

# Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarz'schen $s$ -Function.

Von

FR. SCHILLING in Verden a/A.

## Inhaltsübersicht.

	Seite
Einleitung . . . . .	162
<b>Erster Theil: Historischer Rückblick nebst Disposition der Abhandlung.</b>	
§ 1. Eigenschaften der $s$ -Function. Ihre conforme Abbildung für reelle oder imaginäre Exponenten $\lambda, \mu, \nu$ . . . . .	163
§ 2. Allgemeines Abbildungsprincip, insbesondere für die $s$ -Function mit complexen Exponenten. Gegenüberstellung des „Fundamentalbereiches“ und seines „Kernes“ . . . . .	167
§ 3. Disposition der folgenden Untersuchungen. . . . .	172
<b>Zweiter Theil: Der Fall zweier singulärer Punkte in der Ebene des Argumentes.</b>	
§ 4. Einander entsprechende Curvenschaaren in der conformen Abbildung der Potenz mit complexen Exponenten . . . . .	174
§ 5. Der Fundamentalbereich der einfachen Potenz für einen reellen, imaginären und complexen Exponenten. Das Meridian- und Breitencurvenprincip . . . . .	176
§ 6. Anwendung des letztgenannten Principes auf die Fundamentalbereiche im Falle einer grösseren Zahl singulärer Punkte . . . . .	182
<b>Dritter Theil: Ueber den Kern der Fundamentalbereiche im Falle dreier singulärer Punkte.</b>	
§ 7. Neue Veranschaulichung der loxodromischen Substitutionen . . . . .	183
§ 8. Betrachtung dreier Schraubenbewegungen, deren Aufeinanderfolge die Identität erzeugt . . . . .	186
§ 9. Specialisirung der Resultate für den Fall dreier elliptischer oder hyperbolischer Substitutionen . . . . .	189
§ 10. Die in der Gleichung $AB\Gamma = 1$ enthaltenen Relationen als Doppelverhältnissbeziehungen der 6 Fixpunkte . . . . .	193
§ 11. Die geometrische Deutung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie für complexe Argumente . . . . .	196
§ 12. Construction des Kernes für gegebene Werthe $\lambda, \mu, \nu$ . . . . .	202
§ 13. Ueberblick über die Gesamtheit aller überhaupt möglichen Kerne 207	

#### Vierter Theil: Ueber die geometrische Natur der allgemeinen Kreisbogendreiecke.

	Seite
§ 14. Allgemeine Construction der Kreisbogendreiecke bei gegebenen reellen Exponenten $\lambda, \mu, \nu$ . . . . .	208
§ 15. Das Auftreten zusammenfallender oder sich berührender Begrenzungskreise des Dreiecks . . . . .	215
§ 16. Theorie der „reducirten“ und „verwandten“ Dreiecke für reelle, nicht ganzzahlige Exponenten . . . . .	217
§ 17. Endgültige Betrachtung der Kreisbogendreiecke für ganzzahlige Exponenten. . . . .	223
§ 18. Grenzfälle der Kreisbogendreiecke für unendlich grosse Exponenten	227
§ 19. Die Dreiecke für theils imaginäre, theils reelle Exponenten . . . . .	230
§ 20. Die Dreiecke für theils imaginäre, theils aber ganzzahlige oder unendlich grosse Exponenten. . . . .	234

#### Fünfter Theil: Discussion der Fundamentalbereiche für complexe Exponenten.

§ 21. Allgemeine Betrachtung dieser Bereiche . . . . .	237
§ 22. Ueber die Theorie der verwandten Bereiche . . . . .	239
§ 23. Ueber die Fundamentalvierecke mit unendlichen Kreisbändern . . . . .	243

#### Sechster Theil: Die Fundamentalbereiche für complexe Exponenten unter der Bedingung $\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ .

§ 24. Construction der reducirten Bereiche. . . . .	245
§ 25. Construction der Gesamtheit aller verwandten Bereiche . . . . .	252
§ 26. Construction der Fundamentalbereiche für einen ganzzahligen Werth eines der Exponenten . . . . .	256

Schlussbemerkung . . . . .	259
----------------------------	-----

### Einleitung.

Die vorliegende Arbeit will zu einer geometrischen Einführung in die allgemeine Theorie der Schwarz'schen  $s$ -Function einen Beitrag liefern. Ihr Gegenstand ist im Wesentlichen das Studium der conformen Abbildung, welche die genaunte Function von der Ebene des Argumentes entwirft; die hierbei angewandten Methoden werden zumeist einen rein geometrischen Charakter, oft in elementarer Einfachheit, tragen. Der sich darbietende Stoff erwies sich zu umfangreich, um die Betrachtungen schon jetzt zum völligen Abschluss zu führen, doch erschien ein längeres Hinausschieben einer ersten Veröffentlichung aus manchen Gründen unthunlich. Die Anregung zu diesen Untersuchungen verdanke ich den Vorlesungen des Herrn Prof. Klein über „Ausgewählte Capitel aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung“, die derselbe in den Jahren 1890—91 an der Universität Göttingen ge-

halten hat. Soweit ich im Folgenden auf dieselben Bezug zu nehmen habe, werde ich dies durch den in Klammern hinzugefügten Hinweis (K) andeuten.\*)

## I. Theil.

### Historischer Rückblick nebst Disposition der Abhandlung.

#### § 1.

Allgemeine Eigenschaften der  $s$ -Function. Ihre conforme Abbildung für reelle oder imaginäre Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$ .

Die Schwarz'sche Function  $s \left| \begin{matrix} a & b & c \\ \lambda & \mu & \nu \end{matrix} \right| z$  des unbeschränkt veränderlichen Argumentes  $z$  soll hier definiert sein durch die folgende symmetrische Differentialgleichung 3. Ordnung\*\*):

$$\frac{\frac{d^3 s}{dz^3}}{\frac{ds}{dz}} - \frac{3}{2} \left( \frac{\frac{d^2 s}{dz^2}}{\frac{ds}{dz}} \right)^2 = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} \cdot \left[ \frac{1-\lambda^2}{2} \cdot \frac{(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{1-\mu^2}{2} \cdot \frac{(b-c)(b-a)}{z-b} + \frac{1-\nu^2}{2} \cdot \frac{(c-a)(c-b)}{z-c} \right].$$

In ihr bezeichnen  $a, b, c$  die „singulären Punkte“ in der  $z$ -Ebene,  $\lambda, \mu, \nu$  die sogenannten „Exponenten“, von denen wir sogleich näher sprechen werden. Bezeichnet man den Ausdruck auf der linken Seite, die „Schwarz'sche Differentialinvariante“, mit Hrn. Klein durch das Symbol  $[s]_z$ , so können wir die letzte Gleichung in die abgekürzte Form setzen:  $[s]_z = R(z)$ , unter  $R(z)$  die angeführte rationale Function von  $z$  verstanden. Der Zusammenhang der  $s$ -Function mit der hypergeometrischen Reihe und der Riemann'schen  $P$ -Function, die ihrerseits einer bestimmten Differentialgleichung 2. Ordnung mit rationalen Coefficienten genügen, ist bekannt genug, sodass wir nicht darauf

\*) Nach dem Abschluss dieser Arbeit ist inzwischen die Abhandlung von E. Study über „Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen“ im XX. Bande der Abhandlungen der mathem.-physikal. Classe der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften erschienen. Freilich verlangt unsere Fragestellung von vornherein einen anderen Standpunkt in der sphärischen Trigonometrie, indem für uns insbesondere stets die „Dreiecksfläche“ im Mittelpunkte des Interesses steht, während bei Study nach dem Vorgange von Möbius das allgemeine Dreieck als Gebilde dreier grösster Kreise der Kugel erscheint, welches durch Festlegung des Drehungssinnes in den Seiten und Winkeln näher definiert ist. Gleichwohl ist die Beziehung beider Arbeiten an manchen Punkten unverkennbar. (Vgl. auch den im ersten Hefte dieses Annalenbandes erschienenen Aufsatz von Hrn. Schoenflies: Ueber Kreisbogendreiecke und Kreisbogenvierecke.)

\*\*) Dieselbe ist in dieser Form zuerst von Hrn. Klein aufgestellt worden; Ann. 12, p. 170, 1876; an sie knüpft später Papperitz an, Ann. 25, p. 214, 1884.

einzugehen brauchen.\*) Vielmehr wollen wir in wenigen Sätzen die wesentlichen Eigenschaften der  $s$ -Function zusammenstellen, soweit sie für uns in Betracht kommen:

1. Aus einer gegebenen Particularlösung  $s_0$  stellt sich das allgemeine Integral  $s$  der obigen Differentialgleichung in der Form  $s = \frac{\alpha s_0 + \beta}{\gamma s_0 + \delta}$  dar, d. h. als allgemeinste gebrochene lineare Function von  $s_0$ . Die Differentialgleichung definiert eine ganze Functionsschaar, von der eine bestimmte Function in der Gesamtheit ihrer analytischen Fortsetzungen nur ein einzelnes Individuum vorstellt.

2. Unter den Particularlösungen befinden sich drei ausgezeichnete, welche sich im Allgemeinen (d. h. jedenfalls für nicht ganzzahlige  $\lambda, \mu, \nu$ ) für die Umgebung der singulären Punkte  $a$  resp.  $b, c$  in die Gestalt setzen lassen:

$$\begin{aligned} s_a &= (z - a)^\lambda \cdot P_1(z - a), \\ s_b &= (z - b)^\mu \cdot P_2(z - b), \\ s_c &= (z - c)^\nu \cdot P_3(z - c); \end{aligned}$$

$P_1, P_2, P_3$  bedeuten Potenzreihen, in denen das constante Glied nicht verschwindet. Mit Ausnahme der Punkte  $a, b, c$  verhält sich die einzelne Function der Schaar in allen Punkten der  $z$ -Ebene unverzweigt.

3. Umläuft die Variable  $z$  in ihrer Ebene den Punkt  $a$  oder  $b, c$ , so erleidet die beliebige Particularlösung  $s_0$  bestimmte lineare Substitutionen, die wir als die Fundamentalsubstitutionen  $A, B, \Gamma$  bezeichnen.

Nun lässt sich ein Umlaufsweg, der die Punkte  $a, b, c$  gemeinsam umschliesst, einmal in die Aufeinanderfolge der einzelnen Umkreisung der Punkte  $a, b, c$  zerlegen, andererseits sich über das Unendliche auf einen Punkt zusammenziehen. Dies ergibt für die Fundamentalsubstitutionen die wichtige Beziehung, dass ihre successive Anwendung zur Identität führt. Dieses Resultat sei durch die symbolische Gleichung  $AB\Gamma = 1$

ausgedrückt, in der wir die Zusammenstellung  $AB\Gamma$  von links nach rechts lesen wollen.

Die Sätze unter 1 und 2 genügen geradezu, um umgekehrt die  $s$ -Function in der Weise der Riemann'schen Einführung der  $P$ -Function vollständig zu bestimmen.

Nun hat Hr. Schwarz nach dem Vorgange Riemann's bemerkt, dass die  $s$ -Function für reelle Werthe der Grössen  $\lambda^2, \mu^2, \nu^2$  die positive

\*) Vergl. z. B. Schellenberg, Diss. Göttingen 1892: Neue Behandlung der hypergeometrischen Function auf Grund ihrer Darstellung durch das bestimmte Integral, pag. 5.

Halbebene des Argumentes  $s$  auf ein von 3 Kreisbogen begrenztes Flächenstück abbildet, wie sogleich näher anzugeben ist. \*) Bei dieser Fassung des Satzes ist vorausgesetzt, dass die singulären Punkte  $a, b, c$  der  $z$ -Ebene durch eine geeignete lineare Transformation auf die Axe des Reellen transformirt sind, etwa in die Punkte  $0, 1, \infty$ , was stets möglich ist. Hr. Schwarz hat diesen Gedanken vor allem in der wichtigen, für dieses ganze Untersuchungsgebiet grundlegenden Arbeit ausgeführt: „Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt.“ \*\*) Sind im Besonderen die Grössen  $\lambda^2, \mu^2, \nu^2$  positiv, so wird das Abbild der Halbebene  $z$  durch ein Kreisbogendreieck mit den Ecken  $a_1, b_1, c_1$  gegeben, welches im Innern wie auf den Seiten mit Ausnahme der 3 Ecken keinen Windungspunkt enthält. In den Ecken  $a_1, b_1, c_1$  aber, welche den Punkten  $a, b, c$  der  $z$ -Ebene entsprechen, bilden die Kreisbogen entspr. die Winkel  $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ ; es können demnach hier Windungspunkte beliebig hoher Ordnung auftreten. Ist jedoch eine oder mehrere der Grössen  $\lambda^2, \mu^2, \nu^2$  negativ, so geht die

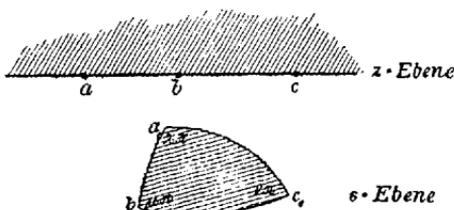


Fig. 2.

den zugehörigen singulären Punkten  $a, b, c$  entsprechende Ecke des Dreiecks verloren, indem die begrenzenden Kreisbogen sich nicht mehr schneiden. Alsdann windet sich die Dreiecksfläche zwischen diesen beiden Kreisen immerfort herum, gleichsam als ein unendliches Band sich selbst unendlich oft überdeckend. Doch unterlässt es Hr. Schwarz von allen diesen Kreisbogendreiecken eine anschauliche geometrische Vorstellung zu geben. In diesem Sinne werden wir im Anschluss an eine Arbeit des Hrn. Klein \*\*\*) eine erste Ergänzung der bisherigen Theorie geben, indem wir die Dreiecke bei gegebenen reellen oder imaginären Werthen der Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  wirklich zu construiren unternehmen und in die verschiedenen möglichen Gestalten eine unmittelbare klare Einsicht

\*) Man sehe das erste Auftreten dieser Abbildung in Riemann's posthumer Minimalflächenarbeit, Ges. Werke 1. Aufl., 1876, pag. 283 (zuerst 1867 veröffentlicht), sowie l. c. pag. 417; sodann Schwarz: „Ueber einige Abbildungsaufgaben“, (1869) Ges. Abh. II, pag. 78—80, „Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel“, (1868) Ges. Abh. II, pag. 100—101, „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung  $\Delta u = 0$  etc.“, (1870) Ges. Abh. II, pag. 144—45, „Bestimmung einer spec. Minimalfläche“, (1871) Ges. Abh. I, pag. 25.

\*\*) Crelle's Journal, Bd. 75 (1873), pag. 292—335, Ges. Abh. II, pag. 211—259 und 172—74.

\*\*\*) „Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe“, Ann. Bd. 37, pag. 579 ff. 1890.

gewähren. Wie wir sogleich an dieser Stelle hervorheben wollen, werden wir für unsere Darstellung einmal in bekannter Weise uns der *stereographischen Uebertragung der Ebene auf die Kugeloberfläche* bedienen, die auch den Betrachtungen des Hrn. Schwarz zu Grunde liegt; hat derselbe doch geradezu den Buchstaben  $s$  zur Bezeichnung unserer Function gewählt als Abkürzung für „sphärische Function“. Wir gewinnen hierdurch den Vortheil, das unendlich Weite anschaulich zu beherrschen, indem wir dessen Sonderstellung aufheben. Unsere von den 3 Kreisbogen begrenzten *Bereiche* werden wir in leicht verständlicher Erweiterung der Bezeichnung der Elementargeometrie dementsprechend als *allgemeine sphärische Dreiecke* \*) bezeichnen. Zweitens wird es uns möglich sein, von den Anschauungen der projectiven (hyperbolischen) Maassbestimmung, wie sie von den Herren Cayley und Klein entwickelt ist\*\*), Gebrauch zu machen, indem wir die Kugel der Variablen  $s$  als Fundamentalgebilde zu Grunde legen. Es sei dann allgemein der Abstand zweier Punkte wie der Winkel zweier Ebenen definirt als  $\frac{i}{2} \cdot \log DV$ , wo  $DV$  das Doppelverhältniss bedeutet, welches die beiden Punkte resp. Ebenen mit den reellen oder imaginären Elementen ihres Trägers bilden, die der Fundamentalfäche angehören (d. h. mit den Schnittpunkten der Verbindungslinie der beiden Punkte mit der Kugel resp. den Tangentialebenen durch die Schnittgerade der beiden Ebenen an die Kugel). Bieten doch diese für Strecken und Winkel definirten Maassverhältnisse den wesentlichen Vortheil dar, bei projectiven Transformationen des Raumes, welche die Fundamentalkugel in sich überführen, unverändert erhalten zu bleiben. Wir werden übrigens, wenn von solchen nicht-Euklidischen Entfernungen oder Winkeln die Rede ist, es ausdrücklich hervorheben, falls nicht von vornherein eine andere Auffassung ausgeschlossen ist.

Doch wollen wir der Arbeit des Hrn. Schwarz noch die folgenden Sätze entnehmen: Das einzelne Dreieck repräsentirt nur einen einzelnen „Zweig“ einer  $s$ -Function: *die Gesamtfuction wird uns erst durch die fortgesetzte symmetrische Wiederholung, die „Spiegelung“\*\*\*) des Ausgangsdreiecks an seinen begrenzenden Kreisbogen und der neuen Dreiecke an ihren freien Seiten, vor Augen geführt*, ein Process, dem in der Ebene des Argumentes die analoge Aneinanderreihung der Halbebenen

\*) Im Gegensatze zu Möbius, der die *Linienzüge* dreier Bogen grösster Kreise als allgemeines sphärisches Dreieck bezeichnet, vgl. Ges. Werke II, p. 1—54, p. 71—88.

\*\*) Cayley, Sixth memoir upon Quantics, Phil. Transactions t. 149, 1859. Collected mathem. Papers II, p. 561. — Klein, Annal. Bd. 4, pag. 573 ff., 1871; Bd. 6, pag. 112 ff., 1873.

\*\*\*) Crelle's Journal, Bd. 75, pag. 316; Ges. Abh. II, pag. 238; sowie Klein-Fricke, ellipt. Modulfunctioenen, 1890, I, pag. 85 ff.

um die Punkte  $a, b, c$  entspricht. Wir werden hierauf sogleich noch zurückkommen. Im Allgemeinen werden hierbei die Ebenen des Argumentes und der Function in Riemann'scher Anschauung unendlich oft überdeckt zu denken sein, wenn wir eben den Gesamtverlauf der  $s$ -Function überblicken wollen. Jedes andere Individuum der Functionenschaar  $\frac{\alpha s_0 + \beta}{\gamma s_0 + \delta}$  ferner erhalten wir in seiner Abbildung durch eine lineare Substitution der Variablen  $s$ , welche die Eckpunkte  $a_1, b_1, c_1$  des Ausgangsdreiecks in irgend drei andere Punkte transformirt. *Demgemäss sind alle Dreiecke für uns gleichwerthig, die in directer Möbius'scher Kreisverwandtschaft zu einander stehen.*

## § 2.

**Allgemeines Abbildungsprincip, insbesondere für die  $s$ -Function mit complexen Exponenten. Gegenüberstellung des „Fundamentalbereiches“ und seines „Kernes“.**

Die Schwarz'schen Betrachtungen sind nun, weit über die nächsten Ziele des Verfassers hinaus, die Grundlage zu einer neuen Theorie geworden, die darauf hinausläuft, die allgemeine Differentialgleichung 3. Ordg.:  $[\eta]_s = f(z)$ , wo  $f$  eine rationale oder algebraische Function bezeichnen möge, geometrisch zu behandeln.\*) Anstatt nämlich das conforme Abbild der Ebene des Argumentes im einzelnen Falle von den analytischen Entwicklungen aus zu studiren, kann man umgekehrt dasselbe zum Ausgangspunkt wählen und geradezu als Definition der betreffenden Function an die Spitze der Untersuchung stellen. Diese Gedanken gruppiren sich um den Begriff des „Fundamentalbereiches“, wie derselbe von Hrn. Klein in seiner Arbeit: „Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie“ im 21. Bde. der Math. Annal. (1882) in allgemein umfassender Weise eingeführt ist. Unter demselben haben wir einen von Stücken irgend welcher Curven begrenzten Bereich einer „Riemann'schen Mannigfaltigkeit“ zu verstehen, die zu je zweien durch ein bestimmtes analytisches Gesetz punktweise einander zugeordnet sind. Wir wollen nicht näher darauf eingehen, wie diese allgemeine Definition zu specialisiren ist, welche Bedingungen ein solcher Bereich zu erfüllen hat, um „brauchbar“ zu sein, in welcher Weise wir uns aus ihm eine geschlossene Mannigfaltigkeit hergestellt denken können u. dergl.\*\*\*) Vielmehr wollen wir sogleich zu unserem Dreiecksfalle zurückgehen, um uns an ihm die Verhältnisse im Einzelnen

\*) Man sehe Klein, Math. Ann. Bd. 40, pag. 133 (1892).

\*\*) Vgl. Klein: „Ueber den Begriff des functionentheoretischen Fundamentalbereichs“, Ann. 40, pag. 130 ff. (1892).

klar zu machen. Es sei als Ausgangsdreieck das Dreieck  $a_1 b_1 c_1$  der Fig. 3 gewählt, welches uns das Abbild der positiven Halbebene vorstellen möge. Indem wir dasselbe an einer seiner 3 Seiten z. B. an

$a_1 b_1$  spiegeln, erhalten wir in dem schraffirten Dreiecke  $a_1 b_1 c_2'$  eine Abbildung der negativen Halbebene. Dem Viereck  $a_1 c_1 b_1 c_2'$  entspricht demnach die ganze von  $b$  über  $c$  und das Unendliche bis  $a$  längs der Axe der Reellen eingeschnittene Ebene des Argumentes  $z$ . Allemal zwei Punkte der gleichnamigen Seiten  $c_1 b_1$  und  $c_2' b_1$  resp.  $c_1 a_1$  und  $c_2' a_1$  werden nun einander zugeordnet sein, indem sie demselben (aber auf

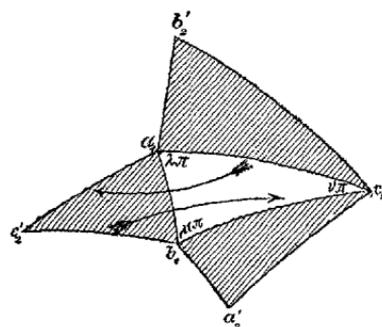


Fig. 3.

verschiedenen Ufern des Schnittes gelegenen) Argumentwerth  $z$  entsprechen. Indem man von dem Punkte  $X$  des einen Ufers in der eingeschnittenen  $z$ -Ebene durch eine positive (resp. negative) Umkreisung des Punktes  $a$  oder  $b$  zu dem gegenüberliegenden Punkte  $X'$  des anderen Ufers gelangt, so ergibt sich, dass die Zu-

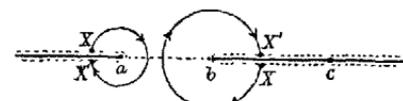


Fig. 4.

ordnung der genannten Kreisbogenpaare durch die Fundamentalsubstitutionen A und B geleistet wird. Fügen wir in unserer Figur 3 auch noch die Spiegelung des Ausgangsdreiecks an den Seiten  $a_1 c_1$  und  $b_1 c_1$  hinzu, so können wir für die beiden neuen Dreiecke  $a_1 c_1 b_2'$  und  $b_1 c_1 a_2'$  die analoge Betrachtung wie soeben durchführen. Es werden die beiden Halbebenen des Argumentes jetzt längs der Strecke  $ac$  bzw.  $ca$  zusammenhängen, wobei die letzte Strecke sich über den Unendlichkeitspunkt hinüberzieht. Zu den Substitutionen A und B gesellt sich dann, wie leicht zu übersehen ist, noch die dritte Fundamentalsubstitution  $\Gamma$  hinzu, der Umkreisung des Argumentes  $z$  um den Punkt  $c$  entsprechend. In unserem Falle reeller Werthe  $\lambda, \mu, \nu$  haben die Fundamentalsubstitutionen speciell elliptischen Charakter.\*) In der Figur 3 erhalten wir zugleich eine unmittelbare geometrische Anschauung unserer symbolischen Gl.  $AB\Gamma = 1$ . Durch die Anwendung der 3 Substitutionen  $AB\Gamma$  in irgend einer cyklischen Reihenfolge gehen nämlich die Dreiecke  $b_2' a_1 b_1, c_2' a_1 c_1, a_2' b_1 c_1$  successive in einander über, sodass wir schliesslich zum ersten Dreieck zurückgelangen. Im speciellen Falle enthält die Gl.  $AB\Gamma = 1$  den schon längst bekannten Satz\*\*), dass bei der successiven Drehung der Kugel durch die doppelten Winkel eines ge-

\*) Vgl. Klein-Fricke, Ellipt. Modulfunktionen, Bd. I, 1890, pag. 165.

\*\*) Man sehe z. B. Hamilton, Lectures on Quaternions, Dublin 1853, Art. 280 u. 346; Thomson u. Tait, Natural Philosophy, Cambridge 1886, I. Art. 95.

wöhnlichen sphärischen Dreiecks um die zu seinen Ecken gehörenden Durchmesser der Kugel die letztere in sich selbst übergeführt wird.

Wir sind nun zu dem Punkte gekommen, um das Ziel unserer eigenen Untersuchung angeben zu können. *Ist einmal die erneute Durcharbeitung der geometrischen Theorie für reelle und rein imaginäre Werthe  $\lambda, \mu, \nu$  eine Hauptaufgabe dieser Arbeit, so gilt es ferner die genannten Betrachtungen für complexe Werthe der Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  zu verallgemeinern, insbesondere auch in diesen Fällen den Fundamentalbereich der  $s$ -Function zu construiren, d. h. denjenigen Bereich der  $s$ -Ebene, welcher als Abbild der zweckmässig eingeschnittenen Ebene des Arguments zu gelten hat.* Wie sich von selbst versteht, wird es sich jetzt nicht mehr empfehlen, die Abbildung der einzelnen Halbebene für sich zu betrachten. Bevor wir jedoch in die Einzelheiten näher eindringen, wird es zweckmässig sein, uns in Kürze mehr schematisch als streng einen Ueberblick über diese Abbildung zu schaffen.

Erinnern wir uns zunächst, dass unter den Particularlösungen der Differentialgleichung 3. Ordnung für die  $s$ -Function drei ausgezeichnete vorhanden sind, die in der Nähe der singulären Stellen  $a, b, c$  sich entsprechend verhalten wie  $(z-a)^2, (z-b)^\mu, (z-c)^\nu$ , d. h. wie eine Potenz mit complexen Exponenten. Indem nun die allgemeine Lösung der Differentialgleichung sich als gebrochene, lineare Function dieser ausgezeichneten Lösungen darstellen lässt, so folgt, dass eine geradlinige Fortschreitungsrichtung von einem singulären Punkte in der Ebene des Argumentes durch eine beliebige  $s$ -Function der Schaar in der unmittelbaren Nähe des entsprechenden Punktes der Ebene der Function sich einer logarithmischen Spirale anschmiegen wird, dass aber umgekehrt eine geradlinige Fortschreitungsrichtung in der Ebene der Function von dem letztgenannten Punkte eine spiralförmige Curvenendigung in den singulären Punkten der  $z$ -Ebene bedingt.\*) Wollen wir daher eine einfache Gestalt des Fundamentalbereiches wünschen, so werden wir jedenfalls dem Einschnitt der  $z$ -Ebene in der Nähe der singulären Punkte bestimmte spiralförmige Endigungen geben müssen (K).

Die Verallgemeinerung der Betrachtung des speciellen Falles reeller  $\lambda, \mu, \nu$  legt nun die folgende Vermuthung nahe: *Es dürfte möglich sein die  $z$ -Ebene so mit einem Einschnitt in der soeben charakterisirten Weise von einem der singulären Punkte zu den beiden anderen hin zu versehen, dass die Abbildung dieser eingeschnittenen Ebene wiederum ein Kreisbogenviereck darstellt, dessen Seiten paarweise einander zugeordnet sind, jedoch nunmehr durch loxodromische Substitutionen, deren eine Fixpunkt jedenfalls in der den beiden Seiten gemeinsamen Ecke liegt.\*\**

\*) Man sehe pag. 175 f. dieser Arbeit.

\*\*) Das Auftreten rein imaginärer Werthe der Exponenten sei zunächst ausgeschlossen.

Man sehe die schematischen Figuren 5 und 6. In betreff der Winkel dieser Vierecke wird zu sagen sein, dass der Winkel der Ecke  $a_1$  gleich  $2\lambda'\pi$ , der Ecke  $b_1 = 2\mu'\pi$  und die Summe der Winkel in den Ecken  $c_1$  und  $c_2'$  gleich  $2\nu'\pi$  betragen wird, woselbst  $\lambda', \mu', \nu'$  die reellen Theile der Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  bezeichnen mögen. Diese Vierecke werden wir dann geradezu als eine Verallgemeinerung der sphärischen Dreiecke ansehen können (K). Wie nun im Falle reeller Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  die zweiten Fixpunkte der Fundamentalsubstitutionen  $A$  und  $B$  (resp.  $\Gamma$ ) in den zweiten Schnittpunkten der zugeordneten Kreisbogen

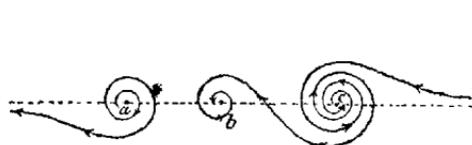


Fig. 5.

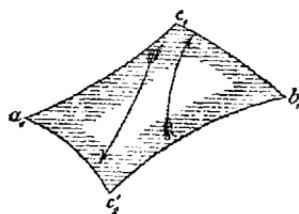


Fig. 6.

liegen, so werden wir auch im allgemeinen Falle complexer Exponenten die gleiche Annahme in den Figuren zu bevorzugen suchen; doch ist dieselbe keineswegs eine nothwendige Forderung. Die solcherweise specialisirten Figuren werden wir dann „Normalvierecke“ nennen.

Es sei noch erwähnt, dass man die Zerschneidung der  $z$ -Ebene auch in anderer, übrigens mehr symmetrischer Weise vorgenommen denken kann, indem man von einem beliebigen Punkte  $O$  aus nach den Punkten  $a, b, c$  hin Schnitte legt, die sich wieder in der Nähe der letztgenannten Punkte in bestimmter Weise spiralog zu winden haben (Fig. 7). Man wird erwarten können, dass bei geeigneter Einrichtung dieser Schnitte die Abbildung ein *Kreisbogensechseck*

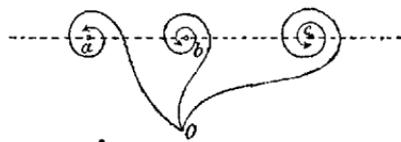


Fig. 7.

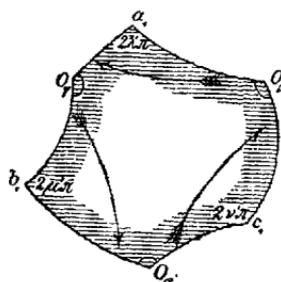


Fig. 8.

$a_1 O_\gamma b_1 O_\alpha c_1 O_\beta$  liefern wird, dessen Winkel in den Ecken  $a_1, b_1, c_1$  gleich  $2\lambda'\pi, 2\mu'\pi, 2\nu'\pi$  sind, während die Summe der Winkel der Ecken  $O_\alpha, O_\beta, O_\gamma$ , gerade  $2\pi$  beträgt (Fig. 8): Die in den Ecken  $a_1, b_1, c_1$  zusammenstossenden Kreisbogen werden, wie die Figur durch Pfeile angiebt, mittels loxodromischer Substitutionen einander zugeordnet sein.

Auch hier ist wieder der „Normalfall“ denkbar, dass die einander entsprechenden Kreisbogen sich in den zweiten Fixpunkten der zugehörigen Fundamentalsubstitutionen schneiden. Die Kreisbogenvierecke ergeben sich, wie leicht zu sehen, als Specialfall der eben geschilderten Bereiche, wenn der Punkt  $O$  in einen der singulären Punkte  $a, b, c$  selbst hineinrückt (K).

Wir wollen noch einmal ausdrücklich hervorheben, dass unsere bisherigen Angaben zunächst nur den Werth einer schematischen Uebersicht besitzen.

Was den Fall betrifft, dass einer oder mehrere der Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  rein imaginär werden, während die übrigen complex sind, so wird derselbe in analoger Weise eine besondere Behandlung erfahren müssen, wie auf pag. 165 im Falle reeller Werthe  $\lambda^2, \mu^2, \nu^2$  angegeben ist. Gerade der nächste Theil dieser Arbeit wird der Aufklärung der besonderen Stellung der Abbildung für rein imaginäre Exponenten gewidmet sein.

Eine weitere Bemerkung bezieht sich auf die Gleichung  $AB\Gamma = 1$ . Zunächst ist leicht zu übersehen, wie die Sätze der pag. 168 sich auf die allgemeineren Figuren 6 und 8 übertragen. Es kommt dabei statt des Principes der Symmetrie das „Princip der analytischen Fortsetzung“ in Anwendung, wie dasselbe in allgemeiner Fassung zuerst von Herrn Klein in der schon genannten Arbeit Math. Ann. 21 entwickelt ist. Nach demselben haben wir einfach den ersten Bereich vermöge einer der Fundamentalsubstitutionen, welche die Zuordnung der Seiten vermitteln, zu reproduciren, um von der Fortsetzung der Abbildung ein Bild zu gewinnen. Wir wollen im Einzelnen diese einfachen Verhältnisse nicht weiter ausführen. Indem die Aufeinanderfolge linearer Substitutionen allemal wieder eine lineare Substitution ergibt, so lässt sich die linke Seite der symbolischen Gleichung  $AB\Gamma = 1$  sofort durch eine einzige Substitution darstellen; die Vergleichung ihrer Coefficienten mit denen der Identität führt dann in extenso zu 3 Gleichungen (da es ja nur auf das Verhältniss der Coefficienten in einer linearen Substitution ankommt). Dieselben erweisen sich, wie wir sehen werden, für den Fall des gewöhnlichen sphärischen Dreiecks identisch mit den 3 Fundamentalrelationen der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie. Im allgemeinen Falle complexer Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  wird dann die Gleichung  $AB\Gamma = 1$  uns als Ausgangspunkt dienen, um die Formeln der sphärischen Trigonometrie auch für complexe Werthe der Argumente geometrisch anschaulich zu deuten. \*)

Denken wir uns nun die Figuren auf der Kugel gezeichnet, so

\*) Das bezügliche Resultat ist bereits in den Göttinger Nachrichten von Jahre 1891, p. 188—190 (abgedruckt in den Math. Ann. Bd. 39, 1891, p. 598—600 von mir angegeben.

werden wir neben den Flächen der Fundamentalbereiche die 3 Verbindungsgeraden der Fixpunktpaare der Fundamentalsubstitutionen als wesentlich erkennen. Wir bringen dies zum Ausdruck, indem wir das Gebilde dieser 3 Geraden als „Kern“ der Figur bezeichnen und den Fundamentalbereichen selbst gegenüberstellen (K). Demgemäss wird auch unsere spätere Untersuchung dem Kern ein besonderes Capitel widmen. Im Falle eines gewöhnlichen sphärischen Dreiecks stellt der „Kern“, wie sofort zu sehen, gerade die 3 Kanten des zugehörigen räumlichen Dreikants dar, die sich im Mittelpunkt der Kugel schneiden.

