Ueber Riemann'sche Formenschaaren auf einem beliebigen algebraischen Gebilde.

Von

Ernst Ritter in Göttingen.

Einleitung.

Eine lineare Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dz^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \cdots + p_{n-1} \frac{dy}{dz} + p_n y = 0,$$

deren Coefficienten algebraische Functionen eines bestimmten algebraischen Gebildes vom Geschlechte p sind, definirt uns eine gewisse Functionenschaar y, deren sämmtliche Functionen sich aus irgend n linear unabhängig ausgewählten Functionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ linear mit constanten Coefficienten zusammensetzen:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n.$$

Die Functionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ erleiden eine gewisse discontinuirliche Gruppe linearer homogener Substitutionen, wenn die Variable z auf dem algebraischen Gebilde entweder gewisse singuläre Punkte umkreist oder Periodenwege beschreibt, die nicht auf Punkte zusammenzuziehen sind.

Setzt man

$$(2) \qquad Y = q\left(q_1 \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + q_2 \frac{d^{n-2} y}{dz^{n-2}} + \cdots + q_n y\right),$$

unter $q_1, q_2, \ldots q_n$ beliebige algebraische, unter q eine beliebige multiplicative Function des Gebildes verstanden, so genügt auch Y einer linearen Differentialgleichung derselben Art und stellt ebenfalls eine sich linear substituirende Functionenschaar auf dem algebraischen Gebilde vor, und zwar eine solche, deren Substitutionen sich von den entsprechenden Substitutionen der Functionenschaar y nur durch simultane Multiplication aller Zweige mit bestimmten Constanten, den Multiplicatoren von q, unterscheiden; umgekehrt, wenn die Substitutionen einer Functionenschaar Y von denen einer Schaar y sich nur in der geschilderten Weise unterscheiden, hängt sie mit y durch eine Gleichung von der Form (2) zusammen.

Alle Differentialgleichungen (1), welche sich durch Transformationen der Gestalt (2) in einander überführen lassen, betrachten wir mit Riemann als zu einer „Classe" gehörig und wollen sie untereinander „verwandt" nennen. Ebenso sprechen wir von „verwandten Functionenschaaren", oder von einer „Classe von Functionenschaaren", indem wir alle Functionenschaaren zusammenfassen, deren Substitutionen sich nur um simultane Multiplicationen aller Zweige mit Constanten unterscheiden.

Riemann unternimmt in dem nachgelassenen Fragment: „Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten" (20. Febr. 1857) die Aufgabe, Functionenclassen der genannten Art genauer zu untersuchen. Er stellt sich dabei, genau wie in seiner berühmten Arbeit über die P-Function, auf den Standpunkt, nicht von der Formel, der Differentialgleichung, auszugehen, sondern von den charakteristischen functionentheoretischen Eigenschaften der Functionen.

Indem auch wir die Riemann'sche Betrachtungsweise annehmen, werden wir als gegeben ansehen:

1) Ein bestimmtes algebraisches Gebilde vom Geschlechte p und auf diesem eine endliche Anzahl s von singulären Punkten $e_i\,(i=1,2,..s)$.

2) $2p$ lineare homogene Substitutionen von n Variablen, welche bestimmten $2p$ unabhängigen Periodenwegen entsprechen und s ebensolche Substitutionen, welche den Umkreisungen der einzelnen singulären Punkte e_i entsprechen.

Da das Verhalten einer Functionenschaar in einem Punkte e_i durch Angabe der zugehörigen Substitution noch nicht völlig bestimmt ist, so geben wir auch noch, natürlich in Einklang mit den Substitutionscoefficienten, die Exponenten der Schaar in jedem Punkte an, d. h. die Wurzeln der „determinirenden Fundamentalgleichung" von Fuchs.

Den Beweis für die Existenz solcher Formenschaaren bei beliebig vorgegebener Gruppe wollen wir als durch Poincaré's Construction der „fonctions zétafuchsiennes" erbracht ansehen. Es handelt sich für mich in dieser Arbeit nur darum, die Beziehungen zwischen den verschiedenen Functionenschaaren einer gegebenen Classe näher zu erforschen, wobei wir nur algebraische Hülfsmittel heranzuziehen brauchen.

Diese Untersuchung wird aber für die transcendenten Untersuchungen, z. B. für die Theorie der „homomorphen Functionen", wie ich nach Herrn Klein's Vorschlag die „fonctions zétafuchsiennes" von Poincaré nennen will, in gleicher Weise die nothwendige Grundlage liefern, wie die Theorie der multiplicativen Formen für die automorphen Functionen.

Schon dieser Vergleich zeigt uns die Nothwendigkeit, von den Functionen zur formentheoretischen Formulirung überzugehen, statt der Functionenschaaren also Formenschaaren zu betrachten, welche sich bei Umläufen linear substituiren. Dabei werden wir uns aber unbedingt auf die Theorie der multiplicativen Formen auf einem algebraischen Gebilde stützen müssen, welche ich in Math. Ann. Bd. 44, 1893 entwickelt habe. Ich will diese Arbeit, da ich sehr oft auf dieselbe hinzuweisen habe, kurz mit (44) citiren.

§ 1.

Definitionen.

Wir denken uns die vorgelegte Riemann'sche Fläche von irgend einem nichtsingulären Punkte aus durch p Paare von Rückkehrschnitten $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ so in ein einfach zusammenhängendes Flächenstück verwandelt, dass sie sich ohne Zerreissung nach Art der Figur in (44), Seite 264 in die Ebene ausbreiten lässt, und dass die $4p$ Ufer der Rückkehrschnitte in der angedeuteten Weise aufeinander folgen.

Ferner ziehe ich von der Ecke zwischen A_p^+ und B_1^- noch s Einschnitte nach den s singulären Punkten $e_1, e_2, \ldots e_s$.

Es sei z irgend eine m-werthige algebraische Function der Fläche, deren Unendlichkeitsstellen $\infty_1, \infty_2, \ldots \infty_m$ sowohl untereinander, wie von den Punkten $e_1, e_2, \ldots e_s$ getrennt liegen mögen.

Ich spalte z in zwei theilerfremde ganze multiplicative Formen $z_1 : z_2$, welche als unabhängige Variable dienen sollen. Um das Verhalten irgend einer Form gegenüber geschlossenen Wegen des Werthsystems z_1, z_2 vollständig zu charakterisiren, ist es zweckmässig, auf der Riemann'schen Fläche noch m weitere Schnitte nach den Punkten $z_2 = 0$, d. h. $\infty_1, \infty_2, \ldots \infty_m$ zu legen. Irgend einen auf dem algebraischen Gebilde geschlossenen Weg des Werthsystems z_1, z_2, bei welchem der Werth z_2 für sich den Werth $z_2 = 0$ $\mathfrak{g}_2$-mal umkreist, kann ich mir zerlegen in einen geschlossenen Umlauf des Quotienten $z = \frac{z_1}{z_2}$ mit festgehaltenem Werthe von z_2 und in $\mathfrak{g}_2$ simultane Umläufe von z_1 und z_2 um 0. Den Weg des Quotienten z zerlege ich weiter in eine Aufeinanderfolge von Periodenwegen $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, welche auf der zerschnittenen Fläche von einem Ufer $A_\varkappa^-$ zu $A_\varkappa^+$, bezw. von $B_\varkappa^-$ nach $B_\varkappa^+$ verlaufen, von Umkreisungen der Punkte e_i, die von dem negativen Ufer des betreffenden Einschnitts zum positiven gehen, und in Umkreisungen der m Punkte ∞, deren Gesammtzahl $\mathfrak{g}$ sein möge.

Es seien jetzt

$$\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n$$

n linear unabhängige Zweige einer auf dem algebraischen Gebilde nur in den Punkten $e_1, e_2 \ldots e_s$ verzweigten Formenschaar Π vom Grade δ in den multiplicativen Primformen, in z_1, z_2 gemessen also vom Grade $\frac{\delta}{m}$.

Wenn bei festgehaltenem Werthe von z_2 die Variable z einen Periodenweg $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ oder eine Umkreisung eines Punktes e_i ausführt, so soll das System $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n$ je eine bestimmte homogene lineare Substitution $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, S_i erfahren; wenn z einen der Punkte $\infty_1, \infty_2, \ldots \ldots \infty_m$ umkreist und z_2 festgehalten wird, müssen sich alle Zweige simultan mit $e^{-2i\pi\frac{\delta}{m}}$ multipliciren, wenn anders die Formenschaar in den Punkten $z_2 = 0$ unverzweigt sein soll.

Eine solche Formenschaar will ich, weil die entsprechenden Functionen zuerst von Riemann in der oben genannten nachgelassenen Arbeit definirt und besprochen sind, kurz als „*Riemann'sche Formenschaar*“ benennen.

Die Substitutionen A_k, B_k, S_i müssen, da ein Umlauf des z um den ganzen Rand der zerschnittenen Fläche sich auf die Umkreisung eines beliebigen nichtsingulären Punktes zusammenziehen lässt, der Relation genügen:

$$B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} A_1 \,.\, B_2 A_2^{-1} B_2^{-1} A_2 \ldots B_p A_p^{-1} B_p^{-1} A_p \,.\, S_1 S_2 \,.\, S_s = e^{2i\pi\delta}.$$

In der Umgebung einer Stelle e_i möge die Formenschaar, natürlich im Einklang mit den Coefficienten der betreffenden Substitution S_i, die Exponenten

$$\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$$

besitzen; die Summe

$$\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \cdots + \lambda_{in}$$

heisse λ_i.

Dann ist die Determinante der Substitution S_i gleich $e^{2i\pi\lambda_i}$.

Dann folgt aber aus der Fundamentalrelation der Substitutionen, dass

$$\sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i - n\delta \quad \textit{eine ganze Zahl}$$

sein muss.

An irgend einer von den Stellen e_i verschiedenen Stelle besitzt die Formenschaar ganzzahlige Exponenten, von denen keine zwei einander gleich sind:

$$l_1 < l_2 < l_3 < \cdots < l_n.$$

Eine Stelle mit den Exponenten $0, 1, 2, \ldots n-1$ heisst eine „*gewöhnliche Stelle*“.

Haben die Exponenten andere Werthe, so heisst die Stelle ein „*Nebenpunkt*“ der Formenschaar und zwar von der *Multiplicität*

$$\varrho = l_1 + l_2 + \cdots + l_n - \frac{n(n-1)}{2}.$$

Die Multiplicität eines Nebenpunktes kann positiv, negativ oder auch 0 sein.

Es wird aber vorausgesetzt, dass nur eine endliche Anzahl von Nebenpunkten existiren und dass die Exponenten in jedem Nebenpunkt endliche Werthe haben. Dann ist auch die Multiplicität jedes Nebenpunktes eine endliche Zahl.

Ein Nebenpunkt, dessen niederster Exponent $l_1 = 0$ ist, heisst ein „*reiner Nebenpunkt*“, ein solcher mit $l_1 > 0$ ein l_1-facher *Nullpunkt* und mit $l_1 < 0$ ein $(-l_1)$-facher *Unendlichkeitspunkt* der Formenschaar Unterscheiden sich die Exponenten eines Nullpunktes oder eines Unendlichkeitspunktes jeder folgende vom vorhergehenden nur um eine Einheit, so heisst der Punkt ein „*reiner Nullpunkt*“ bezw. ein „*reiner Unendlichkeitspunkt*“.

Jeder beliebige Nebenpunkt kann aufgefasst werden als Combination eines reinen Nebenpunktes mit einem reinen Nullpunkt oder einem reinen Unendlichkeitspunkt.

Ein l-facher reiner Nullpunkt zählt als Nullpunkt mit der Multiplicität nl, ein l-facher reiner Unendlichkeitspunkt mit der Multiplicität $-nl$.

§ 2.

Bestimmung und Anzahl der Nebenpunkte.

Es seien y_1, y_2 die Werthe von z_1, z_2 in einem willkürlichen Hülfspunkte, und $\underset{z,y}{D}$ folgender Differentiationsprocess:

$$\underset{z,y}{D} = -\frac{y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}}{(zy)}.$$

Diese Differentiation ist zwar von der Wahl des Hülfspunktes abhängig, doch gelten einfache Formeln für den Uebergang von einem Hülfspunkt y zu einem andern y'. Wenn nämlich r den Grad einer Form F in z_1, z_2 gemessen bedeutet, so ist:

$$\begin{aligned}\underset{z,y}{D^k} F = \underset{zy'}{D^k} F &+ \binom{k}{1}(r-k+1)\left(\frac{(yy')}{(zy)(zy')}\right)\underset{zy'}{D^{k-1}} F \\ &+ \binom{k}{2}(r-k+1)(r-k+2)\left(\frac{(yy')}{(zy)(zy')}\right)^2 \underset{z,y'}{D^{k-2}} F + \cdots \\ &+ \binom{k}{k}(r-k+1)\cdots r\left(\frac{(yy')}{(zy)(zy')}\right)^k \cdot F.\end{aligned}$$

Durch ein- und mehrmalige Anwendung des Symbols $\underset{zy}{D}$ auf eine Formenschaar Π erhält man weitere Formenschaaren, welche bei den Umläufen der Variablen z_1, z_2 genau dieselben Substitutionen erfahren, wie Π selbst. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \Pi_1, & \underset{zy}{D}\Pi_1, & \ldots & \underset{zy}{D^{n-1}}\Pi_1 \\ \Pi_2, & \underset{zy}{D}\Pi_2, & \ldots & \underset{zy}{D^{n-1}}\Pi_2 \\ \vdots & & & \\ \Pi_n, & \underset{zy}{D}\Pi_n, & \ldots & \underset{zy}{D^{n-1}}\Pi_n \end{vmatrix}$$

oder kürzer geschrieben

$$\left| \underset{zy}{D^k}\Pi_h \right| \quad \begin{array}{l} k = 0, 1, \ldots n-1 \\ h = 1, 2, \ldots n \end{array}$$

wird sich daher bei Umläufen der Variablen auf der Riemann'schen Fläche nur mit Constanten multipliciren, ist also eine multiplicative Form der Fläche.

Man sieht leicht, dass für die Determinante der Hülfspunkt y des Differentiationsprocesses $\underset{zy}{D}$ keine besondere Rolle mehr spielt, denn die Determinante behält dieselbe Gestalt, wenn man vermittelst der oben angegebenen Formel y' statt y einführt.

Es ist das Verhalten der Determinante an den einzelnen Stellen der Ebene genauer zu untersuchen. Man findet ohne Schwierigkeit folgende Resultate:

1) In einem gewöhnlichen Punkte ist die Determinante endlich und von 0 verschieden.

2) In einem ϱ-fachen Nebenpunkte verschwindet die Determinante ϱ-fach, wenn der Punkt nicht zugleich ein Verzweigungspunkt der Fläche ist.

3) In einem singulären Punkte mit der Exponentensumme λ_i verschwindet die Determinante in der Ordnung $\lambda_i - \frac{n(n-1)}{2}$.

4) In einem ν-blättrigen Verzweigungspunkt der Fläche, welcher der Allgemeinheit halber zugleich ϱ-facher Nebenpunkt der Formenschaar sein möge, verschwindet die Determinante in z gemessen in der Ordnung $\frac{\varrho}{\nu} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{\nu} - 1\right)$, also auf der Fläche gemessen in der Ordnung $\varrho - \frac{n(n-1)}{2}(\nu - 1)$.

Hierbei ist Verschwinden in negativer Ordnung als Unendlichwerden aufzufassen.

Verstehen wir jetzt unter $G(z_1, z_2)$ die Verzweigungsform der Fläche, d. h. eine ganze multiplicative Form vom Grade $2p - 2 + 2m$, welche an den Verzweigungspunkten der Fläche auf der Fläche gemessen $(\nu - 1)\cdot$fach verschwindet, (44, S. 270) so hat der Ausdruck:

$$\Delta = G(z_1, z_2)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \left| D^k \Pi_h \right|_{zy} \quad \begin{matrix} k = 0, 1, \ldots n-1 \\ h = 1, 2, \ldots n \end{matrix}$$

folgende Eigenschaften:

1) Δ ist eine multiplicative Form vom Grade $n\delta + n(n-1)(p-1)$.

2) Δ verschwindet an einem Punkte e_i in der Ordnung $\lambda_i - \frac{n(n-1)}{2}$.

3) Δ verschwindet an einem ϱ-fachen Nebenpunkte in der Ordnung ϱ.

4) Δ ist an jedem andern Punkte auf der Fläche unverzweigt, endlich und von 0 verschieden.

Hieraus folgt nun, da der Grad einer multiplicativen Form gleich der Anzahl ihrer 0-Stellen ist, jede mit ihrer Multiplicität gerechnet, wenn jetzt ϱ die Summe der Multiplicitäten aller Nebenpunkte bedeutet, die fundamentale Gleichung:

$$n\delta + n(n-1)(p-1) = \varrho + \sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i - s\frac{n(n-1)}{2}$$

oder

$$\varrho = n\delta + n(n-1)(p-1) - \sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i + s\frac{n(n-1)}{2}.$$

§ 3.

Verwandte Formenschaaren.

Zwei Formenschaaren heissen *„verwandt“* oder zur selben *„Riemann'schen Formenclasse“* gehörig, wenn ihre entsprechenden Substitutionen sich höchstens um simultane Multiplicationen aller Zweige mit Constanten unterscheiden.

Es thut jedoch der Allgemeinheit der Betrachtung keinen Abbruch, wenn ich nur solche Formenschaaren vergleiche, welche in den Substitutionen S_i genau übereinstimmen und welche bei Umläufen um jeden von den e_i verschiedenen Punkt sich genau reproduciren.

Denn wenn die Substitutionen S_i nicht genau übereinstimmen, sondern sich um simultane Multiplicationen mit Constanten unterscheiden, oder wenn die Zweige einer Formenschaar sich auch bei Umlauf um einen von den e_i verschiedenen Punkt simultan mit einer Constanten multipliciren, so kann ich durch Multiplication mit geeigneten Potenzen von multiplicativen Primformen bewirken, dass die Substitutionen S_i genau gleich werden und dass die e_i die einzigen Verzweigungspunkte auf der Fläche sind.

Die entsprechenden Exponenten verwandter Formenschaaren an den Stellen e_i können sich dann nur um ganze Zahlen unterscheiden.

Bildet man die Fundamentalrelation der Substitutionen (S. 160) für zwei in diesem Sinne verwandte Formenschaaren, so stimmen die linken Seiten der Relationen genau überein, da ja die simultanen Multiplicationen, um welche die A_x, B_x sich unterscheiden können, mit allen Substitutionen vertauschbar sind und sich daher ganz herausheben. Dann können aber auch die rechten Seiten nicht verschieden sein, und wir haben mithin den Satz:

Die Grade verwandter Formenschaaren können sich nur um ganze Zahlen unterscheiden.

Alle die bisherigen Definitionen und Sätze gelten uneingeschränkt, welcher Art auch die einzelnen Substitutionen S_i sein mögen. Für die nun folgenden Betrachtungen wird es aber vielfach bequemer sein, zunächst den Fall auszuschliessen, dass mehrere Elementartheiler einer Substitution S_i (vergl. Frobenius, Ueber die Elementartheiler der Determinanten, Berl. S. B. 1894, p. 31) dieselbe Nullstelle haben; d. h. wenn unter den Exponenten $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots \lambda_{in}$ eines Punktes e_i solche existiren, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, soll immer nur dem grössten dieser Exponenten ein Fundamentalzweig ohne logarithmische Glieder in der Entwicklung entsprechen. Welche Modificationen unsere Sätze in den ausgeschlossenen Ausnahmefällen erfahren, werden wir nachträglich leicht aussprechen können, während die Berücksichtigung derselben von vornherein zu manchen Weitläufigkeiten in der Darstellung führen würde.

Es soll jetzt ein bestimmtes in der Classe vorkommendes Exponentensystem

$$\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots \lambda_{in} \quad (i = 1, 2, \dots s)$$

als „*Normalexponentensystem*" zu Grunde gelegt werden.

Wenn dann die Exponenten irgend einer Formenschaar der Classe an der Stelle e_i von den entsprechenden Normalexponenten verschieden sind, so sage ich, die Formenschaar habe an der Stelle e_i einen „*Nebenpunkt*", und unter der Multiplicität desselben verstehe ich den Ueberschuss der Exponentensumme über die Summe der Normalexponenten.

Sind alle Exponenten an der Stelle e_i grösser als die entsprechenden Normalexponenten, so soll e_i eine „*Nullstelle*" heissen, und zwar eine l-fache, wenn l der kleinste Ueberschuss eines Exponenten über den entsprechenden Normalexponenten ist; ist mindestens ein Exponent kleiner als der entsprechende Normalexponent, so heisse die Stelle eine „*Unendlichkeitsstelle*", und zwar von der Multiplicität l, wenn der grösste Fehlbetrag eines Exponenten gegen den entsprechenden Normalexponenten gleich l ist.

Ein „*reiner Nullpunkt bezw. Unendlichkeitspunkt*" liege vor, wenn alle Exponenten um ein und dieselbe Zahl grösser bezw. kleiner sind, als die entsprechenden Normalexponenten; ein „*reiner Nebenpunkt*" wenn mindestens ein Exponent gleich dem entsprechenden Normalexponenten und keiner kleiner als der entsprechende Normalexponent ist.

Nach diesen Festsetzungen kann ich nun insbesondere von *„ganzen Formenschaaren“* der Classe sprechen, d. h. solchen, die nirgends Unendlichkeitsstellen besitzen.

Jede nicht ganze Formenschaar der Classe kann ich jedenfalls durch Multiplication mit multiplicativen Primformen in eine ganze Formenschaar der Classe verwandeln. Desgleichen kann ich jeden Nullpunkt einer Formenschaar durch Division mit einer Potenz der multiplicativen Primform beseitigen.

Ferner will ich für die Substitutionen $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, die sich ja bei den einzelnen Formenschaaren der Classe noch um simultane Multiplicationen mit Constanten unterscheiden können, ein System von *„Normalsubstitutionen“* so festlegen, dass die Normalsubstitutionen sämmtlich die Determinante 1 haben. Diese Normirung der $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ enthält natürlich noch eine gewisse Willkür, insofern ja die Determinante einer solchen Substitution gleich 1 bleibt, wenn man die Substitution noch mit einer simultanen Multiplication mit einer $n$ten Einheitswurzel combinirt. Im Uebrigen hängt diese Normirung auch von der Auswahl der unabhängigen Variablen z_1, z_2 ab.

Mit Beziehung auf die ausgewählten Normalsubstitutionen sage ich, irgend eine Formenschaar besitze das *„Multiplicatorsystem“* $\alpha_\varkappa = e^{2i\pi\sigma_\varkappa}$, $\beta_\varkappa = e^{2i\pi\tau_\varkappa}$, wenn ihre Substitutionen $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ aus den entsprechenden Normalsubstitutionen durch Combination mit einer simultanen Multiplication aller Zweige mit $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$ hervorgehen.

Es gelten folgende evidenten Sätze:

Sind Π', Π'', ... $\Pi^{(n)}$ irgend n verwandte Formenschaaren von den Graden δ_1, δ_2, ... δ_n und mit den Multiplicatoren $\alpha'_\varkappa$, $\beta'_\varkappa$, $\alpha''_\varkappa$, $\beta''_\varkappa$; ... $\alpha^{(n)}_\varkappa$, $\beta^{(n)}_\varkappa$, so ist die aus ihren Zweigen gebildete Determinante

$$|\Pi_h^{(k)}| \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots n \\ h = 1, 2, \ldots n, \end{array}$$

wenn sie nicht identisch verschwindet, eine multiplicative Form vom Grade $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n$, welche bei Umlauf um e_i den Multiplicator $e^{2i\pi\lambda_i}$, längs der Periodenwege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ die Multiplicatoren $\alpha'_\varkappa\, \alpha''_\varkappa \ldots \alpha^{(n)}_\varkappa$, $\beta'_\varkappa\, \beta''_\varkappa \ldots \beta^{(n)}_\varkappa$ aufweist.

Zwischen irgend $n+1$ Formenschaaren der Classe besteht eine identische Relation der Gestalt

$$\varphi_0 \Pi + \varphi_1 \Pi' + \cdots + \varphi_n \Pi^{(n)} = 0,$$

unter φ_0, φ_1, ... φ_n unverzweigte multiplicative Formen der Fläche verstanden, deren Grade und Multiplicatorsysteme die Grade und

Multiplicatorsysteme von Π, Π', ... $\Pi^{(n)}$ zu ein und demselben Grad und Multiplicatorsystem ergänzen.

