# Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen.

Von

O. Hölder in Göttingen.

---

Die vorliegende Arbeit bezweckt die Verallgemeinerung des folgenden Satzes, welcher das Fundament des Abel'schen Beweises für die Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichungen von höherem als dem fünften Grad bildet.

Wenn eine Gleichung durch Wurzelzeichen aufgelöst werden kann, so vermag man stets der Auflösung eine solche Form zu geben, dass die sämmtlichen vorkommenden Radicale rationale Functionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Abel*) geht dabei von der Voraussetzung aus, dass die Coefficienten der Gleichung rationale Functionen von irgend welchen unabhängigen Veränderlichen sind, und nimmt keine Rücksicht auf die Natur der in die Rechnung eingehenden Constanten.

Will man die letzteren beachten, was selbstverständlich unumgänglich ist, wenn man Gleichungen mit constanten Coefficienten mit in den Kreis der Betrachtung ziehen will**), so muss der Ausspruch des Satzes etwas modificirt werden.

Es muss zuerst ein Rationalitätsbereich im Sinne des Herrn Kronecker***) definirt werden, dem die Coefficienten der gegebenen Gleichung angehören. Wie Herr Kronecker ausgeführt hat†), lautet dann die Behauptung dahin, dass die Hülfsgrössen, d. h. die Radicale,

---

*) Vergl. Abel's Werke II. Ausg., I. Bd. p. 72 bis 75.

**) Den Unterschied zwischen Gleichungen mit constanten und solchen mit variabeln Coefficienten hebt Abel ausdrücklich in einer nachgelassenen Abhandlung hervor: Werke Bd. II, p. 219.

***) Cf. Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. Berlin 1882. p. 3 bis 5.

†) Cf. Monatsberichte der Berl Acad. Sitzung der phys.-math. Classe vom 3. März 1879, p. 208.

aus den Wurzeln der gegebenen Gleichung und *gewissen Einheitswurzeln* sich rational zusammensetzen. Es versteht sich dabei von selbst, dass die dem von vornherein gegebenen Rationalitätsbereich angehörenden Grössen in die Ausdrücke mit eingehen können.

Man muss also Einheitswurzeln mit herbeiziehen; diese letzteren sind nicht immer in den Wurzeln der ursprünglichen Gleichung rational. *Darin liegt ein Missstand.*

Es empfiehlt sich deswegen, statt der Auflösung einer Gleichung durch Wurzelzeichen, d. h. statt ihrer Reduction auf reine Gleichungen, zunächst nur die Reduction auf gewöhnliche Abel'sche Gleichungen von Primzahlgrad vorzunehmen. Ich folge hierin einem Vorschlag, den Herr F. Klein mir im mündlichen Verkehr gemacht hat. Wenn eine Gleichung sich überhaupt auf eine solche Kette Abel'scher Gleichungen zurückführen lässt, so kann man es dabei so einrichten, dass die Wurzeln der Hilfsgleichungen in den Wurzeln der ursprünglichen Gleichung rational sind, ohne dass man Einheitswurzeln einzuführen nöthig hätte. Man beschränkt sich also dann auf solche Irrationalitäten, welche im Sinne von Herrn F. Klein*) zu den „natürlichen" gehören. Es werden bei dieser Betrachtungsweise die Gleichungen der Galois'schen Methode directer zugänglich.

Die Reduction jeder einzelnen der erhaltenen Abel'schen Gleichungen von Primzahlgrad auf eine reine Gleichung ist dann jedesmal besonders auszuführen nach vorhergegangener Adjunction einer Einheitswurzel.

Bei den nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch nichtauflösbaren Gleichungen kann man nun ähnlich verfahren: Man führt eine solche Gleichung zuerst auf eine Kette von einfachen Gleichungen, d. h. von Gleichungen mit einfacher Galois'scher Gruppe, zurück. Die Reduction einer jeden solchen einfachen Gleichung auf eine Normalgleichung mit derselben Gruppe ist dann eine zweite Aufgabe, welche für sich behandelt werden kann und z. B. bei den Gleichungen fünften Grades ausführlich behandelt worden ist. Bei der Lösung der ersten Aufgabe kommt man mit den natürlichen Irrationalitäten aus.

Man wird dabei allgemein folgendermassen verfahren: Man stellt zunächst eine *einfache* Hülfsgleichung auf, deren Coefficienten dem ursprünglich gegebenen Rationalitätsbereich angehören. Wenn man nun sämmtliche Wurzeln dieser Hülfsgleichung adjungirt, so entsteht ein neuer Rationalitätsbereich. Dieser wird zu Grund gelegt für eine zweite Hülfsgleichung, welche auch eine einfache Gruppe haben soll.

---

*) Klein, Vorlesungen über das Icosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom 5ten Grade, Leipzig 1884, p. 157. Den Gegensatz zu den natürlichen Irrationalitäten bilden die *accessorischen*.

Nachher wird die Gesammtheit der Wurzeln der zweiten Hülfsgleichung noch dazu adjungirt und so fortgefahren. Wenn man schliesslich die Wurzeln der letzten Hülfsgleichung adjungirt hat, so sollen die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung nunmehr alle rational geworden sein.

Man kann nun fragen, welches die Gruppen der Hülfsgleichungen sein werden, in wie weit diese Gruppen bestimmt sind, wie gross die Zahl der Hülfsgleichungen sein muss, und wie deren Wurzeln, die Hülfsgrössen, beschaffen sein müssen.

Es wird sich zeigen, dass durch die Gruppe der ursprünglich gegebenen Gleichung gewisse vollständig bestimmte einfache Gruppen, die *Factorgruppen*, gegeben sind. Diese letzteren Gruppen müssen unter den Galois'schen Gruppen der Hülfsgleichungen jedenfalls vorkommen. Jede von den Factorgruppen ist unvermeidlich, auch wenn man in der Wahl der Hülfsgrössen aus dem Gebiet der natürlichen Irrationalitäten heraustritt. Es ergiebt sich hieraus ein Minimum für die Anzahl der Hülfsgleichungen. Ausserdem gilt der Satz, dass, wenn die Zahl der Hülfsgleichungen möglichst klein ist, die Hülfsgrössen von selbst alle rational werden in den Wurzeln der ursprünglichen Gleichung.

Den Schlüssel zur Behandlung der erwähnten Fragen bildet ein von Herrn C. Jordan aufgestellter Satz*). Es bedurfte nur einer weiteren Ausführung des Jordan'schen Resultats. Diese Ausführung erhält ein besonderes Interesse durch die Bedeutung der Sache für die Behandlung der höheren Gleichungen und durch das Hervortreten eines bis jetzt nicht hinreichend gewürdigten gruppentheoretischen Begriffs, nämlich des Begriffs der Factorgruppe.

Der Zusammenhang des Ganzen hat es mit sich gebracht, dass viel Bekanntes von Neuem entwickelt worden ist. Es werden im Folgenden nur die elementarsten gruppentheoretischen Begriffe und die Fundamentaleigenschaft der Galois'schen Gruppe einer Gleichung vorausgesetzt werden.

Die Arbeit zerfällt in einen rein gruppentheoretischen und einen algebraischen Theil.

## I. Gruppentheoretischer Theil.

### § 1.

### Die definirenden Eigenschaften der Gruppen.

Die in diesem Theil entwickelten Sätze gelten für alle Gruppen, die aus einer *endlichen* Anzahl von Operationen bestehen. Die Art

*) Vergl. C. Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques, Paris 1870, p. 269 und 270.

der Operationen ist dabei gleichgültig. Es wird nur die Gruppeneigenschaft vorausgesetzt, welche in die folgenden Bestimmungen zusammengefasst werden kann*):

1) Je zwei Operationen sollen in bestimmter Aufeinanderfolge zusammengesetzt (multiplicirt) eine eindeutig bestimmte Operation ergeben, welche gleichfalls derselben Gesammtheit angehört.

2) Für die Zusammensetzung der Operationen soll das associative Gesetz gelten, während das commutative nicht erfüllt zu sein braucht.

3) Aus jeder der beiden die Operationen $A, B, C$ enthaltenden symbolischen Gleichungen

$$AB = AC, \quad BA = CA$$

soll geschlossen werden können, dass

$$B = C$$

ist.

Eine Folge dieser Bestimmungen im Zusammenhang mit der Endlichkeit der Operationenzahl ist es, dass eine sogenannte *identische* Operation $J$ vorhanden ist, und zwar eine einzige, welche alle anderen bei der Multiplication unverändert lässt, und dass zu jeder Operation $A$ eine eindeutig bestimmte umgekehrte Operation $A^{-1}$ sich findet, so dass

$$AA^{-1} = A^{-1}A = J$$

ist.

## § 2.

## Ausgezeichnete Untergruppen.

Wenn die Operationen

$$B, B_1, B_2, \ldots$$

eine „Untergruppe" der Gesammtgruppe bilden, so bilden auch die „mit Hülfe der Operation $A$ transformirten" Operationen

$$A^{-1}BA, \quad A^{-1}B_1A, \quad A^{-1}B_2A, \ldots$$

eine Gruppe, welche selbst als aus der ersten Untergruppe *transformirt* bezeichnet wird.

Eine Untergruppe, welche identisch ist mit den sämmtlichen aus ihr transformirten, ist nach einem Ausdruck des Herrn Klein eine *ausgezeichnete*, nach Herrn König (Math. Annalen Bd. 21) eine *invariante* Untergruppe. Nach der älteren Ausdrucksweise nennt man eine solche Untergruppe „mit den sämmtlichen Operationen der Gesammtgruppe vertauschbar." Wenn nämlich $A$ eine beliebige Operation

---

*) Hinsichtlich der Gruppendefinition vergl. auch Dyck, Gruppentheoretische Studien, Math. Ann. Bd. XX.

der Gesammtgruppe, und $B$ eine Operation der Untergruppe bedeutet, so sind die Producte $AB$ und $BA$ beziehungsweise in den Formen $B'A$ und $AB''$ darstellbar, wo $B'$ und $B''$ passend gewählte Operationen der Untergruppe bedeuten.

Eine ausgezeichnete Untergruppe heisst *ausgezeichnete Maximaluntergruppe*, falls es keine umfassendere sie enthaltende ausgezeichnete Untergruppe der Gesammtgruppe giebt.

## § 3.

## Die Factoren der Zusammensetzung.

Von besonderer Wichtigkeit ist eine von Herrn C. Jordan eingeführte Reihe. Wenn nämlich $G$ eine beliebige Gruppe bedeutet, so bilde man eine Reihe von Gruppen

$$G,\ G',\ G'',\ \ldots\ J$$

derart, dass jede Gruppe dieser Folge eine ausgezeichnete Maximaluntergruppe der vorhergehenden bedeutet, und die letzte, mit $J$ bezeichnete Gruppe nur die identische Operation enthält. Man nennt jede solche Reihe *Reihe der Zusammensetzung*. Wenn nun die Gruppen der Reihe respective

$$n,\ n',\ n'',\ \ldots\ 1$$

Operationen enthalten, so sind

$$\frac{n}{n'},\ \frac{n'}{n''},\ \ldots$$

die Zahlen, welche Herr C. Jordan als *Factoren der Composition* in die Theorie eingeführt hat. Diese Factoren sind abgesehen von ihrer Aufeinanderfolge völlig bestimmt trotz der Möglichkeit die Reihe der Zusammensetzung abzuändern*).

