dem Uebergangsstreifen angehören.

Angenäherte Berechnung von u im ersten Blatte. Im ersten Blatte, wo $T > 0$ ist, können wir die Reihe (6) nicht direct verwenden. Wir haben aber nach Gleichung (1) pag. 358

$$u_1 = u_0 - u_2.$$

Wir grenzen uns auch im ersten Blatte ein Uebergangsgebiet ab, indem wir unsere Parabel an die entsprechenden Stellen des ersten Blattes übertragen. In allen Punkten des Parabeläusseren können wir dann u_2 durch den Näherungswerth aus Gleichung (9) ersetzen. Mithin erhalten wir für u die folgende angenäherte Darstellung:

$$(10) \quad u = e^{\frac{2\pi ir}{\lambda} \cos \psi} - \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \frac{e^{-\frac{2\pi ir}{\lambda} - \frac{\pi i}{4}}}{4\pi \cos \frac{\psi}{2}},$$

welche in allen Punkten des ersten Blattes, die nicht dem Uebergangsgebiete angehören, gültig ist.

In den Uebergangsgebieten des ersten und zweiten Blattes dagegen müssen wir die exacte Formel (5) heranziehen.

Wir wollen uns im Folgenden die Terminologie der Optik zu Nutze machen. Nun hat die Function u an sich noch keine physikalische Bedeutung; sie entspricht den im § 1 eingeführten Hilfsfunctionen Ξ , H , Z . Wir erhalten aber eine Grösse, die wir als Lichtschwingung bezeichnen können und die den Grössen X , Y , Z in § 1 entspricht, wenn wir bilden

$$(11) \quad \Re e \left(e^{\frac{2\pi it}{\tau}} u \right),$$

wo t die Zeit, τ die Schwingungsdauer bedeutet. Von dem so entstehenden Schwingungszustande werden wir ein Bild bekommen, wenn wir seine *Niveaucurven* in verschiedenen Zeitpunkten construiren. Am einfachsten gelingt dieses für die *Knotenlinien*, d. h. für diejenigen

Curven, in denen die Schwingung 0 ist. Wir fragen daher nach dem Verlauf dieser Nulllinien im zweiten und ersten Blatte und zwar zunächst für die Zeit $t = 0$. Dieselben sind dargestellt durch die Gleichung $\Re e(u) = 0$.

Im zweiten Blatte ausserhalb des Uebergangsbereiches haben sie eine sehr einfache Gestalt. Ihre Gleichung lautet hier nach (9):

$$(12) \quad \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \frac{1}{4\pi \cos \frac{\psi}{2}} \cos\left(\frac{2\pi r}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{d. h.} \quad \cos\left(\frac{2\pi r}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\text{oder} \quad r = \lambda \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{8}\right) \quad [m = 1, 2, 3 \dots].$$

Sie bilden ein System concentrischer Kreise um den Windungspunkt, in welchem sich die Radien aufeinander folgender Kreise um eine halbe Wellenlänge unterscheiden. Wir zeichnen diese Kreise (vgl. Fig. 1 d. Taf.), wobei wir jedoch jeden Kreis nur bis an das Uebergangsbereich ausziehen dürfen. Denn über den Verlauf der Nullcurven im Uebergangsbereich können wir auf Grund von (9) nichts aussagen. (Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass in Wahrheit die Nullcurven keine exakten Kreise, sondern transcendente Curven sind. Genau genommen können wir nur sagen: Längs aller jener Kreise ist der Werth von $|u|$ kleiner als ε .)

Die Nullcurven im ersten Blatte ausserhalb des Uebergangsbereiches berechnen sich aus Gleichung (10). Ihre Gleichung lautet, wenn wir im ersten Terme $r \cos \psi = x$ setzen, für $t = 0$.

$$(13) \quad \cos \frac{2\pi x}{\lambda} - \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \frac{1}{4\pi \cos \frac{\psi}{2}} \cos\left(\frac{2\pi r}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Der erste Term (u_0), für sich gleich Null gesetzt, liefert ein System paralleler Geraden G , welche senkrecht zur x -Axe stehen und im Abstände $\frac{\lambda}{2}$ auf einander folgen. Es sind dieses einfach die Knotenlinien einer Schwingung, wie sie stattfinden würde, wenn der Windungspunkt garnicht vorhanden wäre. Diese Geraden verzeichnen wir in Fig. 2 d. Taf. Der zweite Term (u_2) für sich gleich Null gesetzt, liefert das beschriebene System concentrischer Kreise. Wir haben uns nun klar zu machen, welche Nullcurven dem zusammengesetzten Ausdrucke $u_0 - u_2 = 0$ entsprechen. Wir denken uns zu dem Zwecke die Fig. 1 auf das System der Geraden G in Fig. 2 heraufgelegt und betrachten zunächst einen derjenigen Punkte P , in denen sich ein Kreis und eine Gerade schneiden. Durch diesen muss nach Gleichung (13) auch die neu entstehende Nullcurve hindurchgehen.