Die φ sind nämlich einfach den Determinanten der Matrix

$$|\Pi_h^{(k)}| \quad \begin{array}{l} k = 0, 1, 2, \ldots n \\ h = \ 1, 2, \ldots n \end{array}$$

proportional.

Wenn n Formenschaaren $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ *der Classe so ausgewählt sind, dass ihre Determinante*

$$|\Pi_h^{(k)}| \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots n \\ h = 1, 2, \ldots n \end{array}$$

nicht identisch verschwindet, so lässt sich jede Formenschaar Π *der Classe in der Gestalt darstellen:*

$$\Pi = \varphi_1 \Pi' + \varphi_2 \Pi'' + \cdots + \varphi_n \Pi^{(n)},$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ unverzweigte multiplicative Formen von den Graden $\delta - \delta_1$, $\delta - \delta_2$, ... $\delta - \delta_n$ und mit den Multiplicatoren $\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha'_\varkappa}, \frac{\beta_\varkappa}{\beta'_\varkappa}; \frac{\alpha_\varkappa}{\alpha''_\varkappa}, \frac{\beta_\varkappa}{\beta''_\varkappa}; \ldots \frac{\alpha_\varkappa}{\alpha^{(n)}_\varkappa}, \frac{\beta_\varkappa}{\beta^{(n)}_\varkappa}$ bedeuten.

Umgekehrt liefert jede derartige Darstellung eine Formenschaar der Classe.

Es giebt gewiss n Formenschaaren der Classe, deren Determinante nicht identisch verschwindet, und durch welche man also alle Formenschaaren linear darstellen kann; z. B. unter Π irgend eine beliebige Formenschaar der Classe verstanden, die Schaaren

$$\Pi, \underset{zy}{D}\Pi, \underset{zy}{D^2}\Pi, \ldots \underset{zy}{D^{n-1}}\Pi.$$

Hieraus folgt insbesondere der Satz:

Jede Formenschaar Π *genügt einer linearen Differentialgleichung n ter Ordnung:*

$$\underset{zy}{D^n}\Pi + \varphi_1 \underset{zy}{D^{n-1}}\Pi + \varphi_2 \underset{zy}{D^{n-2}}\Pi + \cdots + \varphi_{n-1} \underset{zy}{D}\Pi + \varphi_n \Pi = 0,$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ *algebraische Formen von den Graden* $-2m$, $-4m, \cdots -2nm$ *sind, auf deren nähere Natur ich nicht eingehe.*

§ 4.

Darstellung der ganzen Formenschaaren durch eine Basis.

Ein System von irgend n linear unabhängigen ganzen Formenschaaren der Classe nenne ich eine „*Basis*“ der Classe.

Jede Formenschaar, die sich aus einer Basis mit Hülfe ganzer multiplicativer Formen als Coefficienten zusammensetzt, ist eine ganze

Form der Classe; jede gemeinsame Nullstelle der Coefficienten ist eine Nullstelle der dargestellten Form.

Aber das Umgekehrte, dass jede ganze Formenschaar der Classe durch die Basis vermittelst ganzer multiplicativer Formen als Coefficienten darstellbar sei und dass jede Nullstelle der dargestellten Formenschaar zugleich eine gemeinsame Nullstelle aller Coefficientenformen sei, — was beides auf dasselbe hinauskommt —, ist im Allgemeinen nicht richtig.

Eine Basis, welche diese Eigenschaft hat, dass sich durch sie alle ganzen Formenschaaren der Classe vermittelst ganzer Formen als Coefficienten darstellen, nenne ich eine „*Minimalbasis*".

Unter der *Determinante einer Basis* $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ verstehe ich die aus den n entsprechenden Zweigen der n Formenschaaren gebildete Determinante

$$D = |\Pi_h^{(k)}| \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots n \\ h = 1, 2, \ldots n. \end{array}$$

Die Determinante verschwindet an den Stellen e_i mindestens in der Ordnung $\lambda_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \cdots + \lambda_{in}$ und hat im Uebrigen keine Unendlichkeitsstellen. Sie ist eine multiplicative Form, welche bei Umlauf um e_i den Multiplicator $e^{2i\pi\lambda_i}$, längs der Periodenwege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ die Multiplicatoren $\alpha'_\varkappa \alpha''_\varkappa \ldots \alpha_\varkappa^{(n)}$, $\beta'_\varkappa \beta''_\varkappa \ldots \beta_\varkappa^{(n)}$ erhält.

D hat also die Gestalt

$$D = \prod_{i=1}^{i=s} P(z e_i)^{\lambda_i} \,.\, F_q(z_1, z_2),$$

unter F_q eine unverzweigte ganze multiplicative Form vom Grade

$$q = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n - \sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i$$

verstanden.

Wenn man irgend eine ganze Formenschaar der Classe durch die Basis darstellt, so können als Nenner der Coefficientenformen nur die Primfactoren von F_q auftreten. Ich bezeichne daher die Nullstellen von $F_q(z_1, z_2)$ als die „*Ausnahmepunkte*" der Basis, und zwar soll eine Stelle x ein „*$\varkappa$-facher Ausnahmepunkt*" heissen, wenn F_q daselbst, in Primformen gemessen, $\varkappa$-fach verschwindet.

Die Natur eines Ausnahmepunktes ist durch seine „*Elementarexponenten*" charakterisirt, welche in folgender Weise zu definiren sind:

Es sei zunächst x von jeder der Stellen e_i verschieden. Dann bedeute $\varkappa = \varkappa_1$ die Ordnung, in der die Determinante $|\Pi_h^k| \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots n \\ h = 1, 2, \ldots n \end{array}$ an der Stelle x verschwindet, $\varkappa_2$ die Ordnung, in der alle ersten

Unterdeterminanten verschwinden, — wobei nicht ausgeschlossen ist, dass einzelne derselben, nur nicht alle, in höherer Ordnung verschwinden —, $\varkappa_3$ die Ordnung der zweiten Unterdeterminanten u. s. w., endlich $\varkappa_\nu$ die Ordnung der $(\nu-1)$ten Unterdeterminanten, während die νten Unterdeterminanten nicht mehr sämmtlich verschwinden mögen.

Die Differenzen

$$\varepsilon_1 = \varkappa_1 - \varkappa_2, \quad \varepsilon_2 = \varkappa_2 - \varkappa_3, \quad \ldots \quad \varepsilon_{\nu-1} = \varkappa_{\nu-1} - \varkappa_\nu, \quad \varepsilon_\nu = \varkappa_\nu,$$

welche sämmtlich positiv sind und den Ungleichungen

$$\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \cdot \quad \cdot \geqq \varepsilon_{\nu-1} \geqq \varepsilon_\nu > 0$$

genügen, nenne ich, im Anschluss an den Weierstrass'schen Begriff der Elementartheiler, die „*Elementarexponenten*“ der Stelle x.

Wenn x mit einer der Stellen e_i zusammenfällt, sind die Elementarexponenten in gleicher Weise, nur statt vermittelst des Formenschema's $|\Pi_h^{(k)}|$ vielmehr vermittelst des Systems $\left|\dfrac{\Pi_h^{(k)}}{P(ze_i)^{\lambda_{ih}}}\right|$ zu definiren.

In der Untersuchung der Natur eines solchen Ausnahmepunktes kann ich mich kurz fassen, indem ich auf eine Note von mir in Nr. 2 der Gött. Nachr. vom Jahre 1895 verweisen kann. Ich brauche nur anzugeben, welche Modificationen des dort angegebenen Beweises dadurch nothwendig werden, dass wir es hier mit Formen, statt mit Functionen, zu thun haben, und dass wir von den darzustellenden Formen dasselbe functionentheoretische Verhalten verlangen, wie es die Basisformen besitzen.

Man kann zuerst, eine passende Anordnung der Basisschaaren $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ vorausgesetzt, ν Systeme von Constanten

$$A_1^{(\nu+1)},\ A_1^{(\nu+2)}, \ldots A_1^{(n)};\ A_2^{(\nu+1)},\ A_2^{(\nu+2)}, \ldots A_2^{(n)}; \ldots A_\nu^{(\nu+1)},\ A_\nu^{(\nu+2)}, \ldots A_\nu^{(n)}$$

auf eindeutige Weise so bestimmen, dass gleichzeitig die $\nu.n$ Gleichungen bestehen:

$$\begin{gathered}
\Pi_h'(x_1,x_2) + A_1^{(\nu+1)}\Pi_h^{(\nu+1)}(x_1,x_2) + A_1^{(\nu+2)}\Pi_h^{(\nu+2)}(x_1,x_2) + \cdots + A_1^{(n)}\Pi_h^{(n)}(x_1,x_2) = 0, \\
\Pi_h''(x_1,x_2) + A_2^{(\nu+1)}\Pi_h^{(\nu+1)}(x_1,x_2) + A_2^{(\nu+2)}\Pi_h^{(\nu+2)}(x_1,x_2) + \cdots + A_2^{(n)}\Pi_h^{(n)}(x_1,x_2) = 0, \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\Pi_h^{(\nu)}(x_1,x_2) + A_\nu^{(\nu+1)}\Pi_h^{(\nu+1)}(x_1,x_2) + A_\nu^{(\nu+2)}\Pi_h^{(\nu+2)}(x_1,x_2) + \cdots + A_\nu^{(n)}\Pi_h^{(n)}(x_1,x_2) = 0 \\
(h = 1, 2, \ldots n).
\end{gathered}$$

Man construire nun $n-\nu+1$ ganz multiplicative Formen

$$A_1'(z_1, z_2),\ A_1^{(\nu+1)}(z_1, z_2),\ A_1^{(\nu+2)}(z_1, z_2), \ldots A_1^{(n)}(z_1, z_2)$$

deren Grade und Multiplicatoren sich mit denen der Schaaren

$$\Pi',\ \Pi^{(\nu+1)},\ \Pi^{(\nu+2)}, \ldots \Pi^{(n)}$$

zu ein und demselben Grade und Multiplicatorsystem ergänzen, und welche an der Stelle $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$ die Werthe der Constanten $1, A_1^{(\nu+1)}, A_1^{(\nu+2)}, \ldots A_1^{(n)}$ besitzen. Die Construction solcher Formen ist bei hinreichend hoch gewähltem Grade immer möglich.

In gleicher Weise construire man $n - \nu + 1$ ganze multiplicative Formen

$$A_2''(z_1, z_2),\ A_2^{(\nu+1)}(z_1, z_2),\ A_2^{(\nu+2)}(z_1, z_2), \ldots A_2^{(n)}(z_1, z_2),$$

deren Grade und Multiplicatoren sich mit denen von

$$\Pi'',\ \Pi^{(\nu+1)},\ \Pi^{(\nu+2)}, \ldots \Pi^{(n)}$$

ergänzen und welche für $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$ die Werthe

$$1,\ A_2^{(\nu+1)},\ A_2^{(\nu+2)}, \ldots A_2^{(n)}$$

besitzen u. s. w.

Dann sind

$$\mathrm{P}' = \frac{A_1'(z_1, z_2)\Pi' + A_1^{(\nu+1)}(z_1, z_2)\Pi^{(\nu+1)} + A_1^{(\nu+2)}(z_1, z_2)\Pi^{(\nu+2)} + \cdots + A_1^{(n)}(z_1, z_2)\Pi^{(n)}}{P(z, x)},$$

$$\mathrm{P}'' = \frac{A_2''(z_1, z_2)\Pi'' + A_2^{(\nu+1)}(z_1, z_2)\Pi^{(\nu+1)} + A_2^{(\nu+2)}(z_1, z_2)\Pi^{(\nu+2)} + \cdots + A_2^{(n)}(z_1, z_2)\Pi^{(n)}}{P(z, x)},$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{P}^{(\nu)} = \frac{A_\nu^{(\nu)}(z_1, z_2)\Pi^{(\nu)} + A_\nu^{(\nu+1)}(z_1, z_2)\Pi^{(\nu+1)} + A_\nu^{(\nu+2)}(z_1, z_2)\Pi^{(\nu+2)} + \cdots + A_\nu^{(n)}(z_1, z_2)\Pi^{(n)}}{P(z, x)},$$

wieder ganze Formenschaaren der Classe, und $\mathrm{P}', \mathrm{P}'', \ldots \mathrm{P}^{(\nu)}, \Pi^{(\nu+1)}, \ldots \Pi^{(n)}$ wieder eine Basis und zwar mit der Determinante:

$$\prod_{i=1}^{i=s} P(z e_i)^{\lambda_i} \cdot F_q(z_1, z_2) \cdot \frac{A_1'(z_1, z_2) \cdot A_2''(z_1, z_2) \ldots A_\nu^{(\nu)}(z_1, z_2)}{P(z, x)^\nu},$$

Die Ordnung des Ausnahmepunktes x ist hierdurch um ν erniedrigt, und zwar so, dass jeder der ν Elementarexponenten um 1 verkleinert ist, wofür man den Beweis in der genannten Note in den Gött. Nachr. nachsehen mag.

Durch Wiederholung des geschilderten Verfahrens beweist man genau, wie an der genannten Stelle, den Satz:

Wenn $e_1, e_2, \ldots e_\nu$ die Elementarexponenten der Stelle x sind, nach abnehmender Grösse geordnet, so können die Darstellungscoefficienten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ einer ganzen Formenschaar;

$$\Pi = \varphi_1 \Pi' + \varphi_2 \Pi'' + \cdots + \varphi_n \Pi^{(n)}$$

an der Stelle x bis zur Ordnung e_1 unendlich werden; und zwar enthalten die e_1-fach unendlich werdenden Entwicklungsglieder der $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ so viele willkürliche Constanten linear und homogen, als Elementarexponenten $= e_1$ sind, die $e_1 - 1$-fach unendlich werdenden Glieder neben *den schon genannten so viele neue willkürliche Constanten linear und mit den ersteren zusammengenommen homogen, als Elementarexponenten* $\geqq e_1 - 1$ *sind, die* $e_1 - 2$*-fach unendlich werdenden Glieder so viele weitere willkürliche Constanten, als Elementarexponenten* $\geqq e_1 - 2$ *sind, u. s. w.*

Die Gesammtzahl der willkürlichen Constanten in den unendlich werdenden Entwicklungsgliedern ist

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_\nu = \varkappa,$$

d. h. gleich der Multiplicität des Ausnahmepunktes.

Der Satz bleibt auch richtig, wenn x mit einer der Stellen e_i zusammenfällt; man hat beim Beweise nur statt mit dem Formensystem $\Pi_h^{(k)}$ mit dem System $\dfrac{\Pi_h^{(k)}}{P\,(z\,e_i)^{\lambda_{ih}}}$ zu operiren.

§ 5.

Specielle Folgerungen.

Die späteren Untersuchungen können wir so führen, dass nur zwei Specialfälle des aufgestellten allgemeinen Satzes benutzt zu werden brauchen, und ich will diese beiden Specialfälle daher noch besonders hervorheben.

1) *Einfacher Ausnahmepunkt:*

$$\varkappa_1 = 1,\ \nu = 1,\ e_1 = 1.$$

Die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ *können an der Stelle* $z = x$ *je einfach unendlich werden mit Coefficienten* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$*, die in dem wohlbestimmten Verhältniss stehen müssen*

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \cdots : \alpha_n = A_1 : A_2 : \cdots : A_n,$$

wo die $A_1, A_2, \ldots A_n$ den nicht durchweg verschwindenden zu einer Zeile gehörigen Unterdeterminanten der Determinante $|\Pi_h^{(k)}(x_1, x_2)|$ proportional sind.

2) $(n-1)$*-facher Ausnahmepunkt mit* $n-1$ *Elementarexponenten:*

$$\varkappa = n - 1,\quad \nu = n - 1,\quad e_1 = e_2 = \cdots = e_{n-1} = 1.$$

Die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ *können an der Stelle* $z = x$ *je einfach unendlich werden mit Coefficienten* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$*, die der einzigen wohlbestimmten Gleichung genügen müssen:*

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n = 0,$$

wo die $A_1, A_2, \ldots A_n$ den nicht durchweg verschwindenden Gliedern einer Zeile der Determinante $|\Pi_h^{(k)}(x_1, x_2)|$ proportional sind.

Die Wichtigkeit dieser beiden speciellen Sätze, unmittelbar des ersten, beruht auf folgendem Satz, dessen Richtigkeit ebenfalls aus den Ueberlegungen des vorigen Paragraphen folgt:

Man kann stets eine Basis finden, welche nur einfache Ausnahmepunkte besitzt.

Denn indem man von der Basis $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ zu der Basis $P', P'', \ldots P^{(\nu)}, \Pi^{(\nu+1)}, \ldots \Pi^{(n)}$ übergeht, erniedrigt man die Multiplicität des Ausnahmepunktes x um ν. Wählt man dabei, — was stets möglich ist —, die multiplicativen Formen $A_1'(z_1, z_2), A_2''(z_1, z_2), \ldots \ldots A_\nu^{(\nu)}(z_1, z_2)$ so, dass ihr Product nur einfache Nullstellen besitzt, die von den Nullstellen der Form $F_q(z_1, z_2)$ sämmtlich verschieden sind, so hat man damit weder die Multiplicität eines andern Ausnahmepunktes erhöht, noch einen neuen mehrfachen Ausnahmepunkt eingeführt. Durch Wiederholung des Verfahrens kann man schliesslich erreichen, dass nur einfache Ausnahmepunkte übrig bleiben.

In dem speciellen Falle $p = 0$ kann man noch weiter gehen:

Wenn $p = 0$ ist, kann man stets eine Minimalbasis, d. h. eine Basis ohne Ausnahmepunkte finden.

Wenn nämlich $p = 0$ ist, kann ich als unabhängige Variable z eine einwerthige Function des algebraischen Gebildes zu Grunde legen, d. h. in einer schlichten z-Ebene operiren. Die Multiplicatoren kommen in Wegfall, die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ werden rationale Formen, $P(z, x)$ geht in die Determinante $(z, x) = z_1 x_2 - z_2 x_1$ über. Die Nullstellen irgend einer ganzen rationalen Form beliebigen Grades unterliegen ihrer Lage nach keiner Beschränkung.

Wenn nun x eine Ausnahmestelle der Basis $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ ist, so kann ich mindestens eine ganze Formenschaar von der Gestalt finden

$$P = \frac{A'(z_1, z_2)\Pi' + A''(z_1, z_2)\Pi'' + \cdots + A^{(n)}(z_1, z_2)\Pi^{(n)}}{(z x)},$$

in welcher nicht alle Formen $A', A'', \ldots A^{(n)}$ bei $z = x$ verschwinden. Diejenigen der Formen, welche bei $z = x$ verschwinden, kann ich geradezu durch 0 ersetzen unbeschadet der Eigenschaft von P, eine ganze Formenschaar zu sein. Von den hiernach im Ausdruck von P noch übrig bleibenden Schaaren $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ habe $\Pi^{(\alpha)}$ den höchsten Grad. Dann kann ich den Coefficienten $A^{(\alpha)}(z_1, z_2)$ direct als eine Constante, etwa 1 annehmen, und die übrigen Coefficienten doch noch als ganze rationale Formen so bestimmen, dass P bei x nicht unendlich wird. Führe ich nun das so gefundene P statt $\Pi^{(\alpha)}$ in die Basis ein, so wird hierdurch die Determinante der Basis einfach durch $(z x)$ dividirt, ohne dass neue Nullstellen eingeführt würden; durch Fortsetzung des Verfahrens kann man also alle Ausnahmepunkte beseitigen, w. z. b. w.

§ 6.

Einordnung der Fälle mit ganzzahligen Exponentendifferenzen.

Wir haben bei den Betrachtungen über Basisdarstellungen bisher die Fälle ausgeschlossen, wo eine Substitution S_i mehrere Elementartheiler mit derselben Nullstelle besitzt.

Denn die Angabe über das Verhalten einer Basisdeterminante an der Stelle e_i beruht wesentlich darauf, dass den Fundamentalzweigen einer Schaar Π', d. h. den Zweigen, welche zu den Exponenten λ_{i1}, $\lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$ gehören, nur auch wieder die Fundamentalzweige einer andern Formenschaar Π'' cogredient sein können. Dies ist aber nur dann richtig, wenn die Substitution S_i nur solche Transformationen in sich gestattet, bei denen die Fundamentalzweige Fundamentalzweige bleiben, und dies ist nur dann der Fall, wenn die Elementartheiler der charakteristischen Function von S_i lauter verschiedene Nullstellen haben.*)

Es sei jetzt S eine solche der Substitutionen S_i, deren charakteristische Function mehrere Elementartheiler mit derselben Nullstelle α und den Elementarexponenten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_q$ besitzen möge. Wir brauchen die Aufmerksamkeit nur auf diejenigen $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_q$ Fundamentalzweige von Π' zu richten, welche diesen Elementartheilern entsprechen, da bei einer Transformation von S in sich selbst diese Zweige sich nur untereinander substituiren können. Man kann dann diese ε Fundamentalzweige so heraussuchen, dass ihre Substitution die Gestalt hat:

$$S = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c} S_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \hline 0 & S_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \hline \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \hline 0 & 0 & & & S_q \end{array}\right| .$$

Hierin bedeutet das in der μten Zeile und νten Colonne stehende Feld ein Coefficientenschema von ε_μ Zeilen und ε_ν Colonnen, nämlich

*) Für die Elementartheilertheorie der linearen Substitutionen vergleiche man die pag. 164 citirte Abhandlung von Frobenius.

$$\boxed{S_\nu} = \begin{array}{|cccccc|} \hline \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \alpha \\ \hline \end{array}\,, \qquad \boxed{0} = \begin{array}{|ccccc|} \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \end{array}\,.$$

Eine Substitution U, durch welche S in sich selbst transformirt wird:

$$U S U^{-1} = S,$$

hat die allgemeine Gestalt:

$$U = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline U_{11} & U_{12} & \cdot & \cdot & U_{1q} \\ \hline U_{21} & U_{22} & \cdot & \cdot & U_{2q} \\ \hline \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \hline U_{q1} & U_{q2} & \cdot & \cdot & U_{qq} \\ \hline \end{array}$$

und zwar sind in dem einzelnen, aus ε_μ Zeilen und ε_ν Colonnen bestehenden Theilschema $U_{\mu\nu}$ alle diejenigen Glieder, welche in einer Diagonalreihe stehen, einander gleich und nur dann von 0 verschieden, wenn die betr. Diagonalreihe in der ersten Colonne und in der letzten Zeile endigt, also z. B.

$$U_{\mu\nu} = \begin{array}{|ccc|} \hline u'_{\mu\nu} & 0 & 0 \\ u''_{\mu\nu} & u'_{\mu\nu} & 0 \\ u'''_{\mu\nu} & u''_{\mu\nu} & u'_{\mu\nu} \\ \hline \end{array} \quad \text{für} \quad \varepsilon_\mu = \varepsilon_\nu = 3;$$

$$U_{\mu\nu} = \begin{array}{|cccc|} \hline u'_{\mu\nu} & 0 & 0 & 0 \\ u''_{\mu\nu} & u'_{\mu\nu} & 0 & 0 \\ u'''_{\mu\nu} & u''_{\mu\nu} & u'_{\mu\nu} & 0 \\ \hline \end{array} \quad \text{für} \quad \varepsilon_\mu = 3;\ \varepsilon_\nu = 4;$$

$$U_{\mu\nu} = \begin{array}{|ccc|} \hline 0 & 0 & 0 \\ u'_{\mu\nu} & 0 & 0 \\ u''_{\mu\nu} & u'_{\mu\nu} & 0 \\ u'''_{\mu\nu} & u''_{\mu\nu} & u'_{\mu\nu} \\ \hline \end{array} \quad \text{für} \quad \varepsilon_\mu = 4,\ \varepsilon_\nu = 3.$$

Denken wir uns die Elementartheiler so geordnet, dass

$$\varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2 \leqq \varepsilon_3 \leqq \cdots \leqq \varepsilon_q$$

ist, so ist

$$U_{\mu\mu} = \left|\begin{array}{llll} u'_{\mu\nu} & 0 & \ldots & 0 \\ u''_{\mu\mu} & u'_{\mu\mu} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u^{(\varepsilon_\mu)}_{\mu\mu} & u^{(\varepsilon_\mu-1)}_{\mu\mu} & \ldots & u'_{\mu\mu} \end{array}\right|,$$

$$U_{\mu\nu} = \left|\begin{array}{llllll} u'_{\mu\nu} & 0 & \ldots 0 & 0 & \ldots & 0 \\ u'_{\mu\nu} & u'_{\mu\nu} & \ldots 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u^{(\varepsilon_\mu)}_{\mu\nu} & u^{(\varepsilon_\mu-1)}_{\mu\nu} & \ldots u'_{\mu\nu} & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right|, \quad \text{wenn } \mu < \nu,$$

$$U_{\mu\nu} = \left|\begin{array}{llll} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ u'_{\mu\nu} & 0 & \ldots & 0 \\ u''_{\mu\nu} & u'_{\mu\nu} & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ u^{(\varepsilon_\nu)}_{\mu\nu} & u^{(\varepsilon_\nu-1)}_{\mu\nu} & \ldots & u'_{\mu\nu} \end{array}\right|, \quad \text{wenn } \mu > \nu.$$

Die Fundamentalzweige von Π' seien, den Elementartheilern entsprechend in Gruppen (Hamburger'sche Untergruppen nach der in der Theorie der linearen Differentialgleichungen üblichen Bezeichnung) eingetheilt:

$$y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots y_{\varepsilon_1}^{(1)};\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots y_{\varepsilon_2}^{(2)};\ \ldots;\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_q}^{(q)},$$

ihre Exponenten

$$\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_1}^{(1)};\ \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_2}^{(2)};\ \ldots;\ \lambda_1^{(q)}, \lambda_2^{(q)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_q}^{(q)}.$$

Dabei sind die Exponenten in jeder der Gruppen nach abnehmendem reellen Theil geordnet.