In Rücksicht auf unsere geometrischen Entwicklungen den Kern betreffend kommen aus der Theorie der  $s$ -Function insonderheit die folgenden Sätze in Betracht\*):

1. Wenn die Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  der Gleichung genügen

$$\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1,$$

wo  $n$  eine beliebige ganze Zahl bezeichnet und von den doppelten Vorzeichen je ein beliebiges auszuwählen ist, dann ist es allemal möglich, einen geeignet ausgewählten Zweig der  $s$ -Function durch ein gewöhnliches (unbestimmtes) Integral darzustellen. Dann haben aber die drei Fundamentalsubstitutionen A, B,  $\Gamma$  einen Fixpunkt gemeinsam, d. h. die drei Geraden des Kernes schneiden sich auf der Kugel in einem Punkte.

2. „Verwandte  $s$ -Functionen“ sind solche, deren Exponenten sich um ganze Zahlen unterscheiden, die eine gerade Summe haben. Wie wir sehen werden, gehören die zugehörigen Fundamentalbereiche demselben Kern an, sodass wir geradezu sagen können: Verwandte  $s$ -Functionen sind diejenigen, deren Fundamentalbereiche denselben Kern besitzen. Im Falle reeller  $\lambda, \mu, \nu$  wissen wir dann zugleich, dass die Fundamentalbereiche stets von Bogen derselben Kreise begrenzt werden.\*\*\*) An der letzteren Definition werden wir insbesondere festhalten, wenn es gilt, den Begriff der verwandten Functionen auch auf die Fälle ganzzahliger  $\lambda, \mu, \nu$  zu übertragen.

### § 3.

#### Disposition der folgenden Untersuchungen.

Nun ist es von vornherein klar, dass der analytischen Entwicklung der angegebenen Abbildung auf Grund einer anderweitig gegebenen Definition der  $s$ -Function sich nicht geringe Schwierigkeiten entgegenstellen werden. Man wird daher umgekehrt auf rein geometrischem Wege die allgemeinen Fundamentalbereiche darzustellen

\*) Auf gewisse Fälle eines unbestimmten Kernes und die damit in Zusammenhang stehenden Modificationen, welche die folgenden Sätze für ganzzahlige Werthe der Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  etwa erleiden, sei an dieser Stelle nur eben hingewiesen.

\*\*) Man sehe Papperitz, Math. Ann. Bd. 25, 1885, pag. 218.

erstreben. Vor allem ist der Nachweis zu führen, wie man für jede beliebige Auswahl complexer Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  in der That den Fundamentalbereich, sei es als Kreisbogenviereck oder in allgemeinerer Gestalt, construiren kann. Ist dies gelungen, dann wird man geradezu die geometrische Figur als Definition der  $s$ -Function vermöge der Forderung ihrer Abbildung auf die  $z$ -Ebene an die Spitze der Untersuchung stellen können und solcherweise eine neue Einführung in die Theorie der  $s$ -Function (und damit der hypergeometrischen Function) gewinnen, welche in mancher Beziehung wesentliche Vortheile bieten dürfte, wie am Schlusse der Arbeit näher angegeben wird. Hierbei werden die von den Herren Schwarz und Neumann entwickelten Existenzsätze in Anwendung kommen; betreffs der Angabe weiterer Einzelheiten sei auf die Arbeit des Herrn Ritter\*) verwiesen, dessen in § 2 gegebene Betrachtungen sich unmittelbar auf unsere Figuren specialisiren lassen.

Man wird sich nun keineswegs darüber täuschen dürfen, dass diese geometrische Methode ihre eigenartigen Schwierigkeiten besitzt gerade in der Mannigfaltigkeit der Figuren, die es zu beherrschen gilt. Schon der gewöhnliche Fall reeller  $\lambda, \mu, \nu$  wird uns mit den verschiedensten Gestalten von Dreiecken bekannt machen und uns in den ganzen Reichthum der neuen geometrischen Anschauungen einen Einblick gewähren. Umgekehrt dürfte in dieser Vielseitigkeit an und für sich ein wesentliches Moment des Interesses, auch in rein geometrischer Hinsicht, zu erblicken sein.

Indem wir das bisher Gesagte nochmals überblicken, gewinnen wir folgende Disposition unserer geometrischen Untersuchungen:

Zunächst werden wir im folgenden zweiten Theile unserer Arbeit für den einfacheren Fall die geometrische Theorie vollständig durchführen, dass in der Ebene des Arguments nur zwei singuläre Punkte  $a$  und  $b$  vorhanden sind. Die hier in Frage kommende abbildende Function  $\eta$ , die gleichfalls einer Differentialgleichung 3. Ordnung der Form  $[\eta]_z = R(z)$  (s. pag. 167) genügt, wird durch  $\eta = z^\lambda$  gegeben, woselbst unter  $\lambda$  eine im allgemeinen complexen Grösse zu verstehen ist. Diese Betrachtungen werden uns vor allem in die singuläre Stellung, welche das Auftreten rein imaginärer Exponenten bietet, einen klaren Einblick verschaffen und uns zugleich als Muster unserer allgemeineren Untersuchung dienen können.

Sodann werden wir uns im dritten Theile mit dem „Kern“ der Fundamentalbereiche für die Schwarz'sche  $s$ -Function beschäftigen und dessen Eigenschaften und Construction bei gegebenen complexen Werthen

---

\*) „Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlechte Null“, Math. Ann. Bd. 41, 1893, pag. 1 ff.

der Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  allgemein entwickeln. Die letztere kommt insbesondere auf die interessante Aufgabe zurück: *Zu zwei gegebenen Punktepaaren der Kugel ein drittes zu finden, welches mit ersteren vorgegebene Doppelverhältnisse bildet.* Als Anhang wird sich die geometrische Deutung der Fundamentalformeln der sphärischen Trigonometrie für complexe Argumente ergeben.

Schliesslich werden wir im vierten Theile für reelle oder imaginäre Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  die Construction der sphärischen Dreiecke vollständig durchführen, sodann im fünften Theile einige Erläuterungen geben betreffs der wirklichen Construction der Fundamentalbereiche für complexe Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$ ; endlich werden wir im sechsten Theile für den p. 172 erwähnten speciellen Fall, dass die Geraden des Kernes sich auf der Kugel in einem Punkte schneiden, die Fundamentalbereiche in Gestalt geradlinig begrenzter Normalvierecke allgemein darzustellen lehren.

In dem ganzen Verlauf der Untersuchungen aber werden wir insbesondere stets die geometrische Theorie der verwandten  $s$ -Functionen hervortreten lassen.

## II. Theil.

### Der Fall zweier singulärer Punkte in der Ebene des Argumentes.

#### § 4.

#### Einander entsprechende Curvenschaaren in der conformen Abbildung der Potenz mit complexen Exponenten.

Wir beginnen jetzt sogleich damit, die geometrische Theorie des einfachen Falles zu entwickeln, in dem die Zahl der singulären Punkte in der  $z$ -Ebene gleich 2 ist. Da die abbildende Function sich besonders einfach gestaltet, so wollen wir hier mit ihrer analytischen Darstellung, nicht mit den Fundamentalbereichen beginnen. Die jene Function definirende Differentialgleichung 3. Ordnung  $[\eta]_z = R(z)$ , auf die wir bereits pag. 173 dieser Arbeit hingewiesen haben, nimmt im Falle zweier singulärer Punkte  $a$  und  $b$  die einfache Gestalt an:

$$[\eta]_z = \frac{1}{(z-a)(z-b)} \cdot \left\{ \frac{1-\lambda^2}{2} \cdot \frac{a-b}{z-a} + \frac{1-\lambda^2}{2} \cdot \frac{b-a}{z-b} \right\}$$

oder

$$[\eta]_z = \frac{1-\lambda^2}{2} \cdot \frac{(a-b)^2}{(z-a)^2(z-b)^2},$$

indem die den Punkten  $a$  und  $b$  zugehörigen Exponenten einander gleich genommen werden müssen, da andernfalls der Punkt  $\infty$  als singulärer Punkt hinzukommen würde. Verlegen wir die Punkte  $a$  und  $b$  durch geeignete lineare Substitution der Variablen  $z$  in die Punkte 0 und  $\infty$ , so erhalten wir die folgende Gleichung: -

$$[\eta]_s = \frac{1 - \lambda^2}{2} \cdot \frac{1}{z^2}.$$

Dieselbe lässt leicht die Particularlösung  $\eta_0 = z^\lambda$  erkennen, aus der sich das allgemeine Integral in der Form  $\frac{\alpha \cdot \eta_0 + \beta}{\gamma \cdot \eta_0 + \delta}$  mit drei wesentlichen Constanten ergibt. Im Falle zweier singulärer Punkte wird daher die abbildende Function allgemein durch die gebrochene lineare Function der Potenz der Unabhängigen mit dem complexen Exponenten  $\lambda$  gegeben.

Wir wollen zunächst der Abbildung der Function  $\eta_0 = z^\lambda$  einige Worte widmen, da dieselbe nicht hinreichend bekannt sein dürfte. Die Constanten sind bereits so normirt, dass der Nullpunkt und der Unendlichkeitspunkt beider Ebenen sich entsprechen, indem wir hier unbeschadet der Allgemeinheit den reellen Theil  $\lambda'$  der Grösse  $\lambda = \lambda' + i\lambda''$  als positiv voraussetzen dürfen. Wir wollen unser Augenmerk besonders darauf richten, welches Curvensystem in der  $\eta$ -Ebene dem Orthogonalsystem des vom Nullpunkt der  $z$ -Ebene auslaufenden Strahlenbüschels und des concentrischen Kreisbüschels um denselben Punkt entspricht. Wir gehen zu dem Zweck von  $\eta_0 = z^\lambda$  zu der logarithmirten Form der Gleichung  $\log \eta_0 = \lambda \log z$  über. Indem wir dann nach einander die Abbildung:  $\omega = \log z$ ,  $\omega' = \lambda \cdot \omega$ ,  $\eta = e^{\omega'}$  betrachten, findet man das Resultat: Dem genannten Orthogonalsystem der  $z$ -Ebene entspricht ein aus zwei Schaaren „congruenter“ logarithmischer Spiralen bestehendes Orthogonalsystem, von denen die eine Schaar im positiven, die andere im negativen Sinne sich windet. \*) Aus dem Umstande, dass ein beliebiger Punkt der  $z$ -Ebene einmal dem Punkte  $\eta = z^\lambda$ , dann jedoch, indem wir in der  $z$ -Ebene einen Umlauf um den Nullpunkt ausgeführt denken, dem Punkte  $\eta' = e^{2i\pi\lambda} \cdot z^\lambda = e^{2i\pi\lambda} \cdot \eta$  entspricht, folgern wir sofort die analytische Gleichungsform der beiden Loxodromenschaaren in der  $s$ -Ebene. Dieselben sind einfach die Bahn-curven der beiden loxodromischen Substitutionen \*\*):

$$\begin{aligned} \text{I. } \eta' &= e^{2i\pi\lambda} \cdot \eta, \\ \text{II. } \eta' &= e^{2\pi\lambda} \cdot \eta, \end{aligned}$$

wobei die Curven I den concentrischen Kreisen, die Curven II den Strahlen der  $z$ -Ebene entsprechen.

Wir gehen nun der besseren Uebersicht wegen wieder durch stereographische Projection zur Kugeldarstellung der complexen Variablen  $\eta$  und  $z$  über und wollen unsere geometrische Beschreibung so einrichten, dass eine lineare Substitution der Variablen nichts Wesentliches ändert.

\*) Man sehe Fig. 39 pag. 168 der Ellipt. Modulfunctionen von Klein-Fricke, I. Bd. 1893.

\*\*\*) Vgl. Klein-Fricke, Ellipt. Modulfunctionen, Bd. I, 1890, pag. 168, 172.

Indem auch umgekehrt  $z$  sich als Potenzfunction von  $\eta$  mit complexen Exponenten,  $z = \eta^{\frac{1}{\lambda}}$ , darstellt, so erhalten wir den allgemeinen Satz:

*Den hyperbolischen und elliptischen Kreisschaaren [nach Steiners Terminologie\*)] der Punkte  $A$  und  $B$  in der  $\eta$ -Ebene oder der Punkte  $a$  und  $b$  in der  $z$ -Ebene entspricht allemal ein aus zwei Loxodromenschaaren bestehendes Orthogonalsystem\*\*) der anderen Ebene, die ihre Asymptotenpunkte in den Punkten  $a$  und  $b$ , resp.  $A$  und  $B$ , haben. ( $A$  und  $B$  sollen die den Punkten  $a$ ,  $b$  der  $z$ -Ebene entsprechenden Punkte der  $\eta$ -Ebene bezeichnen.)*

Es sei bemerkt, dass die Conformität der Abbildung überall bewahrt ist, mit Ausnahme in den Punktepaaren  $A, B$  und  $a, b$ . Dort entspricht einem Winkel  $\varphi$  in der  $z$ -Ebene ein Winkel  $\varphi \cdot \lambda$  in  $\eta$ -Ebene.

Es bleibt nur noch ein Wort zu sagen für den Fall, dass  $\lambda$  reell oder imaginär wird. In beiden Fällen entsprechen den beiden Kreisschaaren der einen Kugel die beiden Kreisschaaren der anderen; während jedoch bei reellem  $\lambda$  jedesmal die elliptischen und die hyperbolischen Kreisschaaren der beiden Kugeln beziehungsweise zusammengeordnet sind, ist das Entsprechen für imaginäres  $\lambda$  ein kreuzweises, indem die elliptische Kreisschaar der einen Kugel der hyperbolischen der anderen entspricht. Es ist gut, diese Resultate durch continuirliche Abänderung des Werthes  $\lambda$  in ihrer Beziehung zu einander sich klar zu machen.

## § 5.

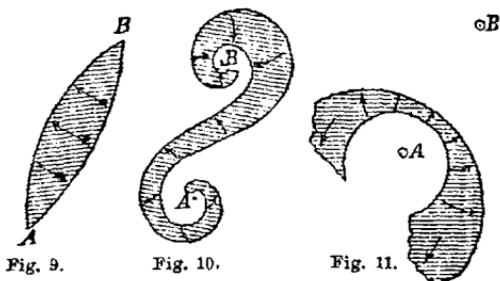
**Der Fundamentalbereich der einfachen Potenz für einen reellen, imaginären und complexen Exponenten. Das Meridian- und Breitencurvenprincip.**

Es wird uns nach diesen Vorbemerkungen ein Leichtes sein, die u der Function  $\eta = z^\lambda$  gehörenden *Fundamentalbereiche*, die sich als Abbild der zweckmässig eingeschnittenen  $z$ -Ebene darstellen, zu studiren. Denken wir uns zunächst einmal die letztere längs eines Kreisbogens der elliptischen Schaar von  $a$  nach  $b$  eingeschnitten. Den Ufern dieses

\*) Unter einer elliptischen Kreisschaar verstehen wir die Gesammtheit aller durch 2 feste Punkte gehende Kreise, indem diese auf ihrer gemeinsamen Centrale eine elliptische Involution bestimmen; unter einer hyperbolischen die Gesammtheit der zu ersteren orthogonalen Kreise, die also auf ihrer Centrale eine hyperbolische Involution bestimmen. Vgl. Klein-Fricke, Ellipt. Modulfunctionen, Bd. I, 1890, ag. 165, Anm.

\*\*) Vgl. Figur 41 der Modulfunctionen pag. 172; sowie Holzmüller, Zeitschrift für Math. und Physik von Schlömilch, 1871, pag. 201 ff.: „Ueber logarithmische Doppelspiralen“.

Schnittes entsprechen dann im allgemeinen Falle eines complexen  $\lambda$  zwei logarithmische Spiralen der Schaar II, die im Falle eines reellen  $\lambda$  in 2 Kreisbogen des elliptischen Büschels, im Falle eines rein imaginären  $\lambda$  in unendlich oft zu durchlaufende Kreise des hyperbolischen Büschels übergehen. Allemal schliessen die beiden Curven einen Streifen der  $\eta$ -Kugel zwischen sich ein, wie es durch die Figuren 9—11 angedeutet ist. In Fig. 11 haben wir uns ein zwischen den beiden Kreisen sich unendlich oft windendes Band zu denken. Den Punkten  $a$  und  $b$  der  $z$ -Kugel entsprechen die Punkte  $A$  und  $B$  der  $\eta$ -Kugel in den



Figuren 9 und 10, in der Figur 11 dagegen hat man bei Annäherung an die Punkte  $a$  und  $b$  sich unendlich oft um die  $\eta$ -Kugel zu bewegen, ohne je ein Abbild dieser Punkte, die Schnitte der begrenzenden Kreise, zu erreichen. Auf der  $z$ -Kugel gelangt man nun von dem einzelnen Punkte des einen Ufers zu dem gegenüberliegenden Punkte des anderen Ufers des Einschnittes, indem man längs der Kreise der hyperbolischen Schaar einen Umlauf macht. Entsprechende Punkte der Begrenzungen der Figuren 9—11 werden daher durch eine elliptische, loxodromische resp. hyperbolische Substitution einander zugeordnet, deren Bahncurven eben die Curvenschaar I liefert. Es ist dies in den Figuren durch die quergestellten Pfeile angedeutet. Hierdurch werden die genannten Figuren zu *Fundamentalbereichen* in dem pag. 7 allgemein angegebenen Sinne. Der „Kern“ derselben wird einfach durch die räumliche Verbindungslinie  $AB$  gegeben, welche die innere Axe der Fundamentalsubstitution darstellt.

Allerdings werden in den Fällen eines reellen oder complexen Exponenten  $\lambda$  keineswegs stets solche einfachen Verhältnisse vorliegen, wie in den Figuren 9—11 gezeichnet sind. Da in Fig. 9 der Winkel, den die beiden Kreisbogen mit einander bilden,  $2\lambda'\pi$  beträgt, so werden in den Punkten  $A$  und  $B$  im allgemeinen Windungspunkte von beliebig hoher Ordnung liegen, indem der Fundamentalebereich sich so oft um die ganze Kugel herüberzieht, als die grösste ganze Zahl in  $\lambda'$  angiebt. Das Analoge findet auch im Falle der Fig. 10 in Rücksicht auf den reellen Theil  $\lambda'$  des complexen Exponenten statt, wie leicht zu übersehen ist. Hierbei wird der Bereich für complexen  $\lambda$  sich bereits für einen Werth  $\lambda' < 1$  beliebig oft selbst überdecken können, wenn nur das Verhältniss  $\frac{\lambda''}{\lambda'}$  hinreichend gross ist. Ein Theil eines solchen

Fundamentalebene ist zur Fixirung der Anschauung in Fig. 12 dargestellt (K). Nun steht aber nichts im Wege, die weit complicirteren Gestalten des Bereiches ins Auge zu fassen, in denen die letzten beiden Vorkommnisse gleichzeitig sich finden. Es ist dann schwierig, wenn

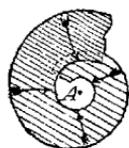


Fig. 12.

nicht ganz unmöglich, sich stets anschaulich klar den *gesamten* Fundamentalbereich vorzustellen. [Doch kann man sich leicht ein *Stück des letzteren* darstellen. Man braucht nämlich für einen gegebenen Exponenten  $\lambda$  nur zwei benachbarte loxodromische Bahncurven der zugehörigen Fundamentalsubstitution zu zeichnen, auf einer derselben

zwei sich entsprechende Punkte anzugeben und von diesen orthogonal zur anderen Loxodrome zu gehen. Dann wird ein Flächenstreifen bestimmt, der ein *Stück des genannten Fundamentalbereiches* darstellt und von zwei Elementen der Randcurven des letzteren und von zwei die Endpunkte desselben einander zuordnenden Bahncurven der Fundamentalsubstitution begrenzt wird. Von diesem Flächenstreifen aus kann man beliebig weit die Gestalt des Fundamentalbereiches fortsetzen. Doch werden wir sogleich in einfacherer Weise den Fundamentalbereich für beliebiges  $\lambda$  construiren.] Wir sehen ferner, dass in den Fällen eines reellen oder imaginären Exponenten d. h. der Figuren 9 und 11 der Fundamentalbereich eine symmetrische Gestalt (im Sinne der Symmetrie in Bezug auf einen Kreis) besitzt, d. h. durch einen Kreis des elliptischen resp. hyperbolischen Büschels in zwei bezüglich dieses Kreises symmetrische Hälften zerlegt werden kann, deren jede einer Halbebene des Argumentes  $z$  entspricht.

Haben wir bisher im Falle des complexen Exponenten  $\lambda$  als Schnittlinie der  $z$ -Ebene die einfachere Curve, dagegen als Begrenzung des Fundamentalbereiches der  $\eta$ -Ebene die complicirtere Curve gewählt, so werden wir jetzt wünschen, gerade umgekehrt vorzugehen, wenn wir überhaupt die Theorie auf geometrischer Grundlage entwickeln wollen,

○B wobei wir doch den Fundamentalbereich zum Ausgangspunkt wählen müssen. Da bietet sich nun, sofern wir  $\lambda$  zunächst allgemein complex denken, der doppelte Weg dar, entweder eine Loxodrome der einen oder der anderen ausgezeichneten Schaar in der  $z$ -Ebene als Schnittlinie zu wählen. Im einen Falle werden den beiden Ufern des Schnittes

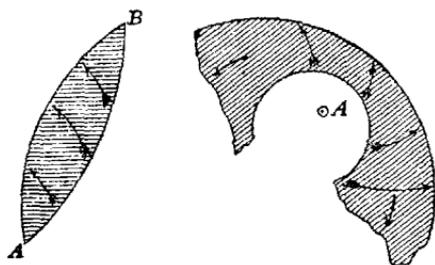


Fig. 13 und 14.

zwei Kreisbogen des elliptischen Büschels, im anderen Falle zwei Kreisbogen des hyperbolischen Büschels entsprechen, welche letztere wieder unendlich oft umlaufend zu denken sind (Figur 13 u. 14). Jedesmal

wird ein bestimmtes Flächenstück der  $\eta$ -Kugel eingeschlossen. Indem wir von einem beliebigen Punkte auf dem einen Ufer des Schnittes in der  $z$ -Ebene wieder durch Umlaufen eines Kreises des hyperbolischen Büschels der Punkte  $a$  und  $b$  zu dem gegenüberliegenden Punkte des anderen Ufers gelangen, ergibt sich die Zuordnung der begrenzenden Kreisbogen jenes Flächenstückes mittels der Loxodromen der Schaar I. Hierdurch wird den Figuren 13 und 14 wieder der Charakter der Fundamentalbereiche verliehen. Das wesentliche Resultat, welches wir dieser Betrachtung entnehmen, ist das folgende: *Im allgemeinen Falle eines complexen  $\lambda$  ist es sowohl möglich eine Kreissichel wie ein unendliches Kreisband, beidemale mit loxodromischer Zuordnung der Ränder, als Fundamentalbereich zu wählen.* Dies ist die in Aussicht gestellte einfachere Construction. Im ersteren Falle beträgt insbesondere der nicht-Euklidische Winkel, unter dem die Ebenen der beiden Kreise sich schneiden,  $2\lambda'\pi$ , im letzteren  $2\lambda''\pi i$ .\*) Diese Fundamentalbereiche werden wir als allgemeine *sphärische „Zweiecke“* bezeichnen können.

Wir haben uns nur noch klar zu machen, wie die beiden Darstellungen des Fundamentalbereiches Fig. 13 u. 14 sich in den Grenzfällen eines reellen resp. imaginären Exponenten verhalten. Im Falle des reellen Exponenten bietet die zweite Darstellung (Fig. 14) ein singuläres Vorkommniß, während die erste (Fig. 13) von der anfangs betrachteten (Fig. 9) nicht verschieden ist. Gerade umgekehrt ist es im Falle eines imaginären Exponenten. In den als singulär bezeichneten Fällen geht nämlich die entsprechende loxodromische Zerschneidung der  $z$ -Ebene über in die längs eines hyperbolischen Kreises der Punkte  $a$  und  $b$ , indem die Loxodrome eine unendlich kleine Steighöhe erhält, der zugehörige Fundamentalbereich dagegen im Falle eines reellen  $\lambda$  in ein unendlich schmales Kreisband, im Falle eines imaginären  $\lambda$  in eine unendlich schmale Kreissichel. Diese singulären Formen der Fundamentalbereiche, die als Grenzfälle ihre sehr gute Bedeutung haben, sind, unmittelbar genommen, natürlich unbrauchbar. *Im Falle reeller oder imaginärer Exponenten ist daher nur die Zerschneidung der  $z$ -Ebene längs eines elliptischen Kreisbogens zulässig, die zu der Kreissichel mit elliptischer oder dem Kreisband mit hyperbolischer Zuordnung der Ränder führt.*

Wir werden uns leicht auch direct davon überzeugen können, dass *im Falle complexer Exponenten die Zweiecke der Sichelform und der Kreisbandform äquivalent sind*, indem wir geradezu das eine in das andere durch Ausführung „erlaubter Abänderung“ des Bereiches überführen können. Gehen wir z. B. von der Sichel mit loxodromischer Zuordnung der Ränder aus. Wir können dann durch Bogen der hyperbolischen Kreise dieselbe in unendlich viele Kreisbogenvierecke zerlegt denken

\*) Vgl. die Bemerkungen auf Seite 166 dieser Arbeit.

der Art, dass allemal je zwei gegenüberliegende Ecken der Vierecke z. B.  $xx'$ ,  $yy'$ ,  $zz'$  u. s. w. durch die loxodromische Fundamentalsubstitution einander zugeordnet sind. Diese Stücke werden, je näher man den Punkten  $A$  und  $B$  kommt, für die Anschauung kleiner und kleiner. Dann

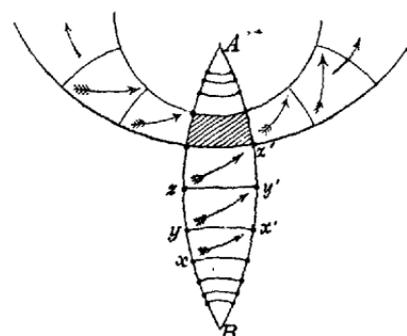


Fig. 15.

können wir z. B. von dem schraffierten Stücke (Fig. 15) ausgehen und an dieses die oben und unten anstossenden Stücke beiderseits durch einmalige Anwendung der loxodromischen Fundamentalsubstitution (resp. ihrer Umkehrung) ansetzen, darauf die zweitfolgenden Stücke durch zweimalige Anwendung derselben Substitution u. s. f. Solcherweise erhalten wir schliesslich aus der Kreissichel das unendliche Kreisband mit loxodromischer Zuordnung der Ränder. Die durch die hier angewandte Methode gelieferte Einsicht von der Gleichberechtigung der Sichelform und der Bandform werden wir allgemein als *Meridian- und Breitencurvenprincip* bezeichnen, indem die Begrenzungen der beiden Arten der Bereiche sich wie die Meridiane und Breitenkreise zu einander verhalten.

Um nun die Gesamtheit aller sphärischen Zweiecke besser übersehen zu können, werden wir die Begriffe des „reducirten Bereiches“ und der „mit einander verwandten Bereiche“ einführen, die uns im Falle dreier singulärer Punkte noch wesentliche Dienste leisten werden. Unter einem „reducirten Zweiecke“ verstehen wir einen solchen Fundamentalbereich, dessen Exponent  $\lambda$  in seinem reellen Theile  $\lambda'$  nicht grösser als 1 ist. Ferner nennen wir „mit einander verwandte Zweiecke“ allemal zwei solche Fundamentalbereiche, welche zu demselben Kern gehören, und deren Exponenten in ihrer Summe oder Differenz ganze Zahlen ergeben.

Zu der Gesamtheit aller mit einander verwandten Bereiche gehören demnach stets zwei reducirte Zweiecke, deren Exponenten  $\lambda_0$  und  $1 - \lambda_0$  betragen, woselbst der reelle Theil  $\lambda_0' \geq 1$  ist, mit der einzigen Ausnahme ganzzahliger Exponenten, von denen wir sogleich noch sprechen werden. Haben wir ein erstes reducirtes Zweieck in der Form der Sichel, wie in Figur 13, construirt, so wird das zweite reducirte Zweieck durch den nicht schraffirten Theil der  $\eta$ -Kugel mit derselben Zuordnung der Randpunkte gegeben. (Ist der reelle Theil des complexen Exponenten  $\lambda$  für das erste reducirte Zweieck speciell gleich 1, so wird das zweite reducirte Zweieck durch die unmittelbar nicht brauchbare unendlich schmale Sichel gegeben, die man durch den äquivalenten Bereich des unendlichen Kreisbandes ersetzen wird.) Von den reducirten Zweiecken der Sichelform aus steigen wir nun zu

allen verwandten Bereichen auf, indem wir in jedem der Zweiecke eine beliebige Zahl von Vollkugeln längs eines ganz auf dem Zweiecke verlaufenden, sich nicht selbst überkreuzenden Verzweigungsschnittes von  $A$  nach  $B$  anhängen. Liegt dagegen das reducirte Zweieck in der Form des unendlichen Kreisbandes mit bestimmter Zuordnung der Seiten vor, wie in Figur 14, (wobei dann reelle Exponenten natürlich ausgeschlossen sind), so werden wir alle mit ihm verwandten Bereiche, insbesondere auch das zweite reducirte Zweieck, erhalten, indem wir die Punkte des einen Kreises jetzt denjenigen Punkten des anderen Kreises zuordnen, die von den früher den ersteren entsprechenden Punkten um eine beliebige Zahl voller Kreisperipherien in einem oder anderem Umlaufsinne entfernt sind. Offenbar ist wegen der Einfachheit des hiermit geschilderten Processes in Betracht der Verwandtschaft die Form des unendlichen Kreisbandes vielleicht jener der Sichel vorzuziehen, indem für alle verwandten Bereiche die Fläche der Fundamentalbereiche ihrer Gestalt nach dieselbe ist.

Wir haben nun dem Vorstehenden noch zwei Bemerkungen hinzuzufügen, welche die besonderen Fälle der Fundamentalbereiche betreffen sollen, *dass der Exponent  $\lambda$  gleich einer ganzen Zahl (insbesondere gleich 0) oder aber  $\infty$  gross geworden ist.*

Was den ersten Fall betrifft, so ist der Fundamentalbereich für  $\lambda = 0$  von zwei sich berührenden Kreisen begrenzt, d. h. die Punkte  $A$  und  $B$  sind zusammengefallen. Die zugehörige Fundamentalsubstitution hat parabolischen Charakter und die abbildende Function wird abgesehen von den Constanten durch  $\eta = \log z$  gegeben (Fall der parabolischen Sichel). *Der Fall  $\lambda = 0$  ist überdies der einzige, in dem die Fundamentalsubstitution parabolisch wird und demnach ein Logarithmus auftritt.* Verwandte Bereiche gehören zu der parabolischen Sichel nicht.

*Die Fälle ganzzahliger, von 0 verschiedener Werthe des Exponenten  $\lambda$  ergeben zwar in der algebraischen Summe ihres Exponenten mit  $\lambda = 0$  ganze Zahlen, jedoch gehören ihre Fundamentalbereiche einem anderen Kern an.* Sie bilden für sich eine einzige Gesamtheit verwandter Bereiche. Das einzige zu ihnen gehörende reducirte Zweieck wird durch die Vollkugel dargestellt, die längs eines die getrennten Punkte  $A$  und  $B$  verbindenden Kreisbogens eingeschnitten ist.

Endlich wollen wir den zweiten Grenzfall betrachten, *dass der Exponent  $\lambda$  unendlich gross geworden ist.* Wir können uns denken, dass wir in einem beliebigen reducirten Zweieck der Sichelform längs eines Verzweigungsschnittes von  $A$  nach  $B$  nicht mehr eine endliche, sondern eine unendliche Zahl von Vollkugeln angehängt hätten. Dann entsteht ein Bereich, der sich nach beiden Seiten unablässig um die Punkte  $A$  und  $B$  windet, ohne je begrenzende Kreisbogen zu haben.

Die abbildende Function wird, wieder abgesehen von den Constanten, durch  $\eta = e^z$  dargestellt (d. h. durch die zu der obigen Function  $\eta = \log z$  inversen Function). Die singulären Punkte  $a$  und  $b$  in der Ebene des Argumentes sind für diesen Fall in einen Punkt zusammengerückt.

### § 6.

Anwendung des Meridian- und Breitencurvenprinzips auf die Fundamentalbereiche im Falle einer grösseren Zahl singulärer Punkte.

Das Meridian- und Breitencurvenprincip wird uns nun leicht auch in den Fällen einer grösseren Anzahl singulärer Punkte *eine Einsicht in das Wesen der unendlichen Kreisbänder* und ihre Beziehung zu den gewöhnlichen Ecken gewähren, wenn wir auch nicht mehr in gleich leichter Weise die zugehörigen Functionen und insbesondere die Zerschneidung der  $z$ -Ebene zu beherrschen vermögen. Wir beschränken uns auf den Fall dreier singulärer Punkte, für den wir einige Beispiele behandeln. Nehmen wir an, es sei uns ein

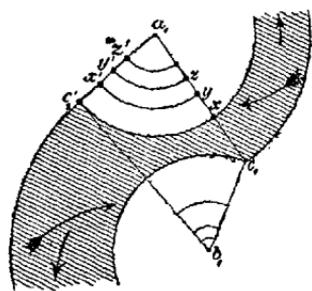


Fig. 16.