Ferner kann zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten P in grosser Entfernung vom Windungspunkte die Nullcurve nur wenig von

der Geraden G abweichen, da u_2 wegen des Factors $r^{-\frac{1}{2}}$ klein ist im Verhältniss zu u_0 . Die neue Nulllinie wird daher nur wenig nach derjenigen Seite hinübergezogen, wo u_0 und u_2 dasselbe Vorzeichen haben und wird sich im Uebrigen um die Gerade G herumschlängeln, indem sie alle Punkte P , welche auf derselben Geraden G liegen, der Reihe nach durchläuft.

Es wäre aber möglich, dass die Nulllinien in grösserer Nähe an dem Windungspunkte von den betr. Geraden G soweit abgelenkt würden, dass sie zwei Punkte P verbinden, die ursprünglich auf verschiedenen Geraden G gelegen sind. Thatsächlich ist dieses nicht der Fall. Betrachten wir nämlich eine derjenigen Geraden G' , welche in der Mitte zwischen zwei aufeinanderfolgenden Geraden G verläuft. Auf diesen hat u_0 den Werth $+1$ oder -1 . Dagegen hat $|u_2|$ den Werth $\frac{\vartheta}{T}$, wo $\vartheta = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cos\left(\frac{2\pi r}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right)$ ein echter Bruch und $1:T$ nach

(7) kleiner als $2\sqrt{\varepsilon}$, also jedenfalls auch ein echter Bruch ist, sofern wir überhaupt nur eine vernünftige Genauigkeit vorschreiben. Mithin ist $|u_2| < 1$ und $u_0 - u_2$ kann längs der Geraden G' nirgends verschwinden. Die entstehenden Nullcurven können also auch in geringerem Abstände vom Windungspunkte die Geraden G' nirgends kreuzen. *Sie schliessen sich im Wesentlichen an den Verlauf der Geraden G an indem sie alle Punkte P der Reihe nach durchlaufen und führen von hier Elongationen aus, die kleiner sind als $\frac{1}{4}$ und die sich überdies um so mehr abflachen, je weiter sich die Nullcurve vom Windungspunkte entfernt.* Wir überdecken demnach in Fig. 2 das obere Blatt mit einem solchen Systeme geschlängelter Curven, wobei wir jedoch jede Nullcurve nur bis an den Uebergangstreifen heran ausziehen dürfen.

Was nun die *Uebergangsgebiete* betrifft, so müssen wir auf die exacte Formel (5) recurriren. Hier können wir zunächst die *Schnittpunkte der Nulllinien mit der Axe unserer Parabel* leicht auffinden. Auf der Parabelaxe ist nämlich $\psi = \pm \pi$, also $T = 0$. Die Schnittpunkte sind daher gegeben durch die Gleichung

$$\Re(u) = \cos \frac{2\pi r}{\lambda} = 0 \text{ oder } r = \frac{1}{4} + \frac{m\lambda}{2} \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

Diese Nullpunkte (Q_m) folgen einander in dem constanten Abstände $\frac{\lambda}{2}$ und zwar findet man im ersten und zweiten Blatte dieselben Punkte Q_m . In jedem dieser Punkte hat die bez. Nullcurve eine *Ecke*. Es ist nicht schwer, die Grösse dieser Ecke aus Gleichung (5) zu ermitteln. Für die Tangente des halben Winkels derselben ergibt sich die Formel $\pi \sqrt{\frac{2m+1}{2}}$ im ersten, $-\pi \sqrt{\frac{2m+1}{2}}$ im zweiten Blatte. Die Ecken

sind also im ersten und zweiten Blatte nach der entgegengesetzten Seite geöffnet; ihr Winkel nähert sich mit wachsender Entfernung vom Windungspunkte mehr und mehr einem Flachen.

Nun müssen doch die in Q_m zusammenstossenden Aeste der Nullcurve in irgend eine der ausserhalb des Uebergangsgebietes bereits eruirten Nullcurven übergehen. Wir stellen eine solche Verbindung zwischen den Ecken Q_m und den vorher gezeichneten aufeinanderfolgenden Nullcurvenstücken in Fig. 1 und 2 in willkürlicher Weise her, ohne uns um die Gestalt der Verbindungslinien im Einzelnen zu kümmern. Dadurch ist die Zeichnung des Niveaucurvensystems vollständig geworden.

Beim Vergleich der Fig. 1 und 2 sieht man noch, dass sich die Nullcurven des einen Blattes stetig und mit stetiger Tangente in die des anderen Blattes fortsetzen. Die vorher genannten Ecken sind also nur scheinbare und nur dadurch entstanden, dass die Geraden $\psi = \pi$ und $\psi = -\pi$, welche auf der Riemann'schen Fläche verschieden sind, in den Figuren zusammenfallen.

Beschreiben wir nunmehr den *Gesamtverlauf einer Nullcurve im ersten und zweiten Blatte*, wobei wir eine solche herausgreifen mögen, welche die Parabelaxen schneidet. Wir beginnen im Unendlichen des ersten Blattes oberhalb der Parabelaxe. Die Nullcurve schmiegt sich zunächst der Geraden G unendlich nahe an, oscillirt dann um diese herum und zwar mit um so stärkeren Elongationen, je näher sie dem Windungspunkte kommt. Beim Eintritt in den Uebergangsstreifen wird sie nach dem Windungspunkte hingezogen. Nachdem sie die Parabelaxe in einem der Punkte Q_m geschnitten hat, tritt sie in das zweite Blatt ein und umläuft den Windungspunkt auf einem Kreise. Bei ihrem zweiten Eintritt in das Uebergangsgebiet entfernt sie sich etwas vom Windungspunkte und gelangt im Punkte Q_m wieder in das erste Blatt zurück, wo sie mit abnehmenden Oscillationen im Grossen und Ganzen der Richtung der Geraden G folgt und unterhalb der Parabelaxe sich in's Unendliche verläuft. Diejenigen Nullcurven, welche die Parabelaxe nicht schneiden, zeigen einen einfacheren Verlauf, indem sie den Windungspunkt nicht umkreisen.