Durch die Transformation U gehen die Zweige in

$$Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)}, \ldots Y_{\varepsilon_1}^{(1)};\ Y_1^{(2)}, Y_2^{(2)}, \ldots Y_{\varepsilon_2}^{(2)};\ \ldots;\ Y_1^{(q)}, Y_2^{(q)}, \ldots Y_{\varepsilon_q}^{(q)}$$

über, und zwar sind die Y der Reihe nach lineare Combinationen folgender Zweige y:

$$\left.\begin{array}{lll}
Y_1^{(1)} & \text{von} & y_1^{(1)};\ y_1^{(2)};\ \ldots\ y_1^{(q)} \\
Y_2^{(1)} & \text{von} & y_1^{(1)}, y_2^{(1)};\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)} \\
\vdots & & \\
Y_{\varepsilon_1}^{(1)} & \text{von} & y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots y_{\varepsilon_1}^{(1)};\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots y_{\varepsilon_1}^{(2)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_1}^{(q)}
\end{array}\right\}\ \varepsilon_1,$$

$$\left.\begin{array}{lll}
Y_1^{(2)} & \text{von} & y_1^{(2)};\ y_1^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)} \\
Y_2^{(2)} & \text{von} & y_1^{(2)}, y_2^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)} \\
\vdots & & \\
Y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}^{(2)} & \text{von} & y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}^{(2)},\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}^{(q)}
\end{array}\right\}\ \varepsilon_2-\varepsilon_1,$$

$$\left.\begin{array}{lll}
Y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+1}^{(2)} & \text{von} & y_1^{(1)};\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+1}^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+1}^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+1}^{(q)} \\
Y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+2}^{(2)} & \text{von} & y_1^{(1)}, y_2^{(1)};\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+2}^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+2}^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+2}^{(q)} \\
\vdots & & \\
Y_{\varepsilon_2}^{(2)} & \text{von} & y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_{\varepsilon_1}^{(1)};\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots y_{\varepsilon_2}^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_2}^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_2}^{(q)}
\end{array}\right\}\ \varepsilon_1,$$

$$\left.\begin{array}{lll}
Y_1^{(3)} & \text{von} & y_1^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)} \\
Y_2^{(3)} & \text{von} & y_1^{(3)}, y_2^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)} \\
\vdots & & \\
Y_{\varepsilon_3-\varepsilon_2}^{(3)} & \text{von} & y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_2}^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_2}^{(q)}
\end{array}\right\}\ \varepsilon_3-\varepsilon_2,$$

$$\left.\begin{array}{lll}
Y_{\varepsilon_3-\varepsilon_2+1}^{(3)} & \text{von} & y_1^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_2+1}^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_2+1}^{(q)} \\
Y_{\varepsilon_3-\varepsilon_2+2}^{(3)} & \text{von} & y_1^{(2)}, y_2^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_2+2}^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_2+2}^{(q)} \\
\vdots & & \\
Y_{\varepsilon_3-\varepsilon_1}^{(2)} & \text{von} & y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_1}^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_1}^{(q)}
\end{array}\right\}\ \varepsilon_2-\varepsilon_1,$$

$$\left.\begin{array}{lll}
Y_{\varepsilon_3-\varepsilon_1+1}^{(3)} & \text{von} & y_1^{(1)};\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+1}^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_1+1}^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_1+1}^{(q)} \\
Y_{\varepsilon_3-\varepsilon_1+2}^{(3)} & \text{von} & y_1^{(1)}, y_2^{(1)};\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+2}^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_1+2}^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_1+2}^{(q)} \\
\vdots & & \\
Y_{\varepsilon_3}^{(3)} & \text{von} & y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots y_{\varepsilon_1}^{(1)};\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots y_{\varepsilon_2}^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_3}^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_3}^{(q)}
\end{array}\right\}\ \varepsilon_1,$$

u. s. w.

Die Exponenten der Zweige Y werden danach im Allgemeinen kleiner sein als diejenigen der entsprechenden Zweige y, nämlich gleich dem niedrigsten Exponenten, den einer der Zweige y hat, aus denen sich das betreffende Y zusammensetzt. Sind $(\lambda)_1{}^1$, $(\lambda)_2{}^1$ u. s. w. die Exponenten der Y, so ist also:

$$
\begin{array}{lll}
\left.\begin{array}{lll}
(\lambda)_1^1 & \text{die kleinste der Zahlen} & \lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \ldots \lambda_1^{(q)} \\
(\lambda)_2^{(1)} & \text{"} \quad \text{"} & \lambda_2^{(1)}, \lambda_2^{(2)}, \ldots \lambda_2^{(q)} \\
\vdots & & \vdots \\
(\lambda)_{\varepsilon_1}^{(1)} & \text{"} \quad \text{"} & \lambda_{\varepsilon_1}^{(1)}, \lambda_{\varepsilon_1}^{(2)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_1}^{(q)}
\end{array}\right\} \varepsilon_1, \\[2ex]
\left.\begin{array}{lll}
(\lambda)_1^{(2)} & \text{"} \quad \text{"} & \lambda_1^{(2)}, \ldots \lambda_1^{(q)} \\
\vdots & & \vdots \\
(\lambda)_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}^{(2)} & \text{"} \quad \text{"} & \lambda_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}^{(2)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}^{(q)}
\end{array}\right\} \varepsilon_2-\varepsilon_1, \\[2ex]
\left.\begin{array}{lll}
(\lambda)_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+1}^{(2)} & \text{"} \quad \text{"} & \lambda_1^{(1)}, \lambda_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+1}^{(2)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+1}^{(q)} \\
\vdots & & \vdots \\
(\lambda)_{\varepsilon_2}^{(2)} & \text{"} \quad \text{"} & \lambda_{\varepsilon_1}^{(1)}, \lambda_{\varepsilon_2}^{(2)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_2}^{(q)}
\end{array}\right\} \varepsilon_1, \\[2ex]
\left.\begin{array}{lll}
(\lambda)_1^{(3)} & \text{"} \quad \text{"} & \lambda_1^{(3)}, \ldots \lambda_1^{(q)} \\
\vdots & & \vdots \\
(\lambda)_{\varepsilon_3-\varepsilon_2}^{(3)} & \text{"} \quad \text{"} & \lambda_{\varepsilon_3-\varepsilon_2}^{(3)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_3-\varepsilon_2}^{(q)}
\end{array}\right\} \varepsilon_3-\varepsilon_2, \\[2ex]
\left.\begin{array}{lll}
(\lambda)_{\varepsilon_3-\varepsilon_2+1}^{(3)} & \text{"} \quad \text{"} & \lambda_1^{(2)}, \lambda_{\varepsilon_3-\varepsilon_2+1}^{(3)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_3-\varepsilon_2+1}^{(q)} \\
\vdots & & \vdots \\
(\lambda)_{\varepsilon_3-\varepsilon_1}^{(3)} & \text{"} \quad \text{"} & \lambda_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}^{(2)}, \lambda_{\varepsilon_3-\varepsilon_1}^{(3)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_3-\varepsilon_1}^{(q)}
\end{array}\right\} \varepsilon_2-\varepsilon_1, \\[2ex]
\left.\begin{array}{lll}
(\lambda)_{\varepsilon_3-\varepsilon_1+1}^{(3)} & \text{"} \quad \text{"} & \lambda_1^{(1)}, \lambda_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+1}^{(2)}, \lambda_{\varepsilon_3-\varepsilon_1+1}^{(3)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_3-\varepsilon_1+1}^{(q)} \\
\vdots & & \vdots \\
(\lambda)_{\varepsilon_3}^{(3)} & \text{"} \quad \text{"} & \lambda_{\varepsilon_1}^{(1)}, \lambda_{\varepsilon_2}^{(2)}, \lambda_{\varepsilon_3}^{(3)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_3}^{(q)}
\end{array}\right\} \varepsilon_1
\end{array}
$$

u. s. w.

Die Exponenten $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_1}^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_q}^{(q)}$, die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung der zu Π gehörigen linearen Differentialgleichung, will ich die eigentlichen, die Zahlen

$$(\lambda)_1^{(1)}, \ (\lambda)_2^{(1)}, \ldots (\lambda)_{\varepsilon_q}^{(q)}$$

die modificirten Exponenten von Π an der Stelle e_i nennen.

Um jetzt wieder zur früheren Bezeichnung der Exponenten einer Stelle e_i zurückzukehren, seien $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$ die eigentlichen,

$(\lambda)_{i1}$, $(\lambda)_{i2}$, ... $(\lambda)_{in}$ die modificirten Exponenten, wobei natürlich diejenigen Exponenten, welche zu Elementartheilern mit lauter verschiedenen Nullstellen gehören, mit den entsprechenden modificirten Exponenten übereinstimmen.

Wenn nun die Zweige Π_1', Π_2', ... Π_n' auch so ausgewählt sind, dass sie gerade zu den Eponenten λ_{i1}, λ_{i2}, ... λ_{in} gehören, dass also $\frac{\Pi_1'}{P(ze_i)^{\lambda_{i1}}}$, $\frac{\Pi_2'}{P(ze_i)^{\lambda_{i2}}}$, ... $\frac{\Pi'_n}{P(ze_i)^{\lambda_{in}}}$ bei e_i endlich bleiben oder höchstens logarithmisch unendlich werden (letzteres nur in dem Falle, wenn mehrere gleiche Exponenten vorkommen), so brauchen doch die entsprechenden zu einer verwandten Formenschaar Π'' gebildeten Ausdrücke $\frac{\Pi_1''}{P(ze_i)^{\lambda_{i1}}}$, $\frac{\Pi_2''}{P(ze_i)^{\lambda_{i2}}}$, ... $\frac{\Pi_n''}{P(ze_i)^{\lambda_{in}}}$, selbst wenn Π'' genau dieselben oder grössere Exponenten λ_{i1}, λ_{i2}, ... λ_{in} besitzt, wie Π', bei e_i nicht endlich zu bleiben.

Erst die Ausdrücke

$$\frac{\Pi_1}{P(zz_i)^{(\lambda)_{i1}}}, \quad \frac{\Pi_2}{P(ze_i)^{(\lambda)_{i2}}}, \ldots \frac{\Pi_n}{P(ze_i)^{(\lambda)_{in}}}$$

müssen für alle Formenschaaren Π, deren Exponenten grösser oder gleich λ_{i1}, λ_{i2}, λ_{in} sind, endlich bleiben.

Aber letztere Ausdrücke können auch noch dann endlich bleiben, wenn einzelne Exponenten kleiner sind als λ_{i1}, λ_{i2}, .. λ_{in}, wenn also Π nach der früheren Definition in Bezug auf λ_{i1}, λ_{i2}, .. λ_{in} als Normalexponenten bei e_i eine Unendlichkeitsstelle besässe; es dürfen eben nur die modificirten Exponenten von Π nicht kleiner sein als $(\lambda)_{i1}$, $(\lambda)_{i2}$, .. $(\lambda)_{in}$. Das führt uns darauf, für die Definition des Unendlichwerdens an einer Stelle e_i überhaupt nicht die eigentlichen, sondern die modificirten Exponenten zu Grunde zu legen. Wir sagen also, nachdem wir ein System modificirter Exponenten $(\lambda)_{i1}$, $(\lambda)_{i2}$, .. $(\lambda)_{in}$ als Normalsystem festgelegt haben:

Eine Formenschaar Π heisst bei $z = e_i$ endlich, wenn die Formen

$$\frac{\Pi_1}{P(ze_i)}(\lambda)_{i1}, \quad \frac{\Pi_2}{P(ze_i)}(\lambda)_{i2}, \ldots \frac{\Pi_n}{P(ze_i)}(\lambda)_{in}$$

bei e_i höchstens logarithmisch unendlich werden; e_i ist eine Unendlichkeitsstelle, wenn mindestens eine dieser Formen auch algebraisch unendlich wird, eine Nullstelle, wenn alle Formen verschwinden.

Hierbei sind unter Π_1, Π_2, .. Π_n solche n Zweige von Π verstanden, deren Substitution die zu Anfang dieses Paragraphen benutzte Normalform hat.

Für die Determinante einer Basis Π', Π'', .. $\Pi^{(n)}$ ergiebt sich der Satz: *Die Determinante einer Basis verschwindet bei e_i mindestens in* *der Ordnung* $(\lambda)_i = (\lambda)_{i1} + (\lambda)_{i2} + \cdots + (\lambda)_{in}$, *hat also den allgemeinen Ausdruck*

$$\prod_{i=1}^{i=s} P(ze_i)^{(\lambda)_i} \cdot F_q(z_1, z_2)$$

$$q = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n - \sum_{i=1}^{i=s} (\lambda)_i .$$

Die Ausnahmepunkte der Basis, einschliesslich der etwa in den Punkten e_i *liegenden, sind durch die Nullstellen von* F_1 *gegeben.*

Hier ordnet sich nun auch die arithmetische Theorie der *algebraischen Functionen* ein, wie sie von Weber und Dedekind*), Kronecker**), Hensel***) untersucht worden ist.

Alle zu einer vorgegebenen n-blättrigen Riemann'schen Fläche gehörigen algebraischen Functionen und Formen kann man nämlich als n-gliedrige Formenschaaren in der schlichten z-Ebene, also von $p = 0$ auffassen, deren Zweige bei geschlossenen Umläufen von z um gewisse Punkte der z-Ebene, nämlich um die Punkte z, über denen Verzweigungsstellen der Riemann'schen Fläche liegen, sich permutiren, d. h. eine specielle Art linearer Substitutionen erleiden.

Mögen an einer Stelle e_i ein ν_1-, ν_2-, .. ν_q-blättriger Verzweigungspunkt der Riemann'schen Fläche über einander liegen, ausserdem vielleicht r schlichte Blätter, so dass

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_q + r = n$$

ist. Man sagt dann von irgend einer algebraischen Form, sie sei an der Stelle e_i endlich, wenn ihre modificirten Exponenten an der Stelle nicht kleiner sind als

$$0, \frac{1}{\nu_1}, \frac{2}{\nu_1}, \ldots \frac{\nu_1 - 1}{\nu_1}; \; 0, \frac{1}{\nu_2}, \frac{2}{\nu_2}, \ldots \frac{\nu_2 - 1}{\nu_2}; \ldots \; 0, \frac{1}{\nu_q}, \frac{2}{\nu_q}, \ldots \frac{\nu_q - 1}{\nu_q};$$
$$0; \; 0; \ldots 0.$$

Legen wir also diese als Normalexponenten zu Grunde, so wird

$$(\lambda)_i = (\lambda)_{i1} + (\lambda)_{i2} + \cdots + (\lambda)_{in} = \frac{\nu_1 - 1}{2} + \frac{\nu_2 - 1}{2} + \cdots + \frac{\nu_q - 1}{2};$$

$(\lambda)_i$ ist die halbe Gesammtmultiplicität der an der Stelle e_i über einander liegenden Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche.

Wir haben also folgende Sachlage:

Wir können alle algebraischen Functionen und Formen der Fläche durch eine Basis $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ *von ganzen algebraischen Formen rational darstellen.*

*) Crelle's Journal Bd. 92.

**) Ebenda Bd. 92.

***) Ebenda Bd. 109. 111.

Die Determinante der Basis ist ein Ausdruck von der Gestalt

$$\prod_{i=1}^{i=s}(z e_i)^{\frac{\nu_i-1}{2}} \cdot F_q(z_1, z_2),$$

worin das Product über alle Verzweigungspunkte der Fläche zu erstrecken ist, und $F_q(z_1, z_2)$ eine ganze rationale Form vom Grade

$$q = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=s}(\nu_i - 1)$$

ist, deren Nullstellen die Ausnahmestellen der Basis sind.

Da $p = 0$ ist, *so können wir stets eine Minimalbasis finden, durch welche sich alle ganzen algebraischen Formen linear mit ganzen rationalen Coefficienten darstellen lassen.* Die Grade einer solchen müssen der Relation genügen

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=s}(\nu_i - 1).$$

Die Summe auf der rechten Seite können wir durch die Blätterzahl n und das Geschlecht p der Riemann'schen Fläche ausdrücken. Wir bekommen so

Anzahl der Ausnahmepunkte: $q = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n - n - p + 1.$

Minimalbasis: $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = n + p - 1.$

Die Determinante ist die Quadratwurzel dessen, was Weber, Dedekind und Kronecker als Discriminante der Basis bezeichnen, das Product $\Pi(z e_i)^{\frac{\nu_i-1}{2}}$ ist die Quadratwurzel aus dem wesentlichen, $F_q(z_1, z_2)$ diejenige aus dem ausserwesentlichen Theil der Discriminante, welcher ja in der That ein Quadrat ist.

§ 7.

Reciproke Formenschaaren.

Es werde jetzt jedem der s singulären Punkte e_i eine bestimmte Zahl μ_i zugeordnet. Unter Φ möge irgend eine derjenigen multiplicativen Formen vom Grade $2p-2$ verstanden werden, welche bei canonischer Darstellung algebraisch sind (44 § 10).

Ich nenne dann zwei Formenschaaren Π und Ω reciproke Formenschaaren, wenn zwischen ihren entsprechenden Zweigen eine Identität folgender Gestalt besteht:

$$\Pi_1\Omega_1 + \Pi_2\Omega_2 + \cdots + \Pi_n\Omega_n = \prod_{i=1}^{i=s} P(z e_i)^{\mu_i} \cdot \Phi(z_1, z_2).$$

Damit zwei Formenschaaren auf einer Riemann'schen Fläche in diesem Sinne reciprok zu einander sind, ist, wie leicht zu sehen, nothwendig und hinreichend, dass sich ihre Grade δ und δ' zu

$$2p-2+\sum_{i=1}^{i=s}\mu_i$$

ergänzen, und dass sich ihre entsprechenden Substitutionen von contragredienten Substitutionen nur um solche Multiplicatoren unterscheiden, die sich zu den Multiplicatoren der rechts stehenden Form ergänzen; letztere sind durch die Auswahl der unabhängigen Variablen z_1, z_2 und der Zahlen μ_i vollständig bestimmt, nämlich bei kanonischen Variablen z_1, z_2 (44, § 7)

bei einem Umlauf S: $\quad e^{2i\pi\mu_i}$,

bei einem Periodenweg $A_\varkappa$: $\quad e^{-\sum_\alpha \eta_{\alpha\varkappa}\left(\mu_1 W_\alpha^{e_1}+\mu_2 W_\alpha^{e_2}+\cdots+\mu_s W_\alpha^{e_s}\right)}$,

bei einem Periodenweg $B_\varkappa$: $\quad e^{-\sum_\alpha' \eta_{\alpha\varkappa}\left(\mu_1 W_\alpha^{e_1}+\mu_2 W_\alpha^{e_2}+\cdots+\mu_s W_\alpha^{e_s}\right)}$.

Bildet man zu allen Formenschaaren einer Classe die sämmtlichen reciproken Formenschaaren, so bilden die letzteren ebenfalls eine Classe, welche ich die „*reciproke Classe*" nennen will. Man hat dann den Satz:

Ist Π *eine Formenschaar der einen Classe,* Ω *eine Formenschaar der reciproken Classe, so besteht eine Identität:*

$$\Pi_1\Omega_1+\Pi_2\Omega_2+\cdots+\Pi_n\Omega_n=\prod_{i=1}^{i=s}P(ze_i)^{\mu_i}\cdot\Psi(z_1,z_2),$$

unter Ψ eine unverzweigte multiplicative Form vom Grade $\delta+\delta'-\sum_{i=1}^{i=s}\mu_i$ verstanden.

Umgekehrt, wenn eine solche Identität besteht, gehören Π *und* Ω *zu reciproken Classen.*

Wenn sich die Exponenten einer Formenschaar Π bei e_i von $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$ nur um ganze Zahlen unterscheiden können, so können sich, wie leicht zu sehen, die Exponenten einer Formenschaar Ω der reciproken Classe von $\mu_i-\lambda_{i1}, \mu_i-\lambda_{i2}, \ldots \mu_i-\lambda_{in}$ nur um ganze Zahlen unterscheiden. Es möge zuerst wieder der Fall des § 6 ausgeschlossen sein. Wenn dann $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$ die Normalexponenten der einen Classe sind, so will ich als Normalexponenten für die reciproke Classe die Zahlen $\lambda'_{i1}=\mu_i-\lambda_{i1}$, $\lambda'_{i2}=\mu_i-\lambda_{i2}$, $\lambda'_{in}=\mu_i-\lambda_{in}$ festlegen. Damit ist zugleich bestimmt, was man unter einer ganzen Formenschaar der Classe Ω, und was man unter einer Basis zu verstehen hat. Ich behaupte jetzt:

Wenn eine Basis der Formenclasse Π *gegeben ist, so kann man aus ihr stets auf einfache Weise eine Basis der reciproken Formenclasse* Ω *construiren.*

Man bilde nämlich die n^2 ersten Unterdeterminanten des Schemas:

$$\begin{matrix} \Pi_1' & \Pi_1'' \dots \Pi_1^{(n)} \\ \Pi_2' & \Pi_2'' \dots \Pi_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots \\ \Pi_n' & \Pi_n'' \dots \Pi_n^{(n)}, \end{matrix}$$

multiplicire dieselben mit $\prod\limits_{i=1}^{i=s} P(ze_i)^{\mu_i - \lambda_i}$ und bezeichne die so erhaltenen Formen mit:

$$\begin{matrix} \Omega_1' & \Omega_1'' \dots \Omega_1^{(n)} \\ \Omega_2' & \Omega_2'' \dots \Omega_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots \\ \Omega_n' & \Omega_n'' \dots \Omega_n^{(n)}. \end{matrix}$$

Fasst man dann die in einer Colonne stehenden Formen $\Omega_1^{(k)}, \Omega_2^{(k)}, \dots \Omega_n^{(k)}$ als Zweige einer Formenschaar $\Omega^{(k)}$ auf, so bilden $\Omega', \Omega'', \dots \Omega^{(k)}$ thatsächlich eine Basis der reciproken Classe.