*Normalviereck*  $a_1 b_1 c_1 c_2'$  mit loxodromischer Zuordnung der Seitenpaare gegeben; dasselbe ist in Fig. 16 der Einfachheit halber geradlinig begrenzt gedacht. Wir theilen dann den Bereich wieder in Vierecke durch hyperbolische Kreise der zu den Fixpunkten  $a_1 a_2$  der Substitution A gehörenden Schaar, soweit die Seiten  $a_1 c_1$  und  $a_1 c_2'$  reichen, sodass die Punkte  $x, x'; y, y'; z, z'$  u. s. w. durch die

Substitution A einander entsprechen, ebenso in analoger Weise durch hyperbolische Kreise der zu den Fixpunkten  $b_1 b_2$  gehörenden Schaar, soweit die Seiten  $c_1 b_1$  und  $c_2' b_1$  reichen. Dann ist es leicht, wieder durch Verlegung der einzelnen Kreisbogenvierecke zu einem von vier Kreisen begrenzten Bereich überzugehen, von denen je 2, die sich nicht schneiden, durch die loxodromische Substitution A resp. B einander punktweise zugeordnet sind. *Jedoch sind jetzt die den Punkten  $a$  und  $b$  der Ebene des Argumentes entsprechenden Ecken verloren gegangen; statt dessen windet sich der Bereich, sich selbst überdeckend, jedesmal zwischen den sich nicht schneidenden Kreisen unendlich oft herum.\*)*

\*) Die im Texte angegebene Umwandlung der einen Figur in die andere ist natürlich nur dann ohne weiteres (d. h. bei Vermeidung negativ zu rechnender Bereichstücke, wovon wir hier nicht weiter sprechen wollen) möglich, wenn keine zwei gegenüberliegenden Kreise der hyperbolischen Schaaaren sich schneiden. Wohl aber kann man stets ein gewisses, hinreichend klein gewähltes Stück in der Ecke  $a_1$  (oder  $b_1$ ) des ursprünglichen Bereiches in ein  $\infty$  Kreisband überführen. Das Analoge gilt für das Folgende des Textes.

In gleicher Weise können wir auch von einem *Normalsechseck* ausgehen, welches wir wieder geradlinig begrenzt annehmen wollen. Wir verwandeln dann an demselben jede der Ecken  $a_1, b_1, c_1$  in ein unendliches Kreisband, wie es in der Figur 17 ausgeführt ist. Wir erhalten schliesslich den schraffirten Bereich der Fig. 17, der drei Ecken  $O_\alpha, O_\beta, O_\gamma$  aufweist, in denen die Summe der drei Winkel nach wie vor  $2\pi$  beträgt, und ausserdem in drei unendliche Kreisbänder ausläuft, deren begrenzende Seiten durch die loxodromischen Fundamentalsubstitutionen einander zugeordnet sind.

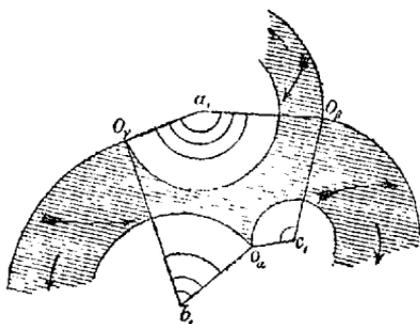


Fig. 17.

Ja, es wird sogar, allgemein gesprochen, möglich sein, für complexe Werthe der  $\lambda, \mu, \nu$  z. B. einen durchaus brauchbaren von vier Kreisbogen begrenzten Bereich zu construiren, dessen sämtliche Ecken verloren gegangen sind, indem die betr. Kreisbogen in vier unendliche Kreisbänder auslaufen. (Vgl. z. B. Fig. 83a.) Wie im Falle eines imaginären Exponenten jedoch der Fundamentalbereich in der Nähe einer von elliptischen Kreisbogen gebildeten Ecke unendlich schmal werden d. h. sich auf einen Kreisbogen zusammenziehen würde, so gilt hier das Analoge im Falle eines reellen Exponenten, indem das zugehörige unendliche Kreisband unendlich schmal ausfällt.

Wir wollen noch bemerken, dass auch die Figuren 16 und 17 die Bezeichnung „*Normalvierecke*“ (oder Normalvierseite) verdienen, da die begrenzenden Kreise den hyperbolischen Büscheln der Fixpunktpaare angehören. Natürlich kann man diese Specialisirung, d. h. die Beschränkung auf Kreise des Büschels, auch fallen lassen.

### III. Theil.

#### Ueber den Kern der Fundamentalbereiche im Falle dreier singulärer Punkte.

##### § 7.

#### Neue Veranschaulichung der loxodromischen Substitutionen.

Wir wenden uns jetzt zu der geometrischen Theorie der Schwarz'schen  $s$ -Function, und zwar werden wir unsere Betrachtung zunächst dem *Kern* widmen, den wir dem Fundamentalbereiche gegenüberstellen wollten. Wir definiren den Kern als das Gebilde der drei inneren

Axen der Fundamentalsubstitutionen A, B,  $\Gamma$ .) Gerade in der besonderen Untersuchung des Kernes, die auch sonst manches schöne Resultat liefert, dürfte ein nicht zu unterschätzendes Moment für die geometrische Einführung in die Theorie der Schwarz'schen  $s$ -Function begründet liegen.

Vorerst wollen wir in einer Vorbetrachtung eine neue und interessante geometrische Veranschaulichung der loxodromischen Substitutionen der complexen Variabeln auf der Kugel kennen lernen, von der wir sogleich Gebrauch zu machen haben.

Wenn eine *elliptische Substitution* der auf der Kugel gedeuteten Variabeln  $z$  mit ihrem Exponenten  $2\lambda'\pi i^{**}$ ) vorliegt, und man legt durch die innere Axe d. h. die Verbindungslinie der Fixpunkte derselben zwei Ebenen  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$ , die den (nicht-Euklidischen) Winkel  $\lambda'\pi$  mit einander bilden, so entsprechen sich allemal zwei solche Raumpunkte  $Q$  und  $Q'$ , die sich als Spiegelbilder eines dritten Raumpunktes  $R$  in Bezug auf die beiden Ebenen darstellen. Hierbei wollen wir

allgemein unter dem Spiegelbilde eines Raumpunktes  $R$  in Beziehung auf eine gegebene Ebene, mag letztere im übrigen die Kugel schneiden oder nicht, denjenigen Punkt  $Q$  verstehen, der auf der Verbindungslinie des Punktes  $R$  und des Poles der Ebene liegt und (nicht-Euklidisch) gerade so weit auf der anderen Seite der Ebene von dieser entfernt ist, wie der Punkt  $R$  auf seiner Seite. Projectiv genommen besagt dies, dass der Punkt  $R$  mit

seinem Spiegelbilde harmonisch liegt zu der Ebene und deren Pol; zugleich leuchtet ein, dass man ebensogut von der Spiegelung an dem Pol der Ebene reden könnte, indem man unter dem Spiegelbilde eines Punktes  $R$  in Beziehung auf einen zweiten denjenigen Punkt  $Q$  ihrer Verbindungslinie versteht, der um dieselbe Strecke auf der anderen Seite von dem spiegelnden Punkte entfernt liegt als der Punkt  $R$  auf seiner Seite. *Spiegelung an einem Punkte ist identisch mit der Spiegelung an seiner Polarebene.* Ist der Punkt  $R$  speciell ein Kugelpunkt, so wird sein Spiegelpunkt der zweite Schnittpunkt der Verbindungslinie von  $R$  und dem Pol der spiegelnden Ebene mit der Kugeloberfläche sein.

\*) Unter der „inneren Axe“ einer Substitution sei die Verbindungslinie der Fixpunkte verstanden, unter der „äusseren Axe“ die conjugirte Polare der ersteren.

\*\*\*) Unter dem „Exponenten“ einer Substitution wollen wir hier die Grösse  $\varphi$  in der Normalform verstehen:

$$\frac{z' - \alpha_1}{z' - \alpha_2} = e^{\varphi} \cdot \frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_2};$$

dieselbe stimmt natürlich nur bis auf den Factor  $2\pi i$  mit dem bezüglichen „Exponenten der  $s$ -Function“ überein.

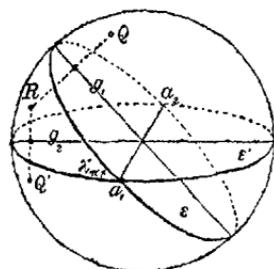


Fig. 18.

Aus dem hiermit ausgesprochenen Satze ergibt sich nun leicht die folgende Deutung der elliptischen Substitution, sowie der zugehörigen Drehung des Gesamttraumes: *Errichtet man in einem beliebigen Punkte der inneren Axe auf ihr zwei senkrechte (die Kugel schneidende) Gerade  $g_1$  und  $g_2$ , die den Winkel  $\lambda' \pi$  mit einander bilden, so gehen allemal zwei solche Raumpunkte in einander über, welche aus einem beliebigen dritten Punkte durch halbe (nicht-Euklidische) Drehungen um die beiden Senkrechten entstehen.\*) Dieser Uebergang von einem Raumpunkt zu dem ihm entsprechenden ist nämlich identisch mit der Aufeinanderfolge der vier Spiegelungen an der Ebene der beiden Senkrechten, an den Ebenen durch jede der letzteren und die innere Axe und wiederum an der ersten Ebene und erweist sich somit direct aus der geometrischen Figur als gleichwerthig mit der oben geschilderten Construction mittels zweier Spiegelungen.*

Diesen Sätzen stehen in ganz analoger Weise die beiden folgenden gegenüber: Bei einer vorliegenden *hyperbolischen Substitution* mit den Exponenten  $2\lambda'' \pi$  (wo  $\lambda''$  reell ist) entsprechen sich allemal zwei solche Raumpunkte  $Q$  und  $Q'$ , welche die Spiegelpunkte eines dritten Raumpunktes  $R$  in Beziehung auf zwei beliebige, sich unter dem Winkel  $i\lambda'' \pi$  längs der äusseren Axe schneidende Ebenen  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$  darstellen, — diese beiden Ebenen mögen übrigens ausserhalb der Kugel verlaufen oder dieselbe schneiden. Und die Folgerung aus diesem Satze: *Bei der hyperbolischen Substitution gehen stets diejenigen beiden Punkte des Raumes in einander über, welche aus einem dritten Punkte durch halbe Drehungen um zwei beliebige Senkrechte  $g_1$  und  $g_2$  (welche die Kugel schneiden) entstanden sind, die im Abstände  $i\lambda''$  auf der inneren Axe in einer beliebigen durch dieselbe gelegten Ebene errichtet wurden.*

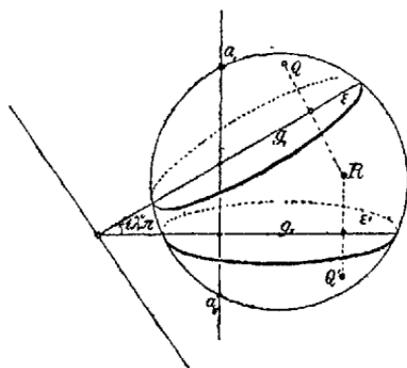


Fig. 19.

Da nun jede Schraubenbewegung des nicht-Euklidischen Raumes mit dem *complexen* Exponenten  $2(\lambda' + \lambda'' i)\pi$  sich als die Aufeinanderfolge einer elliptischen Substitution mit dem Exponenten  $2i\lambda' \pi$  und einer hyperbolischen Substitution mit dem Exponenten  $-2\lambda'' \pi$  betrachten lässt, welche dieselben Axen haben und überdies mit einander vertauschbar sind, so kommt man sofort zu dem allgemeinen

\*) Definition: Eine Gerade steht auf einer Ebene im nicht-Euklidischen Sinne senkrecht, wenn sie durch den Pol derselben hindurchgeht, und auf einer anderen Geraden, wenn sie die conjugirte Polare derselben trifft.

Sätze, auf den wir hinaus wollten: *Errichtet man auf der inneren Axe der Schraubenbewegung irgend zwei die Kugel schneidende Senkrechte  $g_1$  und  $g_2$ , so dass der Abstand ihrer beiden Fusspunkte gleich  $i\lambda'\pi$ , dagegen der Winkel der durch sie und die innere Axe gelegten Ebenen gleich  $\lambda'\pi$  wird, dann gehen gerade zwei solche Punkte  $Q$  und  $Q'$  des Raumes durch die zugehörige Collineation in einander über, welche durch eine halbe Drehung um diese beiden Senkrechten aus einem dritten Raumpunkte  $R$  hervorgegangen sind. Mit anderen Worten: Man kann jede (nicht-Euklidische) Schraubenbewegung auf mannigfache Art durch zwei Rotationen von der Periode 2 ersetzen.\*)*

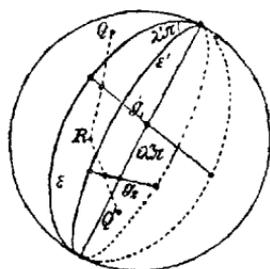


Fig. 20.

Alle diese Sätze gewinnen im übrigen eine einfache Anschaulichkeit, wenn man durch eine geeignete Substitution dafür sorgt, dass die innere Axe durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

## § 8.

Betrachtung dreier Schraubenbewegungen, deren Aufeinanderfolge die Identität erzeugt.

Gehen wir nun zu der Betrachtung der Aufeinanderfolge dreier loxodromischer Substitutionen der Variablen  $z$  über. Gegeben seien die zu einander windschiefen inneren Axen der Substitutionen, welche wir mit *I, II, III* bezeichnen wollen. Man construire alsdann die drei inneren kürzesten Abstände 1, 2, 3, die im Sinne der nicht-Euklidischen Geometrie zu je zweien der Geraden *I, II, III* gehören.\*\*) *Fasst man nun bei jeder der Geraden diejenige Schraubenbewegung ins Auge, welche sich in Bezug auf den oben ausgesprochenen Satz als die Aufeinanderfolge zweier halben Drehungen um die zugehörigen kürzesten Abstände darstellt, so erkennt man sofort, dass die Aufeinanderfolge dieser 3 Schraubenbewegungen um die Axen *I, II, III* zur Identität führt. Denn bezeichnet man mit *R, S, T* in*

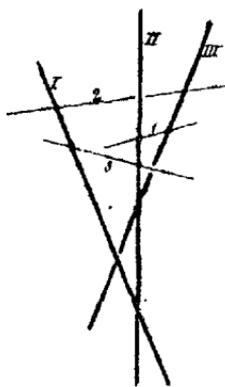


Fig. 21.

\*) Es sei auf einige Arbeiten des Herrn Wiener hingewiesen (Sächsische Berichte, 1890 p. 13, 71, 245 und 424 ff.), woselbst ganz analoge Betrachtungen für den Euklidischen Raum durchgeführt werden; man vgl. z. B. p. 22, sowie p. 439 ff. Wie Herr Wiener erwähnt, hat bereits Halphen diese Methoden für die Schraubenbewegung des gewöhnlichen Raumes benutzt in Nouv. Ann. de Math. III. Série, I, 1882, p. 296—299. Ferner sehe man auch Study, Von den Bewegungen und Umlegungen. Ann. Bd. 39, 1891, p. 469.

\*\*) Vergl. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie III, 1, 1891, p. 505, sowie auch Wedekind, Studien im binären Werthgebiet, Karlsruhe 1876, p. 9 ff.

symbolischer Weise entspr. die Operationen der halben Drehungen um die 3 kürzesten Abstände 1, 2, 3, so gelten für dieselben die Beziehungen  $RR = 1$ ,  $SS = 1$ ,  $TT = 1$ , welche bedeuten, dass jede der genannten Operationen zweimal ausgeführt die Identität ergibt. Die genannten drei Schraubenbewegungen um die Axen  $I$ ,  $II$ ,  $III$  werden nun dargestellt durch die Symbole  $ST$ ,  $TR$ ,  $RS$ , deren Aufeinanderfolge den geltenden Relationen gemäss in der That die Identität erzeugt. \*) Diese drei Substitutionen werden wir in der Folge die Fundamentalsubstitutionen des Kernes der Geraden  $I$ ,  $II$ ,  $III$  nennen und sie mit  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  entspr. bezeichnen. Wir können als Ergänzung des obigen Satzes noch hinzufügen: *Allemaal solche drei Punkte des Raumes gehen durch die Fundamentalsubstitutionen in einander über, die durch 3 halbe Drehungen um die Geraden 1, 2, 3 aus einem beliebigen Raumpunkte entstanden zu denken sind.*

Da nun die Geraden  $I$ ,  $II$ ,  $III$  ihrerseits die kürzesten Abstände je zweier der Geraden 1, 2, 3 liefern, so behalten die aufgestellten Sätze ihre volle Gültigkeit, wenn man in ihnen die Geraden  $I$ ,  $II$ ,  $III$  mit den Geraden 1, 2, 3 vertauscht. Hierin offenbart sich die Verallgemeinerung derjenigen elementaren Betrachtungen der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie, welche sich auf das Polardreieck zu einem gegebenen Dreieck beziehen. Dementsprechend wollen wir das Gebilde 1, 2, 3 den *Polarkern* des gegebenen Kernes  $I$ ,  $II$ ,  $III$  nennen. Ersichtlich gilt der Satz: *Der Polarkern des Polarkernes ist der ursprüngliche Kern.* Wir werden später auf diese Verhältnisse noch wiederholt zurückkommen.

Wir führen nun einige einfache Bezeichnungen ein, denen, wie bisher, wieder die nicht-Euklidische Massbestimmung zu Grunde liegt. Zunächst fassen wir je einen von den zwei Schnittpunkten der Geraden  $I$ ,  $II$ ,  $III$  mit der Kugel besonders ins Auge, der später bei der Aufstellung der Normalformen für die loxodromischen Substitutionen in den Zähler zu stehen kommen soll. Wir nennen diese 3 ausgezeichneten Punkte  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ . In entsprechender Weise wählen wir bei den Geraden 1, 2, 3 drei Punkte  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  aus. Die auf den Geraden  $I$ ,  $II$ ,  $III$  durch die kürzesten Abstände abgeschnittenen Längen setzen wir nun gleich  $i\lambda''\pi$ ,  $i\mu''\pi$ ,  $i\nu''\pi$ , die auf den Geraden 1, 2, 3 abgeschnittenen Längen gleich  $il''\pi$ ,  $im''\pi$ ,  $in''\pi$ , und zwar mögen diese Grössen ein positives oder negatives Vorzeichen besitzen, je nachdem in Rücksicht auf die cyklische Reihenfolge I, 3, II, 1, III, 2 entspr. die Richtung vom Schnittpunkte einer dieser Geraden mit der voranstehenden Geraden zum Schnittpunkte mit der folgenden

\*) Eine Verallgemeinerung dieser Betrachtungen ergibt z. B. den Satz: Jede beliebige Schraubenbewegung kann in die Aufeinanderfolge dreier Schraubenbewegungen um drei vorgegebene Axen zerlegt werden.

Geraden auf den zu ersterer gehörenden ausgewählten Schnittpunkt hinweist oder von ihm abweist; es ist also z. B.  $i\lambda''\pi$  positiv oder negativ, je nachdem die Richtung vom Punkte (2 I) zum Punkte (I 3) auf den Punkt  $a_1$  hinweist oder von ihm abweist. Weiter bezeichnen wir den Winkel, durch welchen man die durch eine der Geraden I, II, III und die vorhergehende der Geraden 1, 2, 3 gelegte Ebene im positiven Sinne um die erste Gerade drehen muss, bis sie mit der durch diese und die nachfolgende der Geraden 1, 2, 3 gelegten Ebene zusammenfällt, mit  $\lambda'\pi, \mu'\pi, \nu'\pi$ ; hierbei soll unter der positiven Drehungsrichtung diejenige verstanden werden, die sich für einen im Punkte  $a_1$  oder  $b_1, c_1$  auf der Kugel stehenden Beobachter als mit dem Drehungssinne des Uhrzeigers übereinstimmend erweist. In ganz entsprechender Weise führen wir in Bezug auf die Geraden 1, 2, 3 und die zugehörigen Punkte  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  die Winkelbezeichnungen  $l'\pi, m'\pi, n'\pi$  ein. Wie man sofort sieht, sind diese Winkel nur bis auf ganze Vielfache von  $\pi$  bestimmt; diese Mehrdeutigkeit wird auch in unseren Schlussformeln sich wieder geltend machen. Im übrigen werden wir sogleich hierauf noch einzugehen haben; zum Zweck dieser späteren Betrachtung ist auch die Definition der Grössen  $\lambda', \lambda''$  etc. mit der angegebenen Genauigkeit vorgenommen worden. Setzt man nun:

$$\begin{array}{l|l} \lambda = \lambda' + i\lambda'' & l = l' + il'' \\ \mu = \mu' + i\mu'' & m = m' + im'' \\ \nu = \nu' + i\nu'' & n = n' + in'' \end{array}$$

so kann man den soeben aufgestellten Satz in der einfachen Form aussprechen: *Führt man um die Geraden I, II, III nach einander drei nicht-Euklidische Schraubenbewegungen aus, deren Exponenten bezw. gegeben sind durch  $2\lambda\pi i, 2\mu\pi i, 2\nu\pi i$ , so gelangen die Punkte des Gesamttraumes wieder in ihre Anfangslage zurück.* Der analoge Satz gilt natürlich für die Aufeinanderfolge der drei nicht-Euklidischen Schraubenbewegungen um die Axen 1, 2, 3 mit den Exponenten  $2l\pi i, 2m\pi i, 2n\pi i$ . —

Wir können nun den an die einfache Figur 21 angeknüpften Betrachtungen noch eine Erweiterung geben, indem wir auch die Polaren I', II', III' der Geraden I, II, III, d. h. die äusseren Axen der Schraubenbewegungen A, B, C, und die Polaren 1', 2', 3' der Geraden 1, 2, 3, d. h. die äusseren kürzesten Abstände der Geraden I, II, III, in Betracht ziehen. Die Geraden 1, 2, 3 resp. 1', 2', 3' enthalten dann zugleich die kürzesten Abstände je zweier der Geraden I', II', III', während umgekehrt die Geraden I', II', III' wiederum die äusseren kürzesten Abstände je zweier Geraden des Tripels 1', 2', 3' bilden. Auf jeder der 12 Geraden liegen ferner 4 Schnittpunkte, die zu je zweien sich involutorisch entsprechen, und zwar bilden die Schnitt-

punkte der Geraden mit der Kugel die Doppelpunkte der Involution, die daher für die 6 die Kugel schneidenden Geraden hyperbolischen Charakter, für die übrigen 6 ausserhalb der Kugel verlaufenden Geraden elliptischen Charakter besitzt. Der kürzeste Abstand  $i\lambda''$  zum Beispiel, d. h. der Abstand der inneren beiden Punkte der Geraden  $I$ , findet sich wieder als Abstand der beiden äusseren Punkte derselben Geraden oder als Winkel, welchen die Polarebenen dieser beiden inneren oder dieser beiden äusseren Punkte mit einander bilden, also z. B. als Winkel der Ebenen  $(I' 2')$  und  $(I' 3')$ . Entsprechendes gilt natürlich für alle übrigen Grössen.

### § 9.

#### Specialisirung der Resultate für den Fall dreier elliptischer oder hyperbolischer Substitutionen.

Es dürfte interessant sein, diese Beziehungen zu specialisiren für den Fall, dass die 3 Geraden  $I, II, III$  sich in einem Punkte (innerhalb, ausserhalb oder auf der Kugel) schneiden oder in einer Ebene liegen, der Art, dass wir es mit drei elliptischen oder drei hyperbolischen Fundamentalsubstitutionen zu thun haben. Im letzteren Falle z. B. werden wir die folgenden Figuren in der Ebene der Geraden  $I, II,$

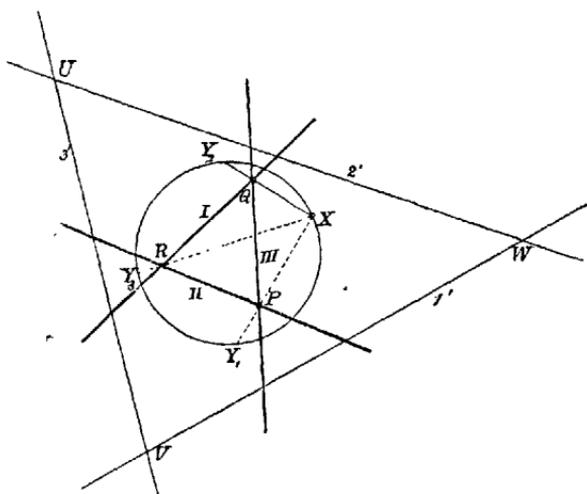


Fig. 22.

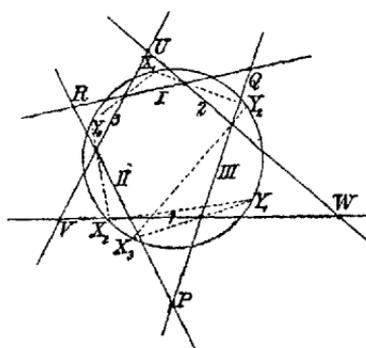


Fig. 23.

$III$  erhalten, je nachdem die drei Schnittpunkte  $P, Q, R$  der Geraden  $I, II, III$  sämtlich innerhalb oder sämtlich ausserhalb der Kugel liegen. Die Verbindungslinien der Punkte  $P, Q, R$  mit dem Pol der Zeichenebene geben für Fig. 22 die Geraden  $1, 2, 3$ , für Fig. 23 die Geraden  $1', 2', 3'$ ; die Verbindungslinien der Punkte  $U, V, W$  mit dem gleichen Pol dagegen für Fig. 22 wie 23 die Geraden  $I', II', III'$ .

Es ist nun gemäss den Bemerkungen auf pag. 187 ein Leichtes, zu jedem beliebigen Punkte der Kugeloberfläche die beiden anderen sofort anzugeben, in die er durch die zu unserem Kern gehörigen linearen Substitutionen übergeht. Verbindet man z. B. in Fig. 22 einen beliebigen Punkt  $X$  der Kugeloberfläche mit den Punkten  $P, Q, R$  und bezeichnet die zweiten Schnittpunkte dieser Verbindungsgeraden und der Kugel mit  $Y_1, Y_2, Y_3$ , so geht durch die Substitution  $A$  der Punkt  $Y_2$  in  $Y_3$ , durch  $B$   $Y_3$  in  $Y_1$ , durch  $\Gamma$   $Y_1$  in  $Y_2$  über. In der Fig. 23 erfordert die analoge Construction dreier einander entsprechender Punkte  $Y_1, Y_2, Y_3$  den im Allgemeinen räumlichen Linienzug des Sechsecks  $Y_2 X_1 Y_3 X_2 Y_1 X_3$ , deren Seiten, wie die Figur es zeigt, durch je einen der Schnittpunkte im Innern des Kreises gehen. Diese Constructionen lassen sich in sehr einfacher Weise auf den allgemeinen Fall dreier Schraubenbewegungen übertragen, wenn man sich erinnert, dass jede Schraubenbewegung in die Aufeinanderfolge einer Drehung und einer Verschiebung zerlegt werden kann. An Stelle des räumlichen Sechsecks der Fig. 23 tritt dann ein räumliches, der Kugel einbeschriebenes Zwölfeck, dessen abwechselnde Ecken den Gang des betreffenden Kugelpunktes angeben.

Wenn wir nun den aus unseren späteren Betrachtungen folgenden allgemeinen Satz hier vorweg nehmen, dass bei 3 vorgegebenen Geraden  $I, II, III$ , die wir als innere Axen dreier Schraubenbewegungen des Raumes anzusehen haben, die Exponenten der zugehörigen Substitutionen im Allgemeinen bis auf ganze Vielfache von  $2\pi i$  *eindeutig* bestimmt sind, falls ihre Aufeinanderfolge die Identität erzeugen soll, so können wir aus unseren Betrachtungen sofort den Satz folgern: *Die Bedingung, dass die drei Geraden  $I, II, III$  sich in einem Punkte innerhalb oder ausserhalb der Kugel schneiden, oder in einer Ebene liegen und dann sich in 3 Punkten, die sämtlich innerhalb oder sämtlich ausserhalb der Kugel liegen, schneiden, ist nicht nur hinreichend, sondern auch nothwendig, damit wir es mit drei elliptischen resp. drei hyperbolischen Substitutionen zu thun haben, welche hinter einander angewandt die Identität erzeugen.\*)*

Dieser letzte Satz lässt sich sehr leicht auch direct nachweisen: Bei einer einfachen Drehung des nicht-Euklidischen Raumes z. B., wie er durch eine elliptische Substitution gegeben wird, bleiben die Punkte der inneren Axe unverändert in ihrer Lage; jeder andere Raumpunkt beschreibt in einer zu dieser Axe senkrechten Ebene um den Schnittpunkt beider einen nicht-Euklidischen Kreis. Sollen nun zwei elliptische Drehungen sich wieder zu einer solchen zusammensetzen, so muss zum wenigsten auch ein Punkt im Innern der Kugel nach beiden Drehungen an seine Ausgangsstelle zurückgekommen sein.

\*) Vgl. Klein, Ann. 9, 1876, p. 186—187.

Dieser Punkt hat bei den beiden Drehungen Bogen zweier Kreise beschrieben, die sich in 2 Punkten schneiden. Durch diese Kreise lässt sich daher eine nicht-Euklidische Kugel legen. Verbindet man den Mittelpunkt dieser Kugel mit den Mittelpunkten der beiden Kreise, so werden, wie leicht zu sehen ist, diese Verbindungslinien auf den Ebenen der Kreise senkrecht stehen und müssen daher mit den beiden ersten Drehungsaxen zusammenfallen. Folglich schneiden sich dieselben in einem Punkte, durch den dann auch die dritte Axe hindurchgeht.\*)

In ganz analoger Weise werden wir auch den Beweis im *Falle dreier hyperbolischer Substitutionen* führen können, indem wir mutatis mutandis an Stelle der inneren die äusseren Axen der Collineation treten lassen. Haben wir aber zunächst die Nothwendigkeit der Bedingung erwiesen, dass die inneren Axen in einer Ebene liegen müssen, damit die Gleichung  $AB\Gamma = 1$  für 3 hyperbolische Substitutionen gilt, so zeigt eine einfache Specialbetrachtung leicht, dass ausserdem noch die Schnittpunkte der drei inneren Axen sämtlich innerhalb oder sämtlich ausserhalb der Kugel gelegen sein müssen. Denn falls einer der Schnittpunkte innerhalb, die beiden anderen aber ausserhalb der Kugel liegen, oder zwei innerhalb und der dritte ausserhalb (Fig. 24 u. 25), so kann man bei beliebiger Wahl der Bewegungsrichtungen

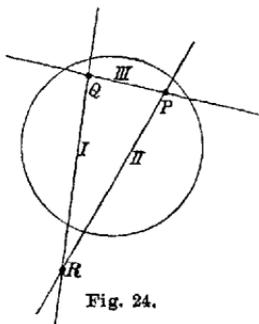


Fig. 24.

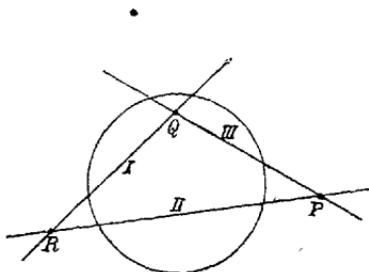


Fig. 25.

in den inneren Axen stets einen Fixpunkt der Substitutionen angeben, der unmöglich nach der Aufeinanderfolge der Substitutionen A, B,  $\Gamma$  in cyklischer Reihenfolge an seine Ausgangsstelle zurückgelangt sein kann.\*\*)

Werfen wir nun noch einen Blick auf die Schraubenbewegungen,

\*) Dieser Beweis bedient sich der gewöhnlichen Beweismethode, wie sie von Lobatcheffsky und Bolyai in ihren Entwicklungen der hyperbolischen Geometrie („absolute Geometrie“) angewandt ist; insbesondere sind bekanntlich alle Lehrsätze, die nicht das Parallelaxiom, wohl aber z. B. die Congruenzsätze zu ihrem Beweise bedürfen, in der Euklidischen wie in der nicht-Euklidischen Geometrie in gleicher Weise gültig.

\*\*) Als Uebergangsfall der soeben behandelten ergibt sich der Fall dreier parabolischer Substitutionen, dessen Kern durch drei sich in einem Punkte schneidende Tangenten der Kugel gegeben wird.

die zu den Axen 1, 2, 3, dem Polarkern, im Falle dreier elliptischer oder dreier hyperbolischer Substitutionen gehören, so finden wir die folgende interessante Beziehung:

1. *Der Fall dreier elliptischer Substitutionen, deren innere Axen sich im Innern der Kugel schneiden, entspricht sich selbst, d. h. die zugehörigen Substitutionen des Polarkernes, deren Aufeinanderfolge die Identität erzeugt, haben ebenfalls elliptischen Charakter derselben Art, d. h. ihre inneren Axen schneiden sich gleichfalls im Innern der Kugel.*

2. *Im Falle dreier elliptischen Substitutionen, deren innere Axen sich ausserhalb der Kugel schneiden, sind die zugehörigen Substitutionen des Polarkernes von hyperbolischem Charakter, jedoch liegen die Schnittpunkte der inneren Axen derselben sämmtlich im Innern der Kugel. Ebenso gilt die Umkehrung.*

3. *Der Fall dreier hyperbolischer Substitutionen, deren innere Axen sich sämmtlich ausserhalb der Kugel treffen, entspricht wieder sich selbst, d. h. die zugehörigen Substitutionen des Polarkernes haben hyperbolischen Charakter derselben Art.)\**

Bisher haben wir nur von den Specialfällen gesprochen, in denen die 3 Fundamentalsubstitutionen entweder sämmtlich elliptisch oder sämmtlich hyperbolisch waren. Die Figuren 24 und 25 geben uns nun sogleich Anlass, auch die Specialfälle ins Auge zu fassen, dass eine der Substitutionen elliptisch, die beiden anderen aber hyperbolisch oder eine hyperbolisch, die beiden anderen aber elliptisch sind. Die gegenseitige Lage der inneren Axen in diesen Fällen wird nämlich direct durch den Polarkern der genannten Figuren gegeben. Es ist kaum nöthig, diese einfachen Verhältnisse noch näher auszuführen; die zu den Geraden der Figuren 24 und 25 selbst, d. h. zu dem Polarkern unserer Specialfälle gehörenden Fundamentalsubstitutionen sind durch 3 Substitutionsexponenten charakterisirt, deren imaginäre Bestandtheile bis auf beliebige Vielfache von  $2\pi i$  entspr. gleich  $\pi i$ ,  $\pi i$ ,  $0$  sind. Allgemein gilt der Satz:

*Schneiden sich 2 der inneren Axen ausserhalb in einem Punkte, so hat die zu ihrem kürzesten Abstand zugehörige Fundamentalsubstitution des Polarkernes hyperbolischen Charakter.*

*Schneiden sich 2 der inneren Axen innerhalb der Kugel, so hat die zu ihrem kürzesten Abstände zugehörige Fundamentalsubstitution des Polarkernes elliptischen Charakter.*

\*) Von dem Specialfalle, dass die 3 inneren Axen sich auf der Kugel in einem Punkte schneiden, zugleich dem Uebergangsfalle von 1 und 2, werden wir später noch ausführlich handeln. Wir erkennen schon jetzt, dass dann die zugehörigen Fundamentalsubstitutionen keineswegs ohne Weiteres eindeutig bestimmt sind, allemal jedoch eine Auswahl derselben 3 elliptische Substitutionen darstellt, vgl. pag. 172 und pag. 195 u. 196.