Dies der Schwingungszustand zur Zeit $t = 0$. Wollen wir uns nun auch die *Abhängigkeit desselben von t* veranschaulichen, wie sie durch die Formel (11) gegeben wird, so brauchen wir die Rechnung nicht von neuem durchzuführen. Wir haben uns vielmehr nur das soeben gezeichnete Nullcurvensystem in der Richtung der abnehmenden x wandern zu denken und können die Veränderungen, welche mit einer einzelnen Nullcurve bei wachsendem t vor sich gehen, direct folgendermassen beschreiben: Zu Beginn der Zeit schneidet unsere

Nullcurve die Einfallrichtung $\psi=0$ im Unendlichen des ersten Blattes; sie erscheint hier als eine gerade Linie G . Bei der Annäherung an den Windungspunkt zeigt sie periodisch sich wiederholende Verzerrungen, welche in den dem Windungspunkt zunächst gelegenen Theilen am stärksten sind. In dem Momente, wo sie den Windungspunkt passirt, artet die Verzerrung in eine Spitze aus, die sich dann weiterhin in eine Schleife auflöst. Der im zweiten Blatt gelegene Theil der Schleife hat die Gestalt eines Kreises, während die beiden in's erste Blatt hinüberreichenden Enden der Schleife sich einer G -Geraden mehr oder minder anschmiegen. Beim Fortschreiten wandert der Doppelpunkt auf der Parabelaxe von dem Windungspunkte fort, während die Enden mehr und mehr die Gestalt einer zur Parabelaxe senkrechten Geraden annehmen und die Rundung der Schleife grösser und grösser wird.

Alles, was hier über die Gestalt der Nullcurven gesagt ist, gilt natürlich nur *bei Beschränkung auf die einmal festgesetzte Genauigkeit*. Die Verhältnisse liegen hier aber insofern besonders günstig, als wir das Gesagte, auch wenn man eine grössere Genauigkeit von uns verlangt, im Wesentlichen aufrecht erhalten können. Wir müssen dann nur unser Uebergangsbereich entsprechend vergrössern und unsere numerischen Aussagen auf einen entsprechend kleineren Theil der Riemann'schen Fläche beschränken. Wird allerdings eine absolute Genauigkeit vorgeschrieben, so gelten sie für keinen im Endlichen gelegenen Theil der Fläche mehr.

Bemerken wir noch zum Schluss ausdrücklich, dass der Schwingungszustand im ersten und zweiten Blatte einen wesentlich verschiedenen Charakter hat; während wir die Lichtbewegung im ersten Blatte annähernd mit einer ebenen Welle vergleichen können, hat die Lichtbewegung des zweiten Blattes viel eher mit einer Kugelwelle Aehnlichkeit, welche von dem Windungspunkte auszugehen scheint. Es ist beinahe so, als ob von der Schwingungsenergie des ersten Blattes ein wenig durch den Windungspunkt hindurch in das zweite sickert und dort, ähnlich wie ein Stein auf einer Wasserfläche, ein System kreisförmiger Wellenringe erregt.

Alle diese Dinge werden im nächsten Paragraphen reale Bedeutung gewinnen.

§ 8.

Anwendung auf die Diffraction.

Wir behandeln in diesem Paragraphen das folgende einfachste Beugungsproblem: Es sei im Raume ein unendlich dünner, vollkommen undurchsichtiger, geradlinig begrenzter, ebener Schirm S vorhanden, dessen Kante die z -Axe bildet. Man lässt in einer zur Schirmkante

senkrechten Ebene paralleles Licht*) auffallen. Es soll in jedem Punkte des Raumes der Schwingungszustand ermittelt werden.

Wir zerlegen mit Herrn Poincaré**) den Zustand in zwei ein-fachere, aus denen sich jener umgekehrt zusammensetzen lässt und charakterisiren diese in der Terminologie der electromagnetischen Licht-theorie folgendermassen: In dem einen Falle (a) ist die *electriche*, in dem anderen (b) die *magnetische Schwingung* überall der z -Axe parallel gerichtet. Da die Maxwell'schen Gleichungen für ein nichtleitendes Medium (in unserem Falle die Luft) vollkommen symmetrisch gebaut sind, so können wir die ersten Gleichungen des § 1 eben sowohl als Differentialgleichungen für den elektrischen wie für den magnetischen Vector ansehen, In beiden Fällen ergibt sich vermöge $X = 0$, $Y = 0$: $\frac{\partial Z}{\partial z} = 0$. Der Zustand ist also von einer Coordinate (z) un-abhängig und wird von selbst zweidimensional. Die Differentialgleichungen für X , Y , Z reduciren sich, wenn wir von der Z -Componente zu der von t unabhängigen Function Z übergehen, auf

$$(1) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + k^2 Z = 0.$$

Die *Grenzbedingungen* längs S aber lauten in beiden Fällen ver-schieden. Wenn wir den Schirm mit Herrn Poincaré als vollkommenen Leiter voraussetzen, erhalten wir längs S

$$(2) \quad \begin{array}{l} Z = 0 \quad \text{im Falle (a),} \\ \frac{\partial Z}{\partial n} = 0 \quad \text{,, ,, (b).} \end{array}$$

Wir fügen in beiden Fällen die Bedingung hinzu, dass Z überall endlich sein soll.