Diese Theorie von den Factoren der Zusammensetzung muss aber dahin vertieft werden, dass die Factoren als *Gruppen* aufgefasst werden.

Es wird im nächsten Paragraphen gezeigt werden, dass durch das Verhältniss einer Gruppe zu einer in ihr ausgezeichnet enthaltenen Untergruppe stets eine neue Gruppe von im Allgemeinen anderen Operationen definirt ist. Diese letztere Gruppe ist völlig bestimmt von dem abstracten Standpunkt aus, welcher von dem Inhalt der Operationen absieht und nur deren gegenseitige Verknüpfung betrachtet, welcher deshalb auch eindeutig auf einander beziehbare (*holoedrisch isomorphe*) Gruppen als identisch auffasst**).

---

*) Vergl. Jordan, Traité des substitutions etc. p. 42.

**) Vergl. die Arbeit des Herrn Dyck in den Math. Ann. Bd. XX.

## § 4.

## Der durch eine Gruppe und eine in ihr ausgezeichnet enthaltene Untergruppe definirte Quotient.

Wenn die Symbole

$$B, B_1, B_2, \ldots$$

die Operationen irgend einer Untergruppe H bedeuten, so kann man die sämmtlichen Operationen der Gesammtgruppe $G$ in dem Schema

$$\begin{array}{llll} B, & B_1, & B_2, & \ldots \\ S_1 B, & S_1 B_1, & S_1 B_2, & \ldots \\ S_2 B, & S_2 B_1, & S_2 B_2, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ S_{n-1} B, & S_{n-1} B_1, & S_{n-1} B_2, & \ldots \end{array}$$

darstellen, wo die Operationen

$$S_1, S_2, \ldots S_{n-1}$$

passend aus der Gesammtheit ausgewählt sind. Dieses Schema findet sich schon bei Cauchy*). Dasselbe dient zum Beweis dafür, dass die Anzahl $m$ der Operationen $B$, d. h. die Ordnung der Untergruppe, stets ein Theiler von der Gesammtzahl der Operationen, d. h. von der Ordnung der Gesammtgruppe ist.

Wenn nun die Untergruppe eine ausgezeichnete ist, so gilt der Satz, dass zwei beliebige Operationen aus zwei bestimmten Horizontalreihen des gegebenen Schema's in bestimmter Aufeinanderfolge zusammengesetzt eine Operation einer völlig bestimmten Horizontalreihe geben müssen. Wenn nämlich $\mu$, $\nu$, $\varrho$, $\sigma$ vier beliebige Indices bedeuten, so ist immer

$$\begin{aligned} S_\nu B_\varrho S_\mu B_\sigma &= S_\nu S_\mu B_{\varrho'} B_\sigma \\ &= S_\varkappa B_\tau B_{\varrho'} B_\sigma, \end{aligned}$$

wo der Index $\varkappa$ nur von $\mu$ und $\nu$ abhängig ist.

Damit ist eine Zusammensetzung der Horizontalreihen definirt. Man erhält so neue Operationen, welche gleichfalls eine Gruppe bilden. Diese vollständig bestimmte Gruppe ist es, welche in die Betrachtung eingeführt werden soll. Man könnte sie den *Quotienten* der Gruppen $G$ und H nennen, dieselbe soll im Folgenden mit

$$G|\mathsf{H}$$

bezeichnet werden.

---

*) Cauchy: Exercices d'analyse et de physique mathématique, Tome III, p. 184.

## § 5.

Die Ausführungen des vorhergehenden Paragraphen können auch so ausgedrückt werden: Es mögen zwei Operationen der Gesammtgruppe $G$ als *äquivalent* bezeichnet werden, wenn sie in einander übergeführt werden können durch Multiplication mit einer Operation der ausgezeichneten Untergruppe $\mathsf{H}$. Wegen der Vertauschbarkeit der Gruppe $\mathsf{H}$ mit den Operationen der Gesammtgruppe braucht man in dieser Definition die Multiplication rechts und links nicht zu unterscheiden. Aus demselben Grund folgt, dass Aequivalentes mit Aequivalentem multiplicirt Aequivalentes giebt. Theilt man also die Operationen der Gesammtgruppe $G$ in Classen ein, indem man äquivalente Operationen in dieselbe Classe setzt und nichtäquivalente Operationen in verschiedene Classen, so erhält man eine Zusammensetzung der Classen, für welche die Gruppeneigenschaft besteht. Je $m$ Operationen der ursprünglichen Gruppe $G$ entspricht eine bestimmte Operation der neuen Gruppe. Die Zusammensetzung der Operationen ist bei beiden Gruppen eine entsprechende, d. h. es besteht zwischen den letzteren ein *Isomorphismus*. Dieser Isomorphismus heisst *meroedrisch*, weil einer Operation der zweiten Gruppe mehrere Operationen der ersten entsprechen.

Aus diesem Isomorphismus kann Folgendes geschlossen werden: Wenn gewisse von den definirten Classen eine ausgezeichnete Untergruppe der Classengruppe $G|\mathsf{H}$ bilden, so bilden die diesen Classen angehörenden Operationen der ursprünglichen Gruppe $G$ eine ausgezeichnete Untergruppe $\mathsf{H}'$ der letzteren. Ausserdem enthält die Gruppe $\mathsf{H}'$ die Gruppe $\mathsf{H}$ in sich, denn die Operationen von $\mathsf{H}$ sind diejenigen, welche mit der Identität in dieselbe Classe gehören.

Wenn jetzt $\mathsf{H}$ eine ausgezeichnete *Maximal*untergruppe von $G$ bedeutet, so kann eine Gruppe so wie die Gruppe $\mathsf{H}'$ nicht vorhanden sein, es hat desshalb in diesem besonderen Fall auch die Gruppe $G|\mathsf{H}$ keine ausgezeichnete Untergruppe, ausgenommen die Identität und die Gruppe $G|\mathsf{H}$ selbst; die Gruppe $G|\mathsf{H}$ ist also dann *einfach*. Dieser Schluss kann umgedreht werden: Wenn die Gruppe $G|\mathsf{H}$ einfach ist, so ist die ausgezeichnete Untergruppe $\mathsf{H}$ eine ausgezeichnete Maximaluntergruppe.

In allen Fällen ist die Ordnung der Gruppe $G$ gleich dem Product der Ordnungen der Gruppen $G|\mathsf{H}$ und $\mathsf{H}$. Man kann auch sagen, dass die Gruppe $G$ in zwei Factoren gespalten werde.*) Die Factoren spielen dabei eine verschiedene Rolle. Als erster Factor möge daher

---

*) Vergl. Dyck, Gruppentheoretische Studien, Math. Ann. Bd. XX, p. 14.

stets die Gruppe $G|H$ aufgefasst werden, welche der Gruppe $G$ isomorph ist, als zweiter Factor die Gruppe $H$, welche eine ausgezeichnete Untergruppe von $G$ ist. Den Ausgangspunkt bildete hier die ausgezeichnete Untergruppe, man hätte aber auch vom meroedrischen Isomorphismus ausgehen können*).

Zu der Aufgabe, eine Gruppe in zwei Factoren zu spalten, kann man sich die umgekehrte stellen: Gegeben zwei Gruppen als Factoren, aus denselben eine Gruppe als Product zusammenzusetzen. Diese Aufgabe lässt manchmal mehrere Lösungen zu, ich hoffe dieselbe bei einer anderen Gelegenheit zu behandeln.

## § 6.

## Zerlegung einer Gruppe in Factorgruppen.

Wenn nun eine beliebige Gruppe $G$ gegeben ist, so spaltet man dieselbe zunächst in zwei Factoren, falls sie nicht etwa schon einfach ist. Es kann natürlich sein, dass diese Spaltung auf verschiedene Weisen möglich ist, in diesem Fall wählt man irgend eine Art aus. Nun spaltet man jeden der Factoren, wofern er nicht einfach ist, von Neuem und fährt so fort, bis man nur noch einfache Gruppen hat. Diese einfachen Gruppen sind dann die früher erwähnten Factorgruppen. Man gelangt so zugleich zum Begriff eines Products aus mehreren Gruppen.

Man erhält diese einfachen Factorgruppen auch aus der Reihe der Zusammensetzung (s. § 3). Wenn nämlich

$$G,\ G',\ G'',\ G''',\ \cdots J$$

eine Reihe der Zusammensetzung für die Gruppe $G$ vorstellt, so sind die Gruppen

$$G|G',\ G'|G'',\ G''|G''',\ \cdots$$

alle einfach und es sind dies die Gruppen, um welche es sich handelt. Eine nähere Ueberlegung zeigt, dass man so aus den verschiedenen Reihen der Zusammensetzung dieselben Aggregate einfacher Gruppen erhält, wie durch das im Anfang des Paragraphen auseinandergesetzte Verfahren, welches verschiedener Abänderungen fähig sein kann. Es muss nur im Folgenden noch gezeigt werden, dass diese Aggregate einfacher Gruppen alle identisch sind, d. h. dass alle Reihen der Zusammensetzung, abgesehen von der Reihenfolge, dieselben Factorgruppen ergeben.

Diese Factorgruppen treten bei Herrn Dyck**) schon auf, es fehlt

*) Vergl. Dyck, Gruppentheoret. Studien, diese Ann. Bd. XX, p. 14.

**) Ueber regulär verzweigte Riemann'sche Flächen und die durch sie definirten Irrationalitäten. Inauguraldissertation, München 1879. p. 50.

Vergl. auch Dyck, Math. Ann. Bd. 17, p. 486.

aber dort der Satz, dass diese Gruppen vollständig bestimmt sind trotz der Möglichkeit die Zerlegung auf verschiedene Arten vorzunehmen. In den Werken der H. H. Jordan und Netto kommen die *Gruppen* nicht vor, sondern es sind die Factoren der Zusammensetzung als reine Zahlen aufgefasst. Für die Zahlen ist der entsprechende Satz von Herrn Jordan bewiesen worden. Diesen Beweis von der „Constanz der Factoren der Zusammensetzung" hat Herr Netto erheblich vereinfacht*). Man wird im Folgenden unschwer eine Modification des von Herrn Netto benutzten Gedankenganges erkennen.

## § 7.

Die Gruppe $G$ besitze zwei *von einander verschiedene* ausgezeichnete Maximaluntergruppen $\mathsf{H}$ und $\mathsf{H}'$. Die diesen beiden Gruppen gemeinsamen Operationen bilden die Gruppe $\Gamma$, und da eine Operation der letzteren Gruppe mit irgend einer Operation der Gesammtgruppe transformirt eine Operation sowohl von $\mathsf{H}$ als von $\mathsf{H}'$ ergeben muss, so ist die Gruppe $\Gamma$ in der Gesammtgruppe und also auch in den Gruppen $\mathsf{H}$ und $\mathsf{H}'$ ausgezeichnet enthalten.