## § 10.

Die in der Gleichung  $AB\Gamma = 1$  enthaltenen Relationen als Doppelverhältnissbeziehungen der 6 Fixpunkte.

Wir gehen nun dazu über, in der Betrachtung des Kernes und seiner Fundamentalsubstitutionen den rein geometrischen Weg zu verlassen und uns der algebraischen Rechnung zu bedienen. Unser nächstes Ziel wird die Aufstellung gewisser Doppelverhältnissgleichungen bilden, welche die Fixpunkte der Substitutionen mit ihren Exponenten verknüpfen. Sie stellen in entwickelter Form den Ausdruck der Bedingung  $AB\Gamma = 1$  dar, welche 3 unabhängige Relationen in sich birgt. Es seien 3 loxodromische Substitutionen\*) gegeben in der Form:

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad & s' = e^{2i\pi\lambda} \cdot s, \\ \text{B)} \quad & \frac{s' - b_1}{s' - b_2} = e^{2i\pi\mu} \cdot \frac{s - b_1}{s - b_2}, \\ \text{C)} \quad & \frac{s' - c_1}{s' - c_2} = e^{2i\pi\nu} \cdot \frac{s - c_1}{s - c_2}. \end{aligned}$$

Wir haben das Coordinatensystem der Einfachheit halber der Art angenommen, dass die Fixpunkte  $a_1$  und  $a_2$  der Substitution A zum Null- und Unendlichkeitspunkt gewählt sind. Wir benutzen nun den Ansatz  $AB\Gamma = 1$  in der Form  $AB = \Gamma^{-1}$ , d. h. die Aufeinanderfolge der Substitutionen A und B soll gleichwerthig mit der inversen Substitution  $\Gamma$  sein. Ein beliebiger Punkt  $s_0$  wird nach der Anwendung der Substitutionen A und B in einen Punkt  $s_0'$  übergegangen sein, der sich aus der folgenden Gleichung ergibt:

$$\text{I)} \quad \frac{s_0' - b_1}{s_0' - b_2} = e^{2i\pi\mu} \cdot \frac{e^{2i\pi\lambda} \cdot s_0 - b_1}{e^{2i\pi\lambda} \cdot s_0 - b_2}.$$

Zu demselben Punkte muss man gelangen, wenn man auf  $s_0$  die Substitution  $\Gamma^{-1}$  anwendet. Wir haben daher die weitere Gleichung:

$$\text{II)} \quad \frac{s_0' - c_1}{s_0' - c_2} = e^{-2i\pi\nu} \cdot \frac{s_0 - c_1}{s_0 - c_2}.$$

Wir geben nun  $s_0$  nach einander die speciellen Werthe  $e^{-2i\pi\lambda} \cdot b_2$ ,  $e^{-2i\pi\lambda} \cdot b_1$ ,  $c_1$  und  $c_2$ . Dies führt uns zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{b_2 - c_1}{b_2 - c_2} = e^{-2i\pi\nu} \cdot \frac{e^{-2i\pi\lambda} \cdot b_2 - c_1}{e^{-2i\pi\lambda} \cdot b_2 - c_2}, \quad \left( \begin{array}{l} s_0 = e^{-2i\pi\lambda} \cdot b_2 \\ s_0' = b_2 \end{array} \right), \\ 2) \quad & \frac{b_1 - c_1}{b_1 - c_2} = e^{-2i\pi\nu} \cdot \frac{e^{-2i\pi\lambda} \cdot b_1 - c_1}{e^{-2i\pi\lambda} \cdot b_1 - c_2}, \quad \left( \begin{array}{l} s_0 = e^{-2i\pi\lambda} \cdot b_1 \\ s_0' = b_1 \end{array} \right), \end{aligned}$$

\*) Die Grössen  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , um beliebige ganze Zahlen vermehrt, lassen unsere Ausgangsformel unverändert, doch haben wir die beiden Gruppen der Auswahl dieser Grössen einander gegenüberzustellen, für welche die Summen  $\lambda + \mu + \nu$  sich um eine ungerade ganze Zahl unterscheiden. Wir werden diesen Umstand in unseren Endformeln klar hervortreten sehen.

$$3) \frac{c_1 - b_1}{c_1 - b_2} = e^{2i\pi\mu} \cdot \frac{e^{2i\pi\lambda} \cdot c_1 - b_1}{e^{2i\pi\lambda} \cdot c_1 - b_2}, \quad (s_0 = c_1, \quad s' = c_1),$$

$$4) \frac{c_2 - b_1}{c_2 - b_2} = e^{2i\pi\mu} \cdot \frac{e^{2i\pi\lambda} \cdot c_2 - b_1}{e^{2i\pi\lambda} \cdot c_2 - b_2}, \quad (s_0 = c_2, \quad s'_0 = c_2).$$

Zwischen diesen Gleichungen muss nothwendig eine Beziehung bestehen, da der Ansatz  $AB\Gamma = 1$  nur 3 Gleichungen umfasst; man erkennt, dass in der That die Gleichungen 1 und 2, sowie 3 und 4, beiderseits durch einander dividirt zu demselben Resultate führen.

Fasst man in diesen Gleichungen die Quotienten  $\frac{c_1}{b_1}$ ,  $\frac{c_2}{b_1}$ ,  $\frac{c_1}{b_2}$ ,  $\frac{c_2}{b_2}$  als Unbekannte auf, so führt die directe Auflösung der ersteren zu der in Aussicht gestellten Formelgruppe, in der wir zugleich in Rücksicht auf die Annahme  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = \infty$  für die genannten Quotienten ihre Doppelverhältniss-Ausdrücke einführen:

$$I. \quad \left. \begin{aligned} \frac{c_1}{b_1} &= DV(a_1 a_2 c_1 b_1) = \frac{e^{-i\pi\lambda} \pm e^{i\pi(\nu-\mu)}}{e^{i\pi\lambda} \pm e^{i\pi(\nu-\mu)}}, \\ \frac{c_2}{b_1} &= DV(a_1 a_2 c_2 b_1) = \frac{e^{-i\pi\lambda} \pm e^{-i\pi(\mu+\nu)}}{e^{i\pi\lambda} \pm e^{-i\pi(\mu+\nu)}}, \\ \frac{c_1}{b_2} &= DV(a_1 a_2 c_1 b_2) = \frac{e^{-i\pi\lambda} \pm e^{i\pi(\mu+\nu)}}{e^{i\pi\lambda} \pm e^{i\pi(\mu+\nu)}}, \\ \frac{c_2}{b_2} &= DV(a_1 a_2 c_2 b_2) = \frac{e^{-i\pi\lambda} \pm e^{i\pi(\mu-\nu)}}{e^{i\pi\lambda} \pm e^{i\pi(\mu-\nu)}}. \end{aligned} \right\}$$

Und zwar ist in diesen Formeln, wie sich aus ihrer Ableitung ergibt, entweder *stets das positive oder stets das negative Zeichen zu wählen*; wir kommen sogleich hierauf noch zurück. *Hierzu tritt noch die Gleichung:*

$$II. \quad \frac{c_1}{b_1} \cdot \frac{c_2}{b_2} = DV(a_1 a_2 c_1 b_1) \cdot DV(a_1 a_2 c_2 b_2) = e^{-2i\pi\lambda},$$

die sich aus der oben angegebenen, zunächst für  $e^{2i\pi\lambda}$  quadratischen Identität ergibt, nachdem man die Wurzel  $e^{2i\pi\lambda} = 1$ , d. h.  $\lambda$  gleich einer ganzen Zahl, abgesondert hat. (Die Wurzel  $e^{2i\pi\lambda} = 1$  bedeutet geometrisch, dass man drei Operationen, deren Aufeinanderfolge die Identität erzeugt, auch erhält, wenn man um jede der Axen eine beliebige Zahl voller Umdrehungen ausführt. Von diesem trivialen Falle sehen wir natürlich weiterhin ab.)

Man kann den Gleichungen I durch Ersetzung der Exponentialgrößen durch goniometrische Functionen leicht auch die folgende, besonders für reelle  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  bequeme Gestalt geben:

$$I'. \quad DV(a_1 a_2 c_1 b_1) = e^{-i\pi\lambda} \cdot \frac{\cos\left(\frac{-\mu + \nu + \lambda}{2} \cdot \pi\right)}{\cos\left(\frac{-\mu + \nu - \lambda}{2} \cdot \pi\right)} \text{ u. s. w.}$$

Diese Formeln entsprechen den positiven Zeichen der Formelgruppe I; ihnen gegenüber stehen die den negativen Zeichen entsprechenden, in denen die Cosinusfunctionen durch Sinusfunctionen ersetzt sind. \*)

Es ist ersichtlich, dass wir durch cyklische Vertauschung der Buchstaben noch weitere analoge Gleichungen erhalten, die wir nicht anführen wollen.

Machen wir nun sogleich einige Anwendungen der gefundenen Beziehungen. Das wesentliche Resultat, welches wir der Formelgruppe II entnehmen, ist zunächst der Satz, dessen wir bereits auf pag. 190 Erwähnung thaten:

*Bei drei gegebenen Geraden I, II, III (welche natürlich die Kugel schneiden müssen) sind die Exponenten der zugehörigen loxodromischen Substitutionen, deren Aufeinanderfolge die Identität erzeugt, bis auf ganze Vielfache von  $2\pi i$ , eindeutig bestimmt.*

Weiter aber gestatten die Gleichungen z. B. bei gegebenen Fixpunkten die Exponenten und bei gegebenen Werthen der  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  und drei gegebenen Fixpunkten die übrigen Fixpunkte in einfachster Weise wirklich zu berechnen; gemäss des doppelten Vorzeichens der Formeln I ist die Lösung der zweiten Aufgabe *zweiwerthig*. Betreffs der genauen Unterscheidung der beiden Vorzeichen wird man aus der Betrachtung specieller zu dem Kern zugehöriger Fundamentalbereiche leicht erkennen, dass nur die *eine* Auswahl der Grössen  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  den Fundamentalbereichen entspricht, nämlich diejenige, welche zu den Cosinusformeln führt; wir werden daher diese Auswahl auch zu bevorzugen haben. (Die Gleichungen I mit positivem Vorzeichen erhält man übrigens aus den Gleichungen I mit negativem Vorzeichen, indem man  $\lambda$  oder  $\mu$  oder  $\nu$  um 1 vermehrt; beide Gleichungsgruppen bleiben unverändert, wenn man die Grössen  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  um ganze Zahlen vermehrt, deren Summe gerade ist.) Die letzten Gedanken hängen aufs Engste mit der Theorie der verwandten  $s$ -Functionen zusammen\*\*); wir werden geradezu als geometrische *Definition* aufstellen, *solche  $s$ -Functionen mit einander verwandt zu nennen, deren Fundamentalbereiche zu demselben Kern gehören.* Wir werden hierauf später noch eingehend zurückkommen.

Man erkennt weiter aus der Formelgruppe I' den Satz: *Ist  $\pm \lambda \pm \mu \pm \nu$  in irgend einer Auswahl der Vorzeichen für den Fall*

\*) Für reelle Werthe der Grössen  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  wird man diese Formel leicht mit der Form der Doppelverhältnisse von 4 Kugelpunkten in Beziehung setzen können, wie sie Hr. Wedekind in seinen „Beiträgen zur geometrischen Interpretation binärer Formen“ angiebt (Diss. Erlangen, 1875, pag. 12). Man vergleiche auch die bezüglichen Formeln in der bereits genannten Arbeit Riemanns, Ges. Werke 1876, pag. 68, sowie Papperitz, Ann. 25, 1885, pag. 217.

\*\*) Papperitz, Ann. 25, 1885, pag. 212 ff.; Ann. 26, 1886, pag. 97 ff.

der Gültigkeit der Cosinusformeln gleich einer ungeraden Zahl (für den Fall der Gültigkeit der Sinusformeln gleich einer geraden Zahl), so schneiden sich die inneren Axen I, II, III stets in einem Punkte auf der Kugeloberfläche und umgekehrt. Der Beweis ergibt sich daraus, dass jedenfalls eines der Doppelverhältnisse bei der angegebenen Voraussetzung 0 oder  $\infty$  wird. Hieraus folgt aber, dass zwei der Axen I, II, III durch einen Punkt der Kugeloberfläche gehen müssen, welcher dann auch der dritten Axe angehört. Auch dieser Satz findet seine gute Anwendung in der Theorie der hypergeometrischen Function, indem aus der Bedingung  $\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$  (wo  $n$  eine ganze Zahl bezeichnet) auf die Möglichkeit geschlossen wird, einen geeigneten ausgewählten Zweig der  $s$ -Function durch ein einfaches unbestimmtes Integral darzustellen.\*) Dieser Specialfall wird uns besonders später noch beschäftigen; es ist gerade derjenige, dessen Fundamentalbereiche wir auch im Falle complexer  $\lambda, \mu, \nu$  in dieser Arbeit bis zu Ende behandeln werden.

### § 11.

Die geometrische Deutung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie für complexe Argumente.

Wir wollen nun einen Excurs einschalten, der die in Aussicht gestellte geometrische Deutung der sphärischen Formeln für complexe Argumente zum Gegenstande haben soll. Wir werden zu dem Zwecke zwei verschiedene Wege einschlagen: Der erste schliesst sich eng an die aufgestellten Doppelverhältnissformeln an. Wir knüpfen wieder an Fig. 21 an, für die wir die Vertheilung der Werthe  $z$  auf der Kugel so gewählt denken, dass  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = \infty$ , dagegen  $\gamma_1 = +1$ , und in Folge dessen  $\gamma_2 = -1$  wird, was stets möglich ist. Dann gilt

$$D V(a_1 a_2 b_1 b_2) = \frac{b_1}{b_2} = (b_1)^2,$$

da  $b_1 = \frac{1}{b_2}$  ist. Weiter ergibt sich:

$$D V(\gamma_1 \gamma_2 b_1 a_1) = \frac{1 - b_1}{1 + b_1} = \pm e^{in\pi} = \pm e^{i(n'+in'')\pi},$$

wo  $n'$  und  $in''$  gemäss pag. 187 u. 188 definiert sind. Wir haben uns hier einer sehr einfachen projectiven Interpretation der Doppelverhältnisse von 3 Kugelpunkten bedient.\*\*\*) Sind nämlich irgend 4 Punkte  $p, q, r, s$

\*) Vgl. pag. 172.

\*\*) Dieselbe dürfte in mancher Beziehung einfacher sein als die von Hrn. Wedekind l. c. gegebene Definition. Aus ihr folgen z. B. sofort die von ihm in seinen „Studien im binären Werthgebiet“ (Habilitationsschrift, Karlsruhe 1876) mit Hilfe der Begriffe „Moment und Comoment“ zweier Geraden abgeleiteten Formen des Doppelverhältnisses von 4 Kugelpunkten.

auf der Kugel gegeben, so kann man allgemein das Doppelverhältniss derselben darstellen in der Form  $e^{i\varphi} = e^{i(\varphi' + i\varphi'')}$ ; in derselben bedeutet  $\varphi'$  den mit richtigen Vorzeichen genommenen nicht-Euklidischen Winkel der beiden Ebenen, welche die Raumgerade  $(p, q)$  mit den Punkten  $s$  und  $r$  verbinden, und  $i\varphi''$  den nicht-Euklidischen Winkel der beiden Ebenen, welche die Polare der Geraden  $(p, q)$  mit denselben Punkten verbinden. Der Beweis hierfür ergibt sich direct aus der Substitutionsformel:

$$\frac{z' - p}{z' - q} = e^{i\varphi} \cdot \frac{z - p}{z - q}$$

für  $z = s$  und  $z' = r$ .

Aus der Gleichung

$$D V(\gamma_1 \gamma_2 b_1 a_1) = \frac{1 - b_1}{1 + b_1} = \pm e^{i(n' + i n'')\pi}$$

folgt nun, indem wir das doppelte Vorzeichen in den Werth von  $n$  hineinnehmen,  $b_1 = \frac{1}{i} \cdot \operatorname{tg} \frac{n\pi}{2}$ . Setzen wir diesen Werth in die erste Doppelverhältnissgleichung der vorigen Seite ein und bemerken zugleich, dass:

$$D V(a_1 a_2 b_1 b_2) = \frac{D V(a_1 a_2 c_1 b_2)}{D V(a_1 a_2 c_1 b_1)}$$

ist, so erhalten wir unter Benutzung der Gleichungen I' folgendes Schlussresultat:

$$-\operatorname{tg}^2 \frac{n\pi}{2} = \frac{\cos\left(\frac{\mu + \nu + \lambda}{2} \pi\right) \cdot \cos\left(\frac{-\mu + \nu - \lambda}{2} \pi\right)}{\cos\left(\frac{\mu + \nu - \lambda}{2} \pi\right) \cdot \cos\left(\frac{-\mu + \nu + \lambda}{2} \pi\right)}$$

oder:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{n\pi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{n\pi}{2}} = \cos n\pi = \frac{\cos \nu\pi + \cos \mu\pi \cdot \cos \lambda\pi}{\sin \mu\pi \cdot \sin \lambda\pi}.$$

Dies aber ist die bekannte *Cosinusformel der sphärischen Trigonometrie, jetzt aber für complexe Argumente gedeutet*. In analoger Weise werden wir durch cyklische Vertauschung der Buchstaben die Formeln für  $\cos \lambda\pi$ ,  $\cos m\pi$  ableiten können; aus ihnen folgen alsdann bekanntlich alle anderen Formeln der sphärischen Trigonometrie durch rein algebraische Rechnung. Im übrigen würden wir noch auf eine Vorzeichenbestimmung in obiger Formel eingehen können, da ja die Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  nur bis auf ganze Zahlen bestimmt sind. Doch können wir dies hier übergehen, da die folgende überdies übersichtlichere Ableitung der Formeln der sphärischen Trigonometrie jede Zweideutigkeit ausschliessen dürfte.

Wir wollen zunächst eine Ableitung der Fundamentalformeln des gewöhnlichen sphärischen Dreiecks vorausschicken, deren Grundgedanken wir dann auf unsere allgemeine Frage übertragen wollen (K). Wir bedienen uns der Darstellung und Zusammensetzung der linearen Substitutionen in der Quaternionenform, welche der Drehung der Kugel um ihren Mittelpunkt entsprechen, wie sie z. B. von Herrn Klein in seinen Vorlesungen über das Ikosaeder pag. 32 ff. angegeben werden. \*) Die lineare Substitution der Variablen  $z$  wird dort

in der Gestalt dargestellt:  $z' = \frac{(d+ic)z - (b-ia)}{(b+ia)z + (d-ic)}$  mit der Bedingung

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ ; dieselbe ist daher bestimmt durch die vier Grössen  $a, b, c, d$ , die wir die „Euler'schen Parameter“ nennen. Die Aufeinanderfolge zweier Drehungen mit den Parametern  $a, b, c, d$  und  $a', b', c', d'$  kann durch eine einzige Drehung ersetzt werden, deren Parameter  $a'', b'', c'', d''$  durch die Rodrigues'schen Formeln gegeben werden:

$$a'' = (ad' + a'd) - (bc' - b'c),$$

$$b'' = (bd' + b'd) - (ca' - c'a),$$

$$c'' = (cd' + c'd) - (ab' - a'b),$$

$$d'' = -aa' - bb' - cc' - dd'.$$

Wir geben nun dem vorliegenden sphärischen Dreieck  $LMN$  auf der Kugel, die durch die Gleichung  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$  in rechtwinkligen Coordinaten gegeben sei, speciell die in nebenstehender Figur angegebene Lage gegen das Coordinatensystem, sodass die

Ecke  $L$  die Coordinaten  $0, 0, 1$ ,

„  $M$  „ „  $0, \sin n\pi, \cos n\pi$ ,

„  $N$  „ „  $\sin m\pi \sin \lambda\pi,$   
 $\sin m\pi \cos \lambda\pi, \cos m\pi$

besitzt.

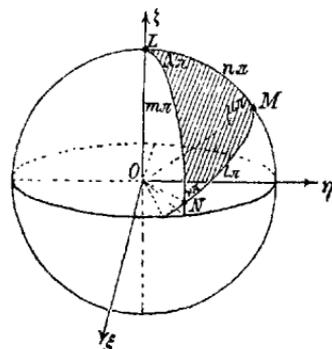


Fig. 26.

Wir benutzen jetzt den Satz, dass die Aufeinanderfolge dreier Drehungen  $A, B, \Gamma$  um die Kanten des zum Dreieck gehörenden Dreikants entspr. durch die doppelten Winkel  $2\lambda\pi, 2\mu\pi, 2\nu\pi$  des Dreiecks zur Identität

führt, und zwar wieder in der Form  $AB = \Gamma^{-1}$ . Die den einzelnen Drehungen zugehörigen Euler'schen Parameter ergeben sich wie folgt:\*\*)

für  $A$  als:  $a = 0, b = 0, c = \sin \lambda\pi, d = \cos \lambda\pi$ ;

\*) 1884. Besonders sei auf die Litteraturangabe l. c. p. 36, Anm. hingewiesen.

\*\*) Gemäss Formel 12 pag. 34 der Vorles. über das Ikosaeder.

für B als:  $a' = 0$ ,  $b' = \sin n\pi \sin \mu\pi$ ,  $c' = \cos n\pi \sin \mu\pi$ ,  
 $d' = \cos \mu\pi$ ;

für  $\Gamma$  als:  $a'' = \sin m\pi \sin \lambda\pi \sin \nu\pi$ ,  $b'' = \sin m\pi \cos \lambda\pi \sin \nu\pi$ ,  
 $c'' = \cos m\pi \sin \nu\pi$ ,  $d'' = -\cos \nu\pi$ ;

Setzt man diese Werthe in die Zusammensetzungsformeln von Rodrigues ein, so bekommen wir sofort die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie:\*)

- |                                                                                                               |   |              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|--------------|
| 1) $a'' = b'c$ ; oder:                                                                                        | } | Sinussatz,   |
| $\sin m\pi \sin \nu\pi = \sin n\pi \sin \mu\pi$ ;                                                             |   |              |
| 2) $b'' = b'd$ ; oder:                                                                                        |   |              |
| $\sin m\pi \sin \nu\pi = \sin n\pi \sin \mu\pi$ ;                                                             |   |              |
| 3) $c'' = cd' + c'd$ ; oder:                                                                                  |   |              |
| $\sin n\pi \operatorname{ctg} m\pi - \sin \lambda\pi \operatorname{ctg} \mu\pi = \cos n\pi \cos \lambda\pi$ ; |   | Tangenssatz, |
| 4) $d'' = -cc' + dd'$ ; oder:                                                                                 |   |              |
| $-\cos \nu\pi = -\cos n\pi \sin \mu\pi \sin \lambda\pi + \cos \mu\pi \cos \lambda\pi$ ;                       |   | Cosinussatz. |

Kehren wir nun zu unserer *allgemeinen Aufgabe* zurück. Die zweite Methode, die wir jetzt einschlagen, um die Formeln der sphärischen Trigonometrie für complexe Argumente zu deuten, knüpft direct an das geometrische Gebilde des Kernes und Polarkernes an; die Schnittpunkte der Geraden I, II, III, sowie 1, 2, 3 mit der Kugel seien mit

$a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2$  resp.  $\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2, \gamma_1 \gamma_2$

bezeichnet, wie die Figur 27 es angiebt. Wir können dann zunächst die Formelgruppe I für die Doppelverhältnisse dieser Punkte aufstellen:

$$I. \quad \left. \begin{aligned} (a_1 a_2 \beta_1 \beta_2) &= -1, & (b_1 b_2 \alpha_1 \alpha_2) &= -1, & (c_1 c_2 \alpha_1 \alpha_2) &= -1, \\ (a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2) &= -1, & (b_1 b_2 \gamma_1 \gamma_2) &= -1, & (c_1 c_2 \beta_1 \beta_2) &= -1. \end{aligned} \right\}$$

Dieselben besagen, dass die Geraden 1, 2, 3 die kürzesten Abstände je zweier der Geraden I, II, III enthalten und umgekehrt. Hierzu fügen wir als Definitionsgleichungen der Grössen  $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ ;  $\lambda\pi, m\pi, n\pi$  die zweite Formelgruppe:

$$II. \quad \begin{aligned} (a_1 a_2 \gamma_2 \beta_1) &= e^{i\lambda\pi}, & (\alpha_1 \alpha_2 c_2 b_1) &= e^{i\lambda\pi}, \\ (b_1 b_2 \alpha_2 \gamma_1) &= e^{i\mu\pi}, & (\beta_1 \beta_2 \alpha_2 c_1) &= e^{i\mu\pi}, \\ (c_1 c_2 \beta_2 \alpha_1) &= e^{i\nu\pi}, & (\gamma_1 \gamma_2 b_2 a_1) &= e^{i\nu\pi}. \end{aligned}$$

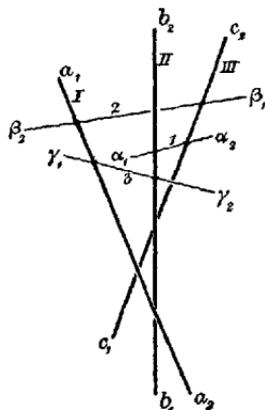


Fig. 27.

\*) Vgl. Hamilton, Lectures on Quaternions, Dublin 1853, Art. 524, 526, 529; sowie Papperitz, Untersuchungen über algebraische Transformation der hypergeometrischen Functionen. Habilitationsschrift, Leipzig 1886, p. 20 ff. Ann. 27, 1887, p. 232 ff.

Hierdurch sind die genannten Grössen nicht wie bisher nur bis auf ganze Vielfache von  $\pi$ , sondern bis auf ganze Vielfache von  $2\pi$  bestimmt. Die Formelgruppen I und II geben uns 12 Gleichungen für die 12 Schnittpunkte, von denen der Natur der Sache nach drei willkürlich angenommen werden können. Man erkennt daher leicht, dass die Formeln I und II uns drei Relationen zwischen den Grössen  $\lambda\pi$ ,  $\mu\pi$ ,  $\nu\pi$ ;  $l\pi$ ,  $m\pi$ ,  $n\pi$  liefern müssen, die dann zu den trigonometrischen Formeln hinführen. Die directe Elimination gelingt in der That; doch ziehen wir es vor, genau so vorzugehen, wie eben beim Dreieck.

Wir führen zuerst wieder die möglichst günstige Werthevertheilung der complexen Variablen  $s$  auf der Kugel ein, indem wir  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = \infty$ ,  $\gamma_1 = +1$  setzen. Mit Hülfe der Formelgruppen I und II findet man durch einfache Ausrechnung:

$$\gamma_2 = -1, \quad (\text{aus } (a_1 a_2 \gamma_1 \gamma_2) = -1),$$

$$\beta_1 = -\beta_2 = -e^{-i\lambda\pi}, \quad (\text{aus } (\beta_1 \beta_2 a_1 a_2) = -1 \quad \text{und} \\ (a_1 a_2 \gamma_2 \beta_1) = e^{i\lambda\pi}),$$

$$b_2 = \frac{1}{b_1} = -i \operatorname{tg} \frac{n\pi}{2}, \quad (\text{aus } (b_1 b_2 \gamma_1 \gamma_2) = -1 \quad \text{und} \\ (\gamma_1 \gamma_2 b_2 a_1) = e^{in\pi}),$$

$$c_1 = e^{-i\lambda\pi} \cdot i \operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}, \quad (\text{aus } (\beta_1 \beta_2 a_2 c_1) = e^{im\pi}),$$

$$c_2 = -i e^{-i\lambda\pi} \cdot \operatorname{tg} \frac{m\pi}{2}, \quad (\text{aus } (\beta_1 \beta_2 c_1 c_2) = -1).$$

Unsere weitere Rechnung knüpft natürlich an den Ansatz  $AB = \Gamma^{-1}$  an, und zwar werden wir zunächst wieder darauf ausgehen, die Substitutionen  $A, B, \Gamma$  in der Normalform darzustellen:

$$s' = \frac{(d + ic)s - (b - ia)}{(b + ia)s + (d - ic)}$$

mit der Bedingung  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ . Da wir es mit loxodromischen Substitutionen zu thun haben, so werden die Grössen  $a, b, c, d$  selbst wieder complexe Werthe annehmen, sodass die Coefficienten der Substitutionen „doppelcomplex“ sind. Für die Zusammensetzung zweier Substitutionen der Normalform gelten nach wie vor die Formeln von Rodrigues. Es ergibt sich unter Berücksichtigung der für die Grössen  $b_1, b_2, c_1, c_2$  gefundenen Werthe:

Für die Substitution  $A$ :

$$s' = \frac{e^{i\lambda\pi} \cdot s}{e^{-i\lambda\pi}}$$

ist zu setzen:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = \frac{e^{i\lambda\pi} - e^{-i\lambda\pi}}{2i} = \sin \lambda\pi, \quad d = \frac{e^{i\lambda\pi} + e^{-i\lambda\pi}}{2} = \cos \lambda\pi.$$

Für die Substitution B:

$$\frac{s' - b_1}{s' - b_2} = \frac{e^{i\mu\pi}(s - b_1)}{e^{-i\mu\pi}(s - b_2)}$$

oder:

$$s' = \frac{s \cdot [b_1 e^{-i\mu\pi} - b_2 e^{i\mu\pi}] - b_1 b_2 \cdot [e^{-i\mu\pi} - e^{i\mu\pi}]}{s \cdot [e^{-i\mu\pi} - e^{i\mu\pi}] + [b_1 \cdot e^{i\mu\pi} - b_2 \cdot e^{-i\mu\pi}]}$$

ist zu setzen:

$$a' = 0, \quad b' = -\sin \mu\pi \sin n\pi, \quad c' = -\sin \mu\pi \cos n\pi, \quad d' = \cos \mu\pi.$$

Für die Substitution  $\Gamma$ :

$$\frac{s' - c_1}{s' - c_2} = \frac{e^{i\nu\pi}(s - c_1)}{e^{-i\nu\pi}(s - c_2)}$$

oder:

$$s' = \frac{s [c_1 e^{-i\nu\pi} - c_2 e^{i\nu\pi}] - c_1 c_2 [e^{-i\nu\pi} - e^{i\nu\pi}]}{s [e^{-i\nu\pi} - e^{i\nu\pi}] + [c_1 \cdot e^{i\nu\pi} - c_2 \cdot e^{-i\nu\pi}]}$$

ist zu setzen:

$$a'' = -\sin \nu\pi \sin \lambda\pi \sin m\pi, \quad b'' = -\sin \nu\pi \cos \lambda\pi \sin m\pi, \\ c'' = -\sin \nu\pi \cos m\pi, \quad d'' = \cos \nu\pi.$$

Indem man berücksichtigt, dass für die inverse Substitution von  $\Gamma$  nur die Grösse  $d''$  ihr Vorzeichen zu wechseln hat, findet man dann aus den Formeln von Rodrigues nach Einführung der gefundenen Werthe für die vorkommenden Grössen:

$$\begin{array}{ll} 1) \quad \pm a'' = + b'c, & 3) \quad \pm c'' = cd' + c'd, \\ 2) \quad \pm b'' = b'd, & 4) \quad \mp d'' = -cc' + dd', \end{array}$$

oder, da wir der nothwendigen Symmetrie der Endformeln wegen nur das obere Vorzeichen zu berücksichtigen haben:

$$1 \text{ u. } 2) \quad \sin \nu\pi \sin m\pi = \sin \mu\pi \sin n\pi \quad (\text{Sinussatz}),$$

$$3) \quad -\sin \nu\pi \cos m\pi = \sin \lambda\pi \cos \mu\pi - \sin \mu\pi \cos n\pi \cos \lambda\pi$$

oder unter Berücksichtigung von 1:

$$-\sin n\pi \operatorname{ctg} m\pi = \sin \lambda\pi \operatorname{ctg} \mu\pi - \cos n\pi \cos \lambda\pi \quad (\text{Tangenssatz}),$$

$$4) \quad -\cos \nu\pi = \sin \lambda\pi \sin \mu\pi \cos n\pi + \cos \mu\pi \cos \lambda\pi \quad (\text{Cosinussatz}).$$

Wir erkennen sofort, diese Formeln stimmen bis auf die Vorzeichen mit den Fundamentalformeln der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie überein. Es wäre uns ein Leichtes, z. B. durch andere Definition der Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  volle Uebereinstimmung zu erzielen. Doch bieten unsere Formeln in der erhaltenen Form einen wesentlichen Vorzug, indem sie gestatten, in ihnen die Grössen  $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$  mit den Grössen  $\lambda\pi, m\pi,$

$n\pi$  direct zu vertauschen ohne Aenderung der Vorzeichen.\*) Bekanntlich gilt dies nicht für die Formeln der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie. Der Grund liegt darin, dass in dem Polardreieck nicht einfach die Winkel und Seiten des ursprünglichen Dreiecks vertauscht sind, während in unserem allgemeinen Falle der Fig. 27 die Geraden-tripel *I, II, III* und 1, 2, 3 völlig gleichwerthig erscheinen.

## § 12.

### Construction des Kernes für gegebene Werthe $\lambda, \mu, \nu$ .

Wir wollen nun weiter zu der Aufgabe übergehen, für gegebene complexe Größen  $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$  die inneren Axen der zugehörigen drei Schraubenbewegungen, deren Aufeinanderfolge die Identität erzeugt, geometrisch zu construiren. Die Methode, die wir in der Lösung dieser Aufgabe befolgen, wird darin bestehen, dass wir in der Zahlenebene der Variablen  $s$ , dem stereographischen Abbild unserer Kugelfläche, die 6 Fixpunkte  $a_1 a_2 b_1 b_2 c_1 c_2$  der Fundamentalsubstitutionen zu zeichnen lehren. Wir haben die gleiche Aufgabe bereits pag. 35 algebraisch gelöst und gesehen, dass zu drei gegebenen Exponenten allemal zwei verschiedene Geraden-tripel *I, II, III* construirt werden können, welche den Bedingungen genügen; von diesen wird einer den Cosinusformeln, der andere den Sinusformeln für die gleiche Auswahl der Werthe  $\lambda, \mu, \nu$  entsprechen. Wir kommen auf diese Zweideutigkeit noch am Schlusse dieses Paragraphen zurück. Wir haben natürlich alle Geraden-tripel als identisch anzusehen, welche durch eine lineare Transformation der Kugel in sich in einander übergeführt werden können. Gerade dieser letzte Punkt entspricht dem Umstande, dass wir bei der Ausführung der geometrischen Construction drei der sechs Fixpunkte beliebig wählen bez. eine andere gleichwerthige Annahme machen können. Da die reellen Bestand-

\*) Man vgl. z. B. Stolz: „Ueber eine analytische Entwicklung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie etc.“ (Schlömilch's Zeitschrift, Bd. XVI, 1871, pag. 175). — Das von mir gefundene allgemeine Resultat ist in aller Kürze bereits in den Göttinger Nachrichten vom Jahre 1891, pag. 188, sowie in den Math. Ann. Bd. 39, 1891, p. 598 veröffentlicht worden. Es sei an dieser Stelle auch hingewiesen auf die Behandlung der trigonometrischen Formeln in der nicht-Euklidischen Geometrie, z. B. Lobatcheffsky, Ges. Werke (Kaan 1883, 1886) Bd. II, pag. 577, 586, 630, sowie Frischauf „absolute Geometrie nach J. Bolyai“, 1872, pag. 51 ff., von neuerer Litteratur sei nur Clebsch-Lindemann, „Vorlesungen über Geometrie“ II, 1 pag. 480 ff. und 519 erwähnt.