Den vorstehenden Bedingungen kann man nun mit Hilfe unserer mehrdeutigen Lösungen sehr leicht genügen. Wir denken uns die xy -Ebene längs S aufgeschnitten und eine zweite Ebene wechselweise daran befestigt. Für die so entstehende zweiblättrige Riemann'sche Fläche bildet S einen „natürlichen Verzweigungsschnitt“; Verzweigungs-punkt ist der Durchstossungspunkt der Schirmkante mit der xy -Ebene.

*) Diese Ausdrucksweise bedarf der Erläuterung. Wenn wir, wie üblich, das Wort „paralleles Licht“ durch die Function u_0 von pag. 342 erklären, so müssen wir genau genommen sagen: *Paralleles Licht ist bei Vorhandensein eines Schirmes unmöglich*. Denn in dem parallelen Verlauf der Niveaulinien tritt eine durch S hervorgerufene Störung ein. Wir werden aber aus physikalischen Gründen voraussetzen dürfen, dass die gestörte Function ebenso wie u_0 überall endlich ist und sich im Unendlichen ähnlich wie u_0 verhält. Mehr soll mit dem obigen Ausdruck „paralleles Licht“ nicht ausgesagt werden.

**) Poincaré: Sur la polarisation par diffraction, Acta Math. E. 16, § 1.

Die beiden Blätter mögen wir als physikalisches Blatt und als Hilfsblatt unterscheiden. Das Azimuth φ werde von S aus gezählt, so dass im physikalischen Blatte $0 < \varphi < 2\pi$, im Hilfsblatte $-2\pi < \varphi < 0$ sei. Wir ziehen nun die zweiwerthige überall endliche Lösung u aus § 5 heran, welche wir, um die Abhängigkeit von der Einfallrichtung $\varphi - \varphi'$ hervortreten zu lassen, $u(\varphi')$ schreiben mögen und bilden:

$$\begin{aligned} Z &= u(\varphi') - u(-\varphi') \quad \text{im Falle (a),} \\ (3) \quad Z &= u(\varphi') + u(-\varphi') \quad \text{,, ,, (b).} \end{aligned}$$

Dann wird, wie aus Symmetriebetrachtungen hervorgeht, für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ im Falle (a) $Z = 0$, im Falle (b) $\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = 0$. Ferner genügt Z der Differentialgleichung (1) und der Bedingung überall endlich zu sein. Wir haben also in den Gleichungen (3) die Lösung unseres physikalischen Problems vor uns. Die von dem Schirme S hervorgerufenen *Beugungserscheinungen*, so können wir sagen, sind weiter nichts als „*Interferenzerscheinungen*“ zwischen den Wellenbewegungen $u(\varphi')$ und $u(-\varphi')$, von denen die eine in der Richtung $\varphi = \varphi'$ des physikalischen, die andere in der Richtung $\varphi = -\varphi'$ des Hilfsblattes einfällt.

Während wir im vorigen Paragraphen eine einzelne derartige Welle untersuchten, haben wir uns jetzt denjenigen Zustand klar zu machen, der aus der Superposition von zwei solchen Wellen entsteht. Wir markiren zu dem Zwecke zunächst die Verlängerung der beiden Einfallrichtungen, d. h. die Halbstrahlen $\varphi = \varphi' + \pi$ und $\varphi = -\varphi' + \pi$. Man bezeichnet den ersteren in der Optik als *Grenzzinie des geometrischen Schattens*; wir wollen sagen: des geometrischen Schattens *erster Art*. Den letzteren nennen wir entsprechend *Grenzzinie des geometrischen Schattens zweiter Art*.

Diese Bezeichnungen haben jedoch eine directe Bedeutung nur in dem extremen Falle der geometrischen Optik, wo die Wellenlänge geradezu gleich Null, unsere Constante k also unendlich wird. In diesem Falle wird unsere Function u , wie man aus Gleichung (5), pag. 359 unmittelbar abliest, auf der einen Seite der Schattengrenze gleich Null, auf der anderen Seite gleich der eindeutigen Lösung u_0 . Nur dieser Grenzfall entspricht der landläufigen Ansicht von der Natur des Lichtes, nach welcher es hinter einem undurchsichtigen Körper dunkel ist und seitlich die Lichtbewegung so vor sich geht, als ob der Körper nicht vorhanden wäre. Für uns, die wir die Wellenlänge als endliche, wenn auch kleine Grösse voraussetzen müssen, wird der Begriff „*Schatten*“ überhaupt illusorisch und das Wort „*Schattengrenze*“ bedeutet für uns nur eine Linie, längs welcher eine Näherungsformel ihre Gültigkeit verliert und durch eine andere ersetzt werden muss.