Wenn die Determinante der Basis $\Pi', \Pi'', \dots \Pi^{(n)}$ der ersten Formenclasse

$$\prod_{i=1}^{i=s} P(ze_i)^{\lambda_i} F_q(z_1, z_2)$$

ist, so heisst die Determinante der zur reciproken Formenclasse gehörigen Basis $\Omega', \Omega'', \dots \Omega^{(n)}$

$$\prod_{i=1}^{i=s} P(ze_i)^{n\mu_i - \lambda_i} F_q(z_1, z_2)^{n-1},$$

oder, wenn ich

$$\lambda_{i1}' + \lambda_{i2}' + \dots + \lambda_{in}' = n\mu_i - \lambda_i = \lambda_i'$$

setze:

$$\prod_{i=1}^{i=s} P(ze_i)^{\lambda_i'} F_q(z_1, z_2)^{n-1}.$$

Man sieht hieraus zugleich Folgendes:

Jeder Ausnahmepunkt der Basis $\Pi', \Pi'', \dots \Pi^{(n)}$ *ist ein Ausnahmepunkt der Basis* $\Omega', \Omega'', \dots \Omega^{(n)}$ *von* $(n-1)$*facher Multiplicität.*

Es erhebt sich dabei sofort die Frage, welches die Elementarexponenten eines solchen Ausnahmepunktes in Bezug auf die Basis

$\Omega', \Omega'', \ldots \Omega^{(n)}$ sind, wenn seine Elementarexponenten in Bezug auf die Basis $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ bekannt sind.

Zur Beantwortung dieser Frage stütze ich mich auf folgenden Determinantensatz:

Es werde mit $\alpha_{i_1, i_2, \ldots i_\mu}^{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu}$ eine Determinante bezeichnet, die aus dem Schema

$$\begin{matrix} \alpha_1^1, & \alpha_1^2, & \ldots & \alpha_1^n \\ \alpha_2^1, & \alpha_2^2, & \ldots & \alpha_2^n \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_n^1, & \alpha_n^2, & \ldots & \alpha_n^n \end{matrix}$$

die $\varkappa_1$-, $\varkappa_2$-, $\ldots \varkappa_\mu$te Colonne und die i_1-, i_2-, $\ldots i_\mu$te Zeile enthält; die Gesammtdeterminante des Schemas sei A.

Es seien ferner

$$\begin{matrix} A_1^1, & A_1^2, & \ldots & A_1^n \\ A_2^1, & A_2^2, & \ldots & A_2^n \\ \vdots & & & \vdots \\ A_n^1, & A_n^2, & \ldots & A_n^n \end{matrix}$$

die ersten Unterdeterminanten des Schemas der $\alpha_i^\varkappa$, und die Unterdeterminanten des Schemas der $A_i^\varkappa$ mögen in entsprechender Weise, wie bei den $\alpha_i^\varkappa$ mit $A_{i_1, i_2, \ldots i_\mu}^{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu}$ bezeichnet werden.

Dann besteht der Satz:

$$A_{i_1, i_2, \ldots i_\mu}^{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu} = \pm\, \alpha_{i_1', i_2', \ldots i'_{n-\mu}}^{\varkappa_1', \varkappa_2', \ldots \varkappa'_{n-\mu}} \cdot A^{\mu-1}$$

wo unter $i_1', i_2', \ldots i'_{n-\mu}$ bezw. $\varkappa_1', \varkappa_2', \ldots \varkappa'_{n-\mu}$ diejenigen Zahlen verstanden werden, welche man erhält, wenn man von den Zahlen $1, 2, \ldots n$ die Zahlen $i_1, i_2, \ldots i_\mu$ bezw. $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu$ weglässt, und worin das Vorzeichen $\pm$ von der Reihenfolge der Zahlen $i_1', i_2' \ldots \ldots i'_{n-\mu}$ bezw. $\varkappa_1', \varkappa_2', \ldots \varkappa'_{n-\mu}$ abhängt.

Hieraus folgt, wenn $\varkappa_1', \varkappa_2', \ldots, \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots$ dieselbe Bedeutung für die Basis $\Omega', \Omega'', \ldots \Omega^{(n)}$ haben, wie $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\nu$ für die Basis $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ (§ 4):

$$\varkappa_\mu' = \varkappa_{n-\mu+2} + (n-\mu)\varkappa_1$$
$$\varepsilon_\mu' = \varkappa_1 - \varepsilon_{n-\mu+1}.$$

Wenn also ν Elementarexponenten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\nu$ von Null verschieden sind, so sind von den Elementarexponenten $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots$ die ersten $n-\nu$ sämmtlich gleich $\varkappa_1$, die folgenden ν dagegen um $\varepsilon_\nu, \varepsilon_{\nu-1}, \ldots \ldots \varepsilon_1$ kleiner als $\varkappa_1$

$$\begin{aligned}\varepsilon_1' = \varepsilon_2' = \cdots = \varepsilon_{n-\nu}' = \varkappa_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_\nu \\ \varepsilon_{n-\nu+1}' = \varkappa_1 - \varepsilon_\nu \\ \varepsilon_{n-\nu+2}' = \varkappa_1 - \varepsilon_{\nu-1} \\ \vdots \\ \varepsilon_n' = \varkappa_1 - \varepsilon_1.\end{aligned}$$

Wenn x speciell ein *einfacher Ausnahmepunkt* für die Basis Π', Π'', ... $\Pi^{(n)}$ ist, so ist

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \cdots = \varepsilon_\nu = 0,$$

also

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_2' = \cdots = \varepsilon_{n-1}' = 1, \quad \varepsilon_n' = 0.$$

x ist also für Ω', Ω'', ... $\Omega^{(n)}$ zwar ein $(n-1)$facher Ausnahmepunkt, doch können die Zusammensetzungscoefficienten einer ganzen Formenschaar Ω an der Stelle x nur einfach unendlich werden, und zwar so, dass die n Coefficienten des Unendlichwerdens nur einer einzigen homogenen linearen Gleichung zu genügen brauchen.

Des Genauern liegt die Sache so:

Wenn x ein einfacher Ausnahmepunkt der Basis Π', Π'', ... $\Pi^{(n)}$ ist, so giebt es in dem Schema

$$\begin{matrix}\Pi_1' & \Pi_1'' & \ldots & \Pi_1^{(n)} \\ \Pi_2' & \Pi_2'' & \ldots & \Pi_2^{(n)} \\ \vdots \\ \Pi_n' & \Pi_n'' & \ldots & \Pi_n^{(n)}\end{matrix}$$

mindestens eine Zeile, deren zugehörige erste Unterdeterminanten für $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$ nicht sämmtlich verschwinden. Das Verhältniss der Werthe dieser Unterdeterminanten an der Stelle x ist wegen des Verschwindens der Gesammtdeterminante ein wohlbestimmtes, von der Auswahl der Zeile unabhängiges, etwa

$$A_1 : A_2 : \cdots : A_n.$$

Andererseits giebt es wegen $\varepsilon_n = 0$ in dem reciproken Schema:

$$\begin{matrix}\Omega_1' & \Omega_1'' & \ldots & \Omega_1^{(n)} \\ \Omega_2' & \Omega_2'' & \ldots & \Omega_2^{(n)} \\ \vdots & & & \vdots \\ \Omega_n' & \Omega_n'' & \ldots & \Omega_n^{(n)}\end{matrix}$$

mindestens eine Zeile, deren Glieder für $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$ nicht sämmtlich verschwinden, und diese Glieder stehen, wegen des Verschwindens der $(n-1)^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten, an der Stelle $z = x$ in einem wohlbestimmten, von der Auswahl der Zeile unabhängigen Verhältniss, nämlich in genau demselben Verhältniss

$$A_1 : A_2 : \cdots : A_n,$$

wie aus der Definition der Ω unmittelbar folgt.

Wir haben dann folgenden Satz:

In einer ganzen Formenschaar:

$$\Pi = \varphi_1 \Pi' + \varphi_2 \Pi'' + \cdots + \varphi_n \Pi^{(n)}$$

dürfen die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ je einfach unendlich werden mit Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, welche in dem Verhältniss stehen:

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \cdots : \alpha_u = A_1 : A_2 : \cdots : A_n,$$

und in einer ganzen Formenschaar:

$$\Omega = \psi_2 \Omega' + \psi_2 \Omega'' + \cdots + \psi_n \Omega^{(n)}$$

dürfen die $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ je einfach unendlich werden mit Coefficienten $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$, welche der Gleichung genügen:

$$A_1 \beta_1 + A_2 \beta_2 + \cdots + A_n \beta_n = 0.$$

Jede Formenschaar Π lässt sich durch $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$, jede Formenschaar Ω durch $\Omega', \Omega'', \ldots \Omega^{(n)}$ linear ausdrücken:

$$\Pi = \varphi_1 \Pi' + \varphi_2 \Pi'' + \cdots + \varphi_n \Pi^{(n)},$$

$$\Omega = \psi_1 \Omega' + \psi_2 \Omega'' + \cdots + \psi_n \Omega^{(n)}.$$

Bildet man den Ausdruck

$$\Pi_1 \Omega_1 + \Pi_2 \Omega_2 + \cdots + \Pi_n \Omega_n,$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 \psi_1 \cdot \sum_i \Pi_i' \Omega_i' + \varphi_1 \psi_2 \sum_i \Pi_i' \Omega_i'' + \cdots + \varphi_1 \psi_n \sum_i \Pi_i' \Omega_i^{(n)} \\
&+ \varphi_2 \psi_1 \sum_i \Pi_i'' \Omega_i' + \varphi_2 \psi_2 \sum_i \Pi_i'' \Omega_i'' + \cdots + \varphi_2 \psi_n \sum_i \Pi_i'' \Omega_i^{(n)} \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&+ \varphi_n \psi_1 \sum_i \Pi_i^{(n)} \Omega_i' + \varphi_n \psi_2 \sum_i \Pi_i^{(n)} \Omega_i'' + \cdots + \varphi_n \psi_n \sum_i \Pi_i^{(n)} \Omega_i^{(n)}.
\end{aligned}$$

Aus der Definition der $\Omega', \Omega'', \ldots \Omega^{(n)}$ folgen aber die Identitäten:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \Pi_i^k \Omega_i^k = \prod_{i=1}^{i=s} P(z e_i)^{\mu_i} \, . \, F_q(z_1, z_2),$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \Pi_i^k \Omega_i^l = 0, \quad \text{wenn} \quad k \lesseqgtr l.$$

In Folge dessen ist

$$\Pi_1 \Omega_1 + \Pi_2 \Omega_2 + \cdots + \Pi_n \Omega_n$$

$$= \prod_{i=1}^{i=s} P(z, e_i)^{\mu_i} \, . \, F_q(z_1, z_2) \, . \, (\varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 + \cdots + \varphi_n \psi_n).$$

Wenn Π und Ω nicht nur reciproken Classen angehören, sondern selbst reciproke Formenschaaren im Sinne der Definition zu Anfang dieses Paragraphen sein sollen, so müssen die Producte $F_q(z_1, z_2) . \varphi_1 . \psi_1$, $F_q(z_1, z_2) . \varphi_2 . \psi_2, \ldots F_q(z_1, z_2) . \varphi_n . \psi_n$ jedes eine multiplicative Form $\Phi_{2p-2}(z_1, z_2)$ sein, also φ_ν und $\psi_\nu . F_q(z_1, z_2)$ müssen reciproke multiplicative Formen sein. Wir haben also den Satz:

Ist

$$\Pi = \varphi_1 \Omega' + \varphi_2 \Omega'' + \cdots + \varphi_n \Omega^{(n)}$$

irgend eine Formenschaar der Classe Π, so drücken sich die zu Π reciproken Formenschaaren Ω in der Gestalt aus:

$$\Omega = \frac{\varphi_1'}{F_q} \Omega' + \frac{\varphi_2'}{F_q} \Omega'' + \cdots + \frac{\varphi_n'}{F_q} \Omega^{(n)},$$

unter $\varphi_1', \varphi_2', \ldots \varphi_n'$ multiplicative Formen verstanden, welche zu den Formen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ beziehungsweise reciprok sind. (44, S. 312.)

§ 8.

Fälle mit ganzzahligen Exponentendifferenzen.

Ziehen wir jetzt auch die in § 6 besprochenen Fälle mit in die Betrachtung, so ändern sich die Angaben des letzten Paragraphen nur insofern, als an Stelle von $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$; λ_i die modificirten Exponenten $(\lambda)_{i1}, (\lambda)_{i2}, \ldots (\lambda)_{in}$; $(\lambda)_i$ treten.

Als Normalexponenten für die Definition der ganzen Formenschaaren sind sowohl in der Classe der Π, wie in der Classe der Ω modificirte Exponenten zu Grunde zu legen.

Ich behaupte nun:

Wenn $(\lambda)_{i1}, (\lambda)_{i2}, \ldots (\lambda)_{in}$ brauchbare modificirte Exponenten der Classe Π sind, so sind $(\lambda')_{i1} = \mu_i - (\lambda)_{i1}$, $(\lambda')_{i2} = \mu_i - (\lambda)_{i2}, \ldots$ $\ldots (\lambda')_{in} = \mu_i - (\lambda)_{in}$ gerade auch brauchbare modificirte Exponenten für die reciproke Classe Ω.

Ich will wieder, um unnütze Complicationen zu vermeiden, nur diejenigen Fundamentalzweige berücksichtigen, welche zu Elementartheilern der Substitution mit derselben Nullstelle gehören, wie in § 6.

Dann hat die zu S contragrediente Substitution S' eine ähnliche Gestalt wie S:

$$S' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline S_1' & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \hline 0 & S_2' & \cdot & \cdot & 0 \\ \hline \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \hline 0 & 0 & \cdot & \cdot & S_q' \\ \hline \end{array}$$

und ebenso natürlich jede Substitution, die sich von der contragredienten um eine simultane Multiplication aller Zweige mit einer Constanten unterscheidet.

Dabei hat das Theilschema S_ν' die Gestalt:

$$\boxed{S_\nu'} = \left| \begin{array}{ccccc} +\beta, & -\beta, & +\beta & \cdots & (-1)^{\varepsilon_\nu-1}\cdot\beta \\ 0 & +\beta, & -\beta & \cdots & (-1)^{\varepsilon_\nu-2}\cdot\beta \\ 0 & 0 & +\beta & \cdots & (-1)^{\varepsilon_\nu-3}\cdot\beta \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & +\beta \end{array} \right|$$

Die Theilsubstitution S_ν' nimmt die gewöhnliche Normalform an, wenn man sie vermittelst der Substitution

$$\begin{array}{ccccc} 0 \;\ldots\ldots & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0 & 0, & 0, & -1, & 0 \\ 0 & 0, & +1, & +1, & 0 \\ 0 & -1, & -2, & -1, & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ (-1)^{\varepsilon_\nu-2}\ldots & (-1)^{\varepsilon_\nu-1}\binom{\varepsilon_\nu-2}{2}, & (-1)^{\varepsilon_\nu-1}\binom{\varepsilon_\nu-2}{1}, & (-1)^{\varepsilon_\nu-1}, & 0 \end{array}$$

transformirt.

Sind also $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_{\varepsilon_\nu}$ Fundamentalzweige von Π, welche eine Hamburger'sche Untergruppe bilden, so sind die contragredienten Zweige $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_{\varepsilon_\nu}$ von Ω zwar nicht selbst Fundamentalzweige von Ω, wohl aber die Combination:

$$\begin{aligned}
&+\Omega_{\varepsilon_\nu},\\
&-\Omega_{\varepsilon_\nu-1},\\
&+\Omega_{\varepsilon_\nu-2}+\Omega_{\varepsilon_\nu-1},\\
&-(\Omega_{\varepsilon_\nu-3}+2\Omega_{\varepsilon_\nu-2}+\Omega_{\varepsilon_\nu-1}),\\
&\;\;\vdots\\
(-1)^{\varepsilon_\nu-1}&\left(\Omega_1+\binom{\varepsilon_\nu-2}{1}\Omega_2+\binom{\varepsilon_\nu-2}{2}\Omega_3+\cdots+\Omega_{\varepsilon_\nu-1}\right).
\end{aligned}$$

Wenn $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_{\varepsilon_\nu}$ an der betreffenden Stelle die Exponenten $(\lambda)_1^{(\nu)}, (\lambda)_2^{(\nu)}, \ldots (\lambda)_{\varepsilon_\nu}^{(\nu)}$ haben, so sind die Exponenten von $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_{\varepsilon_\nu}$ der Reihe nach $\mu_i - (\lambda)_1^{(\nu)}, \mu_i - (\lambda)_2^{(\nu)}, \ldots \mu_i - (\lambda)_{\varepsilon_\nu}^{(\nu)}$, die Exponenten der Fundamentalzweige von Ω dagegen dieselben Zahlen in umgekehrter Reihenfolge

$$\begin{aligned}
(\lambda')_1^{(\nu)} &= \mu_i - (\lambda)_{\varepsilon_\nu}^{(\nu)},\\
(\lambda')_2^{(\nu)} &= \mu_i - (\lambda)_{\varepsilon_\nu-1}^{(\nu)},\\
&\;\;\vdots\\
(\lambda')_{\varepsilon_\nu}^{(\nu)} &= \mu_i - (\lambda)_1^{(\nu)}.
\end{aligned}$$

In der That, nur so sind sowohl die (λ) wie die (λ') nach abnehmender Grösse des reellen Theils geordnet, wie es bei einem Fundamentalsystem der Fall sein muss.

Ich behaupte nun:

Wenn die (λ) modificirte Exponenten sind, d. h. durch Uebergang zu einem andern Fundamentalsystem nicht mehr erniedrigt werden können, so sind auch die (λ') modificirte Exponenten, d. h. können ebenfalls nicht durch Uebergang zu einem andern Fundamentalsystem erniedrigt werden.

Damit nämlich ein System von Exponenten (λ), die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, ein modificirtes Exponentensystem sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die Gleichungen auf S. 176 auch richtig bleiben, wenn man rechts für die λ die links stehenden (λ) selbst einsetzt.

D. h. in dem Schema

$$\begin{array}{ccccc}
(\lambda)_1^{(1)} & (\lambda)_1^{(2)} & (\lambda)_1^{(3)} & \cdots & (\lambda)_1^{(q)}, \\
(\lambda)_2^{(1)} & (\lambda)_2^{(2)} & (\lambda)_2^{(3)} & & (\lambda)_2^{(q)}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
(\lambda)_{\varepsilon_1}^{(1)} & (\lambda)_{\varepsilon_1}^{(2)} & (\lambda)_{\varepsilon_1}^{(3)} & & (\lambda)_{\varepsilon_1}^{(q)}, \\
 & (\lambda)_{\varepsilon_1+1}^{(2)} & (\lambda)_{\varepsilon_1+1}^{(3)} & & (\lambda)_{\varepsilon_1+1}^{(q)}, \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & (\lambda)_{\varepsilon_2}^{(2)} & (\lambda)_{\varepsilon_2}^{(3)} & & (\lambda)_{\varepsilon_2}^{(q)}, \\
 & & (\lambda)_{\varepsilon_2+1}^{(3)} & & (\lambda)_{\varepsilon_2+1}^{(q)}, \\
 & & \vdots & & \vdots \\
 & & (\lambda)_{\varepsilon_3}^{(3)} & & (\lambda)_{\varepsilon_3}^{(q)}, \\
 & & & & (\lambda)_{\varepsilon_3+1}^{(q)}, \\
 & & & & \vdots \\
 & & & & (\lambda)_{\varepsilon_q}^{q}
\end{array}$$

müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1) Die Zahlen jeder Colonne müssen nach abnehmendem reellen Theil geordnet sein.

2) Schiebe ich die erste Colonne, oder die ersten zwei Colonnen, u. s. w., allgemein die ersten $(\nu-1)$-Colonnen jede so weit nach unten, dass sie mit der νten Colonne auf derselben Zeile endigen, so muss in den ε_ν ersten Zeilen immer die νte Zahl den kleinsten reellen Theil haben, unbeschadet der Möglichkeit, dass auch noch andere Zahlen derselben Zeile denselben kleinsten reellen Theil haben.

Die Bedingung 2) ist dann und nur dann erfüllt, wenn einerseits in dem hingeschriebenen Schema die Zahlen jeder Zeile nach zunehmendem reellen Theil, andererseits in dem Schema, welches man durch Herunterschieben der Colonnen bis auf die letzte Zeile erhält, die Zahlen jeder Zeile nach abnehmendem reellen Theil geordnet sind. Colonnen, welche die gleiche Gliederzahl besitzen, müssen dabei aus denselben Zahlen bestehen.

Und hieraus folgt nun unmittelbar der zu beweisende Satz. Denn das dem hingeschriebenen Schema der (λ) entsprechende Schema der (λ) erhält man, indem man alle Colonnen bis auf die letzte Zeile herunterschiebt, dann die Reihenfolge der Zeilen umkehrt und endlich die $(\lambda)_\mu^\nu$ durch $(\lambda')^{(\nu)}_{\varepsilon_\nu-\mu+1} = \mu_i - (\lambda)_\mu^\nu$ ersetzt.

Es ist dann sofort zu sehen, dass das System der $(\lambda')_\mu^\nu$ genau denselben Bedingungen genügt, wie das der $(\lambda)_\mu^\nu$, dass also die $(\lambda')_\mu^\nu$ wirklich modificirte Exponenten sind, w. z. b. w.

Wir können daher, wenn $(\lambda)_{i1}, (\lambda)_{i2}, \ldots (\lambda)_{in}$ die Normalexponenten der Classe Π sind, ohne Weiteres

$$(\lambda')_{i1} = \mu_i - (\lambda)_{i1}, \ (\lambda')_{i2} = \mu_i - (\lambda)_{i2}, \ldots (\lambda')_{in} = \mu_i - (\lambda)_{in}$$

als Normalexponenten für die reciproke Classe annehmen, und es bleiben somit alle Entwicklungen des vorigen Paragraphen auch für die zuerst ausgeschlossenen Fälle bestehen, wenn man nur die $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$; λ_i überall durch $(\lambda)_{i1}, (\lambda)_{i2}, \ldots (\lambda)_{in}$; $(\lambda)_i$ ersetzt.

§ 9.

Ausdehnung des Riemann-Roch'schen Satzes.

Ich verstehe jetzt unter einem „*Riemann'schen Formensystem*" die Gesammtheit derjenigen verwandten Formenschaaren, welche ein und denselben vorgegebenen Grad, und ein und dasselbe vorgegebene Multiplicatorsystem besitzen. Die Gesammtheit der zu den Schaaren eines Formensystems reciproken Schaaren ist natürlich wieder ein Formensystem, das *reciproke Formensystem.*

Wir stellen uns die Frage:

Welches ist die allgemeinste Formenschaar Π *eines Riemann'schen Formensystems, welche nur an vorgegebenen Stellen bis zu je einer vorgegebenen Ordnung unendlich werden darf, und wie viele willkürliche Constanten enthält eine derartige Formenschaar?*

Zuerst stelle ich die etwas einfachere Frage:

Welches ist die allgemeinste ganze Formenschaar eines Riemann'schen Formensystems, und wie viele willkürliche Constanten enthält sie?

Es sei $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ eine Basis der Classe Π mit nur einfachen Ausnahmepunkten; eine solche Basis kann man ja nach § 5 stets finden. Die Grade von $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ seien $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$, ihre den Periodenwegen $A_\varkappa, B_\varkappa$ entsprechenden Multiplicatoren

$$\alpha'_\varkappa, \beta'_\varkappa; \ \alpha''_\varkappa, \beta''_\varkappa; \ldots \alpha^{(n)}_\varkappa, \ \beta^{(n)}_\varkappa,$$

ihre Determinante

$$\prod_{i=1}^{i=s} P(z\, e_i)^{\lambda_i} F_q(z_1, z_2),$$

$$q = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n - \sum_{i=1}^{i=s} (\lambda)_i$$

und die Ausnahmepunkte, die Nullstellen von F_q seien $y', y'', \ldots y^{(n)}$.

Eine ganze Formenschaar Π des Formensystems vom Grade δ und mit den Multiplicatoren $\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa$ muss sich in der Gestalt darstellen:

$$\Pi = \varphi_1 \Pi' + \varphi_2 \Pi'' + \cdots + \varphi_n \Pi^{(n)},$$

wobei $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ unverzweigte multiplicative Formen von den Graden $\delta - \delta_1, \delta - \delta_2, \ldots \delta - \delta_n$ und mit den Multiplicatoren $\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha'_\varkappa}, \frac{\beta_\varkappa}{\beta'_\varkappa}; \frac{\alpha_\varkappa}{\alpha''_\varkappa}, \frac{\beta_\varkappa}{\beta''_\varkappa}; \ldots \frac{\alpha_\varkappa}{\alpha^{(n)}_\varkappa}, \frac{\beta_\varkappa}{\beta^{(n)}_\varkappa}$ sind, welche nur an den Stellen $y', y'', \ldots y^{(q)}$ je einfach unendlich werden dürfen, aber mit Coefficienten, welche noch gewissen Bedingungen genügen müssen.