Unsere specielle Fragestellung erlaubt hier nicht, den analogen Sätzen, die bei anderer Maassbestimmung im Raume sich unseren Entwicklungen zur Seite stellen, weiter nachzugehen. Dass dieselben mir jedoch keineswegs entgangen sind, wie Herr Study in seiner Arbeit in den Abh. der Sächs. Gesellschaft der Wissensch. Bd. XX, 1893, pag. 229 meint, scheint doch wohl selbstverständlich.

theile  $\lambda', \mu', \nu'$  der Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  nur bis auf ganze Zahlen in Betracht kommen, so wollen wir in diesem Abschnitt gleich von vornherein voraussetzen, dass sie sämmtlich kleiner als 1 sein mögen. Die Werthe der Grössen  $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$  mögen ferner geometrisch durch die Punkte  $e^{\lambda\pi i}, e^{\mu\pi i}, e^{\nu\pi i}$  der complexen Zahlenebene gegeben sein, deren Abweichung gleich  $\lambda'\pi, \mu'\pi, \nu'\pi$  und deren Abstand vom Nullpunkt gleich  $e^{-\lambda'\pi} = L, e^{-\mu'\pi} = M, e^{-\nu'\pi} = N$  ist (Fig. 28).

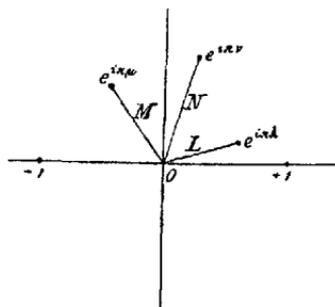


Fig. 28.

Eine besondere Betrachtung würden die Fälle ganzzahliger Werthe der Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  erfordern, für welche die zugehörigen Fundamentalsubstitutionen entweder parabolischen Charakter tragen oder die Identität darstellen. Da diese Fälle sich sehr leicht überblicken lassen, so wollen wir ihnen zunächst einige Worte widmen, wobei wir uns auf die Angabe der Resultate beschränken. Von den drei Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  mögen entweder alle drei oder zwei oder nur eine ganzzahlig sein.

a) Sind alle drei Exponenten ganzzahlig, so ist der Fall von vornherein als unmöglich ausgeschlossen, dass eine der Fundamentalsubstitutionen parabolisch ist, die beiden anderen die Identität bilden. Es bleiben daher nur die folgenden Möglichkeiten übrig:

1. Einmal seien alle drei Substitutionen parabolisch; dann wird der Kern von drei sich in einem Punkte ausserhalb der Kugel schneidenden Tangenten der Kugel gebildet, die beliebig angenommen werden können.

2. Oder aber alle drei Substitutionen sind Identitäten; dann ist der Kern der Geraden  $I, II, III$  (selbst bei Festlegung der Punkte  $a_1, b_1, c_1$ ) völlig unbestimmt.

3. Oder endlich es sind zwei Substitutionen, etwa  $B$  und  $\Gamma$ , parabolisch, und die dritte  $A$  ist gleich der Identität. Dann fallen die Geraden  $II, III$  in eine Tangente der Kugel zusammen, während die dritte Gerade  $I$  völlig unbestimmt ist. Zugleich ist die parabolische Substitution  $B$  zu der parabolischen Substitution  $\Gamma$  invers.

b) Sind nur zwei Exponenten ganzzahlig, z. B.  $\mu$  und  $\nu$ , so ist von vornherein wieder ausgeschlossen, dass nur eine der Fundamentalsubstitutionen  $B$  und  $\Gamma$  parabolischen Charakter besitzt, während die andere die Identität darstellt, oder dass beide Fundamentalsubstitutionen  $B$  und  $\Gamma$  Identitäten darstellen. Es bleibt allein der nicht weiter singuläre Fall übrig, dass beide Fundamentalsubstitutionen  $B$  und  $\Gamma$  parabolischen Charakter tragen. Der Kern wird ausser von der die Kugel schneidenden Geraden  $I$  von zwei Tangenten  $II$  und  $III$  der

Kugel gebildet. (Falls auch der dritte Exponent  $\lambda$  reell ist, werden die drei Geraden *I*, *II*, *III* natürlich durch einen Punkt gehen.)

c) Ist schliesslich nur ein Exponent ganzzahlig, etwa  $\lambda$ , so kann zu ihm entweder eine identische oder eine parabolische Substitution gehören.

1. Im ersten Falle folgt dann weiter, dass die Substitutionen  $B$  und  $\Gamma$  nothwendig wieder zu einander invers sein müssen; im Kern sind daher die beiden Geraden *II* und *III* zusammengefallen, während die Gerade *I* völlig *unbestimmt* ist.

2. Im letzten Falle dagegen wird im Kern die Gerade *I* von einer Tangente der Kugel und die Geraden *II* und *III* von zwei festen, die Kugel schneidenden Geraden dargestellt. (Sind die Exponenten  $\mu$  und  $\nu$  überdies ebenfalls reell oder gilt allgemein die Bedingung  $\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ , so werden sich die drei Geraden *I*, *II*, *III* natürlich wieder in einem Punkte schneiden.)

Da alle die genannten speciellen Kerne sehr leicht für gegebene Werthe  $\lambda, \mu, \nu$  zu construiren sind, so wollen wir sie bei der folgenden Darstellung der Construction des Kernes für allgemeine Werthe der Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  nicht weiter berücksichtigen, um nicht unsere Betrachtungen dementsprechend unnöthig modificiren zu müssen. Doch haben wir um so lieber die besonderen Fälle angeführt, als sie sogleich bei der Betrachtung der Fundamentalbereiche wieder hervortreten werden.

Wie wird sich nun die Construction der sechs Fixpunkte in dem allgemeinen Falle gestalten, in dem uns drei complexe Werthe der Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  vorliegen? Unsere Zeichnungen, die wir in praxi in der  $s$ -Ebene ausführen, wollen wir zugleich stets auf die Kugel durch stereographische Projection übertragen denken. Wie wir vorab bemerken wollen, werden wir unsere Aufgabe auf die folgende einfache Hilfsaufgabe zurückführen: Es seien geometrisch die Fixpunkte, sowie die Exponenten zweier Substitutionen  $B$  und  $C$  gegeben; die Fixpunkte derjenigen dritten Substitution  $A^{-1}$  zu finden, welche die gegebenen Substitutionen ersetzt, sodass die symbolische Gleichung gilt:  $BC = A^{-1}$  oder  $ABC = 1$ . Wir erkennen, wir können unmittelbar die Figur 21 auf diese Hilfsaufgabe anwenden, wenn wir die inneren Axen der Substitutionen  $B$  und  $C$  z. B. als die Geraden *II*, *III* wählen. Die Lösung unserer Hilfsaufgabe übersieht sich dann leicht: Man findet zunächst das Schnittpunktepaar der Geraden (2) mit der Kugel als gemeinsames harmonisches Punktepaar zu den Schnittpunktepaaren der Geraden (*II*) und (*III*). (Wir haben die Bezeichnungen der Geraden in Klammern gesetzt, da dieselben keineswegs mit den gleich bezeichneten Geraden unserer Hauptaufgabe übereinstimmen.) Die Schnittpunktepaare der Geraden (1) und (3) sind durch die gegebenen Exponenten der Substitutionen  $B$  und  $C$  leicht den Betrachtungen auf pag. 186 ff. gemäss aus dem Schnittpunktepaare der Geraden (2) zu finden.

Das zu letzterem Paar gemeinsam harmonische Paar stellt dann die gesuchten Fixpunkte der Substitution  $A$  dar. \*) — *Wir gehen nun zu unserer Hauptaufgabe zurück.*

Es ist zunächst klar, dass wir die Schnittpunkte der Kugel mit den Theilgebilden der Geraden  $I, 2, 3$  oder  $II, 3, 1$  oder  $III, 1, 2$  in ihrer Lage zu einander, insbesondere was ihre Doppelverhältnisse betrifft, sofort geometrisch construiren können. Um z. B. die betreffenden

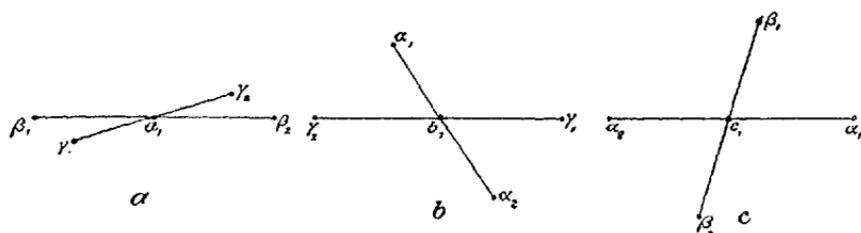


Fig. 29 a, b, c.

Punkte des Gebildes der Geraden  $III, 1, 2$  zu bestimmen, wählen wir die Punkte  $0, \infty$  der complexen Zahlenebene als Schnittpunkte der Geraden  $III$ , die Punkte  $\pm 1$  als Schnittpunkte der Geraden 1. Dann liefern uns sofort die Punkte  $\pm e^{i\pi}$  die Schnittpunkte der Geraden 2. Analog finden wir die Schnittpunkte für die beiden anderen Theilgebilde, wie in den Figuren 29, b, c angegeben ist; in ihnen haben wir die Bezeichnungen der Schnittpunkte in einer beliebigen zulässigen Auswahl hinzugesetzt. Gehen wir nun von dem in solcher Weise bestimmten Theilgebilde der Geraden  $I, 2, 3$  in der  $s$ -Ebene aus; es bleiben dann zu ihm noch die Schnittpunkte der Geraden 1 mit der Kugel zu construiren. Alsdann werden die Schnittpunktpaare der Geraden  $II$  und  $III$  durch die Bedingung leicht gefunden werden können, dass jedes derselben gleichzeitig harmonisch liegt zu den Schnittpunktpaaren der Geraden 1, 2 bzw. 1, 3. Die Doppelverhältnisse der Schnittpunkte von 1 mit den Schnittpunkten von 2 bzw. 3 sind uns aber geometrisch, wie gezeigt ist, durch die Figuren 29, b, c gegeben. Unsere Aufgabe erweist sich daher mit der folgenden, allgemein interessanten identisch: *Ein Punktpaar in der  $s$ -Ebene zu finden, welches mit zwei gegebenen Punktpaaren vorgegebene Doppelverhältnisse bildet.* Wie wird nun die Lösung für diese Aufgabe ver-

\*) Man kann auch leicht die Hilfsaufgabe mit der folgenden identificiren: *Auf der Kugel ist durch zwei einander entsprechende Punktetripel  $p, q, r$  und  $p', q', r'$  eine projective Beziehung festgelegt; es gilt, die Doppelpunkte der letzteren zu construiren.* Man hat einfach zu dem Zweck drei in geeigneter Weise ausgewählte Punkte der Kugel durch die Substitutionen  $B^{-1}$  und  $C$  in drei neue Punkte zu transformiren. Die Doppelpunkte der durch diese beiden Punktetripel bestimmten projectiven Beziehung stellen dann die gesuchten Doppelpunkte der Substitution  $A$  dar. Vgl. die Lösung jener Aufgabe bei Wedekind, Diss. Erlangen (1875) pag. 30.

laufen?\*) Wir argumentiren folgendermassen: Führt man um die Gerade 2 eine Schraubenbewegung  $B$  aus, die den Punkt  $\alpha_2$  in den Punkt  $\alpha_1$  überführt und dann eine Schraubenbewegung  $C$  um die Gerade 3, welche  $\alpha_1$  in  $\alpha_2$  überführt, so ist  $\alpha_2$  an seine Ausgangsstelle zurückgekommen. Mit anderen Worten: Durch die Aufeinanderfolge der Substitutionen  $B$  und  $C$  ist auf der Kugel eine projective Beziehung ihrer Punkte hergestellt, deren einer Doppelpunkt vom Punkte  $\alpha_2$  geliefert wird. Nun sind aber die genannten beiden Substitutionen  $B$  und  $C$  durch die Figuren 29, b, c vollständig geometrisch bekannt. *Damit ist die Hauptaufgabe auf die Hilfsaufgabe zurückgeführt, deren geometrische Lösung oben bereits durchgeführt ist.* Mit dem Punkte  $\alpha_2$  ist natürlich sofort der Punkt  $\alpha_1$  gegeben. Wir wollen es übergehen, die Construction in einer Figur auszuführen, da ja eine solche keinerlei Schwierigkeit mehr bietet, wenn sie auch ziemlich complicirt sich gestaltet.

Es bleibt nur noch ein Wort zu sagen über die Auswahl des Punktes  $\alpha_2$  unter den beiden Fixpunkten der Substitution  $A$ , sowie über die Willkür in der Bezeichnung der Schnittpunkte  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2$  in den Figuren 29 a, b, c. Was den ersten Punkt betrifft, so zeigt eine einfache Betrachtung, dass die Gebilde der Geraden  $I, II, III$ , welche man durch die eine oder andere Auswahl des Punktes  $\alpha_2$  unter den Fixpunkten der Substitution  $A$  erhält, sich nur um eine halbe Drehung um die Axe  $I$  unterscheiden und daher gleichwerthig sind. Was aber die Willkür in der Bezeichnung der Punktepaare  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2$  der Figuren 29, a, b, c angeht, so ist unschwer zu erkennen, dass man bei einer geraden Anzahl von Vertauschungen der Bezeichnung jedes Paares zu derselben Construction der Fixpunkte der Substitution  $A$  und damit des Gebildes  $I, II, III$ , bei einer ungeraden Anzahl von Vertauschungen dagegen (z. B. bei der Vertauschung der Bezeichnungen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  in Fig. 29, b) zu anderen Fixpunkten der Substitution  $A$  und damit zu einem zweiten, von dem ersten verschiedenen Gebilde der Geraden  $I, II, III$  geführt wird. *Wir bekommen für gegebene Werthe  $\lambda, \mu, \nu$  demnach geometrisch immer zwei Kerne, von denen aber, sobald wir die Werthe der Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  bestimmt fixirt denken, nur der eine functionentheoretisch für uns in Betracht kommt.\*\*)* Dies Resultat erweist sich völlig

\*) Für den speciellen Fall, dass das gesuchte Punktepaar zu den beiden gegebenen gemeinsam harmonisch gelegen sein soll, ist eine einfache Construction nach der Mittheilung des Herrn Klein von Herrn Wedekind in seiner Diss. (Erlangen 1875) pag. 31 ff. angegeben. Wir haben diese Construction ja bereits anzuwenden Gelegenheit gehabt. — Interessant ist insbesondere der Specialfall, dass je zwei der drei Punktepaare ein reelles Doppelverhältniss darbieten; derselbe führt insbesondere auf solche Geradegebilde 1, 2, 3, wie sie zu dem Kern reeller oder rein imaginärer  $\lambda, \mu, \nu$  gehören (Wedekind, l. c. pag. 25).

\*\*) Vergl. pag. 222 und pag. 172 Nr. 2.

in Uebereinstimmung mit der Bemerkung zu Anfang dieses Paragraphen, dass die Lösung der Constructionsaufgabe zweiwerthig sein muss. Wohl aber führt die richtig verstandene Aufgabe der p. 206 natürlich nur zu einer Lösung.

## § 13.

Ueberblick über die Gesamtheit aller überhaupt möglichen Kerne.

Wir fügen den bisherigen Betrachtungen des Kernes noch einige Sätze hinzu, die uns einen Ueberblick über die 6-fach unendliche Mannigfaltigkeit aller überhaupt möglichen Kerne gestatten. Der einzelne Kern ist durch die Punkte  $a_1, b_1, c_1$  und die gegebenen Werthe  $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$  vollständig (allerdings zweideutig) bestimmt. Umgekehrt sind durch den Kern ja auch die Grössen  $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$  bestimmt, abgesehen von der Vieldeutigkeit dieser Werthe, die stets beim einzelnen Kern vorhanden ist. \*) Richten wir nun unser Augenmerk auf diejenigen Punkte, die aus den Fixpunkten  $a_1$  bzw.  $b_1$  oder  $c_1$  durch die Fundamentalsubstitutionen B bzw.  $\Gamma$  oder A hervorgehen; wir wollen dieselben mit  $a_2', b_2', c_2'$  bezeichnen, indem sie leicht aus den Punkten  $a_2, b_2, c_2$  erhalten werden, wenn wir entsprechend um die drei Geraden des Polarkernes halbe Umdrehungen ausführen. Man übersieht sofort, dass der einzelne Kern auch durch die Punkte  $a_1, b_1, c_1; a_2', b_2', c_2'$  vollständig (und zwar eindeutig) bestimmt ist, indem z. B. die Substitution A durch die sich entsprechenden Punktepaare  $b_2', c_1$  und  $b_1, c_2'$  und den Fixpunkt  $a_1$  bestimmt, und damit dann auch ihr zweiter Fixpunkt  $a_2$  zu construiren ist. Letzteres führt zu der allgemeinen Aufgabe: *Auf der Kugel ist eine projective Beziehung gegeben, deren einer Doppelpunkt bekannt ist; den zweiten Doppelpunkt zu construiren.* Ich habe die folgende, einfache Lösung gefunden: Man lege in dem obigen Beispiel durch die Punkte  $a_1, c_2', b_1$  und die Punkte  $a_1, c_1, b_2'$  je einen Kreis; der zweite Schnittpunkt dieser Kreise sei der Punkt P. Dann lege man durch P,  $b_1, b_2'$  und andererseits P,  $c_1, c_2'$  wiederum je einen Kreis. Der zweite Schnittpunkt der letzteren ist der gesuchte Punkt  $a_2$ .

Es gelten nun die folgenden Sätze:

*Wählt man bei festgehaltenen Punkten  $a_1, b_1, c_1$  die Punkte  $a_2', b_2', c_2'$  bzw. irgendwie auf drei Kreisbogen der zu den Punkten  $b_1, c_1, c_1, a_1, a_1, b_1$  gehörenden elliptischen Kreisschaar, so haben die reellen Bestandtheile  $\lambda', \mu', \nu'$  der zugehörigen Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  stets denselben Werth.*

*Wählt man bei festgehaltenen Punkten  $a_1, b_1, c_1$  die Punkte  $a_2', b_2', c_2'$  bzw. irgendwie auf drei Kreisen der analogen hyperbolischen Kreisschaar, so haben die imaginären Bestandtheile  $i\lambda'', i\mu'', i\nu''$  der Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  stets denselben Werth.*

\*) Vergl. pag. 187 und 188, sowie pag. 199 und 200.

Der Beweis dieser Sätze stützt sich bei passend gewählter specieller Lage der Punkte  $a_1, b_1, c_1$  auf die Sätze der Elementargeometrie der Ebene von der Gleichheit der Peripheriewinkel über demselben Bogen und dem geometrischen Ort aller Punkte, deren Verbindungslinien mit zwei festen Punkten dasselbe Verhältniss zeigen.

Die beiden Lösungen der Construction des Kernes bei gegebenen Werthen  $\lambda, \mu, \nu$  unterscheiden sich in der Weise, dass die Punkte  $a_2', b_2', c_2'$  bei festgehaltenen Punkten  $a_1, b_1, c_1$  wohl auf denselben hyperbolischen Kreisen, doch auf „complementären“ (d. h. sich zu einem vollen Kreise ergänzenden) elliptischen Kreisbogen liegen.

Die Punkte  $a_2', b_2', c_2'$  gewinnen übrigens besonders deswegen für uns an Interesse, weil sie die vierten Eckpunkte unserer Fundamentalbereiche in der Vierecksform darstellen.

In wiefern die pag. 203 u. 204 ff. behandelten Fälle eines *unbestimmten Kernes* hier zur Geltung kommen, ist leicht zu erkennen. Bei dem Kern  $a, 1$  des vorigen Paragraphen sind insbesondere die Punkte  $a_2', b_2', c_2'$  entspr. in die Punkte  $a_1, b_1, c_1$ , bei dem Kern  $c, 1$  die Punkte  $b_2'$  und  $c_2'$  in die Punkte  $b_1$  und  $c_1$  gefallen, während  $a_2'$  von  $a_1$  getrennt liegt. Jedoch sei auch auf den Kern  $a, 3$  hingewiesen, bei dem es nicht möglich ist, wie hier stillschweigend angenommen ist, die Fixpunkte  $a_1, b_1, c_1$  als von einander getrennte Punkte auszuwählen.

#### IV. Theil.

### Ueber die geometrische Natur der allgemeinen Kreisbogendreiecke.

#### § 14.

#### Allgemeine Construction der Kreisbogendreiecke bei gegebenen reellen Exponenten $\lambda, \mu, \nu$ .

Wir wenden uns zu einem neuen Haupttheile unserer Untersuchungen. Derselbe beschäftigt sich mit den von Kreisbogen begrenzten Flächen, die zu dem Kern der Geraden  $I, II, III$ , als *Fundamentalbereiche* der zugehörigen  $s$ -Function zu construiren sind. Um uns bestimmter ausdrücken zu können, beschränken wir uns zunächst auf den Fall *reeller*  $\lambda, \mu, \nu$ , in dem die Geraden  $I, II, III$  des Kernes sich, wie wir wissen, in einem Punkte ausserhalb, innerhalb oder auf der Kugel schneiden. Hier legen wir uns die Frage vor: Wie werden die von drei Kreisbögen begrenzten, einfach zusammenhängenden Flächen, die wir „*sphärische Dreiecke*“ im weiteren Sinne nennen können, ganz allgemein aussehen, deren Ecken in drei Schnittpunkten der Geraden  $I, II, III$  mit der Kugel liegen und deren Seitenebenen sich in den-

selben drei Geraden schneiden? Wir werden uns hier natürlich von vornherein auf solche Dreiecke zu beschränken haben, bei denen Windungspunkte irgend welcher Ordnung weder im Innern noch auf den Seiten mit Ausnahme der drei Eckpunkte vorkommen. Die nebenstehende Figur möge jedoch ein einfaches Beispiel eines Dreiecks mit einem Windungspunkte erster Ordnung im Innern geben.

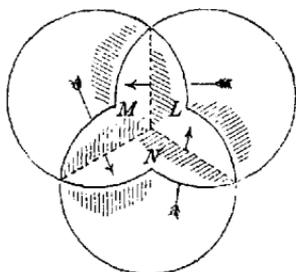


Fig. 80.

Offenbar können wir sofort den ganz allgemeinen, für alle Dreiecke geltenden Satz aufstellen: *Die Winkel in den Ecken des Dreiecks müssen allemal mit den pag. 187 u. 188 am Kern definirten reellen Grössen  $\lambda\pi$ ,  $\mu\pi$ ,  $\nu\pi$  bis auf ganze Vielfache von  $\pi$  übereinstimmen.* Denn denken wir uns die drei Symmetriedreiecke eines vorliegenden, beliebig gestalteten Dreiecks in Bezug auf die begrenzenden Kreisbogen hinzugefügt, so kann man stets um die drei Kanten des zum ursprünglichen Dreieck gehörenden Dreikants, d. h. um die drei Geraden des Kernes, nach einander Drehungen ausführen, welche die Symmetriedreiecke successive in einander überführen und demnach in ihrer Aufeinanderfolge die Identität erzeugen (vergl. pag. 168). *Auf welche Weise können wir nun Kreisbogendreiecke der hier in Betracht kommenden Art mit beliebig vorgegebenen Winkeln  $\lambda\pi$ ,  $\mu\pi$ ,  $\nu\pi$  wirklich construiren?* In der Beantwortung dieser Frage wollen wir unser Augenmerk zugleich darauf richten, wie oft in den construirten Dreiecken sich die Seiten selbst überschlagen, d. h. wie oft dieselben eine volle Kreisperipherie umspannen. Wir treffen in dem Betracht die Bestimmung, dass wir bei einer Seite, welche gerade eine ganze Zahl von Kreisperipherieen umläuft, die letzte Umspannung nicht als Ueberschlagung rechnen wollen. In unseren Figuren werden wir uns, wie bisher, der stereographischen Projection der Kugelfläche auf die Ebene bedienen. Unsere Betrachtungen schliessen sich im übrigen eng an die schon erwähnte Arbeit des Herrn Klein *Ann.* 37, 1890, pag. 579 ff. an.

Man sollte nun vielleicht erwarten, dass wir die Construction der Kreisbogendreiecke jetzt direct auf der Construction des einzelnen Kernes bei gegebenen Werthen  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  aufbauen würden. Es würde dieses auch sehr gut möglich sein. Gleichwohl ziehen wir es vor, hier independent vorzugehen, da wir auf solche Weise sogleich einen Ueberblick über die Gesammtheit aller überhaupt möglichen Kreisbogendreiecke gewinnen. Erst in einem der späteren Paragraphen werden dann die bisherigen Betrachtungen des Kernes zu ihrer vollen Geltung kommen.

Zunächst ist es einleuchtend, dass wir die drei Ecken des zu construirten Dreiecks willkürlich wählen können, indem wir ja alle diejenigen Dreiecke als gleichwerthig für uns anzusehen haben, die

durch eine lineare Transformation der Kugel in sich in einander übergeführt werden können. Unsere Methode wird nun darin bestehen, dass wir von einem bestimmten Ausgangsdreiecke aus *durch einen* *continuirlichen geometrischen Process*, der einer arithmetischen Zerlegung der Werthe  $\lambda\pi$ ,  $\mu\pi$ ,  $\nu\pi$  entspricht, das verlangte Dreieck aufbauen. Wir werden zugleich erkennen, dass wir auf solche Weise *für jedes* *Werthetripel*  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  *stets ein und nur ein Dreieck* erhalten, so dass wir die Berechtigung gewinnen, den geometrischen Process geradezu zur Definition unserer Dreiecke an die Spitze zu stellen. Möge es gestattet sein, hier eine Bemerkung allgemeiner Art einzuschalten.

Wenn es auch wohl kaum zweifelhaft sein kann, dass die von uns dargestellten Kreisbogendreiecke die Gesamtheit aller Kreisbogendreiecke erschöpfen, die einfach zusammenhängende Bereiche ohne Windungspunkte im Innern und auf den Seiten mit Ausnahme der Ecken darstellen, d. h. dass es ausser den von uns construirten Kreisbogendreiecken keine anderen der genannten Eigenschaft giebt, so ist jedenfalls ein zwingender Nachweis für diese Behauptung überhaupt zu führen unmöglich. Denn wie soll man zeigen, dass irgend ein geometrisches Gebilde von gewissen Eigenschaften nicht anders zu denken möglich ist, als das gerade vorliegende Beispiel zeigt, da doch jeder derartige Beweisgang an eine bestimmte und klare Vorstellung anknüpfen muss? Auch ein functionentheoretischer Beweis, der etwa sagt: Jedes Kreisbogendreieck der genannten Art muss man doch auf die Halbebene abbilden können, dies führt uns aber zu der bestimmten Differentialgleichung  $[s]_z = R(z)$ , welche umgekehrt nur eine  $s$ -Function für gegebene Werthe  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  definirt und also auch nur ein Kreisbogendreieck (abgesehen von einer linearen Transformation) als möglich zulässt (vergl. Klein, Ann. 37, p. 579 (1890)), auch dieser Beweis ist für den hier vorliegenden Gesichtspunkt nicht als zwingend anzusehen. Denn derselbe legt in der Benutzung des Riemann'schen Existenzsatzes wieder bestimmte geometrische Vorstellungen zu Grunde. Letzterer kann aber keineswegs verwandt werden, um umgekehrt den Schluss zu machen, dass es nun auch keine anderen Gebilde giebt als bei seiner Begründung allgemein vorschweben. Im übrigen hat diese ganze Frage ja mehr philosophische als rein mathematische Bedeutung. —

Es seien nun *die Grössen*  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , *die wir stets als positiv voraussetzen wollen*, der Art geordnet, dass  $\lambda \geq \mu \geq \nu$  ist, was die Allgemeinheit nicht beschränkt. Wir setzen dann:

$$(1) \quad \lambda = \beta + \gamma, \quad \mu = \gamma + \alpha, \quad \nu = \alpha + \beta.$$

Hieraus ergibt sich sofort:

$$(2) \quad \alpha = \frac{\mu + \nu - \lambda}{2}, \quad \beta = \frac{\nu + \lambda - \mu}{2}, \quad \gamma = \frac{\lambda + \mu - \nu}{2}.$$

Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem  $\lambda \leq \mu + \nu$

oder  $\lambda > \mu + \nu$  ist. Im ersteren Falle sind die Zahlen  $\alpha, \beta, \gamma$  sämtlich positiv oder gleich 0, im letzteren Falle ist  $\beta$  und  $\gamma$  positiv,  $\alpha$  dagegen negativ, dagegen niemals eine der Grössen gleich 0.

Wir behandeln zunächst den ersten Fall:  
 $\lambda \leq \mu + \nu$ .

Als Ausgangsdreieck unserer Betrachtung wählen wir ein Dreieck mit drei Winkeln gleich 0, wie es die nebenstehende Figur giebt. Unser geometrischer Process I wird nun darin bestehen, dass wir die Fläche dieses Dreiecks über die drei Seiten hinaus unter Festhaltung der Ecken in bestimmter Weise wachsen lassen der Art, dass die Begrenzungen stets wieder von Kreisbogen gebildet werden. Die Figuren 32–34 mögen das Wachstum der Fläche über die Seite  $LM$

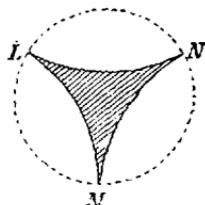


Fig. 31.

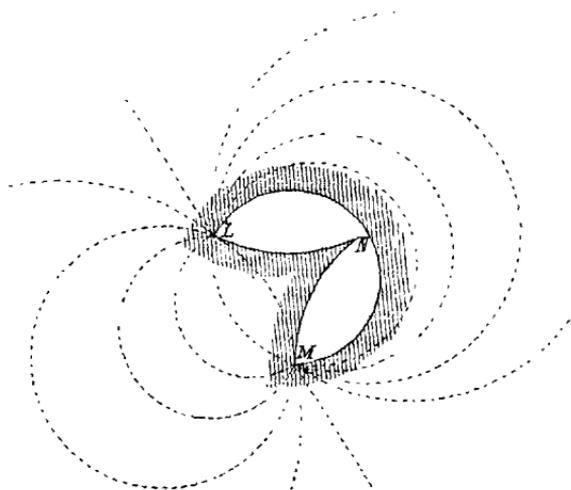


Fig. 32.

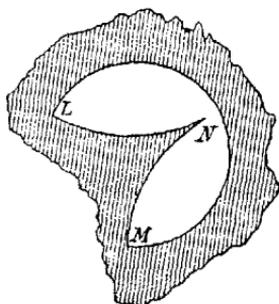


Fig. 33.



Fig. 34.

hinaus veranschaulichen. Der Kreisbogen  $LM$  wird immer weiter nach aussen hinausgeschoben; wir können uns etwa denken, dass bei

der Darstellung auf der Kugel die Ebene der Seite  $LM$  um die gerade Verbindungslinie der Punkte  $L$  und  $M$  sich dreht und hierbei die Fläche des Dreiecks  $LMN$  gleichsam wie eine dünne Membran mit sich zieht und ausspannt. Bei weiterer und weiterer Drehung wird die Membran sich dann, wie über die ganze Kugel, so über die ursprüngliche Fläche des Ausgangsdreiecks hinüberschieben, vielleicht auch noch zum zweiten, dritten Male u. s. w., indem sie sich um die Punkte  $L$  und  $M$  herumwindet. Es hat nun durchaus keine Schwierigkeit, sodann in gleicher Weise eine Ausdehnung des Ausgangsdreiecks über die Seite  $LM$  und  $MN$  vorzunehmen. — Nun erkennt man, dass bei dem Wachsen der Fläche z. B. längs der Seite  $LM$  der Winkel an der Ecke  $N$  unverändert bleibt und nur die Winkel  $L$  und  $M$  und zwar stets um dieselben Beträge zunehmen. Werfen wir daher einen Blick auf die Formeln (1), so kommen wir zu folgendem Endresultat: *Um in unserem ersten Falle das Dreieck mit den Winkeln  $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$  zu construiren, werden wir in unserem Ausgangsdreieck  $LMN$  die Seite  $MN$  um den Winkel  $\alpha\pi$ , die Seite  $LN$  um den Winkel  $\beta\pi$ , die Seite  $LM$  um den Winkel  $\gamma\pi$  nach aussen zu drehen haben.* Die Anschauung zeigt zugleich, dass in den Dreiecken dieser ersten Art sich keine Dreiecksseite überschlagen wird.

*Wir wenden uns nun zu dem zweiten Falle:  $\lambda > \mu + \nu$ .*

Wir setzen:  $\lambda = \mu + \nu + 2|\alpha|$ ,  $\mu = \mu$ ,  $\nu = \nu$ , indem wir mit  $|\alpha|$  den absoluten Betrag von  $\alpha$  bezeichnen. Als Ausgangsdreieck wählen wir wieder ein Dreieck, dessen sämtliche Winkel gleich 0 sind; dasselbe möge jedoch von drei Halbkreisen begrenzt sein, wie Figur 35 zeigt.

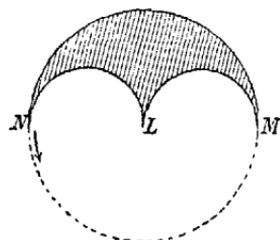


Fig. 35.

Wir gelangen jetzt in zwei Schritten zum allgemeinen Dreieck mit den Winkeln  $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ . Zunächst construiren wir ein Dreieck mit den Winkeln  $\lambda_1\pi = 2|\alpha|\pi$ ,  $\mu_1\pi = 0$ ,  $\nu_1\pi = 0$ . Wir halten in dem Ausgangsdreieck die Ecken  $L$  und  $M$  fest, lassen die Ecke  $N$  sich jedoch im positiven Sinne auf dem Kreise der Seite

$M\dot{N}$  bewegen, so dass die Seite  $LN$  sich um  $L$  dreht und hierbei die Membran der Dreiecksfläche mit sich zieht (Fig. 36). Man sieht, dieser *Process II* lässt sich beliebig fortsetzen. Die Ecke  $N$  des Dreiecks wird sich mit ihrem Zipfel schliesslich über die Fläche des Ausgangsdreiecks hinüberschieben (Fig. 37), bei nochmaligem Umlauf des Punktes  $N$  zum zweiten Male u. s. f. Hierbei nimmt allein die Grösse des Winkels  $L$  continuirlich zu. *Hat man in solcher Weise das Dreieck mit den Winkeln  $\lambda_1\pi = 2|\alpha|\pi$ ,  $\mu_1\pi = 0$ ,  $\nu_1\pi = 0$  construirt, so steht nichts im Wege, jetzt in einem zweiten Schritte noch die Seiten  $LN$  und  $LM$  dieses Dreiecks durch den Process I um den Winkel  $\mu\pi$  resp.  $\nu\pi$*

nach aussen hinauszuschieben. So erhalten wir leicht das gewünschte Dreieck zweiter Art mit den Winkeln  $\lambda\pi$ ,  $\mu\pi$ ,  $\nu\pi$ .