Die Operationen $A, A', A'', \ldots$ der Gruppe $\mathsf{H}$ und $B, B', B'', \ldots$ der Gruppe $\mathsf{H}'$ sollen auf alle möglichen Arten zusammengesetzt werden. Wofern nun eine so zusammengesetzte Operation, z. B. $ABB'A'$ mit einer beliebigen Operation $C$ der Gesammtgruppe $G$ transformirt wird, so erhält man

$$(C^{-1}AC)\,(C^{-1}BC)\,(C^{-1}B'C)(C^{-1}A'C),$$

also eine Operation, welche selbst aus den Operationen von $\mathsf{H}$ und $\mathsf{H}'$ sich zusammensetzen lässt. Die durch die Zusammensetzung der Operationen von $H$ und $H'$ gebildete Gruppe ist also eine ausgezeichnete Untergruppe der Gesammtgruppe. Die neue Gruppe müsste aber auch umfassender sein als jede der beiden Gruppen $\mathsf{H}$ und $\mathsf{H}'$. Dies ist aber, weil die letzteren Gruppen ausgezeichnete Maximaluntergruppen sind, nur dann möglich, wenn die fragliche neue Gruppe mit der Gesammtgruppe identisch ist.

Ich definire jetzt einen Aequivalenzbegriff, indem ich zwei Operationen der Gruppe $G$ dann als äquivalent bezeichne, wenn die eine dieser Operationen aus der andern sich durch Multiplication mit einer Operation der Gruppe $\Gamma$ erhalten lässt.

Dadurch werden die Operationen in verschiedene Classen vertheilt. Die Gruppe $\mathsf{H}$ enthält die ganze Gruppe $\Gamma$ und wird also jede Classe von Operationen ganz enthalten, von welcher sie überhaupt einen

*) Cf. Netto, Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra, Leipzig 1882, p. 87—90.

Theil enthält. Dasselbe gilt von der Gruppe H'. Jede dieser Gruppen kann also als aus einer Anzahl von Classen bestehend betrachtet werden. Da die Classen sich wie die Operationen selbst zusammensetzen, so erscheinen die Gruppen $G$, H, H' zugleich als Gruppen

$$G|\Gamma, \quad \mathsf{H}|\Gamma, \quad \mathsf{H}'|\Gamma$$

von Operationsclassen, welche letzteren Gruppen zur Abkürzung mit $G_0$, $\mathsf{H}_0$, $\mathsf{H}_0'$ bezeichnet werden mögen.

Die isomorphe Beziehung zwischen den neuen und den ursprünglichen Gruppen (vergl. § 5) lässt erkennen, dass die Gruppe $G_0$ durch Zusammensetzung der Operationen von $\mathsf{H}_0$ und $\mathsf{H}_0'$ muss erzeugt werden können, und dass die beiden letzteren Gruppen ausgezeichnete Maximaluntergruppen der Gruppe $G_0$ sind. Da die beiden Gruppen H und H' nur diejenigen Operationen gemeinsam enthalten, welche zur Gruppe Γ gehören, so haben die Gruppen $\mathsf{H}_0$ und $\mathsf{H}_0'$ nur die identische Classe gemein.

## § 8.

Es mögen mit $S, S_1, S_2, \ldots$ die Operationen der Classengruppe $\mathsf{H}_0$, mit $T, T_1, T_2, \ldots$ die Operationen der Gruppe $\mathsf{H}_0'$ bezeichnet werden. Das Product

$$T^{-1} S^{-1} T S$$

kann nun in die beiden Formen

$$(T^{-1} S^{-1} T) S, \quad T^{-1}(S^{-1} T S)$$

gesetzt werden, von welchen die erste zur Anschauung bringt, dass das Product der Gruppe $\mathsf{H}_0$ angehört, die zweite, dass dasselbe auch in der Gruppe $\mathsf{H}_0'$ enthalten ist. Es muss also das Product $T^{-1}S^{-1}TS$ gleich der identischen Operation der Gruppe $G_0$ sein, woraus folgt, dass

$$TS = ST$$

ist. Es sind die sämmtlichen Operationen $S$ mit den sämmtlichen Operationen $T$ vertauschbar.

Man kann also die Operationen der Gruppe $G_0$, welche sich alle aus den Operationen $S$ und $T$ zusammensetzen lassen, in die Form

$$S_\nu T_\varrho$$

bringen. Diese letztere Darstellung der Operationen ist ausserdem eindeutig. Wäre nämlich

$$S_\nu T_\varrho = S_\mu T_\sigma,$$

so würde daraus

$$S_\mu^{-1} S_\nu = T_\sigma T_\varrho^{-1}$$

folgen; die in diesen beiden Formen dargestellte Operation müsste also in den Gruppen $\mathsf{H}_0$ und $\mathsf{H}_0'$ gleichzeitig enthalten sein, folglich mit der identischen Operation übereinstimmen.

Die Formel $S_\nu T_\varrho$ liefert also jede Operation der Gruppe $G_0$ einmal, und es ist zugleich

$$(S_\nu T_\varrho)(S_\mu T_\sigma) = (S_\nu S_\mu)(T_\varrho T_\sigma).$$

Es soll jetzt ein neuer Aequivalenzbegriff definirt werden: Zwei Operationen der Gruppe $G_0$ sollen in dieselbe Classe kommen, wenn die eine mit einer Operation $S'$ der Gruppe $\mathsf{H}_0$ multiplicirt der zweiten gleich wird. Jede solche Classe wird dann durch eine bestimmte Operation $T$ charakterisirt, und die so gebildete Gruppe $G_0|\mathsf{H}_0$ ist identisch mit der Gruppe der Operationen $T$, d. h. mit der Gruppe $\mathsf{H}_0'$.

Die Gruppe $G_0$ ist das Product der Gruppen $G_0|\mathsf{H}_0$ und $\mathsf{H}_0$, d. h. der Gruppen $\mathsf{H}_0'$ und $\mathsf{H}_0$. Der vorliegende Fall ist der denkbar einfachste der Productbildung, indem die Operationen der beiden productbildenden Gruppen zugleich dem Product angehören und als vertauschbar und von einander unabhängig erscheinen. Es würde vielleicht nützlich sein, für diesen Fall einen Ausdruck zu besitzen und ein solches Product etwa das *directe* zu nennen. Das directe Product ist durch seine beiden Factoren eindeutig bestimmt, dabei kommt es auch auf die Reihenfolge der Factoren nicht an. Der Begriff des directen Products kann sofort auf den Fall mehrerer Factoren ausgedehnt werden. Herr Dyck*) nennt eine Gruppe, welche so beschaffen ist wie im vorliegenden Fall $G_0$, eine „eigentlich zerfallende".

## § 9.

Die zuletzt ausgeführte Eintheilung der Operationen der Gruppe $G_0$ in Classen ist nichts Anderes als eine Eintheilung der früher eingeführten Classen in Classen zweiter Art. Diese neue Eintheilung hätte auch mit einem Schritt gemacht werden können.

Bedeuten $C$ und $C_1$ zwei Operationen der ursprünglichen Gruppe $G$, so werden dieselben dann einer und derselben Classe zweiter Art zuzuweisen sein, wenn das Product $C^{-1}C_1$ einer derjenigen Classen erster Art angehört, aus welchen die Gruppe $\mathsf{H}_0$ besteht, d. h. also dann, wenn $C^{-1}C_1$ eine Operation der Gruppe $\mathsf{H}$ ist.

Demnach ist die Gruppe $G|\mathsf{H}$ identisch mit der Gruppe $G_0|\mathsf{H}_0$, von welcher letzteren bewiesen ist, dass sie mit der Gruppe $\mathsf{H}_0'$, d. h. mit $\mathsf{H}'|\Gamma$, holoedrisch isomorph ist.

Es kann somit das Resultat so ausgesprochen werden: *Wenn eine Gruppe $G$ zwei verschiedene ausgezeichnete Maximaluntergruppen $\mathsf{H}$ und $\mathsf{H}'$ besitzt, und die diesen beiden letzteren Gruppen gemeinschaftliche Gruppe mit $\Gamma$ bezeichnet wird, so sind die Gruppen $G|\mathsf{H}$ und $\mathsf{H}'|\Gamma$ und*

*) Vergl. Dyck: Ueber regulär verzweigte Riemann'sche Flächen etc. p. 40 und Mat Ann. Bd. 17, p. 482.

*ebenso die Gruppen* $G|H'$ *und* $H|\Gamma$ *holoedrisch isomorph; die Gruppe* $G|\Gamma$ *ist das directe Product der Gruppen* $H|\Gamma$ *und* $H'|\Gamma$.

Aus der Einfachheit der Gruppen $G|H$ und $G|H'$ folgt zugleich auch die Einfachheit der Gruppen $H'|\Gamma$ und $H|\Gamma$; es ist also $\Gamma$ eine ausgezeichnete Maximaluntergruppe von $H$ und $H'$.

## § 10.

### Beweis der eindeutigen Bestimmtheit der Factorgruppen.

Jetzt soll der Beweis dafür geführt werden, dass jene Factorgruppen vollständig bestimmt sind. Für die kleinsten Ordnungen ist der Satz selbstverständlich. Es wird desshalb vorausgesetzt, dass der Satz richtig ist für Gruppen, deren Ordnung kleiner oder gleich $n$ ist, und gezeigt, dass er dann auch gelten muss für Gruppen deren Ordnung die Zahl $2n$ nicht übersteigt.

Zu diesem Zweck nehme man an, dass die Gruppe $G$, deren Ordnung $\leqq 2n$ ist, mehrere Reihen der Zusammensetzung zulasse, darunter die beiden folgenden:

$$1)\quad G,\ H,\ K,\ \ldots\ I,$$
$$2)\quad G,\ H',\ K',\ \ldots\ I.$$

Von den Gruppen $H$ und $H'$ möge zunächst angenommen werden, dass sie verschieden seien; die denselben gemeinsame Gruppe möge $\Gamma$ heissen. Man kann dann die Reihen

$$3)\quad G,\ H,\ \Gamma,\ \ldots\ I,$$
$$4)\quad G,\ H',\ \Gamma,\ \ldots\ I$$

bilden, welche von dem mit $\Gamma$ bezeichneten Glied an übereinstimmen und welche beide Reihen der Zusammensetzung für die Gruppe $G$ sind. Die Reihen 3) und 4) geben vermöge des zuletzt bewiesenen Satzes dieselben Factoren. Weil aber die Reihen

$$H,\ K,\ \ldots\ I,$$
$$H,\ \Gamma,\ \ldots\ I$$

zugleich Reihen der Zusammensetzung für die Gruppe $H$ sind, deren Ordnung $\leq n$ ist, so müssen nach Voraussetzung die beiden letzten Reihen, und also auch die Reihen 1) und 3) dieselben Factorgruppen liefern. Dasselbe gilt für 2) und 4) und desshalb ergeben auch die Reihen 1) und 2) abgesehen von der Reihenfolge dieselben Gruppen. Sollten die Gruppen $H$ und $H'$ zusammenfallen, so würde die Uebereinstimmung der aus den Reihen 1) und 2) sich ergebenden Factorgruppen daraus unmittelbar folgen, dass der Satz für die Gruppe $H$ schon als bewiesen zu betrachten ist. Damit ist aber alles gezeigt.