Die Coefficienten des Unendlichwerdens von φ_ν an den Stellen $y', y'', \ldots y^{(q)}$ seien $\alpha'_\nu, \alpha''_\nu, \ldots \alpha^{(q)}_\nu$. Die Bedingungen, denen diese Coefficienten unterworfen sind, sind folgende:

1) Die am Ende von § 7 angegebenen:

$$\begin{aligned}
\alpha_1' : \alpha_2' : \cdots : \alpha_n' &= A_1' : A_2' : \cdots : A_n', \\
\alpha_1'' : \alpha_2'' : \cdots : \alpha_n'' &= A_1'' : A_2'' : \cdots : A_n'', \\
&\vdots \\
\alpha_1^{(q)} : \alpha_2^{(q)} : \cdots : \alpha_n^{(q)} &= A_1^{(q)} : A_2^{(q)} : \cdots : A_n^{(q)},
\end{aligned}$$

2) diejenigen Bedingungen, die aus der Theorie der multiplicativen Formen für die Unendlichkeitsstellen jeder einzelnen Form φ_ν folgen (44, S. 315):

$$\alpha_\nu' \varphi_\nu'(y_1', y_2') + \alpha_\nu'' \varphi_\nu'(y_1'', y_2'') + \cdots + \alpha_\nu^{(q)} \varphi_\nu'(y_1^{(q)}, y_2^{(q)}) = 0,$$

wo für φ_ν' der Reihe nach die sämmtlichen linear unabhängigen ganzen zu φ_ν reciproken multiplicativen Formen einzusetzen sind.

Ich setze gemäss den Gleichungen 1)

$$\begin{aligned}
\alpha_1' &= A_1' \alpha' \quad & \alpha_2' &= A_2' \alpha' \quad \cdots & \alpha_n' &= A_n' \alpha', \\
\alpha_1'' &= A_1'' \alpha'' \quad & \alpha_2'' &= A_2'' \alpha'' \quad \cdots & \alpha_n'' &= A_n'' \alpha'', \\
&\vdots \\
\alpha_1^{(q)} &= A_1^{(q)} \alpha^{(q)} \quad & \alpha_2^{(q)} &= A_2^{(q)} \alpha^{(q)} \quad \cdots & \alpha_n^{(q)} &= A_n^{(q)} \alpha^{(q)},
\end{aligned}$$

so dass ich nur noch q unbekannte Grössen $\alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(q)}$ habe. Diese sind nun noch den Bedingungen 2) zu unterwerfen:

$$(2') \quad \alpha' A_\nu' \varphi_\nu'(y_1', y_2') + \alpha'' A_\nu'' (y_1'', y_2'') + \cdots + \alpha^{(q)} A_\nu^{(q)} \varphi_\nu' (y_1^{(q)}, y_2^{(q)}) = 0,$$

worin $\nu = 1, 2, \ldots n$ zu setzen und bei jedem ν für φ_ν' der Reihe nach sämmtliche linear unabhängigen zu φ_ν reciproken ganzen Formen einzusetzen sind.

Sei σ_ν die Anzahl der linear unabhängigen *ganzen* Formen φ_ν, σ_ν' die Anzahl der linear unabhängigen reciproken ganzen Formen φ_ν', so sind also die q Coefficienten $\alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(q)}$ im Ganzen $\sigma_1' + \sigma_2' + \cdots + \sigma_n'$ homogenen linearen Gleichungen zu unterwerfen.

Es mögen σ' dieser Gleichungen eine identische Folge der übrigen sein; dann sind $q - \sum\limits_{\nu} \sigma_\nu' + \sigma'$ der Coefficienten $\alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(q)}$ willkürlich. Da aber zu jeder der Formen φ_ν noch eine ganze Form φ_ν des betreffenden Grades und Multiplicatorsystemes hinzugefügt werden kann, ohne dass die Coefficienten der Unendlichkeitsstellen sich ändern, so enthalten die φ_ν zusammen im Ganzen

$$\sigma = \sum \sigma_\nu + q - \sum \sigma_\nu' + \sigma'$$

willkürliche Constanten linear und homogen.

Nach dem Riemann-Roch'schen Satz für ganze multiplicative Formen (44, S. 314) ist aber:

$$\sigma_\nu = \delta - \delta_\nu - p + 1 + \sigma_\nu';$$

also ist, mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\sum \delta_\nu = q + \sum_{i=1}^{i=s} (\lambda)_i,$$

$$\sigma = n(\delta - p + 1) - \sum_{i=1}^{i=s} (\lambda)_i + \sigma'.$$

Die Zahl σ', die Anzahl derjenigen Gleichungen (2'), welche identische Folge der übrigen sind, ist nun genauer zu charakterisiren. σ' bedeutet die Anzahl derjenigen linear unabhängigen linearen Verbindungen der $\sigma_1' + \sigma_2' + \cdots + \sigma_n'$ Gleichungen (2'), welche identisch verschwinden, d. h. in welchen die Coefficienten von $\alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(q)}$ jeder einzeln verschwinden. Denkt man sich die $\sigma_1' + \sigma_2' + \cdots \sigma_n'$ Gleichungen (2') untereinander geschrieben, jede mit einer unbestimmten Constanten multiplicirt, alles addirt und die Coefficienten schliesslich $= 0$ gesetzt, so erhält man q Gleichungen von der Form:

$$\begin{array}{l}
A_1'\, \varphi_1'(y_1', y_2') + A_2'\, \varphi_2'(y_1', y_2') + \cdots + A_n'\, \varphi_n'(y_1', y_2') = 0, \\
A_1''\, \varphi_1'(y_1'', y_2'') + A_2''\, \varphi_2'(y_1'', y_2'') + \cdots + A_n''\, \varphi_n'(y_1'', y_2'') = 0, \\
\vdots \\
A_1^{(q)}\, \varphi_1'(y_1^{(q)}, y_2^{(q)}) + A_2^{(q)}\, \varphi_2'(y_1^{(q)}, y_2^{(q)}) + \cdots + A_n^{(q)}\, \varphi_n'(y_1^{(q)}, y_2^{(q)}) = 0
\end{array}$$

wo die $\sigma_1' + \sigma_2' + \cdots + \sigma_n'$ unbestimmten Multiplicatoren der Gleichungen (2') als willkürliche Constanten in den ganzen Formen $\varphi_1', \varphi_2', \ldots \varphi_n'$ enthalten sind.

σ' ist daher die Anzahl der willkürlichen Constanten in denjenigen ganzen Formen $\varphi_1', \varphi_2', \ldots \varphi_n'$, welche den obigen q Bedingungen genügen.

Wir ziehen nun die zu Π reciproken ganzen Formenschaaren Ω

mit heran. Die reciproken Formenschaaren überhaupt haben nach § 7 die Form

$$\Omega = \frac{\varphi_1'}{F_q}\Omega' + \frac{\varphi_2'}{F_q}\Omega'' + \cdots + \frac{\varphi_n'}{F_q}\Omega^{(n)}.$$

Wenn Ω eine ganze Formenschaar sein soll, so dürfen die Coefficienten in dieser Darstellung an den 0-Stellen von F_q nur einfach unendlich werden, d. h. $\varphi_1', \varphi_2' \dots \varphi_n'$ müssen ganze Formen sein. Die Coefficienten des Unendlichwerdens von $\frac{\varphi_1'}{F_q}, \frac{\varphi_2'}{F_q}, \dots \frac{\varphi_n'}{F_q}$ an der Stelle y', sind proportional mit

$$\varphi_1'(y_1', y_2'),\ \varphi_2'(y_1', y_2'), \dots \varphi_n'(y_1', y_2').$$

Diese Grössen müssen also, wenn Ω eine ganze Formenschaar sein soll, nach S. 190 der Gleichung genügen

$$A_1'\varphi_1'(y_1', y_2') + A_2'\varphi_2'(y_1', y_2') + \cdots + A_n'\varphi_n'(y_1', y_2') = 0.$$

Entsprechend an den Stellen $y'', \dots y^{(q)}$:

$$\begin{array}{l} A_1''\varphi_1'(y_1'', y_2'') + A_2''\varphi_2''(y_1'', y_2'') + \cdots + A_n''\varphi_n'(y_1'', y_2'') = 0, \\ \vdots \\ A_1^{(q)}\varphi_1'(y_1^{(q)}, y_2^{(q)}) + A_2^{(q)}\varphi_2'(y_1^{(q)}, y_2^{(q)}) + \cdots + A_n^{(q)}\varphi_n'(y_1^{(q)}, y_2^{(q)}) = 0. \end{array}$$

Es giebt also so viele linear unabhängige zu Π reciproke ganze Formenschaaren, als es linear unabhängige ganze Formen $\varphi_1', \varphi_2', \dots \varphi_n'$ giebt, die diesem Gleichungssystem genügen, d. h. da dieses Gleichungssystem mit demjenigen auf der letzten Seite identisch ist:

σ' bedeutet die Anzahl der linear unabhängigen ganzen zu Π reciproken Formenschaaren.

Und wir haben hiermit den Satz gewonnen:

Die Anzahl der linear unabhängigen ganzen Formenschaaren Π eines gegebenen Formensystems ist

$$\sigma = n(\delta - p + 1) - \sum_{i=1}^{i=s}(\lambda)_i + \sigma',$$

unter σ' die Anzahl der linear unabhängigen ganzen Formenschaaren des reciproken Formensystems verstanden.

In Folge der Identitäten:

$$\delta + \delta' = \sum_{i=1}^{i=s}\mu_i + 2p - 2,$$

$$(\lambda)_i + (\lambda')_i = n\mu_i$$

kann man dieselbe Gleichung auch in der genau reciproken Form schreiben

$$\sigma' = n(\delta' - p + 1) - \sum_{i=1}^{i=s} (\lambda')_i + \sigma.$$

Hiermit ist der von mir in (44, S. 314) für ganze multiplicative Formen ausgesprochene Satz, die Erweiterung des bekannten Brill-Nöther'schen Reciprocitätssatzes, auf Riemann'sche Formenschaaren ausgedehnt worden.

Es ist nun auch eine Leichtigkeit, die Anzahl der willkürlichen Constanten in einer Formenschaar mit vorgegebenen Unendlichkeitsstellen abzuzählen, und damit die Ausdehnung des allgemeinen Riemann-Roch'schen Satzes anzugeben.

Es sei Π eine Formenschaar des gegebenen Formensystems, welche an den ε vorgegebenen Stellen $x', x'', \ldots x^{(\varepsilon)}$ unendlich werden darf; Stellen, an denen mehrfaches Unendlichwerden gestattet ist, mögen dabei so oft mitgezählt werden, als die betreffende Multiplicität angiebt.

Es werde zur Abkürzung

$$f_\varepsilon = P(zx')\, P(zx'') \ldots P(zx^{(\varepsilon)})$$

gesetzt, und a_x, b_x seien die Multiplicatoren von f_ε. Es ist dann $\Pi \,.\, f_\varepsilon$ die allgemeinste ganze Formenschaar des Formensystems vom Grade $\delta + \varepsilon$ mit dem Multiplicatorsystem $a_x \alpha_x, \; b_x \beta_x$. Die Anzahl der willkürlichen Constanten in Π ist daher

$$n(\delta + \varepsilon - p + 1) - \sum_{i=1}^{i=s} (\lambda)_i + \tau',$$

unter τ' die Anzahl aller linear unabhängigen ganzen zu $\Pi \,.\, f_\varepsilon$ reciproken Formenschaaren verstanden.

Die letzteren sind also

$$\frac{\Omega}{f_\varepsilon},$$

unter Ω die allgemeinste zu Π reciproke ganze Formenschaar verstanden, deren sämmtliche Zweige an sämmtlichen ε Nullstellen von ε verschwinden.

Mithin besteht der Riemann-Roch'sche Satz für Formenschaaren mit Unendlichkeitsstellen:

Die Anzahl derjenigen linear unabhängigen Formenschaaren Π *eines Formensystems, welche an* ε *vorgegebenen Stellen unendlich werden dürfen, ist*

$$n(\delta + \varepsilon - p + 1) - \sum_{i=1}^{i=s} (\lambda)_i + \tau',$$

unter τ' die Anzahl aller derjenigen linear unabhängigen ganzen Schaaren des reciproken Formensystems verstanden, welche an den sämmtlichen zugelassenen Unendlichkeitsstellen verschwinden.

§ 10.

Die Coefficienten der Unendlichkeitsstellen.

In (44) habe ich auf den dort aufgestellten Riemann-Roch'schen Satz eine Darstellung der multiplicativen Formen durch Elementarformen gegründet, d. h. durch Formen, die nur an je einer einzigen variablen Stelle unendlich werden. Eine ganz entsprechende Theorie lässt sich jetzt mit Hülfe des verallgemeinerten Riemann-Roch'schen Satzes für die Riemann'schen Formenschaaren aufbauen.

Bevor wir jedoch versuchen, eine Formenschaar, welche an vorgegebenen Stellen mit vorgegebenen Coefficienten unendlich wird, wirklich darzustellen, müssen wir untersuchen, ob wir überhaupt die Unendlichkeitsstellen und ihre Coefficienten ganz beliebig vorgeben dürfen, oder ob dieselben nicht etwa gewissen Relationen genügen müssen. Ich will mich hierbei, wie überhaupt bei den weiteren Entwicklungen in dieser Arbeit auf nur einfache Unendlichkeitsstellen beschränken.

Eine Formenschaar Π werde an den Stellen $x', x'', \ldots x^{(\varepsilon)}$ je einfach unendlich. Um das Verhalten an einer dieser Stellen vollständig zu charakterisiren, müssen wir angeben, mit welchem Coefficienten jeder einzelne der Zweige $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n$ an der Stelle unendlich wird. Zu jeder Stelle x gehören also n Coefficienten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$, welche in der Weise definirt sein mögen, dass die Entwicklung des Zweiges Π_i nach aufsteigenden Potenzen der Primform $P(zx)$ mit dem Gliede beginnt:

$$\gamma \cdot \prod_{i=1}^{i=s} P(xe_i)^{\mu_i} \cdot \left(\frac{P(zy)}{P(xy)}\right)^{\delta+1} P(zx)^{-1}.$$

In diesem Sinne mögen zu den Punkten $x'. x'', \ldots x^{(\varepsilon)}$ die Coefficienten $\gamma_1', \gamma_2', \ldots \gamma_n'; \gamma_1'', \gamma_2'', \ldots \gamma_n''; \ldots \gamma_1^{(\varepsilon)}, \gamma_2^{(\varepsilon)}, \ldots \gamma_n^{(\varepsilon)}$ gehören.

Welchen Relationen müssen diese Coefficienten genügen?

$g(z_1, z_2)$ sei irgend eine der zu Π reciproken ganzen Formenschaaren. Dann besteht eine identische Relation:

$$\Pi_1 g_1 + \Pi_2 g_2 + \cdots + \Pi_n g_n = \prod_{i=1}^{i=n} P(ze_i)^{\mu_i} \cdot \Phi_{2p-2}(z_1, z_2),$$

worin $\Phi_{2p-2}(z_1, z_2)$ eine, wenn wir der Bequemlichkeit halber im

Folgenden immer kanonische Variabeln z_1, z_2 zu Grunde legen, algebraische Form vom Grade $2p-2$ ist.

Φ_{2p-2} wird nur an den Stellen $x', x'', \dots x^{(\varepsilon)}$ je einfach unendlich, und zwar an der Stelle $x^{(\nu)}$ mit dem Coefficienten

$$\gamma_1^{(\nu)} g_1(x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}) + \gamma_2^{(\nu)} g_2(x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}) + \cdots + \gamma_n^{(\nu)} g_n(x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}).$$

Nun muss aber nach (44, S. 312) die Summe dieser Coefficienten an den ε Stellen $x', x'', \dots x^{(\varepsilon)}$ gleich Null sein, und dies muss der Fall sein, welche der σ' linear unabhängigen ganzen Formenschaaren $g', g'', \dots g^{(\sigma')}$ wir auch benutzen, d. h.:

Die $n\varepsilon$ Coefficienten der ε Unendlichkeitsstellen der Formenschaar Π *müssen den σ' linearen Relationen genügen:*

$$\sum_{i,\nu} \gamma_i^{(\nu)} g_i'(x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}) = 0, \quad \sum_{i,\nu} \gamma_i^{(\nu)} g_i''(x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}) = 0, \cdots$$
$$\cdots \sum_{i,\nu} \gamma_i^{(\nu)} g_i^{(\sigma')}(x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}) = 0.$$

Wenn es τ' linear unabhängige lineare Combinationen der Schaaren $g', g'', \dots g^{(\sigma')}$ giebt, deren sämmtliche Zweige an sämmtlichen Stellen $x', x'', \dots x^{(\varepsilon)}$ verschwinden, so sind von diesen σ' Gleichungen nur $\sigma' - \tau'$ linear unabhängig, die $\gamma_i^{(\nu)}$ enthalten also genau $n \cdot \varepsilon - \sigma' + \tau'$ willkürliche Constanten linear und homogen. Ausserdem kann man aber ohne Aenderung der $\gamma_i^{(\nu)}$ zu Π noch eine beliebige ganze Formenschaar desselben Formensystems hinzufügen, welche

$$\sigma = n(\delta - p + 1) - \sum_{i=1}^{i=s} (\lambda)_i + \sigma'$$

willkürliche Constanten linear und homogen enthält. Das giebt genau

$$n\varepsilon - \sigma' + \tau' + \sigma = n(\delta + \varepsilon - p + 1) - \sum_{i=1}^{i=s} (\lambda)_i + \tau'$$

linear und homogen in Π enthaltene willkürliche Constanten, genau dieselbe Zahl, welche der Riemann-Roch'sche Satz giebt.

Daraus folgt:

Die angegebenen Relationen sind die einzigen, denen die Coefficienten $\gamma_i^{(\nu)}$ der Unendlichkeitsstellen zu genügen brauchen.

Von den willkürlichen Constanten in einer an den Stellen $x', x'', \dots x^{(\varepsilon)}$ unendlich werdenden Formenschaar Π *kommen $n\varepsilon - \sigma' + \tau'$ auf die Coefficienten der Unendlichkeitsstellen und σ auf die in* Π *enthaltenen ganzen Formenschaaren.*

Diese Sätze ermöglichen uns nun die Construction der gesuchten „Elementarformenschaaren".

§ 11.
Die Elementarformenschaaren.

Unter einer „Elementarformenschaar erster Art“ eines bestimmten Riemann'schen Formensystems verstehe ich eine Formenschaar

$$\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2),$$

welche sowohl in z_1, z_2, *wie in* x_1, x_2 *homogen ist, welche als Function von* z_1, z_2 *eine Formenschaar des betreffenden Riemann'schen Formensystems ist, und ausser an einer gewissen Anzahl fester Stellen* $b', b'', \dots b^{(r)}$ *nur an einer variablen Stelle* x *einfach unendlich wird, und zwar an letzterer so, dass nur der kte Zweig* $\Lambda_k^{(k)}$ *mit dem Coefficienten* 1 *unendlich wird, die übrigen Zweige aber endlich bleiben.*

An der Stelle x soll die Entwicklung des $k$ten Zweiges nach Potenzen von $P(zx)$ mit dem Gliede beginnen:

$$\prod_{i=1}^{i=s} P(xe_i)^{\mu_i} \cdot \left(\frac{P(zy)}{P(xy)}\right)^{\delta+1} P(zx)^{-1}.$$

Dies Glied ist aber, da die Primform in ihrem ersten Argumente vom Grade $\frac{2p-2}{m}$, in ihrem zweiten Argumente vom Grade $\frac{-2p+1}{m}$ ist (m = Blätterzahl der Riemann'schen Fläche), wie man leicht nachrechnet, in x_1, x_2 vom Grade des zum vorgelegten reciproken Formensystems; dasselbe muss daher, wegen der vorausgesetzten Homogeneität in x_1, x_2, von der Formenschaar überhaupt gelten. Wir haben also den Satz:

Während die Elementarformenschaar als Function ihres ersten Argumentpaares natürlich vom Grade δ *des vorgelegten Formensystems* Π *ist, ist sie als Function ihres zweiten Argumentpaares vom Grade* δ' *des zu* Π *reciproken Formensystems* Ω.

Es seien jetzt $f'(z_1, z_2), f''(z_1, z_2), \dots f^{(\sigma)}(z_1, z_2)$ σ linear unabhängige ganze Formenschaaren des Systemes $\Pi(z_1, z_2)$, und $g'(x_1, x_2)$, $g''(x_1, x_2), \dots g^{(\sigma')}(x_1, x_2)$ σ' linear unabhängige ganze Formenschaaren des reciproken Systems $\Omega(x_1, x_2)$, und irgend eine lineare Combination der $f', f'', \dots f^{(\sigma)}$ werde allgemein mit $f(z_1, z_2)$, eine solche der $g', g'', \dots g^{(\sigma')}$ mit $g(x_1, x_2)$ bezeichnet.

Die Coefficienten des Unendlichwerdens der n Zweige von $\Lambda^{(k)}$ als Function von z_1, z_2 an der Stelle $b^{(\nu)}$ mögen mit $\beta_{1\nu}, \beta_{2\nu}, \dots \beta_{n,\nu}$ bezeichnet werden. Dieselben müssen dann nach dem vorigen Paragraphen mit der Stelle x durch die σ' Relationen verbunden sein:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
&\sum_{i,\nu} \beta_{i,\nu} g_i' \;(b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}) = -\, g_k' \;(x_1, x_2),\\
&\sum_{i,\nu} \beta_{i,\nu} g_i'' \;(b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}) = -\, g_k'' \,(x_1, x_2),\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&\sum_{i,\nu} \beta_{i,\nu} g_i^{(\sigma')} (b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}) = -\, g_k^{(\sigma')} (x_1, x_2).
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
i &= 1, 2, \ldots n\\
\nu &= 1, 2, \ldots r'
\end{aligned}
$$

Ich behaupte:

Diese Gleichungen können bei variablem x nur dann immer mit einander verträglich sein, wenn es keine lineare Combination $g(x_1, x_2)$ der σ' Schaaren $g, g'', \ldots g^{(\sigma')}$ giebt, deren sämmtliche Zweige an sämmtlichen Punkten $b', b'', \ldots b^{(r')}$ verschwinden.

Denn dann müsste nach unseren Gleichungen der $k$te Zweig dieser linearen Combination auch an der frei beweglichen Stelle x verschwinden, d. h. er müsste identisch verschwinden, und dies wäre, da wir die Gruppe immer als transitiv, die Formenclasse also als irreducibel voraussetzen, nur so möglich sein, dass alle Zweige von $g(x_1, x_2)$ identisch verschwänden. Es gäbe also eine identisch verschwindende lineare Combination der $g', g'', \ldots g^{(\sigma')}$ entgegen der Voraussetzung, dass $g', g'', \ldots g^{(\sigma')}$ als linear unabhängig ausgewählt sind.

Wir müssen also die festen Unendlichkeitspunkte unserer Elementarformenschaar nothwendig so auswählen, dass keine ganze Formenschaar $g(x_1, x_2)$ des reciproken Systems an allen diesen Punkten verschwindet.

Eine solche Lage der Punkte $b', b'', \ldots b^{(r')}$ will ich kurz „allgemeine Lage“ nennen. Ich sage:

Wenn $nr' < \sigma'$ ist, so ist die Lage der Punkte gewiss nie allgemein, wenn $r' > \sigma' + p - 1$ ist, so ist die Lage der Punkte gewiss immer allgemein, wie sie auch liegen mögen.

Denn wenn $nr' < \sigma'$ ist, so sind die nr' Gleichungen

$$a_1 g_i' \,(b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}) + a_2 g_i'' \,(b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}) + \cdots + a_{\sigma'} g_i^{(\sigma')} (b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}) = 0$$

gewiss durch mindestens $\sigma' - n\nu'$ linear unabhängige Systeme nicht durchweg verschwindender $a_1, a_2, \ldots a_{\sigma'}$ lösbar.