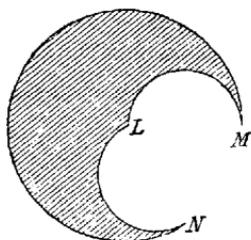


Fig. 36.

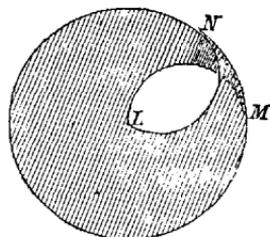


Fig. 37.

Wie verhält es sich nun in dem schliesslich gefundenen Dreieck mit der Ueberschlagung der Seiten? Offenbar ist sofort ersichtlich, dass der zweite Schritt die Seiten  $LM$  und  $LN$  sich niemals überschlagen lässt. Andererseits wird die erste Seite  $MN$  sich einmal überschlagen haben, sobald der Winkel  $\lambda_1\pi$  grösser als  $\pi$  geworden ist. Wir erhalten daher das Resultat: Die Seite  $MN$  wird sich so oft überschlagen, als die Zahl  $E\left(\frac{2|\alpha|+1}{2}\right) = E\left(\frac{\lambda-\mu-\nu+1}{2}\right)$  angiebt, wobei das Symbol  $E$  die grösste ganze Zahl bezeichnet, welche von dem Klammerausdruck überschritten wird. Wenn wir die Bedeutung des Symbols  $E$  noch dahin modificiren, dass es die grösste ganze positive Zahl bezeichnen soll, welche von dem beigesetzten Klammerausdruck überschritten wird, so können wir die Betrachtung der Fälle I und II unter Verzicht auf die Bedingung  $\lambda \geq \mu \geq \nu$  schliesslich in dem allgemeinen Satze zusammenfassen, der genau das von Herrn Klein gefundene Resultat darstellt: *Es ist bei vorgegebenen Grössen  $\lambda\pi$ ,  $\mu\pi$ ,  $\nu\pi$  allemal möglich, das zugehörige Dreieck zu construiren. In demselben überschlägt sich die dem beliebigen Winkel  $\lambda\pi$  gegenüberliegende Seite so oft, als das Symbol  $E\left(\frac{\lambda-\mu-\nu+1}{2}\right)$  angiebt. Jedoch wird diese Zahl höchstens für eine der Dreiecksseiten grösser als Null sein.*

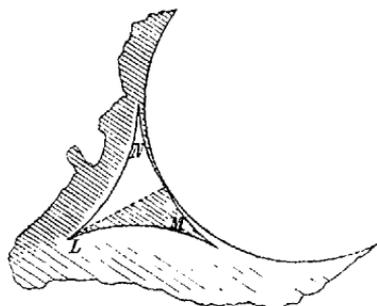


Fig. 38.

Es ist nun leicht zu übersehen, dass man auch im Falle II die Dreiecke aus dem Ausgangsdreieck des Falles I unter Festhaltung der Ecken aufbauen kann. Jedoch wird man nicht mehr einen continuirlichen Process durchführen können, sondern man wird neben der Anwendung des geometrischen Processes I längs eines von dem Eckpunkte  $L$  nach der Gegenseite  $MN$  gezogenen Verzweigungsschnittes  $E$  Kugelkalotten anhängen müssen ( $\lambda \geq \mu \geq \nu$ ),

deren Begrenzungskreis mit dem Kreis der Seite  $MN$  zusammenfällt. Die Anhängung einer solchen Kalotte wird durch die Figur 38 erläutert; der Bereich ist im Unendlichen geschlossen zu denken, indem er sich über die ganze Kugel herüberzieht. Diese Betrachtungen finden ihren Ausdruck in dem Satze: *Alle Dreiecke mit denselben Ecken, welche dieselbe Zahl der Ueberschlagungen der einen Seite besitzen, bilden ein Continuum*, d. h. man kann von einem beliebigen Dreieck unter ihnen zu jedem anderen durch einen continuirlichen geometrischen Process (bei Festhaltung der Ecken) gelangen, der nur durch Dreiecke dieser Schaar hindurchführt. Diese letzte Eigenschaft besteht andererseits niemals für zwei Dreiecke, bei denen die gleiche Seite in verschiedener Zahl oder aber verschiedene Seiten sich überschlagen.

Der letzte Grund für das Auftreten der verschiedenen Continua der Dreiecke mit denselben Ecken ist darin zu suchen, dass z. B. das Dreieck mit den Winkeln  $\pi, 0, 0$  (oder allgemeiner  $\pi + (\sigma + \tau)\pi, \sigma\pi, \tau\pi$ ) als Grenzfall zwei verschiedenen Continua angehört und somit sprungweise den Uebergang zwischen Dreiecken verschiedener Continua vermittelt (Fig. 39, 40)

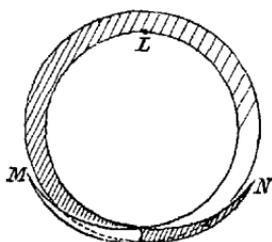


Fig. 39.

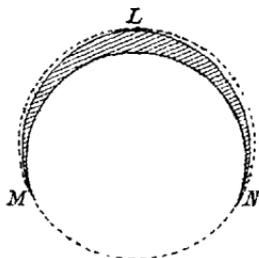


Fig. 40.

Dieser sprungweise Uebergang erklärt sich weiter aus dem Umstande, dass nach der für die Dreiecke zweiter Art angegebenen Methode construirt das Dreieck mit den Winkeln  $\pi, 0, 0$  durch die Figur 41 gegeben wird, also durch ein Dreieck mit zwei *zusammenfallenden Ecken*.

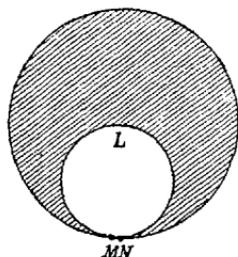


Fig. 41.

Die zu den Figuren 39, 40 gehörenden Fundamentalbereiche der Exponenten  $\lambda = 1 + \sigma + \tau$ ,  $\mu = \sigma$ ,  $\nu = \tau$  sind natürlich functionentheoretisch unbrauchbar, da dieselben durch eine Einschnürung am Punkte  $L$  in zwei Stücke zerfallen (vgl. Fig. 52). Es ist interessant näher zu verfolgen, was aus der Abbildung des sphärischen Dreiecks auf die positive Halbebene (oder auf das Innere eines Kreises) in diesen Grenzfällen wird, wenn man sich denselben continuirlich von brauchbaren Dreiecken aus nähert.

Man wird die Figuren 39 und 40 einerseits, Figur 41 andererseits natürlich nur in dem Sinne noch kreisverwandt (nach Möbius) nennen können, wenn man Substitutionen mit  $\infty$  hohem Exponenten zulässt.

## § 15.

Das Auftreten zusammenfallender oder sich berührender Begrenzungs-  
kreise des Dreiecks.

Es bleibt noch ein Wort zu sagen über das Auftreten ganzzahliger Werthe der Grössen  $\lambda, \mu, \nu$ .

Offenbar kann der einzelne Exponent  $\lambda, \mu, \nu$  nur dann ganzzahlig sein, wenn die beiden die entsprechende Dreiecksecke einschliessenden Kreisperipherieen entweder zusammenfallen oder sich berühren, und umgekehrt. Indem wir uns einen Gesamtüberblick über die geometrische Gestalt der Dreiecke mit ganzzahligen Werthen  $\lambda, \mu, \nu$  zu geben vorbehalten, wollen wir hier vorerst die Frage erörtern, wie wir von vornherein bei gegebenen Werthen  $\lambda, \mu, \nu$  entscheiden können, ob für einen ganzzahligen Exponenten die zugehörige Ecke von 2 zusammenfallenden oder von 2 sich berührenden Kreisen gebildet wird. Diese Frage ist deswegen von besonderer Wichtigkeit, weil im letzteren Falle die auf pag. 164 für die betreffende Particularlösung unserer Differentialgleichung allgemein angegebene Potenzentwicklung nicht mehr in unveränderter Form gilt, vielmehr dann auf der rechten Seite ein logarithmisches Glied auftritt.

Betrachten wir zunächst auf Grund unserer auf pag. 210 ff. angegebenen Methode der Construction des sphärischen Dreiecks für gegebene Werthe  $\lambda, \mu, \nu$ , wann die Begrenzung des letzteren nur einer Kreisperipherie, wann sie nur zwei Kreisperipherieen angehören wird.

Eine Kreisperipherie, die also durch die Punkte  $L, M, N$  bestimmt ist, kann offenbar nur bei den Dreiecken erster Art eintreten, und zwar werden allgemein, wie sofort zu übersehen ist, die Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  die Form haben müssen

$$\lambda = 1 + m + n, \quad \mu = 1 + l + n, \quad \nu = 1 + m + l,$$

woselbst  $l, m, n$  positive ganze Zahlen einschliesslich der Null bezeichnen. Die Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  müssen daher ganze Zahlen von ungerader Summe sein, für die überdies die Bedingung  $\lambda \leq \mu + \nu$ ,  $\mu \leq \nu + \lambda$ ,  $\nu \leq \lambda + \mu$  gilt (vergl. Schwarz, Ges. Abh. II. pag. 259).

Wann aber werden wenigstens für eine Ecke, z. B. für die Ecke  $L$ , die beiden zugehörigen Kreisperipherieen der Begrenzung zusammenfallen? Was zunächst wieder die Dreiecke erster Art betrifft, so werden die Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  sich alsdann in der Form darstellen lassen müssen:

$$1) \quad \lambda = 1 + p + q, \quad \mu = \frac{1}{2} + q + \varrho, \quad \nu = \frac{1}{2} + p + \varrho,$$

woselbst jetzt  $p$  und  $q$  ganze Zahlen bezeichnen, während  $\varrho$  eine beliebige positive Zahl ist. — Bei den Dreiecken zweiter Art dagegen kann natürlich nur von der dem grössten Exponenten zugehörigen Ecke  $L$  (Fig. 37) in dem angegebenen Sinne die Rede sein. Wir

wollen zunächst ausschliessen, dass die beiden übrigen Ecken  $M$  und  $N$  zusammengefallen sind. Dann müssen die Grössen  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  die folgende Darstellung zeigen:

$$2) \quad \lambda = 2|\alpha| + 2\mu_0 + p + q, \quad \mu = \mu_0 + p, \quad \nu = \mu_0 + q$$

mit der Bedingung, dass  $2|\alpha| + 2\mu_0 = 2m + 1$  d. h. eine ungerade positive ganze Zahl ist. Hier hat  $2|\alpha|$  die auf pag. 52 angegebene Bedeutung;  $p$  und  $q$  bezeichnen wieder ganze Zahlen,  $\mu_0$  mag überdies der Gleichung  $0 < \mu_0 < 1$  genügen. — Fallen endlich die beiden Eckpunkte  $M$  und  $N$  unserer sphärischen Dreiecke des Falles II zusammen (vgl. Fig. 41), so müssen die Grössen  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  die folgende Zerlegung gestatten:

$$3) \quad \lambda = 2n + 1 + p + q, \quad \mu = p + \delta, \quad \nu = q - \delta,$$

woselbst  $n$ ,  $p$ ,  $q$  wieder ganze Zahlen und  $\delta$  eine beliebige Zahl bedeutet. Nun erkennt man leicht, wieder in Rücksicht auf die allgemeine Methode der Construction der sphärischen Dreiecke, dass auch umgekehrt die Darstellungsformen 1, 2 oder 3 eine hinreichende Bedingung bilden, um auf das Zusammenfallen der die Ecke  $L$  bildenden Kreisperipherieen zu schliessen; zugleich werden im Falle 3 stets die Ecken  $M$  und  $N$  des Dreiecks zusammenfallen. — Indem wir die in der Darstellung 1, 2, 3 liegenden Bedingungen in allgemeiner Form zusammenfassen, gewinnen wir den wichtigen Satz: *Die beiden die beliebige Ecke  $L$  bildenden Kreisbogen werden denselben Kreisperipherieen angehören, falls  $\lambda$  eine ganze Zahl und*

$$\lambda - \mu + \nu = 2n + 1 \text{ (Darstellungsform 1 und 2)}$$

oder

$$\lambda - \mu - \nu = 2n + 1 \text{ (Darstellungsform 3)}$$

d. h. gleich einer ganzen positiven ungeraden Zahl ist, wobei wir zugleich  $\mu > \nu$  voraussetzen. Letztere Einschränkung ergibt sich als nothwendig, um die erste Bedingung allein für die zu dem grössten Exponenten zugehörige Ecke eines Dreiecks zweiter Art gültig zu wissen. \*)

Dem letzten Satze können wir nun sogleich noch die folgende wichtige Ergänzung zur Seite stellen: *Ist der Exponent  $\lambda$  eine ganze Zahl, dagegen weder*

$$\lambda - \mu + \nu = 2n + 1 \text{ (für } \mu > \nu)$$

noch

$$\lambda - \mu - \nu = 2n + 1,$$

so gehören nothwendig die beiden die Ecke  $L$  bildenden Bogen zwei sich berührenden Kreisen an, d. h. die Ecke  $L$  ist eine wesentlich singuläre

\*) Vgl. Schwarz. Ges. Abh. II. pag. 256, insbesondere auch für das Folgende, sowie Schellenberg, Diss. Göttingen 1892, pag. 65, woselbst dieselben Bedingungen bei der analytischen Untersuchung betr. das Wegfallen der Logarithmen hervortreten.

Stelle für die  $s$ -Function (nach der Bezeichnung von Weierstrass). Indem die zu der Ecke  $L$  zugehörige Fundamentalsubstitution dann parabolischen Charakter trägt, wollen wir die Ecke im vorliegenden Falle als *parabolische Ecke* bezeichnen.

§ 16.

Theorie der „reducirten“ und „verwandten“ Dreiecke für reelle, nicht ganzzahlige Exponenten.

Die Gesamtheit aller Dreiecke, in denen kein Winkel grösser als  $2\pi$  und keine 2 Winkel grösser als  $\pi$  sind, wollen wir weiterhin als „reducirte Dreiecke“ bezeichnen.\*) Dieselben gehören, abgesehen von einer cyklischen Vertauschung in der Bezeichnung der Ecken  $a_1, b_1, c_1$ , in dem früher festgesetzten Sinne offenbar 2 Continuis an. *Wie viel reducirte Dreiecke wird es nun bei einem beliebigen Kerne der Geraden I, II, III geben, wenn wir die Wahl der Dreiecksecken unter den Fixpunkten  $a, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$  freistellen?* Um nicht immerfort unsere allgemeinen Betrachtungen durch Zusätze begrenzen zu müssen, wollen wir vor der Hand ganzzahlige Werthe der Exponenten ausschliessen, indem wir die zu ihnen gehörigen Dreiecke für eine besondere Betrachtung uns vorbehalten.

Wir haben die 3 Fälle des Kernes zu unterscheiden, dass die Geraden I, II, III sich entweder im Innern der Kugel oder im Aeusseren derselben oder auf der Kugel in einem Punkte schneiden. Die beiden ersten Fälle sind morphologisch dadurch unterschieden, dass die 3 Schnittkreise der durch je 2 der Geraden I, II, III gelegten

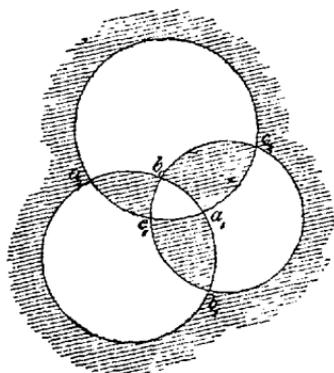


Fig. 42.

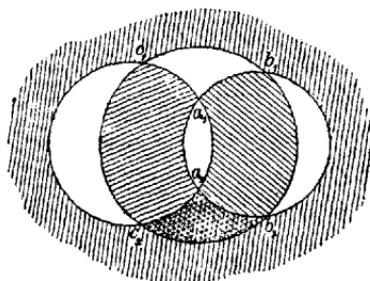


Fig. 43.

Ebenen mit der Kugel einen imaginären oder einen reellen gemeinsamen Orthogonalkreis besitzen (Fig. 42, 43). Im letzten Falle da-

\*) Vergl. die etwas abweichende Definition des reducirten Dreiecks bei Hrn. Schwarz, 1872, Ges. Abh. II. pag. 235—236, sowie bei Hrn. Klein, 1890, Ann. 37, pag. 580.

gegen gehen die genannten 3 Schnittkreise durch einen Punkt, denselben wird man gern ins Unendliche transformiren, wodurch in der  $s$ -Ebene die 3 Kreise in gerade Linien übergehen (Fig. 44, a, b).

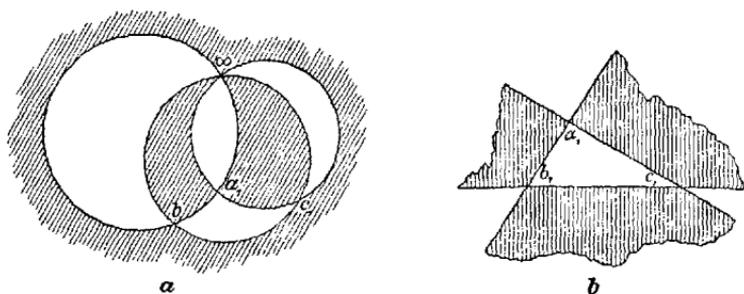


Fig. 44, a, b.

Wir wollen nun zunächst die für die Figuren 42—44 gemeinsam geltenden Beziehungen in Worten beschreiben und dann durch weitere Figuren für die einzelnen Fälle erläutern. Wir sagen: Zu jeder Auswahl der 3 Ecken gehören vier reducirte Dreiecke, von denen drei zu dem vierten Dreieck in der Beziehung der „Aussendreiecke“ zum „Grunddreieck“ stehen; in jedem Aussendreieck ist allemal einer der Winkel grösser als  $\pi$ . Je zwei „complementäre“ Auswahlen der 3 Ecken liefern zu einander „symmetrische“ Dreiecke, d. h. Dreiecke mit denselben Winkeln, jedoch mit verschiedener Aufeinanderfolge der 3 Ecken bei bestimmter Umlaufrichtung der Begrenzung. Indem wir symmetrische Dreiecke nicht als verschieden ansehen — dieselben stehen in indirecter Möbius'scher Kreisverwandtschaft —, werden wir demnach 4 Grunddreiecke in jedem Kern auswählen können; von diesen 4 Dreiecken stehen 3 zu dem vierten in der Beziehung der „Nebendreiecke“ zum „Hauptdreieck“; doch ist diese letzte Unterscheidung, besonders für den Fall der Figur 42, weniger von principieller Bedeutung. In den Figuren 42—44 ist allemal das Dreieck  $a_1 b_1 c_1$  als Hauptdreieck gewählt worden, die an seine drei Seiten anstossenden Nebendreiecke  $a_1 b_1 c_2$ ;  $a_1 c_1 b_2$ ;  $b_1 c_1 a_2$  sind durch Schraffirung hervorgehoben. In der Figur 43 überdecken sich diese drei Nebendreiecke gemeinsam in dem Dreieck  $a_2 b_2 c_2$ . Die Summe der Winkel des Hauptdreiecks  $a_1 b_1 c_1$  der Figuren 42—44 ist entsprechend  $> \pi$ ,  $< \pi$  oder gleich  $\pi$ , wie leicht zu übersehen ist.

Bezeichnen wir die Winkel eines Grunddreiecks z. B. des Hauptdreiecks eines Kernes mit  $\lambda_0 \pi$ ,  $\mu_0 \pi$ ,  $\nu_0 \pi$ , so werden die Winkel der 16 überhaupt vorhandenen reducirten Dreiecke desselben durch die folgende Tabelle, wieder unter Fortlassung des Factors  $\pi$ , gegeben:

Ecken:	$a_1 b_1 c_1$ oder $a_2 b_2 c_2$	$a_1 b_1 c_2$ oder $a_2 b_2 c_1$	$a_1 b_2 c_1$ oder $a_2 b_1 c_2$	$a_2 b_1 c_1$ oder $a_1 b_2 c_2$
Grunddreiecke:	$\lambda_0, \mu_0, \nu_0$	$1-\lambda_0, 1-\mu_0, \nu_0$	$1-\lambda_0, \mu_0, 1-\nu_0$	$\lambda_0, 1-\mu_0, 1-\nu_0$
Aussenddreiecke:	$2-\lambda_0, 1-\mu_0, 1-\nu_0$	$1+\lambda_0, \mu_0, 1-\nu_0$	$\lambda_0, 1-\mu_0, 1+\nu_0$	$1-\lambda_0, 1+\mu_0, \nu_0$
	$1-\lambda_0, 2-\mu_0, 1-\nu_0$	$\lambda_0, 1+\mu_0, 1-\nu_0$	$1+\lambda_0, 1-\mu_0, \nu_0$	$1-\lambda_0, \mu_0, 1+\nu_0$
	$1-\lambda_0, 1-\mu_0, 2-\nu_0$	$\lambda_0, \mu_0, 2-\nu_0$	$\lambda_0, 2-\mu_0, \nu_0$	$2-\lambda_0, \mu_0, \nu_0$

Nun gilt es, von den verschiedenen möglichen Gestalten dieser Dreiecke sich eine Anschauung zu bilden. Am einfachsten ist der Fall der Figur 42, in dem die Nebendreiecke nicht wesentlich vom Hauptdreieck verschieden sind; eines der Aussenddreiecke wird beispielsweise durch Fig. 45 gegeben. (In den Ecken der Dreiecke wird allemal die

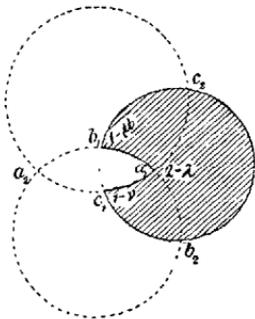


Fig. 45.

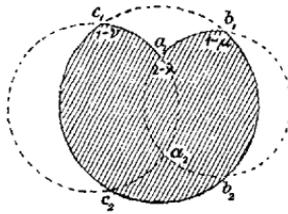


Fig. 46.

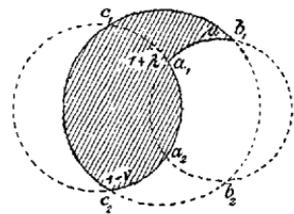


Fig. 47.

Grösse der Winkel in Beziehung auf die Tabelle angegeben.) Im Falle der Figur 43 sei eines der morphologisch gleichwerthigen Aussenddreiecke des Hauptdreiecks durch Fig. 46, eines der Aussenddreiecke des Nebendreiecks  $a_1 b_1 c_2$ , welches dem zweiten Aussenddreieck wieder morphologisch gleichwerthig ist, durch Fig. 47, das dritte Aussenddreieck des Nebendreiecks aber durch Fig. 48 gegeben. In letzterem überschlägt sich die Seite  $a_1 b_1$  einmal; die Figur ist daher etwas verzerrt gezeichnet worden. Nun kommt schliesslich noch der Uebergangsfall der Fig. 44, a, b. Auch an ihr werden wir sämtliche 16 reducirten Dreiecke aufzeigen können, jedoch ist allemal von je zweien der zu einander symmetrischen Dreiecke eines zu einem unbrauchbaren Bereich ausgeartet. Eines der Aussenddreiecke

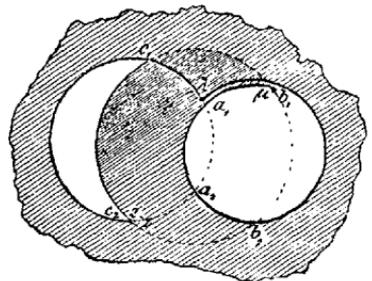


Fig. 48.

des Hauptdreiecks  $a_1 b_1 c_1$  giebt Fig. 49, woselbst die Seite  $b_1 c_1$  sich über den Unendlichkeitspunkt herüberzieht; eines der Aussendreiecke

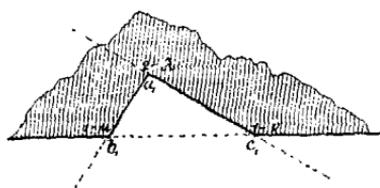


Fig. 49.

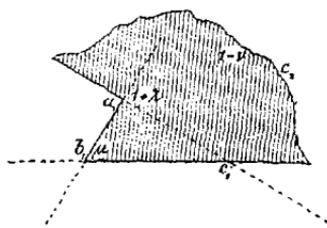


Fig. 50.

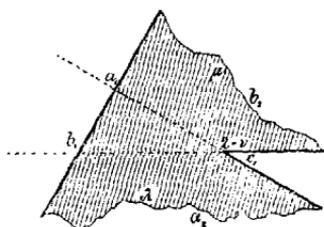


Fig. 51.

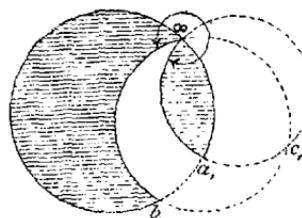


Fig. 52.

des Nebendreiecks  $a_1 b_1 c_2$ , welches dem zweiten wieder morphologisch gleichwerthig ist, giebt Fig. 50, das dritte zugehörige Aussendreieck endlich Fig. 51. Das zu letzterem symmetrische Dreieck, welches der ursprünglichen Auswahl der Ecken  $a_1 b_1 c_2$  entspricht, ist in 2 Zweiecke ausgeartet, wie sie Fig. 52 darstellt.

Wir werden jetzt wünschen, ein unmittelbares algebraisches Kriterium zu besitzen, um bei gegebenen Werthen  $\lambda, \mu, \nu$  (die wir, wie schon gesagt, stets als positive Grössen voraussetzen) einmal sofort zu erkennen, wann überhaupt ein Bereich sich geradlinig begrenzen lässt, und ferner welche Ecken hierbei in den Unendlichkeitspunkt fallen. Den Betrachtungen des Kernes auf pag. 195 u. 196 gemäss ergibt sich sofort, dass wir nur dann und stets dann ein geradliniges Dreieck haben werden, wenn  $\lambda + \mu + \nu$  oder  $\lambda + \mu - \nu$  oder  $\lambda - \mu - \nu$  (oder einer der durch cyclische Vertauschung entstehenden Ausdrücke) eine positive ungerade Zahl vorstellt. — Gehen wir nun der Reihe nach die einzelnen reducirten Dreiecke durch, die wir soeben angeführt haben, so ergeben sich die weiteren Sätze, die wir hernach auf die allgemeinen geradlinig begrenzten Dreiecke übertragen werden:

*Ist für ein reducirtes Dreieck  $\lambda + \mu + \nu = 2n + 1$ , so liegen alle Ecken im Endlichen (Bedingung A).*

*Ist für ein reducirtes Dreieck  $\lambda + \mu - \nu = 2n + 1$ , so liegt nur die Ecke N im Unendlichen (Bedingung B).*

*Ist für ein reducirtes Dreieck  $\lambda - \mu - \nu = 2n + 1$ , so liegen die Ecken M und N im Unendlichen (Bedingung C).*

Natürlich gestatten die beiden letzten Sätze die cyclische Vertauschung der Buchstaben  $\lambda, \mu, \nu$  und  $L, M, N$ .

Wir gehen nun einen Schritt weiter, indem wir die Gesamtheit aller derjenigen Dreiecke betrachten, die zu demselben Kern gehören und daher von Bogen derselben Kreise begrenzt werden. Wie bereits früher erwähnt wurde, nennt man diese Dreiecke mit einander „verwandt“, die zu ihnen gehörenden Functionen aber „verwandte“  $s$ -Functionen. Wir können offenbar bei einem beliebig vorgegebenen Dreieck mit den Winkeln  $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$  die auf den Seiten 210 ff. geschilderten geometrischen Prozesse auch rückwärts vornehmen, indem wir einmal an derjenigen Ecke, welche einer sich etwa überschlagenden Seite gegenüberliegt, so viele Kugelkalotten als möglich „polar“ abnehmen, andererseits die sich nicht überschlagenden Seiten, so viele Male als möglich, um den Winkel  $\pi$  zurückdrehen, d. h. Kugelkalotten „lateral“ abnehmen. Man erkennt, dass wir auf solche Weise stets nur zu Dreiecken gelangen, die mit dem Ausgangsdreieck verwandt sind; schliesslich werden wir zu einem reducirten Dreieck (welches in besonderen Fällen auch ein ausgeartetes Dreieck darstellen kann) geführt. Jeder Schritt, den wir ausführen (die Abnahme resp. Hinzufügung einer Kalotte), vermindert resp. vermehrt, wie man sofort erkennt, die Summe der 3 Winkel jedesmal um  $2\pi$ . Dies führt uns mit Rücksicht auf die Tabelle pag. 219 zu dem Satze: *Stets dann und nur dann sind (bei Ausschluss ganzzahliger Werthe  $\lambda, \mu, \nu$ ) zwei beliebige Dreiecke mit einander verwandt, wenn die mit bestimmten Vorzeichen versehenen Winkel der beiden Dreiecke sich entsprechend um ganze Vielfache von  $\pi$  unterscheiden, deren Summe ein gerades Vielfaches von  $\pi$  ist.*

Je nachdem die Summe der ganzen in  $\lambda, \mu, \nu$  enthaltenen Zahlen gerade oder ungerade ist, ist die soeben geschilderte Reduction eines beliebigen Dreiecks eindeutig oder dreideutig, entsprechend dem Umstande, dass zu jedem Grunddreieck 3 Aussendreiecke gehören. Um dies klar einzusehen, berücksichtige man, dass man z. B. von dem reducirten Dreieck

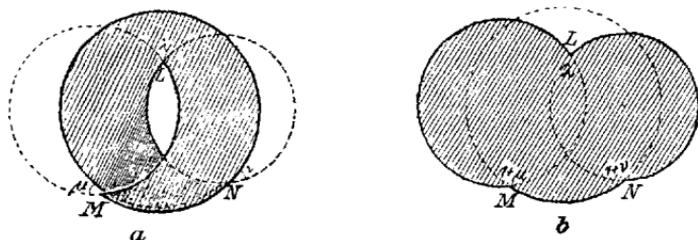


Fig. 53, a, b.

der Figur 53a (mit den Winkeln  $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ ) zum nicht reducirten Dreieck Fig. 53b (mit den Winkeln  $\lambda\pi, (\mu + 1)\pi, (\nu + 1)\pi$ ) ge-

langen kann, indem man die Seiten  $LM$  und  $LN$  in Fig. 53a um den Winkel  $\pi$  hinausdreht und dann in  $L$  eine Kalotte abtrennt. Analog kommt man von dem Dreieck, welches von dem nicht schraffirten Theil der Ebene Fig. 53b dargestellt wird, zu dem neuen Dreieck, dessen Winkel an der Ecke  $L$  um  $2\pi$  vermehrt ist, indem man an den Seiten  $LM$  und  $LN$  eine Kalotte lateral anhängt, dagegen dann an der Seite  $MN$  eine Kalotte lateral abtrennt.

Es ist im übrigen nach dem Vorstehenden nicht schwer, umgekehrt *alle zu einem bestimmten Kern gehörenden verwandten Dreiecke* aus seinen 16 reducirten Dreiecken mittels der geometrischen Prozesse der lateralen und polaren Anhängung von Kugelkalotten aufzubauen.\*) Auf jedes der 16 reducirten Dreiecke baut sich somit eine unendliche (abzählbare) Menge verwandter Bereiche auf. Von besonderem Interesse ist wieder der allgemeine Fall geradlinig begrenzter Dreiecke.

Die nähere Betrachtung, wie man von den reducirten Bereichen zu den allgemeinen Bereichen aufsteigt, führt uns hier zu der in Aussicht gestellten Erweiterung der Sätze pag. 220, die jetzt allgemein lautet:

*Ist für ein sphärisches Dreieck*

$$\lambda + \mu + \nu = 2n + 1 \text{ (Bedingung A)}$$

oder

$$\lambda + \mu - \nu = 2n + 1 \text{ (Bedingung B)}$$

oder

$$\lambda - \mu - \nu = 2n + 1 \text{ (Bedingung C),}$$

so kann man dasselbe stets durch geeignete Transformation in ein geradlinig begrenztes Dreieck verwandeln, und zwar werden dabei im ersten Falle alle 3 Ecken des Dreiecks im Endlichen liegen, im zweiten Falle dagegen wird die Ecke  $N$ , im dritten Falle werden die Ecken  $M$  und  $N$  ins Unendliche gerückt sein. Wieder kann man natürlich cykliche Vertauschungen der Buchstaben eintreten lassen; es sei dabei bemerkt, dass zwei der genannten Bedingungen nur dann gleichzeitig gelten können, wenn ganzzahlige Werthe der Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  auftreten, die wir hier einstweilen ausgeschlossen haben.

Aus der Theorie der verwandten Dreiecke folgt zugleich, dass irgend 2 Dreiecke, welche zu je einem der beiden gemäss pag. 204 ff. für gegebene Werthe der  $\lambda, \mu, \nu$  sich ergebenden Kerne gehören, sich in ihrer mit richtigen Vorzeichen genommenen algebraischen Winkelsumme um ein ungerades Vielfache von  $\pi$  unterscheiden, während die sich entsprechenden Winkel um ganze Vielfache von  $\pi$  differiren. Werfen wir schliesslich an dieser Stelle nochmals einen Rückblick auf die Bestimmung der Grössen  $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$  am Gebilde des Kernes,

\*) Ein solcher Weg ist in der Darstellung des Hrn. Klein befolgt, Ann. 37, 1890, p. 579 ff.

wie dieselbe auf pag. 187 u. 188 gegeben ist, so werden wir durch Betrachtung specieller Dreiecke leicht finden, dass für die Werthe der Winkel  $\lambda\pi$ ,  $\mu\pi$ ,  $\nu\pi$  eines Dreiecks  $LMN$ , dessen Ecken die Punkte  $a_1, b_1, c_1$  darstellen mögen, in der Formelgruppe pag. 194 stets die oberen Vorzeichen (d. h. die Cosinusformeln) zu wählen sind (je nachdem man jedoch bei einer Umlaufung der Dreiecksbegrenzung, die Fläche linker Hand lassend, die 3 Ecken  $LMN$  in dieser oder in der umgekehrten Reihenfolge antrifft, sind die Winkel des Dreiecks positiv oder negativ in Rechnung zu bringen). Die Endformeln pag. 201 übertragen sich auf unsere Dreiecke, indem man für die Grössen  $l\pi$ ,  $m\pi$ ,  $n\pi$  die um  $\pi$  vermehrten Werthe der 3 Seiten des Dreiecks einsetzt.