Wir sondern ferner zwei Uebergangsstreifen S_1 und S_2 je durch eine Parabel ab, welche bez. die Schattengrenze erster und zweiter Art zur Axe hat und welche durch die Gleichung (8), pag. 360 gegeben ist. Dabei bedeutet ε die bei der Berechnung der Beugungserscheinungen

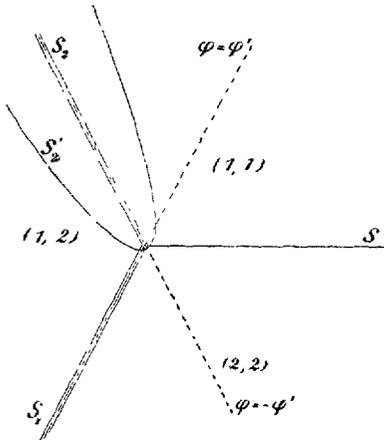


Fig. 5.

vorgeschriebene Genauigkeit, wie sie sich etwa aus der Genauigkeit der Beobachtungen ergibt. *)

Das physikalische Blatt zerlegt sich so in 5 Gebiete, die wir der Reihe nach mit $(1, 1)$, (S_2) , $(1, 2)$, (S_1) , $(2, 2)$ bezeichnen. Die Bezeichnungen $(1, 1)$, $(1, 2) \dots$ sind so gewählt, dass sie an die Benennungen 1^{tes} und 2^{tes} Blatt des vorigen Paragraphen anknüpfen und angeben, ob wir das betr. Gebiet zum 1^{ten} oder 2^{ten} Blatte der Function $u(\varphi')$ bez. $u(-\varphi')$ zu rechnen haben, wobei sich z. B. in $(1, 2)$ die erste Zahl auf $u(\varphi')$, die zweite auf $u(-\varphi')$

bezieht. Daraus folgt unmittelbar, welche Annäherungsformeln wir in den verschiedenen Gebieten anzuwenden haben. Wir haben nämlich für $u(\varphi')$ in den Gebieten $(1, 1)$ und $(1, 2)$ die Formel (10), in dem Gebiete $(2, 2)$ die Formel (9), für $u(-\varphi')$ dagegen in $(1, 1)$ die Formel (10), in $(1, 2)$ und $(2, 2)$ die Formel (9) von pag. 361 zu benutzen. Gehen wir noch von der Hilfsfunction Z zu der Schwingungs-

komponente $Z = \Re e \left(e^{\frac{2\pi i t}{\tau}} Z \right)$ über, so erhalten wir für Z die folgenden Näherungsformeln:

$$\text{in } (2, 2) \quad \frac{1}{4\pi} \cos \left[2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right) + \frac{\pi}{4} \right] \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \left\{ \frac{\pm 1}{\cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} \right\},$$

$$\text{in } (1, 2) \quad \cos 2\pi \left(\frac{r}{\lambda} \cos(\varphi - \varphi') + \frac{t}{\tau} \right) + \frac{1}{4\pi} \cos \left[2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right) + \frac{\pi}{4} \right] \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \left\{ \frac{\pm 1}{\cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} \right\},$$

*) Der Fig. 5 liegen folgende Verhältnisse zu Grunde: $\lambda = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$ (D -Linie), $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3}$. Die Begrenzungsparabeln von S_1 und S_2 werden so schmal, dass sie nur noch angedeutet werden konnten. Der Abstand ihrer Scheitel vom Windungspunkte ist ungefähr $e = \frac{1}{300} \text{ mm}$. Für das Gebiet S_2' (vgl. pag. 372) ergibt sich $e' = 1 \text{ mm}$.

$$\text{in } (1, 1) \quad \cos 2\pi \left(\frac{r}{\lambda} \cos(\varphi - \varphi') + \frac{t}{z} \right) \mp \cos 2\pi \left(\frac{r}{\lambda} \cos(\varphi + \varphi') + \frac{t}{z} \right) \\ + \frac{1}{4\pi} \cos \left[2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{z} \right) + \frac{\pi}{4} \right] \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \left\{ \frac{\pm 1}{\cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} \right\}.$$

Dabei gelten die oberen Zeichen im Falle a), die unteren im Falle b).

An diese Formeln knüpfen sich einige interessante Bemerkungen an.

Betrachten wir zunächst das *Gebiet* (2, 2) (das *Gebiet des geometrischen Schattens*, wie man gewöhnlich sagt). Die Lichtbewegung trägt hier durchaus den Charakter derjenigen, welche im vorigen Paragraphen als Wellenbewegung des zweiten Blattes beschrieben wurde.