Andererseits, seien die r' Stellen sämmtlich Nullstellen einer ganzen Formenschaar g, so kann ich setzen

$$g(x_1, x_2) = \prod_{\nu=1}^{\nu=r'} P(x b^{(\nu)}) \cdot h(x_1, x_2),$$

wobei $h(x_1, x_2)$ wieder eine ganze Formenschaar, allerdings von einem andern Formensystem als g, ist. Ich erhalte nun aber gewiss wieder ganze Formenschaaren desselben Systems wie g, wenn ich in vorstehendem Ausdruck $\prod_{\nu=1}^{\nu=r'} P(x b^{(\nu)})$ durch irgend eine ganze multiplicative Form φ vom selben Grade r' und vom selben Multiplicatorsystem ersetze. Also muss die Anzahl σ' der willkürlichen Constanten in g mindestens gleich der Anzahl der willkürlichen Constanten in einer ganzen multiplicativen Form vom Grade r' sein, also mindestens gleich $r' - p + 1$. Wir haben also

$$\sigma' \geqq r' - p + 1,$$
$$r' \leqq \sigma' + p - 1.$$

Wenn also $r' > \sigma' + p - 1$ ist, kann gewiss keine Schaar g an allen Stellen verschwinden, w. z. b. w.

Es seien nun also die Stellen $b', b'', \ldots b^{(r')}$ so gewählt, dass sie allgemeine Lage haben. Es ist dann gewiss $n.r' \geqq \sigma'$. Ich setze allgemein

$$nr' = \sigma' + \varrho'.$$

Wenn $\varrho' > 0$ ist, so sind die Coefficienten $\beta_{i\nu}$ in den festen Unendlichkeitspunkten $b^{(\nu)}$ durch die Lage des Punktes x nicht eindeutig bestimmt, da die Anzahl der Unbekannten grösser ist als die der Gleichungen. Man muss daher, um völlige Bestimmtheit zu haben, noch ϱ' weitere Bedingungen hinzufügen, etwa ϱ' lineare Gleichungen von der Form

$$(2) \qquad \sum_{i,\nu} \beta_{i\nu} B'_{i\nu} = 0, \quad \sum_{i,\nu} \beta_{i\nu} B''_{i\nu} = 0, \ldots \sum_{i,\nu} \beta_{i\nu} B^{(\varrho')}_{i\nu} = 0.$$

Dabei muss man aber die im übrigen willkürlichen Hülfsconstanten $B'_{i\nu}, B''_{i\nu}, \ldots B^{(\varrho')}_{i\nu}$ so wählen, dass die Determinante der linken Seiten des gesammten Systems der $\sigma' + \varrho'$ Gleichungen von Null verschieden ist, was gewiss möglich ist, da wegen der vorausgesetzten allgemeinen Lage der Punkte $b', b'', \ldots b^{(r')}$ nicht alle σ'-reihigen Determinanten der aus den Coefficienten der linken Seiten der Gleichungen (1) gebildeten Matrix verschwinden.

Durch die bis jetzt getroffenen Bestimmungen ist nun allerdings die Elementarschaar $\Lambda^{(\varkappa)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ noch nicht vollständig definirt — denn man kann unbeschadet der gegebenen Bedingungen noch irgend eine lineare Combination der Schaaren $f'(z_1, z_2), f''(z_1, z_2), \ldots f^{(\sigma')}(z_1, z_2)$ mit beliebigen Formen δ'-ten Grades von x_1, x_2 als Coefficienten hinzufügen —, aber wir werden sehen, wie wir auch die noch willkürlichen Formen von x_1, x_2 in $\Lambda^{(k)}$ annehmen mögen, dass die $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ doch schon zur Darstellung einer beliebigen Formenschaar $\Pi(z_1, z_2)$ durch ihre Unendlichkeitsstellen brauchbar sind; und noch mehr, (im nächsten Paragraphen), dass sie gleichzeitig zur Darstellung einer

Formenschaar $\Omega(x_1, x_2)$ des reciproken Systems durch ihre Unendlichkeitsstellen brauchbar sind.

Ich behaupte also zunächst:

Vermittelst der definirten Elementarformenschaaren $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ *und vermittelst irgend* σ *linear unabhängiger ganzer Formenschaaren* $f'(z_1, z_2), f''(z_1, z_2), \ldots f^{(\sigma')}(z_1, z_2)$ *kann man die allgemeinste Riemann'sche Formenschaar* $\Pi(z_1, z_2)$ *des vorliegenden Formensystems darstellen, welche an* ε *vorgegebenen Stellen* $x', x'', \ldots x^{(\varepsilon')}$ *mit den vorgegebenen Coefficienten* $\gamma_1', \gamma_2', \ldots \gamma_n'; \gamma_1'', \gamma_2'', \ldots \gamma_n''; \ldots \gamma_1^{(\varepsilon)}, \gamma_2^{(\varepsilon)}, \ldots \gamma_n^{(\varepsilon)}$ *unendlich wird.*

Ich behaupte nämlich, die allgemeinste derartige Formenschaar ist

$$\Pi(z_1, z_2) = \begin{array}{l} \gamma_1' \Lambda'(z_1, z_2; x_1', x_2') + \gamma_1'' \Lambda'(z_1, z_2; x_1'', x_2'') + \cdots \\ \qquad \cdots + \gamma_1^{(\varepsilon)} \Lambda'(z_1, z_2; x_1^{(\varepsilon)}, x_2^{(\varepsilon)}) \\ + \gamma_2' \Lambda''(z_1, z_2; x_1', x_2') + \gamma_2'' \Lambda''(z_1, z_2; x_1'', x_2'') + \cdots \\ \qquad \cdots + \gamma_2^{(\varepsilon)} \Lambda''(z_1, z_2; x_1^{(\varepsilon)}, x_2^{(\varepsilon)}) \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ + \gamma_n' \Lambda^{(n)}(z_1, z_2; x_1', x_2') + \gamma_n'' \Lambda^{(n)}(z_1, z_2; x_1'', x_2'') + \cdots \\ \qquad \cdots + \gamma_n^{(\varepsilon)} \Lambda^{(n)}(z_1, z_2; x_1^{(\varepsilon)}, x_2^{(\varepsilon)}) \\ + \gamma_1 f'(z_1, z_2) + \gamma_2 f''(z_1, z_2) + \cdots + \gamma_\sigma f^{(\sigma)}(z_1, z_2). \end{array}$$

An den Stellen $x', x'', \ldots x^{(\varepsilon)}$ werden die einzelnen Zweige der dargestellten Schaar in der That in der verlangten Weise unendlich. Es ist nur noch zu zeigen, dass die Summe an den Stellen $b', b'', \ldots b^{(r')}$ endlich bleibt. Sei $\beta_i^{(\nu)}$ der Coefficient des Unendlichwerdens von Π_i an der Stelle $b^{(\nu)}$, so setzen sich diese Coefficienten aus den entsprechenden Coefficienten $\beta_{i\nu}^{k,\mu}$ der verschiedenen Elementarschaaren

$$\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)})$$

linear zusammen:

$$\beta_i^{(\nu)} = \sum_{k,\mu} \gamma_k^{(\mu)} \beta_{i,\nu}^{k,\mu}.$$

Sie genügen in Folge dessen einerseits den σ' Gleichungen

$$\sum_{i,\nu} \beta_i^{(\nu)} g_i'(b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}) = \sum_{k,\mu} \gamma_k^{(\mu)} g_k'(x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)}),$$

$$\sum_{i,\nu} \beta_i^{(\nu)} g_i''(b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}) = \sum_{k,\mu} \gamma_k^{(\mu)} g_k''(x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)}),$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\nu} \beta_i^{(\nu)} g_i^{(\sigma')}(b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}) = \sum_{k,\mu} \gamma_k^{(\mu)} g_k^{(\sigma')}(x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)})$$

andererseits den ϱ' Gleichungen

$$\sum_{i,\nu} \beta_i^{(\nu)} B'_{i,\nu} = 0,$$

$$\sum_{i,\nu} \beta_i^{(\nu)} B''_{i,\nu} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\nu} \beta_i^{(\nu)} B^{(\varrho')}_{i,\nu} = 0.$$

Nach den Relationen, denen die vorgegebenen Coefficienten $\gamma_k^{(\mu)}$ genügen müssen, ist aber auch in jeder der ersten σ' Gleichungen die rechte Seite gleich 0. Da die Determinante der linken Seiten des Systems von $(\sigma' + \varrho')$ Gleichungen nicht verschwindet, so müssen daher alle Coefficienten $\beta_i^{(\nu)} = 0$ sein, was zu beweisen war.

§ 12.

Die Elementarschaaren als Functionen der Unendlichkeitsstelle.

Wir wollen jetzt die Natur der n zu einer Stelle x gehörigen Elementarschaaren

$$\Lambda'(z_1, z_2;\, x_1, x_2),\ \Lambda''(z_1, z_2;\, x_1, x_2),\ \ldots\ \Lambda^{(n)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2)$$

als Functionen des zweiten Argumentpaares x_1, x_2 untersuchen.

Wir haben bereits im vorigen Paragraphen gesehen, dass es Formen von x_1, x_2 vom Grade δ' der reciproken Formenschaaren Ω sind.

Wie in (44, S. 329) bezeichne $z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}$ bezw. $x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}$ denselben Punkt mit denselben homogenen Coordinaten, wie z_1, z_2 bezw. x_1, x_2, aber nach Ausführung irgend eines auf der Riemann'schen Fläche geschlossenen Umlaufs. Zur Bequemlichkeit der Darstellung mögen kanonische Variable zu Grunde gelegt werden, d. h. solche, in welchen die Formen Φ_{2p-2} die Multiplicatoren 1 besitzen.

Lassen wir z_1, z_2 einen geschlossenen Umlauf $z_1, z_2;\, z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}$ ausführen, so erleiden die Zweige einer Elementarschaar $\Lambda^{(k)}$ die zu diesem Umlauf gehörige Substitution S:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^{(k)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)};\, x_1, x_2) &= \alpha_{11}\Lambda_1^{(k)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2) + \alpha_{12}\Lambda_2^{(k)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2) + \cdots \\
&\qquad \cdots + \alpha_{1n}\Lambda_n^{(k)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2),\\
\Lambda_2^{(k)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)};\, x_1, x_2) &= \alpha_{21}\Lambda_1^{(k)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2) + \alpha_{22}\Lambda_2^{(k)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2) + \cdots \\
&\qquad \cdots + \alpha_{2n}\Lambda_n^{(k)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2),\\
&\ \ \vdots\\
\Lambda_n^{(i)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)};\, x_1, x_2) &= \alpha_{n1}\Lambda_1^{(k)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2) + \alpha_{n2}\Lambda_2^{(k)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2) + \cdots \\
&\qquad \cdots + \alpha_{nn}\Lambda_n^{(k)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Während $\Lambda^{(k)}$ an der Stelle x die Coefficienten $0, 0, \cdots 1, \cdots 0$ hat, hat die neue Formenschaar als Function von z_1, z_2 aufgefasst, die Coefficienten $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \cdots \alpha_{nk} \cdot \Lambda^{(k)}(z_1^{(x)}, z_2^{(x)}; x_1, x_2)$ ist als Function von z_1, z_2 zwar wieder eine sich linear substituirende Formenschaar vom Grade δ, aber mit einem andern Substitutionensystem: nämlich wenn $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ die Substitution T erleidet, erleidet $\Lambda^{(k)}(z_1^{(x)}, z_2^{(x)}; x_1, x_2)$ die transformirte Substitution $S^{-1}\,T\,S$. $\Lambda^{(k)}(z_1^{(x)}, z_2^{(x)}; x_1, x_2)$ ist auch nicht selbst eine Elementarschaar des neuen Formensystems, wohl aber ist

$$\mathsf{A}_{k1}\Lambda'(z_1^{(x)}, z_2^{(x)}; x_1, x_2) + \mathsf{A}_{k2}\Lambda''(z_1^{(x)}, z_2^{(x)}; x_1, x_2) + \cdots + \mathsf{A}_{kn}\Lambda^{(n)}(z_1^{(x)}, z_2^{(x)}; x_1, x_2)$$

eine Elementarschaar, deren k-ter Zweig mit dem Coefficienten 1 unendlich wird, wenn man unter A_{ki} die durch die Gesammtdeterminante dividirten Unterdeterminanten des Systems der α_{ki} versteht.

Wir wollen nun zusehen, wie sich die durch einen Umlauf von x_1, x_2 zu erhaltenden neuen Formenschaaren

$$\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1^{(x)}, x_2^{(x)})$$

an der Stelle x verhalten.

Schreiben wir die Reihenentwickelungen der einzelnen Zweige von $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ an der Stelle x hin:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2) &= \text{endlich},\\
\Lambda_2^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2) &= \text{endlich},\\
\vdots\qquad\qquad & \quad\vdots\\
\Lambda_k^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2) &= \prod_{i=1}^{i=s} P(xe_i)^{\mu_i}\cdot\left(\frac{P(zy)}{P(xy)}\right)^{\delta+1} P(zx)^{-1} + \text{endlich},\\
\vdots\qquad\qquad & \quad\vdots\\
\Lambda_n^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2) &= \text{endlich},
\end{aligned}$$

so können wir diese Reihenentwicklungen nicht dazu benutzen, um an ihnen einen geschlossenen Umlauf der Variablen x_1, x_2 auszuführen, da wir hierbei nothwendig den Convergenzbereich der Reihen überschreiten müssten. Wohl aber können wir einen simultanen Umlauf von z_1, z_2 und x_1, x_2 ausführen, indem wir nur z_1, z_2 und x_1, x_2 immer hinreichend nahe bei einander bleiben lassen.

Man sieht dann, wenn α der Multiplicator des Products $\prod_{i=1}^{i=s} P(xe_i)^{\mu_i}$ längs des Weges ist, dass die Zweige von $\Lambda^{(k)}(z_1^{(x)}, z_2^{(x)}; x_1^{(x)}, x_2^{(x)})$ sämmtlich endlich bleiben mit Ausnahme des $k$ten, dessen Coefficient sich aus 1 in α verwandelt. $\Lambda^{(k)}(z_1^{(x)}, z_2^{(x)}; x_1^{(x)}, x_2^{(x)})$ ist nun als Function von z_1, z_2 eine Schaar des Systems mit den Substitutionen $S^{-1}TS$, und zwar das αfache einer Elementarschaar, also von

$$\alpha \mathsf{A}_{k1}\Lambda'(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1, x_2) + \alpha \mathsf{A}_{k2}\Lambda''(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1, x_2) + \cdots$$
$$\cdots + \alpha \mathsf{A}_{kn}\Lambda^{(n)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1, x_2)$$

nur um eine ganze Formenschaar des Systems mit den Substitutionen $S^{-1}TS$ unterschieden.

Führe ich nun $z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}$ längs des durchlaufenen Weges wieder zurück bis z_1, z_2, so ergibt sich also, dass $\Lambda^{(\varkappa)}(z_1, z_2; x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)})$ von

$$\alpha \mathsf{A}_{k1}\Lambda'(z_1, z_2; x_1, x_2) + \alpha \mathsf{A}_{k2}\Lambda''(z_1, z_2; x_1, x_2) + \cdots$$
$$\cdots + \alpha \mathsf{A}_{kn}\Lambda^{(n)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$$

nur um eine ganze Formenschaar des Systems mit den Substitutionen T unterschieden sein kann.

$\alpha \mathsf{A}_{ki}$ sind aber gerade die Coefficienten derjenigen Substitution S', welche die reciproken Formen Ω beim Umlauf z_1, z_2; $z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}$ erleiden. Wir bezeichnen diese Coefficienten dementsprechend mit α'_{ki} und wir haben also folgendes Verhalten der Elementarschaaren gegenüber Umlaufen einerseits von z_1, z_2, andererseits von x_1, x_2:

$$(1)\begin{cases}
\Lambda_1^{(k)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1, x_2) = \alpha_{11}\Lambda_1^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2) + \alpha_{12}\Lambda_2^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2 + \cdots \\
\qquad\qquad \cdots + \alpha_{1n}\Lambda_n^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2), \\
\Lambda_2^{(k)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1, x_2) = \alpha_{21}\Lambda_1^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2) + \alpha_{22}\Lambda_2^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2) + \cdots \\
\qquad \cdot \qquad\qquad \cdots + \alpha_{2n}\Lambda_n^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2), \\
\qquad \cdot \\
\Lambda_n^{(k)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1, x_2) = \alpha_{n1}\Lambda_1^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2) + \alpha_{n2}\Lambda_2^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2) + \cdots \\
\qquad\qquad \cdots + \alpha_{nn}\Lambda_n^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2).
\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}
\Lambda_i'(z_1, z_2; x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}) = \alpha'_{11}\Lambda_i'(z_1, z_2; x_1, x_2) + \alpha'_{12}\Lambda_i''(z_1, z_2; x_1, x_2) + \cdots \\
\qquad\qquad \cdots + \alpha'_{1n}\Lambda_i^{(n)}(z_1, z_2; x_1, x_2), \\
\qquad + \mathsf{H}_{11}^{(\varkappa)}(x_1, x_2)\cdot f_i'(z_1, z_2) + \mathsf{H}_{12}^{(\varkappa)}(x_1, x_2)\cdot f_i''(z_1, z_2) + \cdots \\
\qquad\qquad \cdots + \mathsf{H}_{1\sigma}^{(\varkappa)}(x_1, x_2)\cdot f_i^{(\sigma)}(z_1, z_2), \\
\Lambda_i''(z_1, z_2; x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}) = \alpha'_{21}\Lambda_i'(z_1, z_2; x_1, x_2) + \alpha'_{22}\Lambda_i''(z_1, z_2; x_1, x_2) + \cdots \\
\qquad\qquad \cdots + \alpha'_{2n}\Lambda_i^{(n)}(z_1, z_2; x_1, x_2), \\
\qquad + \mathsf{H}_{21}^{(\varkappa)}(x_1, x_2)\cdot f_i'(z_1, z_2) + \mathsf{H}_{22}^{(\varkappa)}(x_1, x_2)\cdot f_i''(z_1, z_2) + \cdots \\
\qquad \vdots \qquad\qquad \cdots + \mathsf{H}_{2\sigma}^{(\varkappa)}(x_1, x_2)\cdot f_i^{(\sigma)}(z_1, z_2), \\
\Lambda_i^{(n)}(z_1, z_2; x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}) = \alpha'_{n1}\Lambda_i'(z_1, z_2; x_1, x_2) + \alpha'_{n2}\Lambda_i''(z_1, z_2; x_1, x_2) + \cdots \\
\qquad\qquad \cdots + \alpha'_{nn}\Lambda_i^{(n)}(z_1, z_2; x_1, x_2), \\
\qquad + \mathsf{H}_{n1}^{(\varkappa)}(x_1, x_2)\cdot f_i'(z_1, z_2) + \mathsf{H}_{n2}^{(\varkappa)}(x_1, x_2)\cdot f_i''(z_1, z_2) + \cdots \\
\qquad\qquad \cdots + \mathsf{H}_{n\sigma}^{(\varkappa)}(x_1, x_2)\cdot f_i^{(\sigma)}(z_1, z_2),
\end{cases}$$

Die $n\sigma$-Formen δ'ten Grades von $x_1, x_2 : \mathsf{H}_{ik}$ hängen davon ab, wie man die in den Elementarschaaren $\Lambda^{(\nu)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ noch enthaltenen willkürlichen Functionen von x festlegt.

Ich will hier über die Art der Festlegung dieser willkürlichen Formen noch gar keine Voraussetzung machen; eine specielle Art der Festlegung werden wir im nächsten Paragraphen kennen lernen.

Wie aber auch die willkürlichen Formen in den Elementarschaaren angenommen sein mögen, immer können wir den fundamentalen Satz aussprechen:

Fassen wir in dem Formensystem:

$$\begin{array}{llll} \Lambda_1'(z_1, z_2; x_1, x_2), & \Lambda_1''(z_1, z_2; x_1, x_2), & \ldots & \Lambda_1^{(n)}(z_1, z_2; x_1, x_2), \\ \Lambda_2'(z_1, z_2; x_1, x_2), & \Lambda_2''(z_1, z_2; x_1, x_2), & \ldots & \Lambda_2^{(n)}(z_1, z_2; x_1, x_2), \\ \vdots & & & \\ \Lambda_n'(z_1, z_2; x_1, x_2), & \Lambda_n''(z_1, z_2; x_1, x_2), & \ldots & \Lambda_n^{(n)}(z_1, z_2; x_1, x_2), \end{array}$$

die Formen je einer, etwa der $k$ten, Colonne als Zweige einer Formenschaar $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ auf, die Formen je einer, etwa der $i$ten, Zeile als Zweige einer Formenschaar $\Lambda_i(z_1, z_2; x_1, x_2)$, so sind die Formenschaaren

$$\Lambda'(z_1, z_2; x_1, x_2), \quad \Lambda''(z_1, z_2; x_1, x_2), \ldots, \Lambda^{(n)}(z_1, z_2; x_1, x_2),$$

als Functionen von z_1, z_2 aufgefasst, zu der Stelle x gehörige Elementarschaaren für die Darstellung der Schaaren $\Pi(z_1, z_2)$, dagegen die Formenschaaren

$$-\Lambda_1(z_1, z_2; x_1, x_2), \quad -\Lambda_2(z_1, z_2; x_1, x_2), \ldots -\Lambda_n(z_1, z_2; x_1, x_2),$$

als Functionen von x_1, x_2 aufgefasst, zu der Stelle z gehörige Elementarschaaren für die Darstellung der reciproken Schaaren $\Omega(x_1, x_2)$.

Der erste Theil der Behauptung ist einfach eine Recapitulation des Ergebnisses des vorigen Paragraphen; der zweite Theil ist noch zu beweisen.

In der That werden die Formenschaaren $-\Lambda_i(z_1, z_2; x_1, x_2)$ an der Stelle z als Functionen von x_1, x_2 in der Weise einer Elementarschaar unendlich, da alle Zweige ausser dem $i$ten endlich bleiben, und die Entwicklung des $i$ten Zweiges:

$$-\prod_{i=1}^{i=s} P(xe_i)^{\mu_i} \cdot \left(\frac{P(zy)}{P(xy)}\right)^{\delta+1} P(zx)^{-1} + \cdots$$

sich in eine Entwicklung der Gestalt

$$+\prod_{i=1}^{i=s} P(ze_i)^{\mu_i} \left(\frac{P(xy)}{P(zy)}\right)^{\delta'+1} P(xz)^{-1} + \cdots$$

umformen lässt.