Es kann natürlich auch eine und dieselbe Gruppe mehrmals auftreten, sie muss dann in beiden Reihen gleich oft vorkommen.

Die definirten einfachen Factorgruppen sind also in der That als wesentliche Bestandtheile der Gruppe anzusehen.

## § 11.

Die hier entwickelte Auffassung lässt noch andere Sätze in einem neuen Licht erscheinen. Ausser der Reihe der Zusammensetzung definiren die Herren Jordan und Netto noch die *Hauptreihe:*

$$G,\ G_1,\ G_2,\ \ldots\ I.$$

Dieselbe ist durch folgende Bestimmungen gegeben:

1) Jede Gruppe der Reihe ist ein Theil der vorangehenden und zugleich in der *Gesammtgruppe* ausgezeichnet enthalten.

2) Es ist nicht möglich zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gruppen eine neue so einzuschieben, dass dieselbe eine Untergruppe der vorangehenden ist, die folgende enthält und in der Gesammtgruppe ausgezeichnet enthalten ist.

3) Die letzte Gruppe besteht nur aus der identischen Operation.

Wofern nun $\mu$, $\mu_1$, $\mu_2$, ..., 1 die Ordnungen der Gruppen bedeuten, so hat Herr C. Jordan auch für die Quotienten $\frac{\mu}{\mu_1}$, $\frac{\mu_1}{\mu_2}$, ..., welche ganze Zahlen sind, bewiesen, dass dieselben abgesehen von der Reihenfolge vollkommen bestimmt sind, trotzdem man die Hauptreihe unter Umständen auf mehrere Arten bilden kann. Auch der Satz von der Constanz dieser Zahlfactoren lässt sich auf die Gruppen

$$G|G_1,\quad G_1|G_2,\ \ldots$$

übertragen.

Aus einer Hauptreihe kann nun eine Reihe der Zusammensetzung abgeleitet werden, indem man zwischen den Gruppen der ersteren nöthigenfalls weitere Gruppen einschiebt. Wenn auf diese Weise eine der Zahlen $\frac{\mu}{\mu_1}$, $\frac{\mu_1}{\mu_2}$, ... in ein Product zerlegt wird, so wird dieselbe, wie Herr C. Jordan bewiesen hat*), in ein Product gleicher Factoren zerlegt.

Dieser Satz kann nunmehr so ausgesprochen werden:

*Jede der aus der Hauptreihe abgeleiteten Gruppen*

$$G|G_1,\quad G_1|G_2,\ \ldots,$$

*welche nicht einfach ist, stellt sich als directes Product von mehreren unter einander holoedrisch isomorphen einfachen Gruppen dar.*

---

*) Traité des substitutions etc. p. 48.

Für die letzte von den erwähnten Gruppen ist dieser Satz in anderer Form in dem Werke des Herrn Netto*) ausgesprochen.

Die zuletzt ohne Beweis ausgesprochenen Sätze werden im Folgenden nicht gebraucht werden.

## II. Algebraischer Theil.

### § 12.

### Die constituirenden Eigenschaften der Gleichungsgruppe.

Es sei eine Gleichung

$$F(x) = 0$$

vom $n^{\text{ten}}$ Grad vorgelegt. Ein gegebener Rationalitätsbereich $(\mathfrak{r})$ bilde für das Folgende die Grundlage; es müssen demselben natürlich die Coefficienten der Gleichung angehören. Die Wurzeln der Gleichung mögen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ genannt werden. Diese Grössen $\xi$ sollen alle von einander verschieden sein, während im Uebrigen die Gleichung keiner Beschränkung unterliegt, insbesondere auch reducibel sein darf.

Es existirt nun immer eine Gruppe $\Gamma$ von Vertauschungen der Grössen $\xi$, so dass der folgende Satz gilt:

*Eine rationale Function von* $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ *hat dann und nur dann einen rationalen Werth, wenn sie bei den Vertauschungen der Gruppe* $\Gamma$ *numerisch unverändert bleibt.*

Was als rational zu betrachten ist, wird durch den gegebenen Bereich $(\mathfrak{r})$ bestimmt, dem auch die Coefficienten der rationalen Functionen von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ angehören müssen.

Die Gruppe $\Gamma$ ist die der Gleichung $F(x) = 0$ zugehörende Galois'sche Gruppe**).

### § 13.

### Eine Vertauschung $S$, welche jede rationale Function von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ mit rationalem Werth numerisch ungeändert lässt, muss der Galois'schen Gruppe $\Gamma$ angehören.

Man kann nämlich rationale Functionen der Grössen $\xi$ bilden, die bei einer beliebig gegebenen Substitutionsgruppe unverändert bleiben und bei allen anderen Vertauschungen sich ändern. Bildet man nun eine Function, welche nur für die Substitutionen von $\Gamma$ invariant ist, so muss diese einen rationalen Werth haben, sie kann

*) Vergl. p. 95, Lehrsatz XXI, Zusatz IV.

**) Galois Werke p. 37. Es ist zu bemerken dass a. a. O. die Permutationen zur Darstellung benutzt sind und daselbst nicht gezeigt ist, dass die zugehörigen Substitutionen eine Gruppe bilden. Vergl. in dieser Hinsicht C. Jordan, Traité des substitutions etc. p. 258.

also auch durch die Substitution $S$ nicht geändert werden. Somit muss diese Vertauschung $S$ auch der Galois'schen Gruppe angehören.*)

Durch dieses Verhalten sind also die Substitutionen der Gruppe $\Gamma$ bestimmt. *Die Gruppe selbst ist somit durch ihre charakteristische Eigenschaft eindeutig definirt.*

## § 14.

### Ueber numerische Unveränderlichkeit im Gegensatz zur formellen.

Es handelt sich hier immer um die *numerische* Unveränderlichkeit nicht um die *formelle*. Wenn die rationale Function $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ numerisch unverändert bleiben soll, falls an die Stelle von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ dieselben Grössen in der neuen Reihenfolge $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots \xi_{i_n}$ gesetzt werden, so besagt diess, dass *vermöge der Werthe der Wurzeln* $\xi$ die Gleichung

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = \varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots \xi_{i_n})$$

besteht. Dabei muss man sich für die Function $\varphi$ einen *ganz bestimmten Ausdruck* gegeben denken. Wenn die Vertauschung

$$\begin{pmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \ldots & \xi_n \\ \xi_{i_1}, & \xi_{i_2}, & \ldots & \xi_{i_n} \end{pmatrix}$$

eine beliebige ist, so gilt keineswegs für jeden dem Ausdruck $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ numerisch gleichen, aber formell von demselben verschiedenen Ausdruck $\psi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ die entsprechende Gleichung

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = \psi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots \xi_{i_n}).$$

Dagegen kann das letztere allerdings behauptet werden, wenn die in Frage stehende Vertauschung der Grössen $\xi$ der Galois'schen Gruppe der Gleichung angehört.

Angenommen nämlich, dass für irgend zwei Functionen $\varphi$ und $\psi$ die Differenz

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) - \psi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$$

den Werth Null, also einen dem Rationalitätsbereich angehörigen Werth besitzt, so wird dieselbe sich nicht ändern, wenn man irgend eine Vertauschung der Gruppe in ihr vornimmt.

Es ist also auch, wenn die Vertauschung der Gruppe angehört,

$$\varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots \xi_{i_n}) - \psi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots \xi_{i_n}) = 0.$$

Wenn nun die Functionen $\varphi$ bei der Vertauschung

$$\begin{pmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \ldots & \xi_n \\ \xi_{i_1}, & \xi_{i_2}, & \ldots & \xi_{i_n} \end{pmatrix}$$

*) Cf. J. A. Serret, Cours d'algèbre supérieure cinquième édition, Paris 1885, T. II, p. 642.

ungeändert bleibt, so folgt, dass auch die Function $\psi$ bei derselben Vertauschung ungeändert bleibt. Wenn aber die Function $\varphi$ sich in eine Function $\chi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ mit numerisch anderem Werth ändert, so ändert sich auch die Function $\psi$ in eine Function, die mit $\chi$ denselben Werth hat.

Man kann demnach auch sagen, dass die in den Wurzeln $\xi_1 \ldots \xi_n$ rationale *Grösse* $\varphi$ bei der Vertauschung im einen Fall unverändert bleibe, im andern Fall in die Grösse $\chi$ übergehe. Man kann von der Art der Darstellung einer in den Wurzeln rationalen Grösse abstrahiren; es ist aber dann nothwendig, dass man sich auf die Vertauschungen der Galois'schen Gruppe der Gleichung beschränkt.

## § 15.

Es gehe der Ausdruck $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ durch eine Vertauschung $S$ in den Ausdruck $\varphi_1(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ über, und ebenso gehe der dem Ausdruck $\varphi_1$ numerisch gleiche Ausdruck $\psi_1(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ durch die Vertauschung $T$ in $\psi_2(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ über. Die zweite Vertauschung $T$ möge nun jedenfalls der Galois'schen Gruppe angehören. Dann wird der Ausdruck $\varphi_1$ durch dieselbe Vertauschung $T$ in einen dem Ausdruck $\psi_2$ numerisch gleichen Ausdruck $\varphi_2(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ übergehen. Dann aber wird der letzte Ausdruck vermöge der Vertauschung $ST$ direct aus $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ hervorgehen.

Dabei verstehe ich also das Zeichen $ST$ so, dass zum Zweck der Zusammensetzung der Vertauschungen $S$ und $T$ die links stehende Vertauschung $S$ zuerst vorgenommen wird.

Es folgt aus dem Vorhergehenden der Satz: Wenn die in den Wurzeln rationale Grösse $g$ durch die der Gleichungsgruppe angehörende Vertauschung $S$ in die Grösse $g_1$ übergeht, und die Grösse $g_1$ durch die gleichfalls der Gruppe angehörende Vertauschung $T$ in die Grösse $g_2$, so geht die Grösse $g$ in $g_2$ über durch die Vertauschung $ST$.

Man erhält aus diesem Satz das Corollar:

Die Gesammtheit der Vertauschungen der *Galois'schen Gruppe*, welche eine Grösse numerisch ungeändert lassen, bildet immer eine Gruppe.

Es gilt diess durchaus nicht immer von der Gesammtheit *aller* Vertauschungen, welche eine Function numerisch ungeändert lassen*).

---

*) Weil in diesem Punkt schon gefehlt worden ist, mag ein Beispiel hier Platz finden: Es werde die Gleichung

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$$

betrachtet und

$$\xi_\nu = e^{\frac{2\pi i\nu}{n}}$$

Es ist also gestattet, mit den in den Wurzeln der Gleichung rationalen Grössen hinsichtlich der Vertauschungen der Gleichungsgruppe ganz ebenso zu verfahren, als ob es sich um Functionen von unabhängigen Veränderlichen handelte.