### § 17.

#### Endgültige Betrachtung der Kreisbogendreiecke für ganzzahlige Exponenten.

Es erübrigt noch, wie wir uns vornahmen, die Dreiecke für ganzzahlige Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  im Zusammenhange zu betrachten. Mögen nun alle drei Exponenten, zwei oder nur einer derselben ganzzahlig sein, stets wird sich zeigen, dass wir nicht mehr 16 reducirte Dreiecke als von einander verschieden an dem einzelnen Kern zu unterscheiden haben. Ja, es wird sogar in einigen Fällen eintreten, dass gar nicht einmal alle 16 in der Tabelle pag. 219 genannten Exponententripel zu Dreiecken *desselben* Kernes führen, sondern zu Dreiecken *zweier verschiedener Kerne*. (Dann ist also der einzelne Kern durch die Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  allein nicht festgelegt.) Hierbei zeigt sich, dass gerade die Dreiecke, welche bei dem einen Kern unbrauchbar sind, bei dem andern brauchbar sind und umgekehrt, und somit treten 2 getrennte Schaaren mit einander verwandter Dreiecke auf. Wir wollen sogleich die einzelnen möglichen Fälle nach einander besprechen. Hierbei werden besonders die speciellen Betrachtungen des Kernes auf pag. 203 u. 204 zur unmittelbaren Anwendung gelangen; auf sie sei allemal am Schlusse der folgenden Fälle hingewiesen.

a) Sind alle drei Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  ganze Zahlen, so haben wir die zwei Fälle zu unterscheiden, dass ihre Summe gerade oder ungerade ist.

1) Im ersten Falle haben wir es nur mit einer Gesammtheit mit einander verwandter Dreiecke zu thun. Diese leitet sich ab von dem reducirten Dreieck, dessen drei Winkel einzeln gleich Null sind (Fig. 31). Es giebt ausserdem an dem Kern dieses Dreiecks noch drei weitere reducirte Dreiecke, entsprechend mit den Winkeln  $0, \pi, \pi$ ;  $\pi, \pi, 2\pi$ ;  $0, 0, 2\pi$  (Fig. 38). Von ihnen haben wir die beiden letzten als

Aussendrieecke anzusehen. Man übersieht zugleich sofort, dass stets auch in dem allgemeinen Dreieck der Verwandtschaft *drei parabolische Ecken* auftreten werden (Kern *a*, 1 pag. 203).

2) Im *zweiten* Falle leiten sich sämtliche möglichen Dreiecke von den beiden reducirten Dreiecken mit den Winkeln  $0, 0, \pi$  resp.  $\pi, \pi, \pi$  ab. Das erste Dreieck giebt Fig. 41, das zweite Dreieck erhält man leicht aus Fig. 31, indem man die einzelnen Seiten nach dem Process I je um den Winkel  $\frac{\pi}{2}$  nach aussen dreht (Fig. 54). Indem diese beiden Dreiecke zu ganz verschiedenen Kernen gehören, die übrigens beide unbestimmt sind, so haben wir daher *zwei von einander getrennte Schaaren verwandter Dreiecke*, die sich wie folgt von einander sondern und für sich charakterisiren lassen:

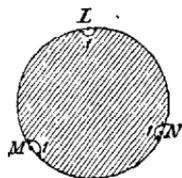
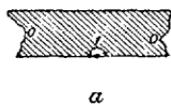


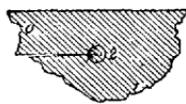
Fig. 54.

Haben wir ein *Dreieck erster Art*, d. h. ein Dreieck, für welches jeder Exponent kleiner als die Summe der beiden anderen ist, so gehören die 3 begrenzenden Bogen derselben Kreisperipherie an und eine parabolische Ecke tritt nicht auf. Ausser dem Dreiecke  $\pi, \pi, \pi$  giebt es weiter kein reducirtes Dreieck (Kern *a*, 2 pag. 203).

Haben wir ein *Dreieck zweiter Art*, d. h. ein Dreieck, für welches der grösste Exponent grösser als die Summe der beiden anderen ist, so gehören nur die Kreisbogen der zu dem grössten Exponenten zugehörigen Ecke einer einzigen Peripherie an, während die beiden anderen Ecken zusammenfallen und parabolischen Charakter tragen. Neben dem Dreieck  $0, 0, \pi$  (Fig. 41 u. Fig. 55a) tritt noch das Dreieck  $0, \pi, 2\pi$  (Fig. 55b) als reducirtes Dreieck auf (Kern *a*, 3 pag. 203).



a



b

Fig. 55, a, b.

Natürlich lässt sich dem einzelnen Dreieck in beiden Fällen stets eine geradlinige Begrenzung geben.

b) Sind nur zwei der Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  ganze Zahlen, etwa  $\lambda$  und  $\mu$ , so haben wir es im einzelnen Falle stets nur mit *einer Gesammtheit mit einander verwandter Bereiche* zu thun, die sich von dem reducirten Dreieck  $0, 0, \nu_0\pi$  mit wohlbestimmtem Kern ableiten lassen, woselbst  $0 < \nu_0 < 1$  sei (Fig. 56). Insgesamt wird man gemäss der Tabelle pag. 219 drei Grunddreiecke und zu ihnen 5 Aussendrieecke als von einander verschiedene reducirte Dreiecke finden; die bezüglichen Figuren derselben ergeben sich unmittelbar als Grenzfälle der Figuren 43 und 46—48 der Seiten 217 u. 219 (vgl. auch Fig. 36 u. 37). Es besitzen also die Ecken *L* und *M* des allgemeinen Dreiecks parabolischen Charakter. (Geradlinige Bereiche

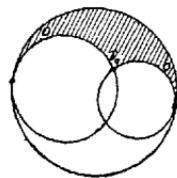


Fig. 56.

sind hier ausgeschlossen, da für dieselben eine der Bedingungen  $\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$  gelten müsste, die auch für den dritten Exponenten eine ganze Zahl verlangen würde.) (Kern *b* pag. 203.)

c) Ist nur einer der Exponenten eine ganze Zahl, z. B.  $\lambda$ , so wollen wir von vornherein die beiden Fälle auseinander halten, dass eine der Bedingungen für die Möglichkeit geradliniger Begrenzung ( $\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ ) erfüllt wird oder nicht.

1) Im letzteren Falle zeigt die nähere Betrachtung, dass die Gesamtheit aller verwandten Dreiecke sich von einem reducirten Dreiecke  $0, \mu_0\pi, \nu_0\pi$  mit wohlbestimmtem Kern ableiten lässt, woselbst  $0 < \mu_0 < 1$  und  $0 < \nu_0 < 1$  sei (Fig. 57). Wir haben insgesamt 14 verschiedene reducirte Dreiecke gemäss der Tabelle pag. 219 zu unterscheiden, indem die Dreiecke  $\pi, \pi - \mu_0\pi, \nu_0\pi$  und  $\pi, \mu_0\pi, \pi - \nu_0\pi$  in letzterer doppelt auftreten. Alle diese Dreiecke ergeben sich wieder in einfachster Weise aus Fig. 57 als Grenzfälle der Figuren 43 und 46—48 der Seiten 217 und 219. Es tritt stets eine parabolische Ecke *L* auf.

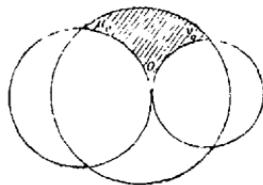


Fig. 57.

2) Dagegen in dem besonderen Falle, dass sich *geradlinige Begrenzung* einführen lässt, sondern sich die reducirten Dreiecke der Tabelle pag. 219 wieder in 2 Gruppen, die verschiedenen Kernen angehören und demnach zu verschiedenen Schaaren verwandter Dreiecke führen.

Die eine Gesamtheit verwandter Dreiecke leitet sich von dem Dreieck  $0, \mu_0\pi, \nu_0\pi$  mit wohlbestimmtem Kern ab, woselbst  $0 < \mu_0 < 1, 0 < \nu_0 < 1$  und  $\mu_0 + \nu_0 = 1$  sei. (Fig. 58). Diesem Grunddreieck gesellen sich nur vier reducirte Dreiecke zu, die sämtlich den Charakter von Aussendreiecken haben.

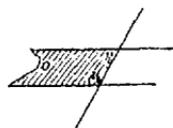


Fig. 58.

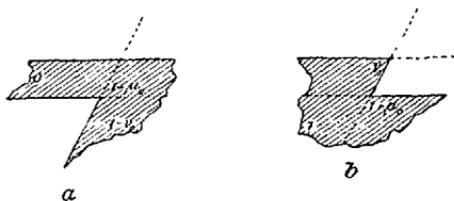


Fig. 59 a, b,

Ihre Winkel sind in Rücksicht auf die Beziehung  $\mu_0 + \nu_0 = 1$  bezüglich gleich:

$$\begin{cases} 0, \pi + \mu_0\pi, \mu_0\pi, & \text{(Fig. 59a)} \\ 0, \pi - \mu_0\pi, 2\pi - \mu_0\pi \end{cases}$$

und:

$$\begin{cases} \pi, 2\pi - \mu_0\pi, \mu_0, \\ \pi, \pi - \mu_0\pi, \pi + \mu_0\pi \end{cases} \quad \text{(Fig. 59b).}$$

Die Ecke  $L$  besitzt stets parabolischen Charakter (Kern  $c$ , 2, pag. 204).

Die zweite Gesamtheit verwandter Dreiecke baut sich auf dem Grunddreiecke  $\pi$ ,  $\pi - \mu_0 \pi$ ,  $\nu_0 \pi$  mit unbestimmtem Kern auf, woselbst wieder  $0 < \mu_0 < 1$ ,  $0 < \nu_0 < 1$  und  $\mu_0 + \nu_0 = 1$  ist (Fig. 60).

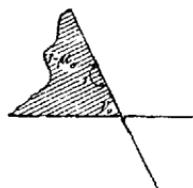


Fig. 60.



Fig. 61a, b.

Ausserdem gehört hierher noch ein zweites Grunddreieck  $\pi$ ,  $\mu_0 \pi$ ,  $\pi - \nu_0 \pi$  und ein Aussendreieck  $2\pi$ ,  $\pi - \mu_0 \pi$ ,  $\mu_0 \pi$  (Fig. 61a oder b). Die in der Ecke  $L$  zusammenstossenden Seiten fallen allemal in eine Peripherie zusammen (Kern  $c$ , 1, pag. 204).

Als Kriterium für das Auftreten des einen oder anderen Falles gilt gemäss unserer Sätze auf pag. 216: Die Kreisbogen des Kernes  $c$ , 1 kommen zur Begrenzung des sphärischen Dreiecks in Anwendung, wenn

$$\lambda - \mu \pm \nu = 2n + 1$$

(für  $\mu > \nu$ ) ist; andernfalls treten die Kreisbogen des Kernes  $c$ , 2 ein.

Geben wir schliesslich noch darauf acht, welche Ecken bei Einführung geradliniger Begrenzung der Dreiecke ins Unendliche fallen, so ergeben sich leicht die folgenden Sätze:

Für die Dreiecke des Kernes  $c$ , 2 gilt:

Die Ecke  $L$  liegt stets im Unendlichen.

Ist  $\lambda + \mu + \nu = 2n + 1$  (Bedingung A), so liegt nur die Ecke  $L$  im Unendlichen. (Es gilt dann auch stets  $\mu + \nu - \lambda = 2n + 1$  (Bedingung B).)

Ist dagegen  $\mu - \nu - \lambda = 2n + 1$  (resp.  $\nu - \mu - \lambda = 2n + 1$ ) (Bedingung C), so liegt ausser der Ecke  $L$  noch die Ecke  $N$  (resp.  $M$ ) im Unendlichen. (Es gilt dann wieder stets auch  $\lambda + \mu - \nu = 2n + 1$  für  $\mu > \nu$  resp.  $\lambda + \nu - \mu = 2n + 1$  für  $\nu > \mu$  (Bedingung B).)

Für die Dreiecke des Kernes  $c$ , 1 gilt:

Die Ecke  $L$  liegt stets im Endlichen.

Ist nun  $\lambda - \mu - \nu = 2n + 1$  (Bedingung C), so müssen nach dem Satz pag. 216 die Ecken  $M$  und  $N$  des Dreiecks zusammenfallen, sie werden daher beide im Endlichen oder beide im Unendlichen liegen, je nachdem man den einen oder den anderen Schnittpunkt der beiden begrenzenden Kreisperipherieen in's Unendliche transformirt hat. (In diesem Falle ist auch  $\lambda + \mu + \nu = 2n + 1$ , d. h. die Bedingung A gültig.)

Ist dagegen  $\lambda - \mu + \nu = 2n + 1$  für  $\mu > \nu$  (Bedingung B), so liegt eine der Ecken  $M$  oder  $N$  im Unendlichen; es ist wiederum gleich, welche von beiden man ins Unendliche transformiren will.

### § 18.

#### Grenzfälle der Kreisbogendreiecke für unendlich grosse Exponenten.

Interessanter noch als die sphärischen Dreiecke für ganzzahlige Exponenten sind jene Grenzfälle der Dreiecke, die zu unendlich grossen Exponenten gehören.

Bekannt ist in diesem Sinne die Abbildung durch den Quotienten zweier linear unabhängiger Particularlösungen der allgemeinen Bessel'schen Differentialgleichung, die ja einen Grenzfall der gewöhnlichen Differentialgleichung der Riemann'schen  $P$ -Function darstellt. Wir wollen diese specielle  $s$ -Function weiterhin mit  $B(z)$  bezeichnen; dieselbe lässt sich für unsere Zwecke am besten definiren, indem wir von dem Quotienten zweier zusammengehöriger allgemeiner Kugelfunctionen ausgehen, der eine  $s$ -Function für reelle  $\lambda, \mu, \nu$  mit zwei gleichen Exponenten darstellt. Lassen wir diese gleichen Exponenten ins Unendliche wachsen, so erhalten wir die zugehörige Function  $B$ . Hiernach ergibt sich leicht das sphärische Dreieck, welches die Abbildung der Halbebene des Argumentes für die Function  $B$  darstellt. Wir gehen von einem sphärischen Dreieck der ersten Art aus, in dem zwei Winkel einander gleich sind (es sei etwa  $\mu\pi = \nu\pi$ ), der dritte Winkel aber einen beliebig grossen Werth besitzt, und lassen die Kreisbogenseite  $MN$  sich nach dem Process I immerfort nach aussen um die Eckpunkte  $M$  und  $N$  drehen. Wir erhalten dann als Grenzfall ein sphärisches Dreieck, wie es beispielsweise für einen Werth von  $\lambda < 2$  Fig. 62 darstellt. Die dritte Seite des Dreiecks ist natürlich jetzt verloren gegangen, dementsprechend haben wir uns in den Punkten  $M$  und  $N$  Windungspunkte beliebig hoher Ordnung zu denken. Die in  $L$  zusammenstossenden Kreisbogen können wir gern immer geradlinig wählen. (Uebrigens besitzt das Dreieck Fig. 62 stets eine Symmetrielinie, welche durch die Halbierungslinie des Winkels  $\lambda\pi$  gegeben wird.) Aus der Theorie der Bessel'schen Function ist zugleich bekannt, dass in der Ebene des Argumentes die beiden singulären Punkte  $b$  und  $c$  zusammengefallen sind.\*)

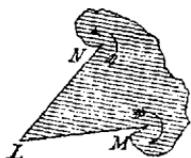


Fig. 62.

Wenn wir nun die in den vorangehenden Paragraphen gegebene geometrische Theorie der sphärischen Dreiecke überblicken, so sehen wir, dass keineswegs das Dreieck Fig. 62 das Einzige ist, zu dem

\*) Alle diese Gedanken finden sich näher ausgeführt in Olbricht, Dissertation, Leipzig 1887; abgedruckt in den Acta Leopoldina Bd. 52.

wir für  $\infty$  hohe Exponenten geführt werden. Indem unsere Aufgabe hier nicht darin besteht, die zugehörigen Functionen analytisch im Einzelnen näher zu studiren, begnügen wir uns, die betreffenden geometrischen Figuren zusammenzustellen und die zu ihnen gehörenden Abbildungsaufgaben, soweit es unmittelbar möglich ist, auf bekannte Fälle zurückzuführen. Wir theilen die Figuren ein, je nachdem in allen drei, in zwei oder in einer Ecke ein Windungspunkt unendlich hoher Ordnung liegt. Indem wir noch weiter singuläre Fälle, dass z. B. zwei Ecken des Dreiecks zusammenfallen oder zwei Kreisperipherieen der Begrenzung sich berühren oder sich decken, der Einfachheit halber bei Seite lassen, zumal sie keine geometrische Schwierigkeit weiter bieten, stellen wir die folgenden charakteristischen Figuren zusammen, in

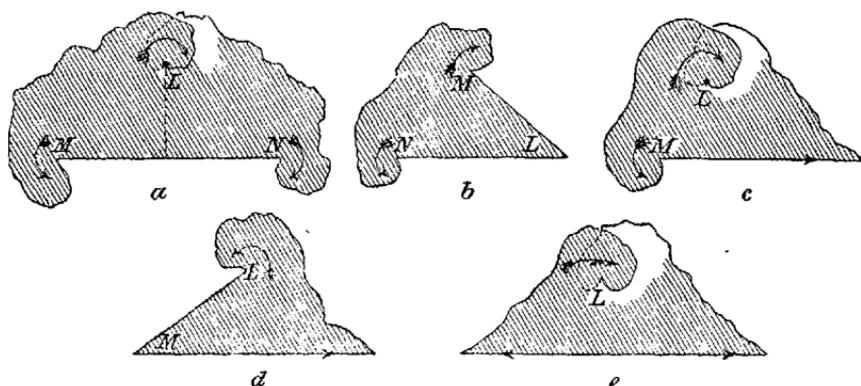


Fig. 63 a—e.

denen wir die Begrenzung sogleich geradlinig gewählt haben. Diese Figuren sind wohl an und für sich verständlich, ein unendlich hoher Windungspunkt oder eine unendliche Ueberschlagung einer Seite sind durch Pfeilspitzen angedeutet. In Fig. 63a sind alle drei Exponenten unendlich, in Fig. 63b, c sind nur zwei Exponenten, in Fig. 63d, e ist nur ein Exponent unendlich geworden. Insbesondere haben wir z. B. die Fig. 63a entstehen zu denken, indem wir in einem beliebigen Dreieck mit den Winkeln  $\lambda_0\pi$ ,  $\mu_0\pi$ ,  $\nu_0\pi$  längs  $LM$  und  $LN$   $\infty$  viele Kugelkalotten lateral anhängen, sodass sich die Winkel der Dreiecke als  $\limes \lambda_0\pi + m\pi + n\pi$ ,  $\mu_0\pi + m\pi$ ,  $\nu_0\pi + n\pi$  für  $m = \infty$  und  $n = \infty$  ergeben; das Analoge gilt für die übrigen Figuren. Das ist überhaupt das allgemeine Princip, welches den Figuren zu Grunde liegt, dass die geometrischen Prozesse der lateralen und polaren Anhängung von Kugelkalotten bei jedem vorliegenden sphärischen Dreieck sich auch in unendlicher Wiederholung anwenden lassen; hierbei ist nur zu beachten, dass wenigstens eine der Dreiecksseiten erhalten bleiben muss, da andernfalls von einer Abbildung des Dreiecks auf die Halbebene nicht weiter die Rede sein kann.

In den Figuren 63a—e sind die nicht  $\infty$  grossen Winkel kleiner

als  $\pi$ , die sich nicht unendlich oft überschlagenden Seiten kleiner als eine volle Peripherie gewählt worden; diese Figuren stellen demnach „zum Theil reducirte Dreiecke“ vor. Es ist dementsprechend natürlich sehr wohl noch möglich, in Fig. 63a beliebige Kugelkalotten an  $MN$  lateral oder in  $L$  polar, ebenso in Fig. 63b (wie entspr. in Fig. 62) Kugelkalotten in  $M$  (oder in  $N$ ) polar und an  $NL$  (resp.  $ML$ ) lateral oder statt dessen gleichzeitig an  $ML$  und  $NL$  solche lateral, endlich in Fig. 63d Kugelkalotten an  $ML$  lateral anzuhängen.

Die Fälle der Figuren 63c, d, e lassen sich nun sehr einfach analytisch erledigen. Indem wir das sphärische Dreieck Fig. 63e an der sich  $\infty$  oft überschlagenden Seite durch Spiegelung symmetrisch wiederholt denken, wobei die Ecke  $L$  die neue Ecke  $L'$  ergeben möge, führt uns dasselbe zu dem pag. 181 behandelten elementaren Bereiche und findet solcherweise von selbst seine Erledigung. Die Punkte  $a, b, c$  der Ebene des Argumentes  $z$  fallen für die Fig. 63e zusammen. Das Dreieck Fig. 63d liefert ferner mit seinem symmetrischen Dreiecke an der sich  $\infty$  oft überschlagenden Seite zusammen den Bereich des Bessel'schen Quotienten  $B$ , wie wir ihn bereits in Fig. 62 uns nahe geführt haben; dementsprechend wird, wie die nähere Ueberlegung leicht zeigt, die Abbildung des sphärischen Dreiecks auf die Halbebene (abgesehen von bestimmten Constanten, die wir auch in den folgenden Fällen fortlassen wollen) durch die Function  $B_{2\mu}$  geliefert, — mit dem unteren Index sei die Grösse des nicht  $\infty$  gewordenen Exponenten angegeben, —

wenn man in ihr das Argument  $z$  durch  $z' = z^{\frac{1}{2}}$  ersetzt. Die Punkte  $a$  und  $c$  der Ebene des Argumentes fallen für die Fig. 63d zusammen. Analog werden wir auch die zu dem sphärischen Dreieck der Fig. 63c gehörige  $s$ -Function auf den Bessel'schen Quotienten  $B$  zurückführen können, indem wir gleichfalls jenes Dreieck symmetrisch wiederholt denken, wodurch die neue Ecke  $L'$  entsteht. Man übersieht dann zunächst, dass man die drei Punkte  $L, M, L'$  durch lineare Substitution stets in die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks transformiren kann. Demzufolge erhält man durch Hinzufügung des symmetrischen Dreiecks die Fig. 64, die als ein gleichseitiges Dreieck zu charakterisiren ist, in dem längs seiner drei Seiten je  $\infty$  viele Kugelkalotten lateral angehängt sind. Verbindet man nun in Figur 64 den Mittelpunkt  $O$  des gleichseitigen Dreiecks mit den Ecken  $L, M, L'$ , so zerfällt der ganze Bereich in drei congruente Bereiche, die wieder mit der Figur 62 sich gleichwerthig zeigen. Hieraus folgt, dass die Abbildung des sphärischen Dreiecks Fig. 63c auf die

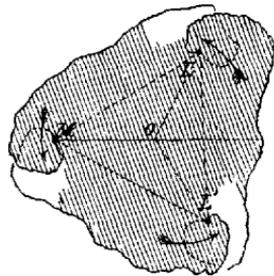


Fig. 64.

Halbebene  $z$  durch die Function  $s = B_{\frac{2}{3}}(z')$  (abgesehen von den Constanten) geliefert wird, woselbst  $z'^{\frac{3}{2}}$  für das Argument  $z'$  einzusetzen ist. Durch letztere Function wird dann der Bereich der Fig. 64 auf die Vollebene  $z$  abgebildet, ein gewiss interessantes Resultat. Die Punkte  $a, b, c$  der Ebene des Argumentes  $z$  fallen für Fig. 63c wieder zusammen.

Die Bereiche der Figuren 63a, b lassen sich allgemein nicht auf die Abbildung durch den Bessel'schen Quotienten zurückführen. Fig. 63b stellt nur dann den Bereich Fig. 62 einer Bessel'schen Function selbst dar, wenn die geradlinigen Seiten  $ML$  und  $NL$  gleich sind; Fig. 63a lässt sich in zwei Dreiecke der Fig. 62 zerlegen, wenn bei der speciellen stets zu erreichenden Lage der Fig. 63a, in der neben der geradlinigen Begrenzung die Ecken  $LMN$  ein gleichschenkliges Dreieck bestimmen, die gerade Verbindungslinie von  $L$  mit der Mitte von  $MN$  gleich  $\frac{MN}{2}$  ist. In letzterem Falle wird, wieder von den Constanten abgesehen, die das Dreieck Fig. 63a auf die Halbebene  $z$  abbildende Function durch  $s = B_{\frac{1}{2}}(z')$ , wo  $z' = z^2$  zu setzen ist, gegeben. Doch dürfte es besonders interessant sein, die abbildende Function im allgemeinen Falle der Figuren 63a, b zu studiren. Jedenfalls werden, wie in den betrachteten Specialfällen, für Fig. 63a die den drei Eckpunkten entsprechenden Punkte, für Fig. 63b die den Eckpunkten  $M$  und  $N$  entsprechenden Punkte in der Ebene des Argumentes  $z$  zusammenfallen.

## § 19.

### Die Dreiecke für theils imaginäre, theils reelle Exponenten.

Gehen wir nun dazu über, die Fundamentaldreiecke für den Fall zu construiren, dass einer, zwei oder alle drei Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  imaginär (d. h. rein imaginär) sind, während die übrigen reelle Werthe haben. In allen diesen Fällen werden wir gleichfalls mit Dreiecken, d. h. mit der Abbildung der positiven oder der negativen Hälfte der Ebene des Argumentes, ausreichen; jedoch gehen die den imaginären Exponenten entsprechenden Ecken, wie wir von früher wissen, verloren.\*)

Wie wir auf pag. 189 ff. erkannten, ist der Kern für drei imaginäre Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  dadurch ausgezeichnet, dass die inneren Axen der Substitutionen in einer Ebene liegen und ihre Schnittpunkte sämmtlich innerhalb oder sämmtlich ausserhalb der Kugel gelegen sind. Es ergibt

\*) Schwarz, 1873, Ges. Abh. II, pag. 233.

sich unmittelbar, dass, rein morphologisch betrachtet, drei Lagen dieser Axen in ihrer Ebene möglich sind, wie sie die nachfolgenden Figuren

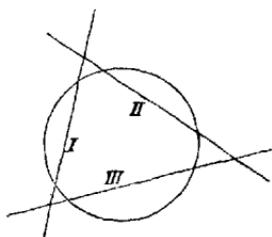
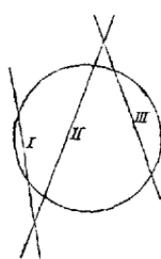
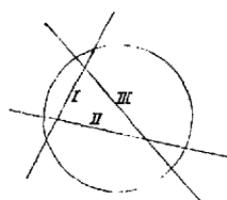


Fig. 65.



a



b

Fig. 66 a, b.

wiedergeben. In der ersten wird durch die Verbindungsebenen je zweier der äusseren Axen die Kugel in drei Kalotten und einen dreifach zusammenhängenden Bereich zerlegt, im zweiten Falle dagegen in zwei Ringgebiete und zwei Kalotten, im dritten endlich schneiden die genannten Ebenen die reelle Kugel überhaupt nicht. Es stellt sich heraus, dass unter den beiden Lösungen der Construction des Kernes für gegebene imaginäre Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  allemal eine den Typus der Fig. 65 besitzt, die andere dagegen den Typus der Fig. 66 a oder 66 b. (Die letzten beiden Figuren unterscheiden sich algebraisch darin, dass für  $L < M < N < 1^*$ ) im Falle Fig. 66 a  $MN > L$ , im Falle Fig. 66 b  $MN < L$  ist.) Für uns kommt hier nur der Kern der Fig. 65 in Betracht, indem die Kerne der Fig. 66 a, b zu Fundamentalbereichen gehören, für welche die Summe der reellen (ganzzahligen) Theile der zugehörigen Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  eine ungerade Zahl darstellt, daher niemals gleich 0 sein kann.

Denken wir uns die conjugirten Polaren der Geraden  $I, II, III$  für Fig. 65 construirt, so werden ihre Verbindungsebenen wie gesagt einen dreifach zusammenhängenden Bereich auf der Kugel ausschneiden. Aus demselben werden wir sehr leicht uns ein einfach zusammenhängendes Flächenstück bilden, indem wir das schraffierte Gebiet zwischen den drei Kreisen nicht auf der anderen Seite der Kugel wieder zusammenhängen, sondern zwischen je zweien der drei Kreise in ein unendliches Band auslaufen lassen, das sich immerfort um die Kugel herumwindet. *Dieses Flächenstück, das von drei sich unendlich oft überschlagenden Kreisbogen begrenzt wird, ist unser gesuchtes Dreieck* (Fig. 67). Wir können dasselbe ansehen als ein Dreieck (oder als ein Dreieck, wenn wir lieber wollen) mit drei rein imaginären (nicht-Euklidischen) Winkeln  $i\lambda''\pi, i\mu''\pi,$

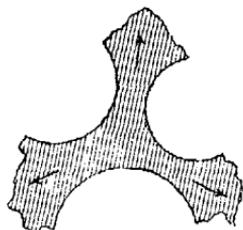


Fig. 67.

\*) Vgl. pag. 203 dieser Arbeit.

$iv''\pi$ , indem die Ebenen der Kreise gerade unter den genannten Winkeln gegen einander geneigt sind. Die Figur 68 giebt unser Dreieck um einen Umlauf in der Richtung des einen Kreisbandes

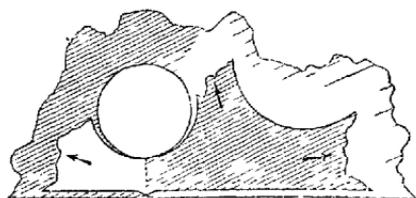


Fig. 68.

vermehrt; es sei ausdrücklich bemerkt, dass jedes Kreisinnere der Figur 67 durch das gegenüberliegende Kreisband unendlich oft überdeckt wird. Wir sehen die Analogie dieses Falles mit den Betrachtungen der Zweiecke auf pag. 178 ff., an denen wir die Eigenschaft der Fundamentalbe-

reiche, in ein unendliches Kreisband auszulaufen, genau studirt haben. Gemäss unserer Construction des Kernes pag. 202 ff. sind wir sicher: *Wir erhalten für ein beliebiges Werthetripel  $i\lambda''$ ,  $i\mu''$ ,  $iv''$  stets einen und nur einen hierher gehörenden Kern und also auch nur ein zugehöriges Dreieck mit drei imaginären Winkeln.* Dem letzteren liegt jedoch, wie leicht zu sehen, allemal ein „symmetrisches“ Dreieck gegenüber. Zugleich ist ersichtlich, dass wir dem pag. 168 über das gewöhnliche sphärische Dreieck ausgesprochenen Satze, der sich auf die bezüglich der drei Seiten symmetrischen Dreiecke bezieht und die geometrische Veranschaulichung der Formel  $AB\Gamma = 1$  darstellt, auch auf Dreiecke mit rein imaginären Winkeln übertragen können. Wir fügen noch den Satz hinzu: *Die mit unserem Dreieck mit drei rein imaginären Winkeln verwandten Fundamentalbereiche, deren Exponenten in ihren reellen Theilen nothwendig ganze Zahlen mit einer geraden Summe darstellen, gehören zu loxodromischen Fundamentalsubstitutionen;* dieselben sind daher an dieser Stelle zu übergehen.

Ebenso einfach, wie der vorige Fall, erledigen sich die Fälle, in denen einer der Exponenten  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  reell, die beiden anderen imaginär oder aber zwei reell und der dritte imaginär sind. Die Fälle, dass

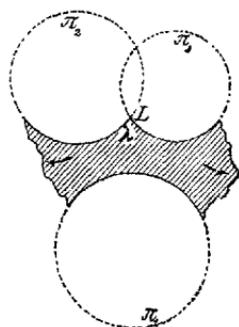


Fig. 69.

überdies die reellen Exponenten ganzzahlige Werthe haben, werden wir am Schlusse dieses Paragraphen besonders behandeln; sie bleiben also hier vorläufig ausgeschlossen. Die Construction des Kernes führt uns zu den Geradengebilden *I*, *II*, *III*, die wir auf pag. 192 betrachtet haben, und zwar sind beide Lösungen der Construction für jeden Fall von derselben Art, unterscheiden sich jedoch wieder in oft erwähnter Weise darin, dass für die zugehörigen Fundamentalbereiche die Exponenten um ganze Zahlen differiren, deren Summe ungerade

ist. Die Polarkerne wurden in diesen Fällen durch die ebenen Figuren 24, 25 gegeben.

I. Ist z. B.  $\lambda$  reell (und positiv), aber  $\mu$  und  $\nu$  rein imaginär, so kommt die Figur 69 in Anwendung. Wir denken uns wieder  $\lambda$  auf den kleinsten positiven Rest  $\lambda_0$  modulo 2 reducirt und suchen zunächst das sphärische Dreieck für die reducirten Exponenten  $\lambda_0, i\mu'', i\nu''$  zu construiren. Dieses wird sofort durch die Ebenen, die man durch die Gerade  $I$  und die conjugirten Polaren von  $II$  und  $III$  legen kann, auf der Kugel ausgeschnitten. Wir erhalten, wie leicht zu übersehen ist, einen Bereich, der von zwei sich schneidenden Kreisen und einem ausserhalb beider verlaufenden Kreise begrenzt wird, d. h. ein Dreieck mit den Winkeln  $\lambda_0\pi, \mu''\pi i, \nu''\pi i$ , welches an Stelle der Ecken  $B$  und  $C$  in zwei unendliche Kreisbänder auslaufend zu denken ist. In diesem Dreieck haben wir dann nur noch  $\frac{\lambda - \lambda_0}{2}$  Kalotten, deren Begrenzung die Kreisperipherie  $\pi_1$  bildet, längs eines Verzweigungsschnittes vom Punkte  $L$  nach einem beliebigen Punkte der Gegenseite polar anzuhängen, um zum allgemeinen Bereiche mit den Winkeln  $\lambda\pi, \mu''\pi i, \nu''\pi i$  aufzusteigen, wie wir nicht weiter auszuführen brauchen.

II. In derselben Weise tritt Fig. 70 für den Fall eines imaginären  $\lambda$ , aber reeller (und positiver)  $\mu$  und  $\nu$  in ihr Recht. Es sei  $\mu' \geq \nu'$  vorausgesetzt; wir führen dann die folgende arithmetische Reduction aus: Zunächst subtrahiren wir von beiden Grössen  $\mu'$  und  $\nu'$  die grösste ganze in  $\nu'$  enthaltene Zahl und darauf von dem Rest des  $\mu'$  noch so oft als möglich die Zahl 2. Es mögen die reducirten Werthe  $i\lambda'', \mu_0', \nu_0'$  bleiben.