In der Sprache der geometrischen Optik*) würde man die Formel (2, 2) folgendermassen deuten: *Von dem Windungspunkte* $r = 0$ *aus pflanzen sich nach allen Seiten innerhalb des Gebietes* (2, 2) *Strahlen in der Richtung des Radiusvector fort, gerade so als ob der Windungspunkt ein leuchtender Punkt wäre.*

Der Schwingungszustand im einzelnen Strahle ist, wie bei einer gewöhnlichen ebenen Welle gegeben durch $\cos \left[2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{z} \right) + \delta \right]$, wo der Term $\delta = \frac{\pi}{4}$ die Phase des Lichtes bestimmt. Die Amplitude des Lichtes nimmt mit wachsendem r ab wie $\sqrt{\frac{1}{r}}$, also in demselben Verhältniss wie nach der Auffassung der geometrischen Optik das Licht eines leuchtenden Punktes in einem ebenen Problem. Die Amplitude ist im Allgemeinen sehr gering wegen des Factors $\sqrt{\lambda}$, sie wechselt überdies mit der Richtung des Strahles nach dem Gesetz

$$\left\{ \frac{\pm 1}{\cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} \right\}.$$

So würde die geometrische Optik sagen und ebenso fasst unser Auge die Sache auf, wie denn überhaupt unsere Sehnerven genau auf die Begriffe der geometrischen Optik eingespielt zu sein scheinen. Unser Auge schreibt die Strahlen wirklich einer Lichtquelle zu, welche in dem Windungspunkte supponirt wird, d. h. der Schirmrand erscheint, vom Gebiete des geometrischen Schattens aus gesehen, als feine leuchtende Linie. Das ist natürlich eine optische Täuschung. In Wahrheit giebt es im Windungspunkte keine Unendlichkeitsstelle. Der Fehler rührt daher, dass das Auge die analytische Fortsetzung der Näherungsformel

*) Ich wende dieses Wort in etwas erweitertem Sinne auf jene ganze Betrachtungsweise an, welche den optischen Zustand in einzelne sich unabhängig fortpflanzende Strahlen zerlegt.

(2, 2) über die Uebergangsparabel hinaus bildet, was nicht erlaubt ist. *Das Auge sollte die analytische Fortsetzung nicht von der Näherungsformel, sondern von der exacten Formel bilden.*

Vom Standpunkte der geometrischen Optik ist die merkwürdige Lichtvertheilung im Gebiete (2, 2) ein Ausnahmezustand, dessen Auftreten man als *Beugung* bezeichnet. Wir können, wenn wir wollen, diesen Namen annehmen und sagen: Im geometrischen Schatten befindet sich *gebeugtes* Licht.

Gehen wir nun zum Gebiete (1, 2) über. Hier zerlegt sich unsere Näherungsformel in 2 Terme. Der erste hat genau die Gestalt einer ebenen Welle; er kann auch so geschrieben werden:

$$\cos 2\pi \left(\frac{x \cos \varphi' + y \sin \varphi'}{\lambda} + \frac{t}{\tau} \right).$$

Dieser Term stellt dasjenige Licht dar, welches wir erzeugen wollten, wenn wir sogenanntes paralleles Licht auf den Schirm auffallen liessen, welches wir aber nicht erzeugen konnten wegen der Anwesenheit des Schirmes. Der zweite Term hat dieselbe Gestalt, wie Formel (2, 2).

Die geometrische Optik würde in diesem Gebiete von zwei Lichtarten sprechen, von einfallendem und von gebeugtem Licht. Das erstere würde sie in Strahlen zerlegen, welche alle *parallel* laufen, das zweite in solche, welche im *Windungspunkte* *convergiren*. *Ebenso sieht auch unser Auge die Sache an.* Wenn es sich auf *Unendlich* accomodirt, erkennt es nur das Licht des *ersten* Terms; wenn es sich auf den *Windungspunkt* accomodirt, sieht es nur den *zweiten* Term und meint den Schirmrand leuchten zu sehen. Da sich in unserer Theorie die beiden Terme so glatt von einander absondern, können wir sie auch mit besonderen Namen belegen und den ersten *einfallendes*, den zweiten *gebeugtes* Licht nennen.

Im Gebiete (1, 1) endlich sondert sich unsere Näherungsformel in drei verschiedene Terme. Die beiden ersten haben die Gestalt von gewöhnlichem parallelen Lichte. Das parallele Licht des ersten Termes hat die Einfallrichtung $\varphi = \varphi'$, das des zweiten die Richtung $\varphi = -\varphi'$. Die geometrische Optik würde den ersten Term als *einfallendes*, den zweiten als *reflectirtes*, den dritten als *gebeugtes* Licht bezeichnen. *Bei dem Schvorgange sondern sich diese Terme ebenso von einander ab, wie in unseren Formeln.*

Im Grunde ist unsere Auffassung selbstverständlich die, dass unsere Function ebenso wie der physikalische Zustand, den sie darstellt, etwas *Einheitliches* ist, welches durch die im Probleme liegenden Randbedingungen bestimmt wird. Wenn wir einzelne Bestandtheile desselben herausgreifen und mit besonderen Namen belegen, so geschieht dieses nur der Bequemlichkeit wegen und dient kaum dem Verständniss des Ganzen.

Die Formeln von p. 368, 369 sind im Wesentlichen genau diejenigen des Herrn Poincaré*). Das Merkwürdige dabei ist, dass bei Herrn Poincaré die ursprüngliche Problemstellung eine ganz andere ist, wie bei uns. Er denkt sich nämlich das Licht durch eine Linse auf den Schirmrand concentrirt, anstatt wie wir eine im Unendlichen ebene Welle auffallen zu lassen. Ferner rechnet Herr Poincaré von Anfang an mit Näherungsformeln, indem er höhere Potenzen von λ vernachlässigt. Dadurch geht aber das Criterium für den Gültigkeitsbereich der Näherungsformeln verloren und es entsteht die Schwierigkeit**), dass sich (wegen der Factoren $\frac{1}{\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}}$, bez. $\frac{1}{\cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}}$) in der Schattengrenze erster bez. zweiter Art *Unendlichkeitsstellen* ergeben, welche physikalisch unmöglich sind. *Diese Schwierigkeit findet durch unsere Theorie ihre vollständige Erledigung.* Denn wir wissen, dass die Gültigkeit der Poincaré'schen Formeln nur bis an die *Parabeln*, nicht bis an die *Parabelaxen* heranreicht.