## § 16.

## Conjugirte Werthe.

Insbesondere kann man die Betrachtungen übertragen, welche bei Functionen von unabhängigen Veränderlichen über die „conjugirten" Functionen angestellt werden können. Es sei $g_1$ eine in den Wurzeln der gegebenen Gleichung $F(x) = 0$ rationale Grösse, welche vermöge der Vertauschungen der Gruppe $\Gamma$ der Gleichung die verschiedenen Werthe

$$g_1, g_2, \ldots g_\varkappa$$

und nur diese anzunehmen fähig ist. Wenn nun $S$ eine Vertauschung bedeutet, welche die Grösse $g_1$ numerisch unverändert lässt, und $T$ eine Vertauschung, welche $g_1$ in $g_2$ überführt, so wird die Vertauschung $T^{-1}ST$ die Grösse $g_2$ unverändert lassen. Bei näherer Ueberlegung ergiebt sich hieraus, dass die Gruppe derjenigen Vertauschungen von $\Gamma$, welche die Grösse $g_2$ unverändert lässt, aus der Gruppe $H$ der Vertauschungen von $\Gamma$, welche $g_1$ unverändert lässt, durch Transformation hervorgeht. Entsprechendes gilt von den übrigen Grössen $g$, und man erkennt zugleich, dass man in den Gruppen, welche $g_2, g_3, \ldots g_\varkappa$ unverändert lassen, auch alle Gruppen besitzt, welche aus der Gruppe $H$ durch Transformation erhalten werden können. Die Ordnung einer jeden von diesen Gruppen ist der $\varkappa^{\text{te}}$ Theil der Ordnung der Gruppe $\Gamma$.

Jede Vertauschung der Wurzeln $\xi$ der Gleichung

$$F(x) = 0,$$

welche in der Gruppe $\Gamma$ der Gleichung enthalten ist, ergiebt in den Grössen $g_1, g_2, \ldots g_\varkappa$ ausgeführt eine Vertauschung der letzteren. Dabei wird das Product zweier Vertauschungen der Grössen $\xi$ dem in derselben Aufeinanderfolge gebildeten Product der entsprechenden Ver-

---

gesetzt. Die Gesammtheit der Vertauschungen der Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}$, welche den Ausdruck $\xi_1 \cdot \xi_{n-1}$ numerisch ungeändert lassen, bilden niemals eine Gruppe, wenn $n > 5$ ist.

Der von Herrn Söderberg gegebene neue Beweis für das Galois'sche Fundamentaltheorem ist falsch (vergl. Deduktion af nödvändiga och tillräckliga vilkoret för möjligheten af algebraiska eqvationers solution med radikaler, Upsala Universitets Årsskrift 1886 und Acta Mathematica 11 : 3, p. 297). Der ganze Beweis beruht auf der stillschweigendend eingeführten Annahme, dass die Gesammtheit der Substitutionen, welche eine Function der Wurzeln numerisch ungeändert lassen, eine Gruppe bilde.

tauschungen der Grössen $g$ entsprechen. Sämmtliche Vertauschungen der Grössen $g$, welche man auf diese Weise erhalten kann, bilden also eine Gruppe $G$. Diese Gruppe ist der Gruppe $\Gamma$ isomorph. Jeder Vertauschung von $\Gamma$ entspricht eine Vertauschung von $G$. Einer Vertauschung der Gruppe $G$ können aber mehrere Vertauschungen der Gruppe $\Gamma$ entsprechen; in diesem Fall ist der Isomorphismus meroedrisch.

## § 17.

Für das Folgende ist der Fall von besonderer Wichtigkeit, in welchem die Gruppe $H$ von Vertauschungen der Grössen $\xi$, für welche $g_1$ sich nicht ändert, in der Gruppe $\Gamma$ ausgezeichnet enthalten ist. Es ist dann auch $H$ die Gruppe der Vertauschungen von $\Gamma$, welche $g_2$ ungeändert lassen, ebenso $g_3, \ldots g_x$. Jede Vertauschung der Grössen $\xi$, welche eine der Grössen $g$ ungeändert lässt, lässt alle ungeändert.

Zwei Vertauschungen $S$ und $T$ der Gleichungsgruppe werden dieselbe Vertauschung der Grössen $g$ nach sich ziehen, wenn die Vertauschung $S^{-1}T$ die Grössen $g$ ungeändert lässt, d. h. wenn $S^{-1}T$ der Gruppe $H$ angehört.

Wenn also die Vertauschungen der Gruppe $\Gamma$ in der früher ausgeführten Weise in Classen eingetheilt werden mit *Hülfe* der ausgezeichneten Untergruppe $H$, so kommen solche Vertauschungen in dieselbe Classe und nur solche, denen dieselbe Vertauschung der Grössen $g$ entspricht.

Es folgt daraus, dass die Gruppe $G$ von Vertauschungen der Grössen $g_1, g_2, \ldots g_x$ in diesem Fall mit der Gruppe $\Gamma | H$ holoedrisch isomorph ist. Vom abstracten Standpunkte aus, sind diese Gruppen also als identisch zu betrachten.

## § 18.

### Adjunction einer natürlichen Irrationalität.

Bis jetzt ist der in § 12 eingeführte Rationalitätsbereich (r) durchaus festgehalten worden. Es ist für die Theorie wesentlich, dass man in der Auffassung von dem, was als *rational gelten soll*, *eine* Aenderung eintreten lassen kann. Man kann den Rationalitätsbereich erweitern, in den Rationalitätsbereich (r'), indem man irgend welche Irrationalitäten „adjungirt". Es kann dann durch diese Adjunction die Gruppe eine andere werden.

Zunächst möge nun irgend eine in den Wurzeln $\xi$ der Gleichung rationale Grösse $g_1$ adjungirt werden. Nach der Adjunction sei $\Gamma'$ die Gruppe der Gleichung. Was früher als rational betrachtet wurde, ist es jetzt a fortiori. Die rationalen Functionen von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, deren Werth und deren Coefficienten dem alten Bereich (r) angehören, müssen somit alle auch bei den Vertauschungen der neuen Gruppe ungeändert bleiben. Also muss (§ 13) die Gruppe $\Gamma'$ in der Gruppe $\Gamma$ enthalten sein.

Die Grösse $g_1$ ist darstellbar durch einen in $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ rationalen Ausdruck, dessen Coefficienten dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{r})$ angehören. Diejenigen Vertauschungen der Gruppe $\Gamma$, bei welchen dieser Ausdruck numerisch ungeändert bleibt, bilden eine nicht nothwendig ausgezeichnete Untergruppe $H$. Da nun der Werth dieses Ausdrucks im neuen Rationalitätsbereich $(\mathfrak{r}')$ liegt, und die Coefficienten desselben zugleich dem Bereich $(\mathfrak{r}')$ mit angehören, so müssen die Vertauschungen der neuen Gruppe $\Gamma'$ unter den Vertauschungen von $H$ auftreten.

Es ist noch zu zeigen, dass auch alle Vertauschungen der Gruppe $H$ in der Gruppe $\Gamma'$ vorkommen. Zu diesem Zweck beweist man (Vergl. § 13), dass jede Vertauschung von $H$ alle Functionen der Wurzeln unverändert lässt, welche nunmehr einen rationalen Werth besitzen. In die Coefficienten dieser rationalen Functionen muss man aber jetzt auch die Grösse $g_1$ mit hineinnehmen. Es können also die rationalen Functionen der Wurzeln, welche nun in Betracht kommen, in die Form

$$\chi(g_1; \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$$

gesetzt werden, wo jetzt die Coefficienten der Function $\chi$ dem alten Rationalitätsbereich $(\mathfrak{r})$ angehören. Soll der Werth der Function im neuen Rationalitätsbereich $(\mathfrak{r}')$ liegen, so ist

$$\chi(g_1; \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = \omega(g_1),$$

wo jetzt alle Coefficienten dem Bereich $(\mathfrak{r})$ angehören. In dieser Gleichung darf nun zwischen den Grössen $\xi$ (Vergl. § 14) jede Vertauschung der Gruppe $\Gamma$ vorgenommen werden; diese Vertauschung ist aber auch innerhalb der Grösse $g_1$ auszuführen. Ich mache jetzt eine der Gruppe $H$ angehörende Vertauschung. Diese ändert die Grösse $g_1$ nicht. Es ändert sich also die rechte Seite der letzten Gleichung gar nicht, und auf der linken Seite wird dasselbe Resultat erhalten, wie wenn man die Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ nur in so weit unter einander vertauscht hätte, als sie explicite im Ausdruck auftreten. Es ist damit gezeigt, dass ein in den Wurzeln rationaler Ausdruck, dessen Werth rational ist und dessen Coefficienten rational sind, niemals durch eine Substitution der Gruppe $H$ geändert werden kann, wobei der Begriff des Rationalen jetzt durch den Bereich $(\mathfrak{r}')$ fixirt ist. Es ist also die Gruppe $H$ in der Gruppe $\Gamma'$ enthalten und es folgt daraus in Verbindung mit dem früher bewiesenen, dass diese beiden Gruppen identisch sind.

*Durch die Adjunction der in den Wurzeln der Gleichung rationalen Grösse $g_1$ wird also die Gruppe der Gleichung auf denjenigen Theil ihrer Substitutionen reducirt, welcher die Grösse $g_1$ ungeändert lässt**).

*) Cf. C. Jordan Traité des substitutions etc. p. 261.

Wenn also die Grösse $g_1$ nicht dem ursprünglichen Rationalitätsbereich angehört, so wird nach der Adjunction die Ordnung der Gruppe wirklich kleiner sein, somit die Gleichung ein einfacheres Problem darstellen.

## § 19.

## Die Gleichung für die adjungirte Irrationalität.

Es fragt sich aber, durch was für eine Gleichung nun die Grösse $g_1$ bestimmt wird. Die Werthe, welche diese Grösse vermöge der Vertauschungen der Gruppe $\Gamma$ annimmt, seien

$$g_1, g_2, \ldots g_\varkappa.$$

Es wird dann die Gleichung

$$(x - g_1)(x - g_2) \ldots (x - g_\varkappa) = 0,$$

welche zur Abkürzung mit

$$f(x) = 0$$

bezeichnet werden möge, durch die Grösse $g_1$ befriedigt werden. Die Coefficienten der Gleichung sind rationale Functionen der Grössen $\xi$ und werden durch die Vertauschungen der Gruppe $\Gamma$ nicht geändert, sind also Grössen des Bereichs (r). Die Gleichung ist auch irreducibel. Wenn nämlich irgend eine Function $f_0(x)$, deren Coefficienten dem Bereich (r) angehören, für $x = g_1$ verschwindet, so kann man in der Gleichung

$$f_0(g_1) = 0$$

die Substitutionen der Gruppe $\Gamma$ ausführen, woraus dann folgt, dass auch

$$f_0(g_2) = \cdots = f_0(g_\varkappa) = 0$$

ist.