Es seien $z', z'', \ldots z^{(s)}$ die Unendlichkeitsstellen einer Formenschaar $\Omega(x_1, x_2)$ und $\gamma_1', \gamma_2', \ldots \gamma_n'; \gamma_1'', \gamma_2'', \ldots \gamma_n''; \ldots g_1^{(s)}, \gamma_2^{(s)}, \ldots \gamma_n^{(s)}$ ihre Coefficienten. Diese Coefficienten müssen natürlich den σ-Relationen genügen:

$$\sum_{i,\mu} \gamma_i^{(\mu)} f_i'\left(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}\right) = 0, \quad \sum_{i\,\mu} \gamma_i^{(\mu)} f_i''\left(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}\right) = 0, \cdots$$
$$\cdots \sum_{i,\mu} \gamma_i^{(\mu)} f_i^{(\sigma)}\left(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}\right) = 0.$$

Setzen wir nun

$$\Omega_k(x_1, x_2) = \begin{array}{l} -\gamma_1' \Lambda_1^{(k)}(z_1', z_2'; x_1, x_2) - \gamma_1'' \Lambda_1^{(k)}(z_1'', z_2''; x_1, x_2) - \cdots \\ \qquad \cdots - \gamma_1^{(s)} \Lambda_1^{(k)}(z_1^{(s)}, z_2^{(s)}; x_1, x_2), \\ -\gamma_2' \Lambda_2^{(k)}(z_1', z_2'; x_1, x_2) - \gamma_2'' \Lambda_2^{(k)}(z_1', z_2''; x_1, x_2) - \cdots \\ \qquad \cdots - \gamma_2^{(s)} \Lambda_2^{(k)}(z_1^{(s)}, z_2^{(s)}; x_1, x_2), \\ \vdots \\ -\gamma_n' \Lambda_n^{(k)}(z_1', z_2'; x_1, x_2) - \gamma_n'' \Lambda_n^{(k)}(z_1'', z_2''; x_1, x_2) - \cdots \\ \qquad \cdots - \gamma_n^{(s)} \Lambda_n^{(k)}(z_1^{(s)}, z_2^{(s)}; x_1, x_2), \end{array}$$

so sind $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_k$ die Zweige einer Riemann'schen Formenschaar $\Omega(x_1, x_2)$, d. h. sie sind vom Grade δ' und erleiden bei Umlauf der Variablen x_1, x_2 die Substitutionen:

$$\begin{aligned} \Omega_1\left(x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}\right) &= \alpha_{11}' \Omega_1(x_1, x_2) + \alpha_{12}' \Omega_2(x_1, x_2) + \cdots + \alpha_{1n}' \Omega_n(x_1, x_2), \\ \Omega_2\left(x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}\right) &= \alpha_{21}' \Omega_1(x_1, x_2) + \alpha_{22}' \Omega_2(x_1, x_2) + \cdots + \alpha_{2n}' \Omega_n(x_1, x_2), \\ &\vdots \\ \Omega_n\left(x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}\right) &= \alpha_{n1}' \Omega_1(x_1, x_2) + \alpha_{n2}' \Omega_2(x_1, x_2) + \cdots + \alpha_{nn}' \Omega_n(x_1, x_2). \end{aligned}$$

In der That folgt aus dem Verhalten der einzelnen Elementarschaaren, aus denen Ω zusammengesetzt ist:

$$\begin{aligned} \Omega_k\left(x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}\right) = \; & \alpha_{k1}' \Omega_1(x_1, x_2) + \alpha_{k2}' \Omega_2(x_1, x_2) + \cdots + \alpha_{kn}' \Omega_n(x_1, x_2), \\ & - \mathsf{H}_{k1}^{(\varkappa)}(x_1, x_2) \cdot \sum_{i,\mu} \gamma_i^{(\mu)} f_i'\left(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}\right) - \mathsf{H}_{k2}^{(\varkappa)}(x_1, x_2) \sum_{i,\mu} \gamma_i^{(\mu)} f_i''\left(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}\right) - \cdots \\ & \cdots - \mathsf{H}_{k\sigma}^{(\varkappa)}(x_1, x_2) \cdot \sum_{i,\mu} \gamma_i^{(\mu)} f_i^{(\sigma)}\left(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}\right). \end{aligned}$$

Hierin sind nun nach den Relationen, denen die $\gamma_i^{(\mu)}$ genügen müssen, die Summen in der zweiten Zeile sämmtlich Null, und die rechte Seite reducirt sich also auf die erste Zeile, w. z. b. w.

Es ist zweitens zu beweisen, dass die Schaar $\Omega(x_1, x_2)$ an den Stellen $z', z'', \ldots z^{(s)}$ in der verlangten Weise unendlich wird und dass sie an keiner weiteren Stelle unendlich wird. Das Letztere ist im Grunde nur ein Specialfall des ersten; denn ich brauche nur die beliebige weitere Stelle als eine Stelle $z^{(s+1)}$ mit den Coefficienten $\gamma_1^{(s+1)} = 0$, $\gamma_2^{(s+1)} = 0, \ldots \gamma_\varkappa^{(s+1)} = 0$ zu den Stellen $z', z'', \ldots z^{(s)}$ hinzuzufügen.

Ich beweise zuerst folgenden Hülfssatz:

Die Summe ist ganz unabhängig davon, wie man die in den $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ enthaltenen willkürlichen Formen von x_1, x_2 festlegt.

Irgend zwei $\Lambda^{(k)}$ mit verschiedener Festlegung der willkürlichen Formen können sich nämlich nur um einen Ausdruck der Gestalt

$$f^{(k)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2) = h_1^{(k)}(x_1, x_2) f'(z_1, z_2) + h_2^{(k)}(x_1, x_2) f''(z_1, z_2) + \cdots \\ \cdots + h_\sigma^{(k)}(x_1, x_2) f^{(q)}(z_1, z_2)$$

unterscheiden, die mit den verschiedenen $\Lambda^{(k)}$ gebildeten Summen $\Omega_k(x_1, x_2)$ also nur um einen Ausdruck

$$- h_1^{(k)}(x_1, x_2) \sum_{i,\mu} \gamma_i^{(\mu)} f_i'(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}) - h_2^{(k)}(x_1, x_2) \sum_{i,\mu} \gamma_i^{(\mu)} f_i''(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}) - \cdots \\ \cdots - h_\sigma^{(k)}(x_1, x_2) \sum_{i,\mu} \gamma_i^{(\mu)} f_i^{(\sigma)}(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}),$$

und dieser Ausdruck ist nach den zwischen den $\gamma_i^{(\mu)}$ bestehenden Relationen identisch Null.

Wir können nun, wie wir im nächsten Paragraphen leicht zeigen können, die $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ immer so einrichten, dass irgend eine bestimmte Stelle ξ keine Unendlichkeitsstelle für $\Lambda^{(k)}$ als Form von x_1, x_2 ist, d. h. dass die im vorigen Paragraphen gegebene Definition von $\Lambda^{(k)}$ nicht versagt, wenn x in die Stelle ξ rückt.

Wählt man ξ speciell als eine der Stellen $z', z'', \ldots z^{(s)}, z^{(s+1)}$, etwa als $z^{(\mu)}$, so werden alle Elementarformen mit Ausnahme derjenigen mit dem ersten Argumentpaar $z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}$ an der Stelle endlich bleiben und nur $\Lambda_k^{(k)}(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}; x_1, x_2)$ wird für $x = z^{(\mu)}$ mit dem Coefficienten -1 unendlich. Es wird also $\Omega_k(x_1, x_2)$ an der Stelle $z^{(\mu)}$ thatsächlich mit dem Coefficienten $\gamma_k^{(\mu)}$ unendlich, wie verlangt.

Nun ist aber die Summe von der Festlegung der willkürlichen Formen in den einzelnen Elementarschaaren überhaupt unabhängig; das Resultat bleibt also auch bestehen, falls einzelne der Summanden als Formen von x_1, x_2 an der Stelle ξ unendlich werden sollten. Die accessorischen Unstetigkeiten der einzelnen Summanden heben sich eben gerade heraus.

Dass auch etwaige, nicht durch die Gruppe bedingte Verzweigungsstellen der Elementarschaaren als Functionen von x_1, x_2 sich herausheben, folgt schon aus der Betrachtung des Verhaltens der Summe bei Umläufen von x_1, x_2.

Die Summe wird also nur an den vorgegebenen Stellen in der vorgegebenen Weise unendlich, besitzt den richtigen Grad und das vorgeschriebene Verhalten gegenüber geschlossenen Umläufen des Argumentpaares x_1, x_2. Sie kann sich also von der gesuchten Formenschaar nur um eine ganze Formenschaar des gegebenen Grades und Multiplicatorsystems unterscheiden, und wir haben demnach den Satz:

Die Zweige der allgemeinsten Formenschaar $\Omega(x_1, x_2)$ des reciproken Systems, welche an den Stellen $z', z'', \dots z^{(\varepsilon)}$ mit den Coefficienten $\gamma_1', \gamma_2', \dots \gamma_n'; \gamma_1'', \gamma_2'', \dots \gamma_n''; \dots \gamma_1^{(\varepsilon)}, g_2^{(\varepsilon)}, \dots \gamma_n^{(\varepsilon)}$ unendlich wird, lassen sich in der Gestalt darstellen

$$\begin{aligned}\Omega_k(x_1, x_2) = & -\gamma_1'\Lambda_1^{(k)}(z_1', z_2'; x_1, x_2) - \gamma_1''\Lambda_1^{(k)}(z_1'', z_2''; x_1, x_2) - \cdots \\ & \qquad \cdots - \gamma_1^{(\varepsilon)}\Lambda_1^{(k)}(z_1^{(\varepsilon)}, z_2^{(\varepsilon)}; x_1, x_2) \\ & -\gamma_2'\Lambda_2^{(k)}(z_1', z_2'; x_1, x_2) - \gamma_2''\Lambda_2^{(k)}(z_1'', z_2''; x_1, x_2) - \cdots \\ & \qquad \cdots - \gamma_2^{(\varepsilon)}\Lambda_2^{(k)}(z_1^{(\varepsilon)}, z_2^{(\varepsilon)}; x_1, x_2) \\ & \quad \vdots \\ & -\gamma_n'\Lambda_n^{(k)}(z_1', z_2'; x_1, x_2) - \gamma_n''\Lambda_n^{(k)}(z_1'', z_2''; x_1, x_2) - \cdots \\ & \qquad \cdots - \gamma_n^{(\varepsilon)}\Lambda_n^{(k)}(z_1^{(\varepsilon)}, z_2^{(\varepsilon)}; x_1, x_2) \\ & + \gamma_1 g_k'(x_1, x_2) + \gamma_2 g_k''(x_1, x_2) + \cdots + \gamma^{\sigma'} g_k^{(\sigma')}(x_1, x_2),\end{aligned}$$

unter $g', g'', \dots g^{(\sigma')}$ irgend σ' speciell ausgewählte ganze Formenschaaren des reciproken Systems verstanden.

Die Elementarschaaren $\Lambda(z_1, z_2; x_1, x_2)$ sind daher sowohl für die Darstellung der Schaaren $\Pi(z_1, z_2)$ wie der reciproken Schaaren $\Omega(x_1, x_2)$ brauchbar. Als Formen von z_1, z_2 sind sie selbst Riemann'sche Formenschaaren des Systems $\Pi(z_1, z_2)$, dagegen als Formen von x_1, x_2 sind sie im Allgemeinen nicht selbst Riemann'sche Formenschaaren $\Omega(x_1, x_2)$; erst ihre in richtiger Weise gebildeten Summen sind Riemann'sche Formenschaaren.

Indem ich die schon bei der Theorie der multiplicativen Formen von mir angewandte Sprechweise aufnehme (Bd. 44 § 13), kann ich also sagen:

Die Schaaren $\Lambda(z_1, z_2; x_1, x_2)$ sind als Formen von z_1, z_2 Elementarschaaren erster Art des Systems der $\Pi(z_1, z_2)$, als Formen von x_1, x_2 Elementarschaaren zweiter Art des Systems der $\Omega(x_1, x_2)$.

Wir können natürlich auch das System $\Omega(x_1, x_2)$ als das ursprüngliche ansehen und für dieses Elementarschaaren erster Art $\Lambda(x_1, x_2; z_1, z_2)$ construiren, welche dann für das System der $\Pi(z_1, z_2)$ im Allgemeinen Elementarschaaren zweiter Art sein werden.

Es stehen uns also immer zwei Arten von Elementarschaaren für die Darstellung eines Systems $\Pi(z_1, z_2)$ zur Verfügung; die der ersten Art sind nothwendig Riemann'sche Formenschaaren desselben Systems, die der zweiten Art müssen nur dann nothwendig Riemann'sche Formen-

schaaren des Systems sein, wenn es in dem reciproken System keine ganzen Formenschaaren gibt.

Die Elementarschaaren erster Art sind Elementarschaaren zweiter Art für das reciproke System und umgekehrt.

Gibt es in dem betreffenden System keine ganzen Formenschaaren, so sind die Elementarschaaren erster Art mit unter denjenigen zweiter Art enthalten; gibt es aber im reciproken System keine ganzen Formenschaaren, so sind die Elementarschaaren zweiter Art des ersten Systems unter denen erster Art enthalten. Gibt es in keinem der beiden reciproken Systeme ganze Formenschaaren, so ist die Gesammtheit der Elementarschaaren erster Art mit der Gesammtheit der Elementarschaaren zweiter Art identisch.

§ 13.

Normirung der Elementarschaaren.

Es sei

$$nr = \sigma + \varrho, \quad \varrho \gtreqless 0,$$
$$nr' = \sigma' + \varrho', \quad \varrho' \geqq 0$$

gesetzt.

Es seien $u', u'', \ldots u^{(r)}$ r allgemein gelegene Punkte, d. h. von solcher Lage, dass es keine ganze Formenschaar $f(z_1, z_2)$ giebt, die an allen diesen Punkten verschwindet, und $w', w'', \ldots w^{(r')}$ r' in dem Sinne allgemein gelegene Punkte, dass keine ganze Formenschaar $g(x_1, x_2)$ des zu $f(z_1, z_2)$ reciproken Systems an allen diesen Stellen verschwindet.

Unter der über die Lage der $u', u'', \ldots u^{(r)}$ gemachten Voraussetzung verschwinden nicht alle σ-reihigen Determinanten der nr-reihigen und σ-zeiligen Matrix

$$\left\| \begin{matrix} f_i'\,(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) \\ f_i''\,(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) \\ \vdots \\ f_i^{(\sigma)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) \end{matrix} \right\|, \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots n, \\ \nu = 1, 2, \ldots r, \end{matrix}$$

worin $f', f'', \ldots f^{(\sigma)}$ irgend σ linear unabhängige ganze Formenschaaren f bedeuten, und nur eine Reihe der Matrix hingeschrieben ist, aus der man alle Reihen erhält, wenn man i die Zahlen 1 bis n, ν die Zahlen 1 bis r durchlaufen lässt.

Dann lassen sich aber ϱ Systeme von je nr Grössen $A_{i\nu}'$, $A_{i\nu}''$, $\ldots A_{i\nu}^{(\varrho)}$ bestimmen, so dass die Determinante:

$$\begin{vmatrix} f_i'\;(u_1^{(\nu)},\, u_2^{(\nu)}) \\ f_i''\,(u_1^{(\nu)},\, u_2^{(\nu)}) \\ \vdots \\ f_i^{(\sigma)}\,(u_1^{(\nu)},\, u_2^{(\nu)}) \\ A'_{i\nu} \\ A''_{i\nu} \\ \vdots \\ A^{(\varrho)}_{i\nu} \end{vmatrix}$$ von Null verschieden ist.

Es verschwinden dann auch nicht alle ϱ-reihigen Determinanten der nr-reihigen und ϱ-zeiligen Matrix

$$\begin{Vmatrix} A'_{i\nu} \\ A''_{i\nu} \\ \vdots \\ A^{(\varrho)}_{i\nu} \end{Vmatrix}.$$

Man kann in Folge dessen σ linear unabhängige Systeme von je nr Zahlen: $\alpha'_{i\nu}, \alpha''_{i\nu}, \ldots \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}$ bestimmen, welche sämmtlich den ϱ Gleichungen genügen:

$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} A'_{i\nu} = 0,$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} A''_{i\nu} = 0,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} A^{(\varrho)}_{i\nu} = 0.$$

Ich behaupte nunmehr:

Eine ganze Formenschaar $f(z_1, z_2)$, welche den σ Gleichungen

$$\sum_{i,\nu} \alpha'_{i\nu} f_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0,$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha''_{i\nu} f_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu} f_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0.$$

genügt, muss nothwendig identisch verschwinden.

Denn setzt man

$$f = a_1 f' + a_2 f'' + \cdots + a_\sigma f^{(\sigma)},$$

so erhält man für die σ Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_\sigma$ folgende σ linearen Gleichungen

$$a_1 \sum_{i,\nu} \alpha'_{i\nu} f'_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) + a_2 \sum_{i,\nu} \alpha'_{i\nu} f''_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) + \cdots$$
$$\cdots + a_\sigma \sum_{i,\nu} \alpha'_{i\nu} f_i^{(\sigma)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0,$$

$$a_1 \sum_{i,\nu} \alpha''_{i\nu} f'_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) + a_2 \sum_{i,\nu} \alpha''_{i\nu} f''_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) + \cdots$$
$$\cdots + a_\sigma \sum_{i,\nu} \alpha''_{i\nu} f_i^{(\sigma)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0,$$
$$\vdots$$
$$a_1 \sum_{i,\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu} f'_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) + a_2 \sum_{i,\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu} f''_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) + \cdots$$
$$\cdots + a_\sigma \sum_{i,\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu} f_i^{(\sigma)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0.$$

Wenn diese Gleichungen mit nicht durchweg verschwindenden $a_1, a_2, \ldots \ldots a_\sigma$ verträglich sein sollen, so muss eine die identische Folge der übrigen sein, d. h. es muss σ Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\sigma$ geben, so dass

$$\sum_{i,\nu} (\alpha_1 \alpha'_{i\nu} + \alpha_2 \alpha''_{i\nu} + \cdots + \alpha_\sigma \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}) f'_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0,$$
$$\sum_{i,\nu} (\alpha_1 \alpha'_{i\nu} + \alpha_2 \alpha''_{i\nu} + \cdots + \alpha_\sigma \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}) f''_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i,\nu} (\alpha_1 \alpha'_{i\nu} + \alpha_2 \alpha''_{i\nu} + \cdots + \alpha_\sigma \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}) f_i^{(\sigma)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0$$

ist. Setze ich nun zur Abkürzung

$$\alpha_1 \alpha'_{i\nu} + \alpha_2 \alpha''_{i\nu} + \cdots + \alpha_\sigma \alpha^{(\sigma)}_{i\nu} = a_{i\nu},$$

so genügen die $\alpha_{i\nu}$ nicht nur den σ Gleichungen

$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} f'_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0,$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} f''_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} f_i^{(\sigma)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0,$$

sondern wegen ihrer linearen Zusammensetzung aus den $\alpha'_{i\nu}, \alpha''_{i\nu}, \dots \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}$ auch den ϱ Gleichungen:

$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} A'_{i\nu} = 0,$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} A''_{i\nu} = 0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} A^{(\varrho)}_{i\nu} = 0.$$

Da aber die Determinante dieses Gleichungssystems von Null verschieden ist, so müssen sämmtliche $\alpha_{i\nu}$ gleich Null sein, was wegen der linearen Unabhängigkeit der Systeme $\alpha'_{i\nu}, \alpha''_{i\nu}, \dots \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}$ das Verschwinden der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\sigma$ nach sich zieht, Die zur Bestimmung der $a_1, a_2, \dots a_\sigma$ dienenden Gleichungen sind also linear unabhängig von einander, und es müssen also alle $a_1, a_2, \dots a_\sigma$ gleich Null sein, d. h. die Formenschaar f muss identisch verschwinden.

Ferner kann man den Satz aussprechen:

Man kann auf eindeutige Weise σ linear unabhängige ganze Formenschaaren $\mathfrak{f}', \mathfrak{f}'', \dots \mathfrak{f}^{(\sigma)}$ *durch die Gleichungen definiren:*

$$\sum_{i,\nu} \alpha'_{i\nu} \mathfrak{f}_i^{(h)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0,$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha''_{i\nu} \mathfrak{f}_i^{(h)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha^{(h)}_{i\nu} \mathfrak{f}_i^{(h)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 1,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu} \mathfrak{f}_i^{(h)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0.$$

Denn in den Bestimmungsgleichungen für die Zusammensetzungscoefficienten der $\mathfrak{f}^{(h)}$ aus irgend welchen beliebigen σ linear unabhängigen Schaaren f ist die Determinante der linken Seiten von Null verschieden.

Die σ Schaaren $\mathfrak{f}'(z_1, z_2), \mathfrak{f}''(z_1, z_2), \dots \mathfrak{f}^{(\sigma)}(z_1, z_2)$ bezeichne ich jetzt als die *normirten ganzen Elementarschaaren* des Systems Π.

Jede beliebige ganze Formenschaar f des Systems Π lässt sich in einfachster Weise durch die normirten ganzen Elementarformen ausdrücken.

Es werde zur Abkürzung gesetzt

$$\sum_{i,\nu} \alpha'_{i\nu} f_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = A',$$

$$\sum_{i,\nu} \alpha''_{i\nu} f_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = A'',$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu} f_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = A^{(\sigma)}.$$

Dann ist

$$f(z_1, z_2) = A'\mathfrak{f}'(z_1, z_2) + A''\mathfrak{f}''(z_1, z_2) + \cdots A^{(\sigma)}\mathfrak{f}^{(\sigma)}(z_1, z_2).$$

In gleicher Weise wie wir für das System Π vermittelst der Punkte $u', u'', \ldots u^{(r)}$ und passend ausgewählter Constanten $A'_{i\nu}, A''_{i\nu}, \ldots A^{(\varrho)}_{i\nu}$ sowie $\alpha'_{i\nu}, \alpha''_{i\nu}, \ldots \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}$ die ganzen Elementarschaaren $\mathfrak{f}', \mathfrak{f}'', \ldots \mathfrak{f}^{(\sigma)}$ construirt haben, construiren wir für das reciproke System Ω vermittelst der Punkte $w', w'', \ldots w^{(r')}$ und passend gewählter Constanten $B'_{i\nu}, B''_{i\nu}, \ldots B^{(\varrho)}_{i\nu}$ sowie $\beta'_{i\nu}, \beta''_{i\nu}, \ldots \beta^{(\sigma')}_{i\nu}$ die σ' ganzen Elementarschaaren $\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'', \ldots \mathfrak{g}^{(\sigma')}$, welche in analoger Weise zur Darstellung aller ganzen Formenschaaren g verwendet werden können.

Wir werden jetzt auch die Elementarschaaren $\Lambda(z_1, z_2;\ x_1, x_2)$ in bestimmter Weise zu normiren haben. Wir gehen von irgend einer irgendwie construirten Schaar $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2)$ aus, welche als Form von z_1, z_2 die bewegliche Unendlichkeitsstelle x und die festen Unendlichkeitsstellen $w', w'', \ldots w^{(r')}$ hat, und zwar so, dass die Coefficienten $\beta_{i\nu}$ des Unendlichwerdens an diesen Stellen den ϱ' Relationen genügen:

$$\sum_{i,\nu} \beta_{i\nu} B'_{i\nu} = 0,$$

$$\sum_{i,\nu} \beta_{i\nu} B''_{i\nu} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\nu} \beta_{i\nu} B^{(\varrho')}_{i\nu} = 0.$$

In der so definirten Schaar $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2)$ sind noch σ willkürliche Formen von x_1, x_2 enthalten, die wir auf folgende Weise eindeutig festlegen:

Die Werthe der Zweige von $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2)$ als Function von z an den Stellen $u', u'', \ldots u^{(r')}$ sind Formen δ'ten Grades von x_1, x_2, ebenso die Summen:

$$\sum_{i,\nu} \alpha'_{i\nu}\, \Lambda_i^{(k)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\ x_1, x_2) = A'_k(x_1, x_2),$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha''_{i\nu}\, \Lambda_i^{(k)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\ x_1, x_2) = A''_k(x_1, x_2),$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}\, \Lambda_i^{(k)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\ x_1, x_2) = A^{(\sigma)}_k(x_1, x_2).$$

Ich setze dann

$$\mathsf{\Lambda}^{(k)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2) = \Lambda^{(k)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2) - A_k'(x_1, x_2)\,\mathfrak{f}'(z_1, z_2)$$
$$- A_k''(x_1, x_2)\,\mathfrak{f}''(z_1, z_2) - \cdots - A_k^{(\sigma)}(x_1, x_2)\,\mathfrak{f}^{(\sigma)}(z_1, z_2),$$

und bezeichne die so gewonnenen neuen Elementarformenschaaren als „*normirte Elementarschaaren*“. Dieselben haben die Eigenschaft, dass die σ Summen:

$$\sum_{i\nu} \alpha'_{i\nu}\, \mathsf{\Lambda}_i^{(k)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\ x_1, x_2),$$
$$\sum_{i\nu} \alpha''_{i\nu}\, \mathsf{\Lambda}_i^{(k)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\ x_1, x_2),$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}\, \mathsf{\Lambda}_i^{(k)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\ x_1, x_2)$$

sämmtlich verschwinden.

Die normirten Elementarschaaren sind auch als Formen von x_1, x_2 durch ihre Definition wohlbestimmt; denn irgend zwei in gleicher Weise normirte Elementarschaaren könnten sich nur um eine ganze Formenschaar $f(z_1, z_2)$ unterscheiden von der Eigenschaft, dass alle die σ Summen

$$\sum_{i,\nu} \alpha'_{i\nu} f_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}),\ \sum_{i,\nu} \alpha''_{i\nu} f_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}), \ldots \sum_{i,\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu} f_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)})$$

verschwänden, und dann muss $f(z_1, z_2)$ selbst identisch verschwinden.