Wir wenden uns schliesslich zu den Uebergangsstreifen, insbesondere zu dem Gebiete S_1 . Hier müssen wir auf die exacte Formel (5) von pag. 359 recurriren. Um Anschluss an Kirchhoff's Optik zu gewinnen, wollen wir die Functionen einführen:

$$M(x) = \int_x^\infty \cos(x^2 - \tau^2) d\tau = \Re e \left(e^{ix^2} \int_x^\infty e^{-i\tau^2} d\tau \right),$$

$$N(x) = \int_x^\infty \sin(x^2 - \tau^2) d\tau = \Im m \left(e^{ix^2} \int_x^\infty e^{-i\tau^2} d\tau \right).$$

Die Gleichung (5), pag. 359 können wir auch so schreiben

$$(4) \quad u = e^{-\frac{2\pi ir}{\lambda} + \frac{i\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-r}^{+\infty} e^{-i(x^2 - \tau^2)} d\tau.$$

Bilden wir nun im Falle a) und b) die Function Z aus Gleichung (3) und weiterhin die Schwingungscomponente $Z = \Re e \left(e^{\frac{2\pi it}{\lambda}} Z \right)$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \left[2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right) - \frac{\pi}{4} \right] \left(M(-T_1) \mp M(-T_2) \right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \left[2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right) - \frac{\pi}{4} \right] \left(N(-T_1) \mp N(-T_2) \right), \\ T_1 &= \sqrt{\frac{4\pi r}{\lambda}} \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{4\pi r}{\lambda}} \cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}. \end{aligned}$$

*) Poincaré: l. c. p. 318.

**) l. c. pag. 314.

Diese Gleichungen geben den exacten Ausdruck für den Schwingungszustand zu einer beliebigen Zeit und zwar natürlich nicht nur in den Uebergangsstreifen, sondern in allen Punkten der Riemann'schen Fläche. Wir berechnen daraus den Mittelwerth der Schwingungsenergie während der Dauer einer Schwingung, die sog. „Intensität des Lichtes“, d. h.

$$J = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} Z^2 d\tau.$$

Es ergibt sich einfach

$$(5) \quad \frac{1}{2\pi} (\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2), \quad \mathfrak{M} = M(-T_1) \mp M(-T_2), \quad \mathfrak{N} = N(-T_1) \mp N(-T_2).$$

Wir können diesen Ausdruck für den grössten Theil des Uebergangsstreifens S_1 durch einen einfacheren ersetzen, ohne die vorgeschriebene Genauigkeit zu beeinträchtigen. Zunächst sondern wir von S_1 denjenigen Theil ab, der gleichzeitig zu S_2 gehört. In dem übrig bleibenden Theile ($S_1 - S_2$) können wir $M(-T_2)$ und $N(-T_2)$ durch Näherungsformeln ersetzen. Entwickeln wir nämlich das in (4) fungirende Integral nach Gleichung (6), pag. 359, so dürfen wir die Entwicklung mit dem ersten Gliede abbrechen und erhalten:

$$M(-T_2) = 0, \quad N(-T_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{|T_2|}.$$

Ferner beschreiben wir ausser der Parabel, welche das Gebiet S_2 begrenzt und welche der Genauigkeit ε entspricht, eine zweite Parabel, welche der Genauigkeit ε^2 entspricht und ein Gebiet S_2' begrenzt. Ihre Dimensionen sind nach Gleichung (8), pag. 360 bestimmt durch die Grösse $\varepsilon' = \frac{\lambda}{|16\pi\varepsilon^2|}$. In allen Punkten, welche ausserhalb dieser Parabel

liegen, gilt die zu (7) pag. 360 analoge Ungleichung: $\frac{1}{4|T_2|^2} < \varepsilon^2$ oder $\frac{1}{2|T_2|} < \varepsilon$. Sondern wir von S_1 auch dieses Gebiet S_2' ab, so wird in dem übrig bleibenden Theile $S_1 - S_2'$ auch $N(-T_2)$ für unsere Zwecke merklich gleich Null. Daher reducirt sich der Ausdruck für die Intensität auf den folgenden;

$$(6) \quad 2\pi J = M^2(-T_1) + N^2(-T_1),$$

welcher in dem Gebiete $S_1 - S_2'$ den wahren Werth bis auf einen erlaubten Fehler richtig darstellt.