Um die Gruppe der Gleichung

$$f(x) = 0$$

zu finden, betrachte man eine rationale Function der Grössen

$$g_1, g_2, \ldots g_\varkappa.$$

Diese Function ist zugleich eine rationale Function von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$; die Coefficienten gehören in beiden Fällen dem ursprünglichen Rationalitätsbereich an. Die fragliche Function wird nun einen rationalen Werth haben oder nicht, je nachdem die Substitutionen der Gruppe $\Gamma$ sie unverändert lassen oder nicht. Die Wirkung jeder dieser Substitutionen der Grössen $\xi$ auf die Function kommt einer Vertauschung der Grössen $g$ gleich. Die Gesammtheit der so entstehenden Vertauschungen der Grössen $g_1, g_2, \ldots g_\varkappa$ bildet die früher mit $G$ bezeichnete Gruppe. Diese Gruppe wird somit die der Gleichung $f(x) = 0$ zugehörige sein.*)

*) Vergl. z. B. F. Klein Vorlesungen über das Ikosaeder etc. pag. 88.

Wenn insbesondere die Vertauschungen der Gruppe $\Gamma$, welche die Grösse $g_1$ nicht ändern, eine *ausgezeichnete* Untergruppe $H$ der Gruppe $\Gamma$ bilden, so ist die Gruppe der Gleichung $f(x) = 0$ holoedrisch isomorph mit der mit dem Symbol $\Gamma \mid H$ bezeichneten Gruppe.

## § 20.

## Ueber die Reduction einer Gleichung mit zusammengesetzter Gruppe.

Die Aufgabe, die Wurzeln einer Gleichung von der Gruppe $\Gamma$ zu bestimmen, kann also in zwei Schritte zerlegt werden, wenn die Gruppe eine ausgezeichnete Untergruppe $H$ besitzt. Es ist zuerst eine Gleichung von der Gruppe $\Gamma \mid H$ zu bilden, und indem man nun eine Wurzel der letzteren Gleichung als rational bekannt annimmt, hat man zur Bestimmung der gesuchten Wurzeln noch die ursprüngliche Gleichung, welche jetzt die Gruppe $H$ besitzt.

Ich betrachte noch den speciellen Fall, in welchem die Gruppe $\Gamma$ als das *directe* Product der Gruppen $\Gamma \mid H$ und $H$ sich darstellt. Man kann in diesem Fall (Vergl. § 8) aus den einzelnen Classen der Substitutionen von $\Gamma$, welche die Gruppe $\Gamma \mid H$ constituiren, je eine Substitution so auswählen, dass die Gesammtheit der ausgewählten Substitutionen eine in $\Gamma$ ausgezeichnete Untergruppe $H'$ bildet. Die Gruppen $H$ und $H'$ haben dann ausser der Identität keine Substitution gemein.

Man kann nun in diesem Fall ausser der Grösse $g_1$, welche bei den Substitutionen der Gruppe $H$ ungeändert bleibt, eine zweite in den Gleichungswurzeln rationale Grösse $g'$ einführen, welche bei den Substitutionen der Gruppe $H'$ und nur bei diesen ungeändert bleibt. Aus den Grössen $g_1$ und $g'$ kann man jetzt eine neue

$$ag_1 + bg'$$

linear zusammensetzen, welche die Eigenschaft hat durch jede Substitution der Gruppe $\Gamma$, ausser der identischen, geändert zu werden. Die Adjunction dieser linearen Function reducirt die Gruppe der ursprünglichen Gleichung auf die Identität. Die Wurzeln der vorgegebenen Gleichung sind also in $g_1$ und $g'$ rational.*)

Man hat also in diesem besonderen Fall eine Wurzel einer Gleichung von der Gruppe $\Gamma \mid H$ oder $H'$ zu bestimmen, dann, unter Festhaltung des ursprünglichen Rationalitätsbereichs, eine Wurzel einer Gleichung von der Gruppe $\Gamma \mid H'$ oder $H$ zu bestimmen; aus den beiden so gewonnenen Irrationalitäten kann man dann die Wurzeln der gegebenen Gleichung unmittelbar zusammensetzen.

Für eine Gleichung mit beliebiger Gruppe $\Gamma$ gewinnt man durch

*) Hinsichtlich des Verhältnisses der drei Irrationalitäten $g_1$, $g'$ und $ag_1 + bg'$ vergl. auch Kneser, Math. Ann. Bd. 30 p. 179.

Wiederholung des am Anfang dieses Paragraphens auseinandergesetzten Verfahrens das Resultat: Jede Gleichung lässt sich auf eine Kette von Gleichungen mit einfachen Gruppen zurückführen. Die dabei auftretenden Gruppen sind die früher definirten Factorgruppen der Gruppe $\Gamma$. Die Wurzeln der Hülfsgleichungen sind rational in den Wurzeln der ursprünglichen Gleichung.

## § 21.

### Adjunction accessorischer Irrationalitäten.

Die wesentlichste Aufgabe ist jetzt die, zu beweisen, dass diese einfachen Gruppen unvermeidlich*) sind und sich auch nicht umgehen lassen, wenn man als Hülfsgrössen „accessorische“ Irrationalitäten einführt, d. h. solche, welche sich nicht aus den Wurzeln der gegebenen Gleichung rational zusammensetzen.

Zu diesem Ziel führt der schon einmal citirte Satz von Herrn C. Jordan**). Ich reproducire denselben hier mit sammt dem Beweise, indem ich ihn zugleich in der Richtung vervollständige, welche durch den früher gewonnenen gruppentheoretischen Begriff gegeben ist:

*Wenn die Gruppe $G$ einer Gleichung $F(x) = 0$ bei der Adjunction der sämmtlichen Wurzeln einer zweiten Gleichung $\mathfrak{F}(x) = 0$ sich auf die Gruppe $G'$ reducirt, so reducirt sich auch die Gruppe $\mathfrak{G}$ der zweiten Gleichung bei der Adjunction der sämmtlichen Wurzeln der ersten Gleichung auf eine Gruppe $\mathfrak{G}'$; $G'$ und $\mathfrak{G}'$ sind ausgezeichnete Untergruppen von $G$ beziehungsweise $\mathfrak{G}$. Dabei sind die durch die Symbole $G \mid G'$ und $\mathfrak{G} \mid \mathfrak{G}'$ dargestellten Gruppen holoedrisch isomorph.*

Der Rationalitätsbereich für die beiden Gleichungen $F(x) = 0$ und $\mathfrak{F}(x) = 0$ wird ursprünglich als ein und derselbe vorausgesetzt.

## § 22.

Zum Beweis bilde man eine rationale Function $g_1$ der Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ der ersten Gleichung, so dass diese Function bei den Vertauschungen der Gruppe $G'$ sich nicht ändert und bei allen anderen Vertauschungen eine Aenderung ihres Werths erfährt. Die Coefficienten der Function sollen dem ursprünglichen Rationalitätsbereich angehören, der wieder mit $(\mathfrak{r})$ bezeichnet werden möge. Es ist dann nach Voraussetzung

*) Dies ist auch die Verallgemeinerung der von Galois ausgesprochenen Thatsache, dass eine Gleichung mit einfacher Gruppe durch Transformation nicht auf Gleichungen mit kleineren Gruppen reducirt werden kann. Vergl. den berühmten Brief an Chevalier in den Galois'schen Werken p. 25: „on aura beau transformer cette équation“ etc.

**) Traité des subst. etc. pg. 269, 270.

$$g_1 = \varphi_1(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m),$$

wenn $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ die Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{F} = 0$ bedeuten. Nun sollen $g_1, g_2, \ldots g_\varkappa$ die sämmtlichen numerisch verschiedenen Werthe bedeuten, welche die Grösse $g_1$ durch die in der Gruppe $G$ enthaltenen Vertauschungen der Grössen $\xi$ erhalten kann. Die Gruppe $G'$ enthält also den $\varkappa^{\text{ten}}$ Theil der Substitutionen der Gruppe $G$. Ferner seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_l$ die sämmtlichen numerisch verschiedenen Werthe, welche die Grösse $\varphi_1$ vermöge der Gruppe $\mathfrak{G}$ von Vertauschungen der Grössen $\eta$ erhält. Sowohl die $\varkappa$ Grössen $g$, als auch die $l$ Grössen $\varphi$ sind Wurzeln einer irreducibeln Gleichung. Diese beiden irreducibeln Gleichungen haben die eine Wurzel $g_1 = \varphi_1$ jedenfalls gemeinsam, dieselben müssen also vollständig übereinstimmen. Es werden also die Grössen $g_1, g_2, \ldots g_\varkappa$ mit den Grössen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_l$ abgesehen von der Ordnung zusammenfallen, woraus zugleich folgt, dass $\varkappa = l$ ist.

Die Grössen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_l$ sind rationale Functionen der Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ und der Grössen des Bereichs (r). Es sind also die Grössen $g_1, g_2, \ldots g_\varkappa$ alle rational, nachdem man der ersten Gleichung die sämmtlichen Grössen $\eta$ adjungirt hat. Es folgt daraus, dass die Grössen $g$, aufgefasst als Functionen der Grössen $\xi$, bei den Vertauschungen der Gruppe ungeändert bleiben, welche nach der Adjunction der Gleichung $F(x) = 0$ zugehört, d. h. bei den Vertauschungen der Gruppe $G'$. Andererseits bildet die Gesammtheit der Substitutionen der Gruppe $G$, welche die Grösse $g_2$ numerisch ungeändert lassen, eine Gruppe, welche aus $G'$ durch Transformation hervorgeht, welche also auch mit $G'$ dieselbe Ordnung haben muss. Diese transformirte Gruppe muss zugleich die Gruppe $G'$ selbst enthalten, ist also mit der letzteren identisch. Dasselbe gilt für die Gruppen, welche die übrigen Grössen $g$ ungeändert lassen, woraus folgt, dass $G'$ eine ausgezeichnete Untergruppe der Gruppe $G$ ist.

Die Gruppe der irreducibeln Gleichung $f(x) = 0$, welcher die Grösse $g_1$ genügt, ist also (s. § 19) mit der Gruppe $G \mid G'$ holoedrisch isomorph.

Nun sei $\mathfrak{H}$ die Gesammtheit der in der Gruppe $\mathfrak{G}$ enthaltenen Vertauschungen der Grössen $\eta$, welche die Function

$$\varphi_1(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m)$$

ungeändert lassen. Da die Grösse $\varphi_1$ Wurzel einer irreducibeln Gleichung vom $\varkappa^{\text{ten}}$ ($l^{\text{ten}}$) Grad ist, wird nach § 16 und § 19 die Gruppe $\mathfrak{H}$ den $\varkappa^{\text{ten}}$ Theil der Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}$ enthalten. Die Adjunction der Grösse $\varphi_1$ oder, was dasselbe ist, $g_1$ wird also die Gruppe $\mathfrak{G}$ der Gleichung $\mathfrak{F} = 0$ auf den $\varkappa^{\text{ten}}$ Theil ihrer Substitutionen reduciren (§ 18).

Die Grösse $g_1$ ist in den Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ rational. Wenn man also die letzteren Grössen der Gleichung $\mathfrak{F} = 0$ adjungirt, so wird dieselbe eine Gruppe erhalten, welche eine Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{H}$ ist, falls sie nicht mit dieser zusammenfällt. Die Gruppe $\mathfrak{G}'$ ist also in der Gruppe $\mathfrak{H}$ enthalten.