Vermittelst der normirten Elementarschaaren

$$\mathsf{\Lambda}'(z_1, z_2;\ x_1, x_2),\ \mathsf{\Lambda}''(z_1, z_2;\ x_1, x_2), \ldots \mathsf{\Lambda}^{(n)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2),$$

sowie der normirten ganzen Elementarschaaren

$$\mathfrak{f}'(z_1, z_2),\ \mathfrak{f}''(z_1, z_2), \ldots \mathfrak{f}^{(\sigma)}(z_1, z_2)$$

lässt sich jetzt jede beliebige Formenschaar $\Pi(z_1, z_2)$ mit nur einfachen Unendlichkeitsstellen in einfachster Weise zusammensetzen:

$\Pi(z_1, z_2)$ besitze die Unendlichkeitsstellen $x', x'', \ldots x^{(\varepsilon)}$ mit den Coefficienten $\gamma_1', \gamma_2', \ldots \gamma_n';\ \gamma_1'', \gamma_2'', \ldots \gamma_n'';\ \ldots \gamma_1^{(\varepsilon)}, \gamma_2^{(\varepsilon)}, \ldots \gamma_n^{(\varepsilon)}$ und es sei

$$\sum_{i,\nu} \alpha'_{i\nu}\, \Pi_i\big(u_i^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}\big) = A',$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha''_{i\nu}\, \Pi_i\big(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}\big) = A'',$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}\, \Pi_i\big(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}\big) = A^{(\sigma)};$$

Dann ist

$$\Pi(z_1, z_2) = \begin{array}{l} \gamma_1'\Lambda'\;(z_1, z_2;\, x_1', x_2') + \gamma_1''\Lambda'\;(z_1, z_2;\, x_1'', x_2'') + \cdots \\ \qquad \cdots + \gamma_1^{(\varepsilon)}\Lambda'\;(z_1, z_2;\, x_1^{(\varepsilon)}, x_2^{(\varepsilon)}), \\ + \gamma_2'\Lambda''\;(z_1, z_2;\, x_1', x_2') + \gamma_2''\Lambda''\;(z_1, z_2;\, x_1'', x_2'') + \cdots \\ \qquad \cdots + \gamma_2^{(\varepsilon)}\Lambda''\;(z_1, z_2;\, x_1^{(\varepsilon)}, x_2^{(\varepsilon)}), \\ \vdots \\ + \gamma_n'\Lambda^{(n)}(z_1, z_2;\, x_1', x_2') + \gamma_n''\Lambda^{(n)}(z_1, z_2;\, x_1'', x_2'') + \cdots \\ \qquad \cdots + \gamma_n^{(\varepsilon)}\Lambda^{(n)}(z_1, z_2;\, x_1^{(\varepsilon)}, x_2^{(\varepsilon)}), \\ + A'\mathfrak{f}'(z_1 z_2) + A''\mathfrak{f}''(z_1, z_2) + \cdots + A^{(\sigma)}\mathfrak{f}^{(\sigma)}(z_1, z_2). \end{array}$$

Wir untersuchen nunmehr das Verhalten der normirten Elementarschaaren $\Lambda(z_1, z_2;\, x_1, x_2)$ als Formen ihres zweiten Argumentpaares x_1, x_2.

Lassen wir x_1, x_2 irgend einen auf dem algebraischen Gebilde geschlossenen Umlauf $x_1, x_2;\, x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}$ ausführen, so geht $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2)$ über in

$$\Lambda^{(k)}(z_1, z_2;\, x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}) = \alpha'_{k1}\Lambda'(z_1, z_2;\, x_1, x_2) + \alpha'_{k2}\Lambda''(z_1, z_2;\, x_1, x_2) + \cdots$$
$$\cdots + \alpha'_{kn}\Lambda^{(n)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2) + f^{(\varkappa)}(z_1, z_2),$$

wobei $f^{(\varkappa)}(z_1, z_2)$ eine noch von x_1, x_2 abhängige Formenschaar ist, die als Function von z_1, z_2 eine ganze Formenschaar des Systems Π ist.

Während aber x_1, x_2 seinen Umlauf ausführt, muss fortwährend die Eigenschaft von Λ erhalten bleiben, dass die σ Summen

$$\sum_{i,\nu} \alpha'_{i\nu}\, \Lambda_i^{(k)}\big(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\, x_1, x_2\big),$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha''_{i\nu}\, \Lambda_i^{(k)}\big(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\, x_1, x_2\big),$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}\, \Lambda_i^{(k)}\big(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\, x_1, x_2\big)$$

verschwinden; es genügt also die links stehende Formenschaar diesen σ Gleichungen. Denselben Gleichungen genügen aber auch die rechts stehenden Schaaren $\Lambda', \Lambda'', \ldots \Lambda^{(n)}$, also müsste auch die ganze

Formenschaar $f^{(\varkappa)}(z_1, z_2)$ den σ Gleichungen genügen, woraus denn folgt, dass $f^{(\varkappa)}(z_1, z_2)$ identisch verschwindet.

Wir haben als den Satz:

Die n^2 normirten Elementarformen

$$\begin{array}{llll} \Lambda_1'(z_1, z_2;\ x_1, x_2), & \Lambda_1''(z_1, z_2;\ x_1, x_2), & \ldots & \Lambda_1^{(n)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2), \\ \Lambda_2'(z_1, z_2;\ x_1, x_2), & \Lambda_2''(z_1, z_2;\ x_1, x_2), & \ldots & \Lambda_2^{(n)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2), \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Lambda_n'(z_1, z_2;\ x_1, x_2), & \Lambda_n''(z_1, z_2;\ x_1, x_2), & \ldots & \Lambda_n^{(n)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2), \end{array}$$

sind colonnenweise zusammengefasst Schaaren des Systems $\Pi(z_1, z_2)$, zeilenweise zusammengefasst Schaaren des reciproken Systems der $\Omega(x_1, x_2)$.

Was haben nun die Stellen $u', u'', \ldots u^{(r)}$ und $w', w'', \ldots w^{(r')}$ für eine Bedeutung für die Schaaren $\Lambda(z_1, z_2;\ x_1, x_2)$ als Function des zweiten Argumentpaares? Ich behaupte:

An den Stellen $w', w'', \ldots w^{(r')}$, welche für die Λ als Functionen von z_1, z_2 Unendlichkeitsstellen sind, verschwinden als Functionen von x_1, x_2 die σ' Combinationen

$$\sum_{k,\nu} \beta'_{k\nu}\ \Lambda_i^{(k)}(z_1, z_2;\ w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}),$$

$$\sum_{k,\nu} \beta''_{k\nu}\ \Lambda_i^{(k)}(z_1, z_2;\ w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}),$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k,\nu} \beta^{(\sigma')}_{k\nu} \Lambda_i^{(k)}(z_1, z_2;\ w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)})$$

identisch.

Die Stellen $w', w'', \ldots w^{(r')}$ spielen also für die n Schaaren $\Lambda_1, \Lambda_1, \ldots \Lambda_n$ als Functionen von x_1, x_2 dieselbe Rolle, wie die Stellen $u', u'', \ldots u^{(r)}$ für die n Schaaren $\Lambda', \Lambda'', \ldots \Lambda^{(n)}$ als Functionen von z_1, z_2.

Zum Beweise untersuche ich zuerst die Natur der einzelnen Form $\Lambda_i^{(k)}(z_1, z_2;\ w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)})$ als Function von z_1, z_2. Als solche wird sie nur an den Stellen $w', w'', \ldots w^{(r')}$ unendlich etwa an der Stelle $w^{(\mu)}$ mit dem Coefficienten $\gamma_{i\mu}^{(k,\nu)}$. Diese Coefficienten genügen einerseits den σ' Gleichungen

$$\sum_{i,\mu} \gamma_{i\mu}^{(k,\nu)} g'\ (w_1^{(\mu)}, w_2^{(\mu)}) = 0,$$

$$\sum_{i,\mu} \gamma_{i\mu}^{(k,\nu)} g''\ (w_1^{(\mu)}, w_2^{(\mu)}) = 0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\mu} \gamma_{i\mu}^{(k,\nu)} g^{(\sigma')}(w_1^{(\mu)}, w_2^{(\mu)}) = 0,$$

andererseits den ϱ' Gleichungen

$$\sum_{i,\mu} \gamma_{i\mu}^{(k,\nu)} B'_{i\mu} = B'_{k,\nu},$$
$$\sum_{i,\mu} \gamma_{i\mu}^{(k,\nu)} B''_{i\mu} = B''_{k,\nu},$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i,\mu} \gamma_{i\mu}^{(k,\nu)} B_{i\mu}^{(\varrho')} = B_{k,\nu}^{(\varrho')}.$$

Irgend eine unserer Summen, etwa

$$\sum_{k,\nu} \beta_{k,\nu} \Lambda_i^{(k)} (z_1, z_2; w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}),$$

ist also ebenfalls eine Form von z_1, z_2, die nur an den Stellen $w', w'', \ldots w^{(r')}$ unendlich wird und zwar mit den Coefficienten

$$\delta_{i\mu} = \sum_{k,\nu} \beta_{k,\nu} \gamma_{i,\mu}^{(k,\nu)}.$$

Die Coefficienten $\delta_{i\mu}$ genügen, gemäss ihrer Zusammensetzung aus den $\gamma_{i\mu}^{(k,\nu)}$, den σ' Gleichungen:

$$\sum_{i,\mu} \delta_{i\mu} g_i' \ (w_1^{(\mu)}, w_2^{(\mu)}) = 0,$$
$$\sum_{i,\mu} \delta_{i\mu} g_i'' \ (w_1^{(\mu)}, w_2^{(\mu)}) = 0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i,\mu} \delta_{i\mu} g_i^{(\sigma')} (w_1^{(\mu)}, w_2^{(\mu)}) = 0$$

und den ϱ' Gleichungen

$$\sum_{i,\mu} \delta_{i\mu} B'_{i\mu} = \sum_{k,\nu} \beta_{k,\nu} B'_{k\nu},$$
$$\sum_{i,\mu} \delta_{i\mu} B''_{i\mu} = \sum_{k,\nu} \beta_{k,\nu} B''_{k\nu},$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i,\mu} \delta_{i\mu} B_{i\mu}^{(\varrho')} = \sum_{k,\nu} \beta_{k,\nu} B_{k\nu}^{(\varrho')}.$$

In diesen letzteren Gleichungen sind aber die rechten Seiten nach der Definition der $\beta_{k\nu}$ gleich Null, so dass also die Cofficienten $\delta_{i\mu}$ den Gleichungen genügen:

$$\sum_{i\mu} \delta_{i\mu} \mathrm{g}_i' \,(w_1^{(\mu)}, w_2^{(\mu)}) = 0,$$
$$\sum_{i\mu} \delta_{i\mu} \mathrm{g}_i'' \,(w_1^{(\mu)}, w_2^{(\mu)}) = 0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i\mu} \delta_{i\mu} \mathrm{g}_i^{(\sigma')} (w_1^{(\mu)}, w_2^{(\mu)}) = 0;$$

$$\sum_{i\mu} \delta_{i\mu} B_{i\mu}' = 0,$$
$$\sum_{i\mu} \delta_{i\mu} B_{i\mu}'' = 0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i\mu} \delta_{i\mu} B_{i\mu}^{(\varrho')} = 0.$$

Dies ist aber nur so möglich, dass sämmtliche $\delta_{i\mu} = 0$ sind, dass also

$$\sum_{k\nu} \beta_{k\nu} \Lambda^{(k)} (z_1, z_2;\ w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)})$$

eine ganze Formenschaar des Systems Π ist. Nun genügt aber jeder Theil dieser Summe an den Stellen $u', u'', \ldots u^{(r)}$ den σ zu diesen Stellen gehörigen Relationen, also auch die Summe. Eine ganze Formenschaar aber, welche diesen Relationen genügt, muss identisch verschwinden, also auch unsere Summe, womit der behauptete Satz bewiesen ist.

Ferner behaupte ich:

Die Stellen $u', u'', \ldots u^{(r)}$ sind die festen Unendlichkeitsstellen der Elementarschaaren $\Lambda_i(z_1, z_2;\ x_1, x_2)$ als Functionen von x_1, x_2, und die Coefficienten $\alpha_{k\nu}$ der Zweige einer solchen Schaar an den r Stellen genügen den ϱ Relationen:

$$\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A_{k\nu}' = 0,$$
$$\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A_{k\nu}'' = 0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A_{k\nu}^{(\varrho)} = 0.$$

$(u', u'', \ldots u^{(r)}$ sind offenbar die einzigen möglichen Unendlichkeitsstellen von $\Lambda_i^{(k)}$ als Function von x_1, x_2. Denn für keine andere Lage der Stelle x versagen die in der Definition von $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ vorkommenden Bestimmungen. Damit ist der Beweis des zum vorigen Paragraphen benutzten Satzes nachgeholt, dass man $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ so einrichten kann, dass die Definition für eine bestimmte aber beliebige Lage ζ der Stelle x nicht versagt; denn offenbar kann man es immer so einrichten, dass keiner der Punkte $u', u'', \ldots u^{(r)}$ mit ζ zusammenfällt: Man braucht ja nur $r > \sigma + p - 1$, und alle Punkte u von ζ verschieden zu nehmen, um sicher allgemein gelegene Punkte u zu haben, die dieser Bedingung genügen).

Die Stellen $u', u'', \ldots u^{(r)}$ spielen also für die Schaaren Λ_i als Functionen von x_1, x_2 dieselbe Rolle, wie die Stellen $w', w'', \ldots w^{(r')}$ für die Schaaren $\Lambda^{(k)}$ als Functionen von z_1, z_2.

Zum Beweise benutzen wir den Umstand, dass bereits nach dem vorigen Paragraphen die Schaaren $\Lambda_i(z_1, z_2; x_1, x_2)$ als Functionen von x_1, x_2 betrachtet Elementarschaaren des Systems $\Omega(x_1, x_2)$ sind.

Wir benutzen nun diese Elementarschaaren zur Herstellung einer Formenschaar $\Omega(x_1, x_2)$ von folgenden Eigenschaften:

Bei $x = z$ soll nur der $i$te Zweig unendlich werden mit dem Coefficienten -1, und sonst sollen nur bei $u', u'', \ldots u^{(r)}$ Unendlichkeitsstellen liegen, deren Coefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots \alpha_{n1}; \alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots \alpha_{n2}; \ldots$
$\ldots \alpha_{1r}, \alpha_{2r}, \ldots \alpha_{nr}$ folgenden $\sigma + \varrho$ Relationen genügen:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} \mathfrak{f}_k' \left(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}\right) = \mathfrak{f}_i' (z_1, z_2), &&\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A_{k\nu}' = 0,\\
&\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} \mathfrak{f}_k'' \left(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}\right) = \mathfrak{f}_i'' (z_1, z_2), &&\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A_{k\nu}'' = 0,\\
&\qquad\vdots &&\qquad\vdots\\
&\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} \mathfrak{f}_k^{(\sigma)} \left(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}\right) = \mathfrak{f}_i^{(\sigma)} (z_1, z_2), &&\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A_{k\nu}^{(\varrho)} = 0.
\end{aligned}
$$

Ferner sollen an den Stellen $w', w'', \ldots w^{(r)}$ die σ' Gleichungen erfüllt sein

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu}' \; \Omega_k\left(w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}\right) = 0,\\
&\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu}'' \; \Omega_k\left(w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}\right) = 0,\\
&\qquad\vdots\\
&\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu}^{(\sigma')} \Omega_k\left(w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Man findet, da die Elementarschaaren $\Lambda_i(z_1, z_2; x_1, x_2)$ von selbst dem letzten Gleichungsystem genügen:

$$\Omega(x_1, x_2) = \Lambda_i(z_1, z_2; x_1, x_2) + \sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} \Lambda_k(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}; x_1, x_2).$$

Die $\sum\limits_{k,\nu}$ auf der rechten Seite dieser Darstellung ist aber, welches auch der obere Index der Λ_k sein mag, gleich Null, da die $\alpha_{k\nu}$ den Gleichungen

$$\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A'_{k\nu} = 0,$$

$$\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A''_{k\nu} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A^{(\varrho)}_{k\nu} = 0$$

genügen und also lineare Combinationen der σ Systeme $\alpha'_{k\nu}, \alpha''_{k\nu}, \ldots \ldots \alpha^{(\sigma)}_{k\nu}$ sind.

Folglich ist die gesuchte Schaar direct $\Lambda_i(z_1, z_2; x_1, x_2)$ und diese hat daher an den Stellen $u', u'', \ldots u^{(r)}$ in der That das behauptete Verhalten.

Die normirten Elementarformen $\Lambda_i^k(z_1, z_2; x_1, x_2)$ sind also sowohl für die Schaaren $\Pi(z_1, z_2)$ wie für die Schaaren $\Omega(x_1, x_2)$ normirte Elementarformen, und zwar haben die Punkte $u', u'', \ldots u^{(r)}$ nebst den Constanten $A'_{k\nu}, A''_{k\nu}, \ldots A^{(\varrho)}_{k\nu}$ sowie die Punkte $w', w'', \ldots w^{(r)}$ mit den Constanten $B'_{k\nu}, B''_{k\nu}, \ldots B^{(\varrho')}_{k\nu}$ dieselbe Bedeutung für die Elementarschaaren $\Lambda^k(z_1, z_2; x_1, x_2)$ als Functionen von z_1, z_2, wie $w', w'', \ldots w^{(r')}, B'_{k\nu}, B''_{k\nu}, \ldots B^{(\varrho')}_{k\nu}$ bezw. $u', u'', \ldots u^{(r)}; A'_{k\nu}, A''_{k\nu}, \ldots A^{(\varrho)}_{k\nu}$ für die Elementarschaaren $\Lambda_i(z_1, z_2; x_1, x_2)$ als Functionen von x_1, x_2.

Das Verhalten der normirten Elementarformen sowohl als Formen von z_1, z_2, wie von x_1, x_2 ist vollständig charakterisirt durch Angabe der Punkte $u', u'', \ldots u^{(r)}$ und der Constanten $A'_{k\nu}, A''_{k\nu}, \ldots A^{(\varrho)}_{k\nu}$, sowie der Punkte $w', w'', \ldots w^{(r')}$ und der Constanten $B'_{k\nu}, B''_{k\nu}, \ldots B^{(\varrho')}_{k\nu}$, und zwar folgendermassen:

Die Schaar $\Lambda^k(z_1, z_2; x_1, x_2)$ als Function von z_1, z_2 wird an der Stelle x nur in ihrem $k$ten Zweige und zwar mit dem Coefficienten $+1$ unendlich, sonst nur an den Stellen $w', w'', \ldots w^{(r')}$ mit Coefficienten $\beta_{i\nu}$, welche den ϱ' Relationen

$$\sum_{i,\nu} \beta_{i\nu} B'_{i\nu} = 0,$$

$$\sum_{i,\nu} \beta_{i\nu} B''_{i\nu} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\nu} \beta_{i\nu} B^{(\varrho')}_{i\nu} = 0$$

genügen, und an den Stellen $u', u'', \ldots u^{(r)}$ verschwinden alle Combinationen

$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} \Lambda_i^k(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\ x_1, x_2),$$

deren Coefficienten den ϱ Relationen

$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} A'_{i\nu} = 0,$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} A''_{i\nu} = 0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} A^{(\varrho)}_{i\nu} = 0$$

genügen.

Die Schaar $\Lambda_i(z_1, z_2;\ x_1, x_2)$ als Function von x_1, x_2 wird an der Stelle z nur in ihrem $i$ten Zweige und zwar mit dem Coefficienten -1 unendlich, sonst nur an den Stellen $u', u'', \ldots u^{(r)}$ mit Coefficienten $\alpha_{k\nu}$, welche den ϱ Relationen

$$\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A'_{k\nu} = 0,$$
$$\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A''_{k\nu} = 0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A^{(\varrho)}_{k\nu} = 0$$

genügen, und an den Stellen $w', w'', \ldots w^{(r)}$ verschwinden alle Combinationen

$$\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu} \Lambda_i^k(z_1, z_2;\ w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}),$$

deren Coefficienten den ϱ' Relationen

$$\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu} B'_{k\nu} = 0,$$
$$\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu} B''_{k\nu} = 0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu} B^{(\varrho')}_{k\nu} = 0$$

genügen.

Jede Formenschaar $\Pi(z_1, z_2)$ mit nur einfachen Unendlichkeitsstellen $x', x'', \ldots x^{(s)}$ und den Coefficienten $\gamma_1', \gamma_2', \ldots \gamma_n'; \gamma_1'', \gamma_2'', \ldots \ldots \gamma_n''; \ldots \gamma_1^{(s)}, \gamma_2^{(s)}, \ldots \gamma_n^{(s)}$, hat, wenn man die Abkürzungen

$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu}' \Pi_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = A',$$

$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu}'' \Pi_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = A'',$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu}^{(\sigma)} \Pi_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = A^{(\sigma)}$$

einführt, die Darstellung:

$$\Pi(z_1, z_2) = \sum_{k,\mu} \gamma_k^{(\mu)} \Lambda^k(z_1, z_2; x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)}) + \sum_{\lambda} A^{(\lambda)} \mathfrak{f}^{(\lambda)}(z_1, z_2);$$

und jede Formenschaar $\Omega(x_1, x_2)$, welche nur die einfachen Unendlichkeitsstellen $z', z'', \ldots z^{(s)}$ mit den Coefficienten $\gamma_1', \gamma_2', \ldots \gamma_n'; \gamma_1'', \gamma_2'', \ldots \gamma_n''; \ldots \gamma_1^{(s)}, \gamma_2^{(s)}, \ldots \gamma_n^{(s)}$ besitzt, hat, nach Einführung der Abkürzungen

$$\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu}' \Omega_k(w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}) = B',$$

$$\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu}'' \Omega_k(w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}) = B'',$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu}^{(\sigma')} \Omega_k(w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}) = B^{(\sigma')}$$

die Darstellung:

$$\Omega(x_1, x_2) = -\sum_{i,\mu} \gamma_i^{(\mu)} \Lambda_i(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}; x_1, x_2) + \sum_{\lambda} B^{(\lambda)} . \mathfrak{g}^{(\lambda)}(x_1, x_2).$$

Hiermit sind nunmehr alle die einzelnen Sätze, die ich in meiner Arbeit in Bd. 44 der Math. Ann. über die Darstellung multiplicativer Formen durch Elementarformen ausgesprochen habe, für solche Formenschaaren verallgemeinert worden, die bei geschlossenen Umläufen der Variablen auf einer Riemann'schen Fläche lineare Substitutionen der Zweige erleiden.

Wie ich in jener Arbeit fernerhin eine Anwendung der entwickelten Theorie auf die Theorie der automorphen Formen gegeben habe, durch welche sich alle die Poincaré'schen Resultate in allgemeinster und dabei überraschend einfacher Weise ergeben, so lässt sich auch die jetzt entwickelte Theorie auf die Poincaré'schen „fonctions zétafuchsiennes“

und „fonctions zétakleinéennes" anwenden; macht man diese Poincaré'schen Functionen homogen, so werden es eben Formenschaaren, deren Zweige sich linear substituiren, wenn man die Variablen auf einem automorphen Fundamentalbereiche wandern lässt, der dann an Stelle der Riemann'schen Fläche tritt, auf die er conform abgebildet werden kann. Nach einem Vorschlage von Herrn Klein will ich diese Formenschaaren, die homogen gemachten Poincaré'schen Zetafunctionen, als „homomorphe Formen" bezeichnen.

Die Anwendung der in meiner vorliegenden Abhandlung entwickelten Theorie auf die homomorphen Formen soll der Gegenstand einer weiteren hieran sich anschliessenden Arbeit sein*).

Göttingen im April 1895.

---

*) Diese Aussicht wird sich, wie wir zu unserem grössten Bedauern mittheilen müssen, nicht erfüllen. Unser geschätzter Mitarbeiter, Herr Dr. Ernst Ritter, der einen Ruf an die Cornell-University in Ithaca angenommen hatte, ist auf dem Wege dorthin in New-York am 23. September einer plötzlichen Erkrankung am Typhus erlegen. Ein ausführlicher Nekrolog wird im 4ten Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung veröffentlicht werden. Hier theilen wir noch mit, dass sich in dem Nachlasse Ritter's eine fast vollendete Arbeit „Ueber hypergeometrische Functionen mit einem Nebenpunkte" gefunden hat, welche demnächst in diesen Annalen publicirt werden soll. Die mathematischen Annalen enthalten dann die sämmtlichen functionentheoretischen Arbeiten von Ritter; eine Untersuchung über die Bewegung elektrischer Theilchen nach dem Weber'schen Gesetz ist früher in Bd. 37 von Schlömilch's Zeitschrift publicirt worden."

Die Redaction.