Hiermit vergleichen wir den von Kirchhoff*) gegebenen Ausdruck:

$$(7) \quad CJ' = M^2(u) + N^2(u).$$

In diesem bedeutet C eine unbestimmt bleibende Constante, welche in die Maasseinheit der Intensität aufgenommen wird und von der wir

*) Kirchhoff: Math. Optik, 7te Vorlesung § 3.

absehen können. Die Grösse u ist durch die Gleichung (11a) bei Kirchhoff definirt. Setzen wir darin, um auf die Bedingungen und Bezeichnungen unseres Problems zu kommen:

$$z_1 = \infty, x_0 = r \cos(\varphi - \varphi' + \pi), z_1 = r \sin(\varphi - \varphi' + \pi),$$

so ergibt sich

$$u^2 = \frac{r\pi}{\lambda} \frac{\sin^2(\varphi - \varphi' + \pi)}{\cos(\varphi - \varphi' + \pi)},$$

während bei uns ist:

$$T_1^2 = \frac{4r\pi}{\lambda} \cos^2 \frac{\varphi - \varphi'}{2}.$$

Diese beiden Grössen werden für die Grenze des geometrischen Schattens erster Art identisch. In der That, entwickeln wir sie nach aufsteigenden Potenzen der Grösse $\vartheta = \varphi - \varphi' + \pi$, welche man als *Beugungswinkel* bezeichnet, so erhalten wir die Reihen:

$$u^2 = \frac{r\pi}{\lambda} \left(\vartheta^2 + \frac{\vartheta^4}{6} + \dots \right),$$

$$T_1^2 = \frac{r\pi}{\lambda} \left(\vartheta^2 - \frac{\vartheta^4}{12} + \dots \right),$$

welche bis auf Glieder 4^{ter} Ordnung exclusive übereinstimmen. Wir schliessen daraus, dass wir in der Umgebung der Schattengrenze ein von Null verschiedenes endliches Gebiet abgrenzen können, in welchem sich die Grössen T_1 und u um weniger als eine beliebige endliche Grösse unterscheiden. Da die Ausdrücke (6) und (7) stetige Functionen von T_1 bez. von u sind, so dürfen wir ferner sagen: Wir können in der Nähe der Schattengrenze ein von Null verschiedenes Gebiet abgrenzen, in welchem der Unterschied zwischen der Kirchhoff'schen Formel und unserer Formel unterhalb der erlaubten Fehlergrenze liegt. Da endlich unsere Formel (6) von der exacten Formel in genügender Entfernung] vom Windungspunkte (d. h. in solchen Punkten, die ausserhalb S_2' liegen) sich um weniger als ϵ unterscheidet, so fahren wir fort: *Die Kirchhoff'sche Formel giebt den wahren Werth der Intensität in allen denjenigen Punkten mit genügender Genauigkeit wieder, welche 1) genügend nahe an der Schattengrenze liegen und 2) genügend weit von dem Windungspunkte entfernt sind.*

Wir kommen somit zu dem merkwürdigen Resultat, dass wir die Ergebnisse der älteren Beugungstheorie in gewissem Umfange bestätigen können, während wir die Methode, durch welche sie abgeleitet werden, als ganz unzulässig erklären müssen. Dabei finden sich auch die Bedingungen, welche soeben für die Gültigkeit der Kirchhoff'schen Formel angegeben wurden, in der älteren Beugungstheorie vor, nur dass sie dort nicht wie hier numerisch präcisirt werden können. In der That

macht die ältere Beugungstheorie nur den Anspruch, die Beugungserscheinungen in unmittelbarer Nähe der Schattengrenze und in sehr grosser Entfernung vom Schirmrande richtig darzustellen.

Das Gültigkeitsgebiet der Kirchhoff'schen Formeln ist hiernach nur ein sehr kleines; ausserhalb desselben werden sie merklich falsch. Hier treten vielmehr die *Poincaré'schen Formeln* in ihr Recht. Indem unsere Theorie die einen und die anderen als jeweils geeignete Approximationen der exacten Formeln erscheinen lässt, bildet sie die Brücke zwischen jenen beiden Theorien und weist beiden ihren beschränkten Gültigkeitsbereich zu.

Die Frage nach der *experimentellen Bestätigung* unserer Theorie können wir hiernach mit einem Worte erledigen. Einerseits haben sich die Kirchhoff'schen Formeln bei Beobachtungen unter kleinem Beugungswinkel vielfach bewährt; andererseits vergleicht Herr Poincaré seine Formeln mit den unter grossen Beugungswinkeln angestellten Beobachtungen von Gouy und findet im Wesentlichen eine Bestätigung derselben. *In demselben Umfange, d. h. sowohl für kleine als für grosse Beugungswinkel wird also auch unsere Theorie durch die Erfahrung bestätigt.*

Ganz besonders eignen sich zu einem Vergleich mit unserer Theorie die Beobachtungen des Herrn Maey, welche sich durch Einfachheit des Beobachtungsarrangements und durch Genauigkeit der auch quantitativ durchgeführten Messungen auszeichnen*). Hierauf, sowie auf weitere physikalische Consequenzen gedenke ich an anderer Stelle einzugehen. Ferner hoffe ich demnächst auch solche Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ mittheilen zu können, welche auf einer Riemann'schen Fläche mit zwei im Endlichen gelegenen bez. mit unendlich vielen Verzweigungspunkten eindeutig sind. Diese würden dann eine exacte Behandlung solcher Beugungserscheinungen gestatten, wie sie durch einen Spalt bez. durch ein Gitter hervorgerufen werden.

Göttingen, im Sommer 1895.

*) Vgl. Wiedemann's Annalen 49, 1893.