Man hat also das Resultat: Die Gruppe der Gleichung $\mathfrak{F} = 0$ wird durch die Adjunction der sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $F = 0$ mindestens auf den $\varkappa^{\text{ten}}$ Theil reducirt, wenn die Gruppe der Gleichung $F = 0$ durch die Adjunction der Wurzeln der anderen genau auf den $\varkappa^{\text{ten}}$ Theil reducirt wird. Dieser Schluss kann aber umgekehrt werden, indem man die Gleichungen $F = 0$ und $\mathfrak{F} = 0$ in dem Ausspruch desselben vertauscht. Es folgt daraus, dass auch die Gruppe der Gleichung $\mathfrak{F} = 0$ durch die Adjunction der Wurzeln der andern genau auf den $\varkappa^{\text{ten}}$ Theil reducirt wird. Nach der Adjunction ist $\mathfrak{G}'$ die Gruppe, diese muss also mit $\mathfrak{H}$, d. h. mit der Gesammtheit der Substitutionen von $\mathfrak{G}$, welche die Function $\varphi_1(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m)$ unverändert lassen, vollständig zusammenfallen.

Die Gruppe $\mathfrak{G}'$ ist nun eine ausgezeichnete Untergruppe von $\mathfrak{G}$ aus demselben Grund, aus dem $G'$ in $G$ ausgezeichnet enthalten ist. Die irreducible Gleichung, welcher die Grösse $\varphi_1$ genügt, hat also nach § 19 eine Gruppe, welche der mit dem Symbol $\mathfrak{G} \mid \mathfrak{G}'$ bezeichneten holoedrisch isomorph ist.

Diese Gleichung ist aber mit der Gleichung $f(x) = 0$ identisch. Die Gruppen $G \mid G'$ und $\mathfrak{G} \mid \mathfrak{G}'$ sind demnach holoedrisch isomorph.

Wenn insbesondere die Gruppe $\mathfrak{G}$ einfach ist, so muss bei der Adjunction, falls überhaupt eine Reduction der Gruppen eintreten soll, die Gruppe $\mathfrak{G}$ sich auf die Identität reduciren. Es ist dann die Gruppe $G \mid G'$ mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ selbst holoedrisch isomorph. Die sämmtlichen Wurzeln der zweiten Gleichung $\mathfrak{F}(x) = 0$ sind in diesem Fall rational in den Wurzeln der ersten Gleichnng $F(x) = 0$.*)

## § 23.

### Lösung des im Eingang gestellten Problems.

Nun kann man zur Beantwortung der in der Einleitung aufgeworfenen Frage schreiten; dieselbe soll gleich etwas allgemeiner gefasst werden.

Es sei eine Gleichung $F(x) = 0$ vorgelegt, deren Coefficienten einem gegebenen Rationalitätsbereich $(\mathfrak{r})$ angehören. Statt nun die Wurzeln der vorgelegten Gleichung direct zu bestimmen, kann man folgendermassen verfahren: Man stellt zuerst eine Hülfsgleichung $F_1(x) = 0$ auf, deren Coefficienten auch dem Rationalitätsbereich $(\mathfrak{r})$ angehören, und von welcher eine oder mehrere Wurzeln später als

*) Vgl. C. Jordan a. a. O. p. 270, Nr. 380 Corollaire II.

Hülfsgrössen gebraucht werden. Dann stellt man eine zweite Hülfsgleichung $F_2(x) = 0$ auf, deren Coefficienten in den eingeführten Hülfsgrössen rational sind und nimmt eine oder mehrere Wurzeln dieser neuen Hülfsgleichung zu den Hülfsgrössen hinzu. So fährt man fort; schliesslich soll es möglich sein, die sämmtlichen Wurzeln der vorgelegten Gleichung $F = 0$ in den allmählig eingeführten Hülfsgrössen rational auszudrücken.

Es ist zu bemerken, dass die Grössen des ursprünglichen Rationalitätsbereichs $(\mathfrak{r})$ mit in die Ausdrücke eingehen, ohne dass dies überall besonders hinzugefügt ist.

Von den Hülfsgleichungen möge jetzt gar nichts weiter vorausgesetzt werden, als dass dieselben keine mehrfachen Wurzeln besitzen. Dasselbe werde auch von der Gleichung $F(x) = 0$ selbst angenommen.

## § 24.

Die Gruppe der gegebenen Gleichung $F(x) = 0$ werde mit $\Gamma$ bezeichnet. Dabei wird der gegebene Rationalitätsbereich $(\mathfrak{r})$ zu Grund gelegt. Hinsichtlich der für die Hülfsgleichungen zu Grund zu legenden Rationalitätsbereiche ist noch eine gewisse Willkürlichkeit vorhanden. Die Coefficienten der Gleichung $F_2(x) = 0$ sollen nämlich in gewissen von den Wurzeln der Gleichung $F_1(x) = 0$ rational sein, und man kann nun zum Zweck der Betrachtung der Gleichung $F_2 = 0$ entweder nur diese Wurzeln oder alle Wurzeln der Gleichung $F_1 = 0$ adjungiren. Es ist aber auch nicht ausgeschlossen, dass die Coefficienten der Gleichung $F_2 = 0$ noch dem Bereich $(\mathfrak{r})$ selbst angehören, und dass die durch die Gleichung $F_1 = 0$ eingeführten Hülfsgrössen erst später gebraucht werden. In diesem Fall ist für die Betrachtung der Gleichung $F_2 = 0$ zunächst keine Erweiterung des Rationalitätsbereichs erforderlich. Die allgemeinste Auffassung wird desshalb die im Folgenden gewählte sein.

Für jede Hülfsgleichung $F_\nu(x) = 0$ werde irgend ein Rationalitätsbereich $(\mathfrak{r}_\nu)$ besonders eingeführt, nur so, dass die sämmtlichen Grössen des Bereichs $(\mathfrak{r}_\nu)$ rational sind in den Grössen des Bereichs $(\mathfrak{r})$ und den Wurzeln der Hülfsgleichungen, welche der Gleichung $F_\nu = 0$ vorangehen; natürlich muss der Bereich $(\mathfrak{r}_\nu)$ die Coefficienten von $F_\nu$ umfassen, und es wird ausserdem angenommen, dass die ursprünglich als rational betrachteten Grössen des Bereichs $(\mathfrak{r})$ sämmtlich im Bereich $(\mathfrak{r}_\nu)$ enthalten seien.

## § 25.

Unter dieser Voraussetzung mögen die Gruppen

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$$

den Gleichungen

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ F_3 = 0, \ldots$$

zugehören.

Jede dieser Gleichungen, welche keine einfache Gruppe hat, wird in der früher angegebenen Weise (§ 20) durch eine Kette von einfachen Gleichungen ersetzt. Man erhält dadurch eine neue Folge von Gleichungen

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ f_3 = 0, \ldots f_\sigma = 0,$$

welche zusammen mit der Reihe der zugeordneten Rationalitätsbereiche (Vgl. § 19 und § 20) dieselben Eigenschaften aufweist wie die vorangehende Reihe, wobei aber die den letzten Gleichungen zugehörigen Gruppen

$$G_1,\ G_2,\ G_3, \ldots G_\sigma$$

alle einfach sind. Die früheren Gleichungen $F_\nu = 0$ treten unter diesen Gleichungen $f_\tau = 0$ mit auf, nur erscheinen sie jetzt als mit neuen Rationalitätsbereichen versehen.

Die einfachen Gruppen

$$G_1,\ G_2,\ G_3, \ldots G_\sigma$$

sind nichts Anderes als die Gesammtheit der Factorgruppen des Aggregats

$$\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3, \ldots$$

Es kann dabei eine der Gruppen auch mehrmals vorkommen, dieselbe muss dann unter den Gruppen $G_1, G_2, \ldots G_\sigma$ genau ebenso oft auftreten, als sie in dem Aggregat

$$\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3, \ldots$$

als Factor enthalten ist.

## § 26.

Jetzt möge in der Festlegung der Rationalitätsbereiche eine Aenderung eintreten:

Rationalitätsbereich für die erste Gleichung $f_1 = 0$ ist und bleibt der Bereich $(\mathfrak{r})$. Der zweiten Gleichung $f_2 = 0$ sollen aber jetzt die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $f_1 = 0$ adjungirt werden, wofern diese Wurzeln nicht überhaupt schon alle zum Rationalitätsbereich der zweiten Gleichung gehören. Es kann nun der Satz angewendet werden, dass bei der Adjunction der sämmtlichen Wurzeln einer Gleichung die Gruppe sich auf eine ausgezeichnete Untergruppe reducirt (Vgl. § 21 und § 22). Allerdings war früher vorausgesetzt worden, dass der Rationalitätsbereich der Gleichung, deren Wurzeln adjungirt werden, übereinstimme mit dem Rationalitätsbereich der Gleichung, welcher jene Wurzeln adjungirt werden. Es hat jedoch keine Schwierigkeit, für den Augenblick den der Gleichung $f_2 = 0$ zugehörigen Rationalitätsbereich auch als Bereich für die Gleichung $f_1 = 0$ anzusehen, denn die Coefficienten von $f_1$ gehören zum Bereich $(\mathfrak{r})$ und sind desshalb auch in dem andern Rationalitätsbereich enthalten. Wenn also die Gruppe $G_2$ der Gleichung $f_2 = 0$ sich durch die gemachte Adjunction überhaupt reducirt, so reducirt sie sich auf eine ausgezeichnete Untergruppe; die Gruppe $G_2$ sollte aber einfach sein, dieselbe reducirt sich also in dem angenommenen Fall auf die Identität. Es sind also dann alle Wurzeln der Gleichung $f_2 = 0$ rational in den Grössen des Bereichs $(\mathfrak{r})$ und in den Wurzeln der ersten Gleichung $f_1 = 0$; man kann also die Gleichung $f_2 = 0$ unbeschadet der Eigenschaften des Gleichungssystems weglassen.

Ganz in derselben Weise kann man nun die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $f_1 = 0$ der Reihe nach jeder der Gleichungen

$$f_3 = 0,\ f_4 = 0,\ \ldots$$

adjungiren. Es gilt dabei immer der Satz, dass eine solche Adjunction die Gruppe der betreffenden Gleichung entweder unverändert lässt, oder auf die Identität reducirt. Ist letzteres z. B. bei der Gleichung $f_\nu = 0$ der Fall, so sind deren Wurzeln Grössen des so erweiterten Rationalitätsbereichs der Gleichung, diese Wurzeln sind also jedenfalls rational in den Grössen des Bereichs $(\mathfrak{r})$ und in den Wurzeln der Gleichungen $f_\tau = 0$, wo $\tau = 1, 2, \ldots \nu - 1$. Man kann in diesem Fall die Gleichung $f_\nu = 0$ unbeschadet der Eigenschaften des Gleichungssystems weglassen.

Man findet so eine Reihe von Gleichungen

$$f_1(x) = 0,\ f_{\mu_2}(x) = 0,\ \ldots$$

mit den Gruppen

$$G_1,\ G_{\mu_2},\ \ldots.$$

Dabei bestehen dieselben Eigenschaften wie vorher, nur ist in dieser Reihe der Rationalitätsbereich der zweiten Gleichung durch die sämmtlichen Grössen gebildet, welche aus den Grössen des Bereichs $(\mathfrak{r})$ und den Wurzeln der ersten Gleichung rational zusammengesetzt werden können, und dieser Rationalitätsbereich ist auch in den andern, den nachfolgenden Gleichungen zugehörigen Rationalitätsbereichen mit enthalten. Die neue Reihe entstand aus der Reihe

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ f_3 = 0,\ \ldots f_\sigma = 0$$

durch Aenderung der Rationalitätsbereiche und eventuelle Weglassung einzelner Gleichungen.

## § 27.

Nun adjungire man die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung

$$f_{\mu_2}(x) = 0$$

den sämmtlichen Gleichungen der gefundenen neuen Reihe von der dritten an und wiederhole genau dieselbe Betrachtung.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man schliesslich eine Gleichungskette

$$f_1(x) = 0,\ f_{\mu_2}(x) = 0,\ f_{\mu_3}(x) = 0,\ \ldots\ f_{\mu_r}(x) = 0$$

von folgenden Eigenschaften:

Der Rationalitätsbereich der ersten Gleichung ist der Bereich (r). Der Rationalitätsbereich jeder anderen Gleichung ist durch die Gesammtheit der Grössen gegeben, welche in den Wurzeln der vorangehenden Gleichungen und den Grössen des Bereichs (r) rational sind. Die Gruppen

$$G_1,\ G_{\mu_2},\ G_{\mu_3},\ \ldots\ G_{\mu_r}$$

der Gleichungen sind alle einfach. Mit Hülfe der sämmtlichen Wurzeln aller dieser Gleichungen lassen sich die sämmtlichen Wurzeln der ursprünglich gegebenen Gleichung $F(x) = 0$ rational ausdrücken.

Dabei bilden die Gleichungen dieser letzten Kette einen Theil der Gleichungen

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ f_3 = 0,\ \ldots\ f_\sigma = 0.$$

## § 28.

Es mögen jetzt der Gleichung $F(x) = 0$, welcher ursprünglich der Rationalitätsbereich (r) zukommt, die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $f_1 = 0$ adjungirt werden. Die Gruppe der Gleichung $F = 0$ war $\Gamma$; nach der Adjunction sei dieselbe $\Gamma'$. Entweder ist nun $\Gamma'$ mit $\Gamma$ identisch, oder, wenn wirklich eine Reduction eintritt, ist die mit $\Gamma \mid \Gamma'$ bezeichnete Gruppe holoedrisch isomorph mit der Gruppe $G_1$ der Gleichung $f_1 = 0$ (Vgl. den Schluss von § 22), so dass also die Gruppe $\Gamma$ sich im abstracten Sinne als Product der Gruppen $G_1$ und $\Gamma'$ darstellt. In diesem Fall sind die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $f_1 = 0$ rational in den Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$.

Nachdem diese Adjunction vollzogen ist, sollen alle Wurzeln der Gleichung $f_{\mu_2}(x) = 0$ noch ausserdem der Gleichung $F(x) = 0$ adjungirt werden. Nach dieser Adjunction sei $\Gamma''$ die Gruppe. Es ist dann entweder $\Gamma''$ mit $\Gamma'$ identisch, oder es stellt sich die Gruppe $\Gamma'$ dar als Product der Gruppen $G_{\mu_2}$ und $\Gamma''$, in welchem Fall die Wurzeln der Gleichung $f_{\mu_2} = 0$ alle rational sind in den Wurzeln der Gleichung $F = 0$ und denen der Gleichung $f_1 = 0$.

Man adjungirt jetzt ausserdem noch die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $f_{\mu_3} = 0$ und fährt so fort. Es gilt allgemein: Wenn bei der Adjunction der Wurzeln der Gleichung $f_{\mu_\varkappa} = 0$ eine Reduction der Gruppe eintritt, so sind die Wurzeln dieser Gleichung rational in den

Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ und den Wurzeln der Gleichungen $f_{\mu_s} = 0$, welche der Gleichung $f_{\mu_\varkappa} = 0$ vorangehen; zugleich spaltet sich in diesem Fall die Gruppe, welche der Gleichung $F = 0$ vor dieser Adjunction zukam, in ein Product, dessen erster Factor der Gruppe der Gleichung $f_{\mu_\varkappa} = 0$ holoedrisch isomorph ist, und dessen zweiter Factor die Gruppe ist, die nach der Adjunction der Gleichung $F = 0$ zugehört.

Da man durch die genannte Folge von Adjunctionen schliesslich dazu gelangen muss, die Wurzeln der Gleichung $F = 0$ rational auszudrücken, so muss die Gruppe dieser Gleichung schliesslich auf die Identität reducirt werden.

Es folgt daraus, dass die Gruppe $\Gamma$ als Product eines Theils der Gruppen

$$G_1, G_{\mu_2}, G_{\mu_3}, \ldots G_{\mu_r}$$

darstellbar ist.

Wenn somit $\varrho$ die Anzahl der einfachen Factorgruppen der Gruppe $\Gamma$ bedeutet, so ist

$$r \geqq \varrho.$$

Es kann nur dann

$$r = \varrho$$

sein, wenn bei jeder der in diesem Paragraphen erwähnten Adjunctionen wirklich eine Reduction der Gruppe eintritt. Wie eine genauere Ueberlegung zeigt, sind dann alle Wurzeln der sämmtlichen Gleichungen $f_{\mu_s} = 0$ rational in den Wurzeln der ursprünglich gegebenen Gleichung.

## § 29.

Ich gehe jetzt zu den Gleichungen

$$F_1(x) = 0, \; F_2(x) = 0, \; \ldots$$

zurück. Zur Gleichung $F_\nu = 0$ gehörte die Gruppe $\Gamma_\nu$. Die sämmtlichen Gruppen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ geben zusammen die einfachen Factoren

$$G_1, G_2, \ldots G_\sigma.$$

Ein Theil dieser letzteren Gruppen constituirt die Reihe

$$G_1, G_{\mu_2}, G_{\mu_3}, \ldots G_{\mu_r}.$$

Die Gesammtheit der $\varrho$ einfachen Factoren der der Gleichung $F(x) = 0$ zugehörigen Gruppe $\Gamma$ muss in der letzten Reihe enthalten sein. Es müssen also auch die sämmtlichen einfachen Factoren der Gruppe $\Gamma$ in der Gesammtheit der einfachen Factoren des Aggregats $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ enthalten sein.

Zwischen den Zahlen $\sigma, r, \varrho$ besteht die Beziehung

$$\sigma \geqq r \geqq \varrho.$$

Ich betrachte jetzt den Fall $\sigma = \varrho$, d. h. den Fall, in welchem die einfachen Factoren der Gruppe $\Gamma$ mit den einfachen Factoren des Aggregats $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ abgesehen von der Ordnung übereinstimmen. Die Annahme $\sigma = \varrho$ zieht die beiden Folgerungen nach sich, dass $r = \varrho$ und $\sigma = r$ ist. Die erste dieser Bedingungen bringt es mit sich, dass die Wurzeln der mit $f_{\mu_\varkappa} = 0$ bezeichneten Gleichungen (Vgl. § 28) in den Wurzeln der Gleichung $F = 0$ rational sind. Aus der Gleichung $\sigma = r$ folgt, dass bei den in § 26 und § 27 vorgenommenen Aenderungen der Rationalitätsbereiche keine einzige von den mit

$$f_1 = 0, \; f_2 = 0, \; \ldots \; f_\sigma = 0$$

bezeichneten Gleichungen in Wegfall kommen darf. Das System der letzteren Gleichungen ist also in diesem Fall identisch mit dem System

$$f_1 = 0, \; f_{\mu_2} = 0, \; f_{\mu_3} = 0, \; \ldots \; f_{\mu_r} = 0.$$

In diesem System treten also auch die Gleichungen

$$F_1 = 0, \; F_2 = 0, \; \ldots$$

auf, denn diese müssen nach § 25 in dem andern System auftreten. Also sind auch die Wurzeln der Gleichungen $F_\nu = 0$ im angenommenen Fall alle rational in denen der Gleichung $F = 0$.

## § 30.

### Schlussergebniss.

Ich fasse jetzt das Resultat zusammen:

Als gegeben wird vorausgesetzt eine Gleichung $F(x) = 0$ und dazu ein Rationalitätsbereich $(\mathfrak{r})$, dem die Coefficienten der Gleichung angehören. Die der Gleichung zugehörige Gruppe heisse $\Gamma$. Die Gleichung sei jetzt auf eine Kette von Hülfsgleichungen

$$F_1 = 0, \; F_2 = 0, \; F_3 = 0, \; \ldots$$

zurückgeführt, so dass also die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ sich aus den Grössen des Bereichs $(\mathfrak{r})$ und den Wurzeln der Hülfsgleichungen von der ersten bis zur letzten rational zusammensetzen. Die Hülfsgleichungen bilden eine Kette, sofern die Coefficienten einer jeden rational sind in den Wurzeln der vorangehenden Hülfsgleichungen und den Grössen des Bereichs $(\mathfrak{r})$. Der Rationalitätsbereich der Gleichung $F_1 = 0$ ist der Bereich $(\mathfrak{r})$. Der Rationalitätsbereich für die Gleichung $F_\nu = 0$ enthält deren Coefficienten, umfasst den Bereich $(\mathfrak{r})$ und ist in dem Rationalitätsbereich enthalten, der aus dem Bereich $(\mathfrak{r})$ und den Wurzeln der Gleichungen

$$F_1 = 0, \; F_2 = 0, \; \ldots \; F_{\nu-1} = 0$$

zusammengesetzt werden kann; im Uebrigen darf derselbe beliebig gewählt werden.

Unter diesen Voraussetzungen kann der folgende Satz ausgesprochen werden.

Die Gruppen der Hülfsgleichungen enthalten in ihrer Gesammtheit das Aggregat der $\varrho$ einfachen Factorgruppen der Gruppe $\Gamma$. Für die Zahl der einfachen Factoren, welche die Gruppen der Hülfsgleichungen zusammen aufweisen, ist also damit ein Minimum gegeben. Wenn ferner jene Zahl das Minimum $\varrho$ nicht übertrifft, so sind die sämmtlichen Wurzeln aller Hülfsgleichungen rational in den Wurzeln der gegebenen Gleichung $F(x) = 0$ und den Grössen des Bereichs $(\mathfrak{r})$.

Setzt man von Anfang an voraus, dass die Hülfsgleichungen einfache Gruppen besitzen, so ist $\varrho$ die Minimalzahl der nothwendigen Hülfsgleichungen. Wenn ausserdem die Zahl der Hülfsgleichungen die Minimalzahl nicht übertrifft, so sind die Wurzeln derselben sämmtlich natürliche Irrationalitäten.

Man kann einen ähnlichen, nicht ganz so einfachen Satz formuliren, falls durch die Kette der Hülfsgleichungen nur eine einzige Wurzel der Gleichung $F(x) = 0$ bestimmt werden soll.

Stuttgart, den 10. October 1888.