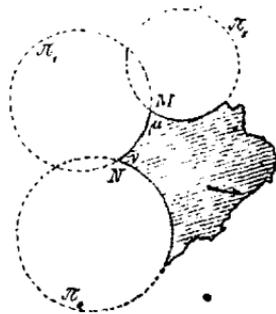


Fig. 70.

Das zu ihnen gehörige Dreieck wird von den Ebenen durch die Geraden  $II, III$  und die conjugirte Polare von  $I$  auf der Kugel ausgeschnitten, wie Fig. 70 zeigt; dasselbe stellt ein von zwei auseinander liegenden und einem beide schneidenden Kreise begrenztes Dreieck mit den Winkeln  $i\lambda''\pi, \mu_0'\pi, \nu_0'\pi$  dar, dessen eine Ecke  $L$  verloren gegangen und dementsprechend durch ein unendliches Kreisband ersetzt ist. Von dem reducirten Dreieck steigen wir durch polare Anhängung von Kugelkalotten längs eines Verzweigungsschnittes von  $M$  nach einem beliebigen Punkte der Gegenseite, sowie durch laterale Anhängung von Kugelkalotten längs der Seite  $MN$  in bekannter Weise zum allgemeinen Dreieck mit den Winkeln  $i\lambda''\pi, \mu'\pi, \nu'\pi$  auf.

In wie weit in den beiden Fällen I und II von Ueberschlagungen der Seiten die Rede sein kann, ist dem Gesagten gemäss von selbst einleuchtend. Die Zahl der angehängten Kreisscheiben (Kugelkalotten) kann man an dem fertigen Bereiche sofort aus der Zahl der Ueberdeckungen des Zweiecks mit dem Winkel  $\lambda_0\pi$  der Fig. 69 oder der

beiden Zweiecke mit den Winkeln  $\mu_0'\pi$  und  $\nu_0'\pi$  der Fig. 70 ablesen. Zugleich ist klar, wie die Theorie der „verwandten“ Bereiche in diesen Fällen sich gestaltet. Auch hier werden allemal, wenn man sämtliche Verwandte aufzählen will, Fundamentalbereiche für complexe Exponenten hinzukommen, wenn nämlich im ersten Falle die Exponenten  $\mu$  und  $\nu$ , im zweiten Falle der Exponent  $\lambda$  um ganze Zahlen vermehrt sind; wir lassen solche Bereiche natürlich hier wieder bei Seite. *Soweit in der Schaar der verwandten Bereiche letztere nicht zu complexen Exponenten gehören, ergeben sich dieselben ohne Schwierigkeit aus dem Vorstehenden.* Ein Blick auf die Tabelle pag. 219, die ganz allgemein auch für complexe Werthe der Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  gilt, belehrt uns, dass im Falle I zwei reducirte Dreiecke, dagegen im Falle II sechs reducirte Dreiecke möglich sind, die nicht zu complexen Exponenten gehören. Auf jedem derselben baut sich in der angegebenen Weise direct die Gesammtheit der zugehörigen verwandten Dreiecke auf. Die nebenstehenden Figuren, die wir statt

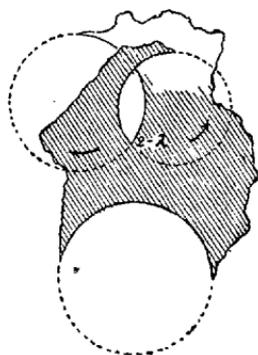


Fig. 71.

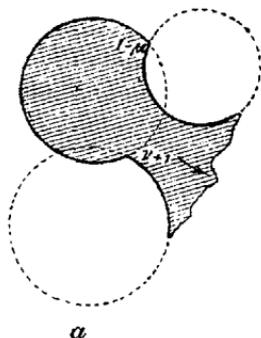
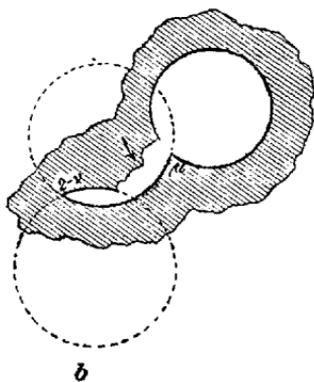


Fig. 72 a, b.



weiterer, die Anschauung doch nicht ersetzender Sätze geben, mögen die charakteristischen Formen dieser reducirten Dreiecke darstellen, die wieder in zwei resp. ein unendliches Kreisband auslaufend zu denken sind. Denselben liegt entsprechend derselbe Kern zu Grunde, wie den Figuren 69 und 70; die Winkelbezeichnungen in den Ecken (ohne den Factor  $\pi$ ) geben ihre Beziehung zu diesen Figuren näher an.

## § 20.

Die Dreiecke für theils imaginäre, theils aber ganzzahlige oder unendlich grosse Exponenten.

Es bleibt noch die Bemerkung hinzuzufügen, welche sich auf das Auftreten ganzzahliger Exponenten beziehen sollte. Wir haben hier wieder die beiden auf pag. 232 ff. angegebenen Fälle neben einander zu betrachten.

I. Es seien zwei Exponenten rein imaginär, der dritte Exponent aber ganzzahlig. Dann treten die auf pag. 204 angegebenen Kerne  $c, 1$  und  $c, 2$  in ihr Recht, und wir haben demgemäss die nebenstehenden Figuren 73 und 74 für einen Kern  $c, 1$  und Fig. 75 für einen Kern  $c, 2$

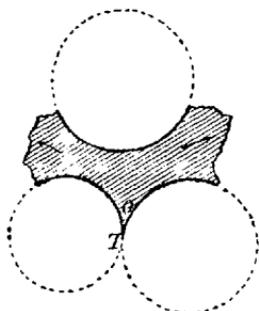


Fig. 73.

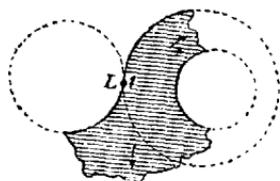


Fig. 74.

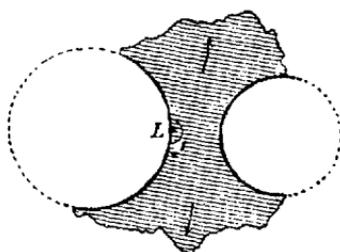


Fig. 75.

zu unterscheiden, woselbst allemal eines der reducirten Dreiecke durch Schraffirung hervorgehoben ist. Der charakteristische Unterschied derselben ist, dass die beiden Kreise der Ecke  $L$  in den Figuren 73 u. 74 sich berühren, in der Figur 75 dagegen zusammengefallen sind.

Nehmen wir sogleich Rücksicht auf die Gesammtheit aller verwandten Dreiecke, soweit sie nicht zu complexen Exponenten gehören, dann gilt für die Figuren 73—75 der einfache Satz:

1) Ist  $\lambda$  eine ungerade ganze Zahl, und sind die imaginären Exponenten  $\mu$  und  $\nu$  einander entgegengesetzt gleich, dann tritt stets die Kreisbegrenzung der Fig. 75 ein, d. h. die Kreisperipherieen der Ecke  $L$  fallen zusammen.

2) Ist dagegen  $\lambda$  eine ungerade ganze Zahl, und sind die Exponenten  $\mu$  und  $\nu$  nicht entgegengesetzt gleich, dann tritt die Kreisbegrenzung der Fig. 74 ein.

3) Ist endlich  $\lambda$  eine gerade ganze Zahl, so tritt allemal die Kreisbegrenzung der Fig. 73 ein.

Die letzten beiden Fälle haben das Gemeinsame, dass die Ecke  $L$  parabolischen Charakter besitzt.

II. Wenn ein Exponent rein imaginär, die beiden anderen aber reell sind, können ganzzahlige Exponenten insofern auftreten, als entweder die reellen Exponenten beide oder nur einer von ihnen ganzzahlig sind.

Im ersten Falle tritt der Kern  $b$  pag. 203 ein; die zugehörigen sphärischen Dreiecke zeigen nur in dem Sinne einen von den allgemeinen Figuren 70 und 72a, b verschiedenen Charakter, als die Kreisperipherieen in den beiden Ecken  $L$  und  $M$  sich berühren, d. h. es werden stets zwei parabolische Ecken auftreten.

Ist dagegen nur einer der beiden reellen Exponenten z. B.  $\mu$  ganzzahlig, so kann der Kern  $c$ , 1 natürlich nicht in Frage kommen. Es ist daher allein eine zu dem Kern  $c$ , 2 gehörige Kreisbegrenzung möglich, wie sie aus Fig. 70 entsteht, wenn die Kreise der Ecke  $M$  sich berühren (Fig. 76). Die Theorie der verwandten Bereiche bietet dann weiter keine Besonderheit dar; es gilt allgemein, dass die dem ganzzahligen Exponenten entsprechende Ecke parabolischen Charakter trägt. —

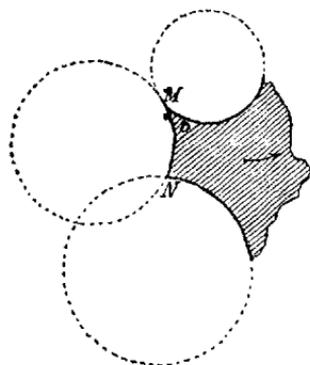


Fig. 76.

Endlich können auch hier bei den Dreiecken mit unendlichen Kreisbändern bestimmte Grenzfälle für  $\infty$  grosse Werthe der Exponenten auftreten. Wir können uns dieselben in der zweifachen Weise entstehen denken, einmal, indem wir in bekannter Weise die Prozesse der lateralen oder polaren Anhängung der Kugelkalotten in unendlicher Wiederholung anwenden, dann jedoch auch, indem wir z. B. in Fig. 67 die hyperbolischen Kreise sich auf einen Punkt zusammen-

ziehen lassen. Wir begnügen uns wieder damit, die bezüglichen Figuren hinzustellen, die, soweit es geht, geradlinig begrenzt bezeichnet sind. Die Figuren 77 a, b sind aus Fig. 67, die Figuren 77 c, d aus Fig. 69, die Fig. 77 e aus Fig. 70 in leicht ersichtlicher Weise entstanden zu

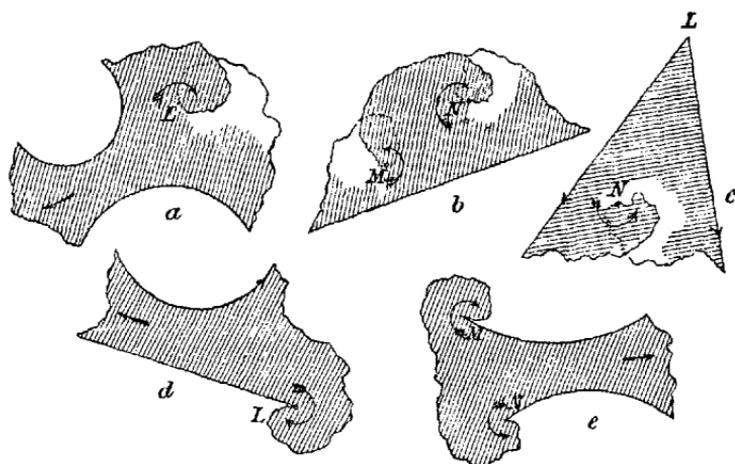


Fig. 77 a - e.

denken. Es sei bemerkt, dass das Dreieck 77 d an seiner geradlinigen Seite gespiegelt, einen speciellen Fall der Fig. 77 a liefert, an der Kreisperipherie dagegen gespiegelt, einen speciellen Fall der Fig. 77 e darstellt, u. s. w. Auch ist leicht zu übersehen, in welchen speciellen Fällen sich die Figuren 77 a - e auf die Abbildung durch Bessel'sche

Quotienten  $B$  zurückführen lassen. (Für die Figur 77b fallen nothwendig alle drei singulären Punkte  $a, b, c$  in der Ebene des Argumentes, für die übrigen Figuren nur zwei derselben zusammen.)

## V. Theil.

### Discussion der Fundamentalbereiche für complexe Exponenten.

#### § 21.

#### Allgemeine Betrachtung dieser Bereiche.

Wir sind nunmehr vor die Frage gestellt, wie sich der Fundamentalbereich in dem allgemeinen Falle gestaltet, *in welchem einer oder mehrere der Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  complex sind*. Indem ich mir für eine spätere Arbeit vorbehalte, im einzelnen auf diese allgemeine Theorie einzugehen, insbesondere, was den Nachweis auf Grund rein geometrischer Betrachtungen betrifft, dass zu jedem beliebigen Werthe-tripel  $\lambda, \mu, \nu$  sich der zugehörige Fundamentalbereich in einfacher Gestalt construiren lässt, werde ich mich im folgenden darauf beschränken einige Gesichtspunkte hervorzuheben, die uns bei dem weiteren Eindringen in die Theorie zu leiten haben, und die sich aufdrängenden Fragen, die der näheren Untersuchung bedürfen, zu formuliren. Im letzten Theile dieser Arbeit wollen wir jedoch, um ein Beispiel der Untersuchung zu geben, die Construction der Fundamentalbereiche für den Fall vollständig durchführen, *dass die Geraden I, II, III des Kernes sich auf der Kugel schneiden*.

Wir werden uns vorerst zweckmässig auf die Darstellung der Fundamentalbereiche als von vier Kreisbogen begrenzter Flächenstücke beschränken (Fundamentalvierseite). Die Frage, ob überhaupt eine solche Darstellung für beliebige Werthe  $\lambda, \mu, \nu$  allemal möglich ist, lassen wir hier bei Seite. Der Beweis hierfür wird eben erst aus der speciellen geometrischen Theorie erwachsen können. Ein solches Kreisbogenviereck sei in einem einfachen Falle durch Fig. 78 gegeben. Je zwei der Seiten sind durch die loxodromischen Fundamentalsubstitutionen in bekannter Weise einander zuzuordnen; die Winkel des Vierecks in den Ecken  $a_1$  und  $b_1$  betragen dementsprechend  $2\lambda'\pi$ ,  $2\mu'\pi$ , während die Summe der Winkel in den Ecken  $c_1$  und  $c_2'$  in Uebereinstimmung mit der Beziehung  $AB\Gamma = 1$  gleich  $2\nu'\pi$  sein muss. Wir haben schon früher die Bedeutung dieser Bereiche, ein Abbild der zweckmässig eingeschnittenen Vollebene des Argumentes der  $s$ -Function zu geben, kennen gelernt und auch gesehen, wie dieselben als Verallgemeinerung

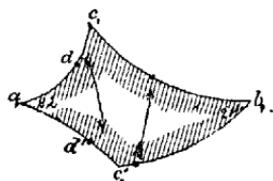


Fig. 78.

der Dreiecksflächen im Falle reeller  $\lambda, \mu, \nu$  zu gelten haben. Auch hatten wir die *Normalvierecke* als zur Untersuchung besonders geeignet hingestellt, d. h. diejenigen Vierecke, deren einander zugeordnete Kreisbogen sich (ev. in ihrer Verlängerung) im zweiten Fixpunkt der Fundamentalsubstitution schneiden.

Wir wollen nun zunächst einen bemerkenswerthen Satz aufstellen, dessen Uebertragung auf die zu einer grösseren Zahl singulärer Punkte gehörenden Fundamentalbereiche von selbst hervorleuchtet. Die Zuordnung je zweier Seiten unseres Vierecks, z. B. von  $a_1 c_1$  und  $a_1 c_2'$  wird ausser durch die aufeinander bezogenen Eckpunkte erst durch ein drittes sich entsprechendes Punktepaar, etwa die Punkte  $d$  und  $d'$  festgelegt sein. Nun können wir offenbar die Punkte  $d$  und  $d'$  ganz beliebig auf den Seiten  $a_1 c_1$  und  $a_1 c_2'$  wählen; das Gleiche gilt für die Zuordnung der Seiten  $b_1 c_1$  und  $b_1 c_2'$ . Dies führt uns zu dem Satze: *Jedes uns* (als Flächenstück) *gegebene Kreisbogenviereck* — selbst ein solches, das als Normalviereck unbrauchbar sein kann, wie die neben-

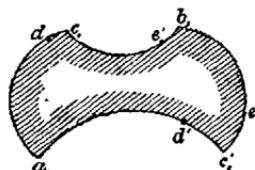


Fig. 79.

stehende Figur im Beispiel zeigen möge, — stellt uns eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit verschiedener brauchbarer Fundamentalbereiche vor, die durch die verschieden mögliche Zuordnung jedes Seitenpaares sich unterscheiden. Zugleich erkennen wir sofort, die zugehörigen Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  werden in allen Fällen in ihren reellen Theilen

übereinstimmen. In Rücksicht auf unsere Sätze pag. 207 schliessen wir, dass die dort definirten Punkte  $a_2'$  und  $b_2'$  sich für diese Gesamtheit auf den betr. Kreisbogen der durch die Punkte  $b_1 c_1$  bzw.  $c_1 a_2$  gehenden elliptischen Schaar bewegen werden, während der Punkt  $c_2'$  festliegt, d. h. dass  $DV(a_1 b_1 c_1 c_2') = \text{const.}$  ist.

Eine wichtige Frage in der Theorie unserer Fundamentalbereiche für complexe  $\lambda, \mu, \nu$  ist vor allem wieder die, wie viel Continua dieselben bei festgehaltenen Eckpunkten  $a_1 b_1 c_1$ , überhaupt bilden. Werden insbesondere vielleicht die verschiedenen Continua im Falle reeller  $\lambda, \mu, \nu$  durch das Gebiet der complexen  $\lambda, \mu, \nu$  hindurch mit einander zusammenhängen?

Die Methode, die einzuschlagen ist, um die Gesamtheit aller Fundamentalbereiche zu beherrschen, kann eine sehr verschiedene sein, sei es dass man durch continuirliche Processe, Variation der Begrenzung u. dgl., von den Vierecken für reelle  $\lambda \mu \nu$  zu den allgemeineren Bereichen aufsteigt, sei es dass man direct für den einzelnen beliebig ausgewählten Kern die zugehörigen Fundamentalbereiche studirt, sei es schliesslich, dass man rein morphologisch vorgeht und zu den verschiedensten Lagen von 4 Kreisen die zugehörigen Vierecke aufsucht, die von Bogen derselben begrenzt werden. Da es eben wesentlich

darauf ankommt, die 6-fach unendliche Mannigfaltigkeit der überhaupt möglichen Fälle in ihrer Gesamtheit übersichtlich zu beherrschen, so scheint der letzte Weg besondere Vortheile zu bieten. Natürlich werden schliesslich auch die Fundamentalbereiche für den Fall, dass einer oder zwei der Exponenten ganzzahlig sind, während die übrigen Exponenten complexe Werthe haben, eine specielle Betrachtung erfordern, wie denn andererseits sich auch Grenzfälle der Fundamentalbereiche für  $\infty$  hohe Exponenten ergeben werden.

## § 22.

### Ueber die allgemeine Theorie der verwandten Bereiche.

Wir wollen nun noch einige Worte der *Theorie der verwandten Bereiche* widmen. Dieser Begriff sollte, wie wir bereits pag. 172 angaben, *alle diejenigen Bereiche umfassen, die allgemein gesprochen zu demselben Kern gehören.* Zunächst erkennen wir, dass wir die Definition der reducirten Bereiche, die wir pag. 217 im Dreiecksfalle gaben, auch auf complexe  $\lambda, \mu, \nu$  übertragen können, sofern wir nur alles das, was dort von den reellen Exponenten gesagt ist, jetzt auf die reellen Theile der Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  beziehen. Wir wollen übrigens der Einfachheit halber stets annehmen, dass die reellen Theile der Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  positiv seien, was die Allgemeinheit nicht beschränkt. *Unter einem reducirten Viereck haben wir dementsprechend allgemein einen solchen Bereich zu verstehen, dessen zugehörige Exponenten  $\lambda_0, \mu_0, \nu_0$  in ihren reellen Theilen einzeln nicht grösser als 2, noch zu zweien grösser als 1 sind.* In diesen Vierecken werden daher die Winkel an den einfachen Ecken, wie die Summen der Winkel an den verdoppelten Ecken nicht grösser als  $4\pi$  und zu zweien nicht grösser als  $2\pi$  sein. (Der Umstand, dass nur die reellen Theile der Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  reducirt werden, entspricht durchaus der einfachen Beziehung, dass man bei einer elliptischen Substitution, die ja eine Drehung der Kugel durch einen bestimmten Winkel darstellt, ohne Aenderung des Resultates der Transformation beliebig viele volle Umdrehungen hinzunehmen kann, die hyperbolischen Substitutionen dagegen stets in sich eindeutig bestimmt sind.) Der zu einer beliebigen Auswahl  $\lambda, \mu, \nu$  gehörende *reducirte Fundamentalbereich*  $\lambda_0, \mu_0, \nu_0$  wird insbesondere wiederum *eindeutig oder dreideutig* sein, je nachdem die Summe der ganzen in den reellen Theilen enthaltenen Zahlen gerade oder ungerade ist.

Die folgenden Figuren (s. pag. 240), die einige besonders interessante Formen reducirter Normalvierecke darstellen, mögen dazu dienen, einen ersten Einblick in die überaus grosse Mannigfaltigkeit der möglichen Gestaltungen zu geben. In diesen Figuren sind jedesmal die Kreisbögen  $a, c_1$  und  $a, c_2'$ , sowie  $b, c_2'$  und  $b, c_1$  einander punktweise zugeordnet zu denken.

Wir werden ferner auch die weiteren Bezeichnungen des Dreiecksfalles auf unsere Vierecke übertragen können. Insbesondere werden wir von einem *Aussenviereck* zu einem *Grundviereck* reden können, und zwar

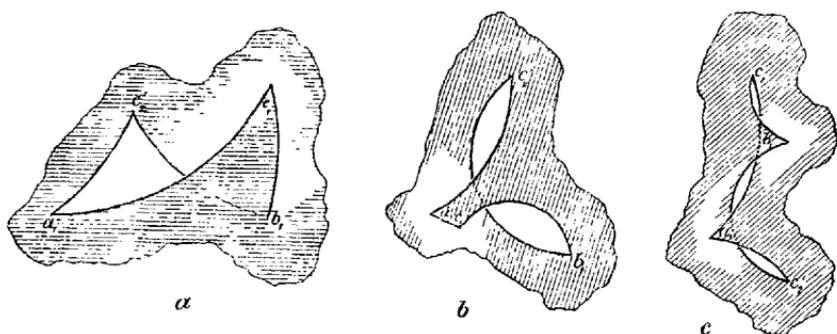


Fig. 80 a, b, c.

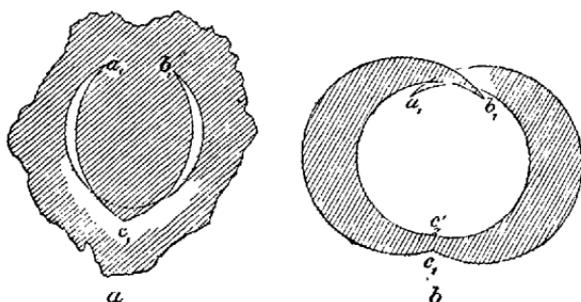


Fig. 81 a, b.

werden wir oft gleichsam in einer Figur eines der Aussenvierecke mit seinem Grundviereck zusammen erhalten, indem das eine von dem Inneren, das andere von dem Aeusseren des Linienzuges der 4 Kreisbogen dargestellt wird, wie in Fig. 78. Wir erkennen zugleich, von den 3 zu einem Grundviereck gehörenden Aussenvierecken wird gerade dasjenige zu bevorzugen sein, dessen Winkelsumme an den verdoppelten Ecken grösser, als jeder der Winkel an den beiden anderen Ecken ist. Wir wollen aber bedenken, dass man ja auch eine andere Verdoppelung der Ecken auswählen kann, d. h. dass man vielleicht statt  $c_2'$  auch den Punkt  $a_2'$  oder  $b_2'$  als vierte Ecke des Fundamentalbereiches hinzunehmen kann.\*) Solcherweise erhält man, allgemein gesprochen, 3 verschiedene äquivalente Formen des Grundvierecks, zu deren jeder eines der 3 Aussenvierecke in der angegebenen Weise gehört. Doch müssen wir ausdrücklich betonen, dass diese Beziehungen nur im Allgemeinen gelten; einfache Beispiele zeigen, dass einmal nicht immer alle drei Formen des Grundvierecks (wenigstens als Normalvierecke) möglich sind\*\*) und

\*) Vgl. pag. 208.

\*\*) indem negative Flächenstücke des Bereiches hier einstweilen von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben, vgl. pag. 182 dieser Arbeit.

andererseits auch die Aussenvierecke keineswegs stets die angegebene einfache Lage zum Grundviereck zu haben brauchen. So stehen z. B. die Figuren 81b und 81a zu einander in dem Verhältniss des Aussenvierecks zu seinem Grundviereck, den Exponenten  $1 - \lambda$ ,  $1 - \mu$ ,  $2 - \nu$  und  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  entsprechend.

Doch gehen wir noch einen kleinen Schritt weiter; wir können unmittelbar auch die Tabelle pag. 219 auf den Fall complexer  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  übertragen, indem wir unter den genannten Werthetripeln allemal die complexen Exponenten verstehen, die zu der bestimmten Auswahl der 3 Ecken  $a_1 b_1 c_1$  unter den Fixpunkten der Substitution gehören. Nun ist es leicht, die Theorie der verwandten Bereiche näher zu charakterisiren. *Unsere Aufgabe, die Fundamentalbereiche für complexe  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  zu zeichnen, wird sich nämlich in die 2 Schritte zerlegen lassen, dass wir zunächst es unternehmen, die Gesammtheit der reducirten Bereiche zu überblicken, und dann von ihnen aus zu den allgemeinen Bereichen aufsteigen.* Auf jedem einzelnen reducirten Bereiche wird sich, genau wie im Dreiecksfalle, eine unendliche (abzählbare) Mannigfaltigkeit „verwandter Bereiche“ aufbauen lassen. Die Gesammtheit aller mit dem vorliegenden reducirten Bereiche verwandten Bereiche wird indess erst erschöpft, wenn man noch die übrigen reducirten Bereiche, die zu jeder sonst noch möglichen Auswahl der drei Eckpunkte unter den Fixpunkten des Kernes gehören, sammt den auf ihnen sich aufbauenden allgemeinen Bereichen hinzufügt.

Wir wollen doch anknüpfend an die einfache Figur 78 die geometrischen Prozesse in ihren Grundgedanken uns klar machen, die bei der Bildung der verwandten Bereiche aus dem reducirten Bereich anzuwenden sind. Dieselben werden in der Anhängung von Kugelkalotten, resp. Vollkugeln bestehen, in genau entsprechender Weise, wie wir es im Falle der Dreiecke kennen lernten. Im Einzelnen kommen folgende Schritte in Anwendung:

1) Die (polare) Anhängung einer Vollkugel längs eines durchaus auf der Fläche verlaufenden Verzweigungsschnittes von  $c_1$  nach  $c_2'$ .

2) Die (polare) Anhängung je einer Kugelkalotte längs eines Verzweigungsschnittes von  $a_1$  nach einem Punkte der Seite  $b_1 c_1$  resp.  $b_1 c_2'$ ; die Kalotten werden begrenzt von den Peripherieen der zu den letztgenannten Seiten gehörenden Kreise. Analog haben wir die (polare) Anhängung im Punkte  $b_1$ .

3) Die (laterale) Anhängung je einer Kugelkalotte an die Seiten  $a_1 c_2'$  und  $a_1 c_1$  (oder an die Seiten  $b_1 c_2'$  und  $b_1 c_1$ ). Dieser Process lässt sich in jedem Falle ersetzen durch Anhängung einer Vollkugel nur an einer der genannten Seiten und ist im Uebrigen mit dem Hinausdrehen der Seiten um den Winkel  $\pi$  resp.  $2\pi$  in dem früher gegebenen Sinne identisch.

4) Die (laterale) Anhängung einer Vollkugel längs eines Verzweigungsschnittes von  $a_1$  nach  $b_1$ .

Wir haben hier die Bezeichnungen „lateral“ und „polar“ in derselben Bedeutung gebraucht, wie sie in dem analogen Process bei den Dreiecken angewandt sind; sie unterscheiden sich wesentlich darin, dass im ersten Falle *zwei* Exponenten um je 1, im zweiten *ein* Exponent um 2 vermehrt wird. In dem Beispiel unserer Figur 78 begegnet keiner der genannten geometrischen Prozesse einer Schwierigkeit. Im Uebrigen sind für die Möglichkeit der Anwendung der einzelnen Prozesse folgende Bedingungen hinreichend und nothwendig: Der Process 1 und 4 ist stets dann und nur dann anwendbar, wenn der genannte Verzweigungsschnitt so gezogen werden kann, dass er auf die einfache Kugel übertragen sich nicht selbst überkreuzt; der Process 2 dagegen, wenn die betr. Verzweigungsschnitte ebenfalls die soeben genannte Bedingung erfüllen und überdies die Kreisperipherieen der Seiten  $b_1c_1$  und  $b_1c_2'$  (resp.  $a_1c_1$  und  $a_1c_2'$ ) nicht durchkreuzen. Wie insbesondere die Prozesse 1—4 zusammen vorkommen werden, wollen wir hier nicht weiter erörtern; jedoch sei auf das durchgeführte Beispiel der geradlinig begrenzten Vierecke pag. 245 ff. hingewiesen.

Schon aus dem Process 3 folgt, dass keineswegs die Kreisbogenvierecke für ein complexes Werthetripel  $\lambda, \mu, \nu$  immer eindeutig bestimmt sind, vielmehr werden mehrere äquivalente Bereiche auftreten können, die indessen durch sogenannte erlaubte Abänderung in einander überzuführen sind. (Besonders interessant und für Fälle einer höheren Zahl singulärer Punkte von Wichtigkeit ist ferner die Bemerkung, dass in manchen Fällen eines Dreiecks man in einem der Eckpunkte keine Kalotte polar anhängen kann, die von dem Kreis der Gegenseite begrenzt wird, wohl aber bei der Spiegelung des Dreiecks an dieser Seite eine Vollkugel längs eines Verzweigungsschnittes, der

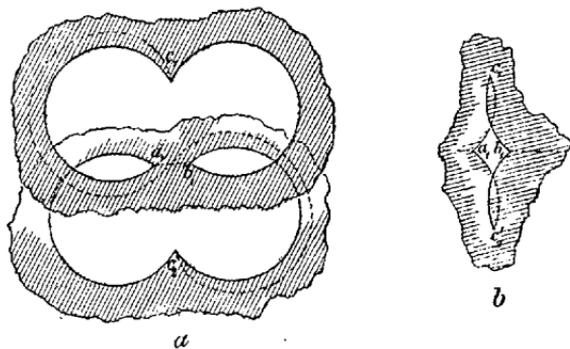


Fig. 82 a, b.

die beiden entsprechenden Ecken verbindet, wie das Beispiel der symmetrischen Figur 82a zeigt, in der dieser Verzweigungsschnitt

von der Ecke  $c_1$  zur Ecke  $c_2'$  laufend angedeutet ist. Jedoch können wir für diesen Fall, wie aus der Dreieckstheorie folgt, in anderer Weise zu einem äquivalenten erweiterten Bereiche aufsteigen, ohne vorherige Spiegelung des Dreiecks. Derselbe wird durch Fig. 82 b gegeben.)

§ 23.

Ueber die Fundamentalvierecke mit unendlichen Kreisbändern.

Sei es nunmehr gestattet, noch einmal auf diejenige Darstellung der Fundamentalbereiche zurückzugreifen, die gleichfalls von 4 Kreisbogen begrenzt werden, jedoch in ein oder mehrere unendliche Kreisbänder mit verloren gegangenen Ecken auslaufen, wie wir es auf pag. 182 angedeutet haben. Wir wollen uns auch hier auf kurze Angaben beschränken, die immerhin einen Einblick nach dieser Richtung hin geben. Ganz allgemein kommen typische Formen der Fundamentalbereiche in Betracht, wie sie in den nachfolgenden Figuren ausgeführt sind; in

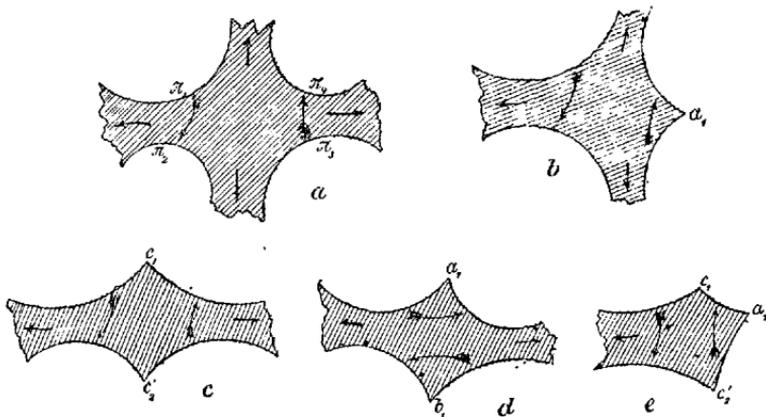


Fig. 83 a, b, c, d, e.

denselben ist die Zuordnung der Seiten durch befiederte Pfeile in bekannter Weise angedeutet. Spezielle Beispiele zu ihnen allen können wir den auf pag. 230 ff. behandelten Fällen für einen oder mehrere imaginäre, sonst aber reelle Exponenten entnehmen, wenn wir die dort gegebenen Figuren an einem der begrenzenden Kreisbogen gespiegelt denken. Wir werden auch hier, wie leicht ersichtlich, „Normalvierecke“ unter den allgemeineren Formen auszeichnen; dieselben sind dadurch zu definiren, dass die einander zugeordneten, sich nicht schneidenden Kreisbogen dem hyperbolischen Kreisbüschel, die sich schneidenden dem elliptischen Kreisbüschel der betr. Substitutionsfixpunkte angehören. Auch auf die Fundamentalbereiche Fig. 83 a—e wenden wir nun unser Princip an, die Zuordnung jedes Seitenpaares auf mannigfach verschiedene Weise zu treffen. So werden wir beispiels-

weise in Fig. 83a 3 willkürlich ausgewählte Punkte der Peripherie  $\pi_1$ , 3 beliebigen Punkten der Peripherie  $\pi_2$  zuordnen können; analog in allen übrigen Fällen. Nur die Beschränkung müssen wir uns dabei vor Augen halten, dass je 2 ausgewählte Punkte der einen Seite stets dieselbe Zahl voller Peripherieen von einander entfernt sein müssen, wie die ihnen entsprechenden Punkte der zugeordneten Seite. Ueberdies müssen die 3 Punkte der Peripherie  $\pi_1$  (Fig. 83a) gerade im umgekehrten Sinne aufeinander folgen, wie die entsprechenden Punkte der Peripherie  $\pi_2$ . Denn anderenfalls werden die Fixpunkte der die Zuordnung vermittelnden Substitution ausserhalb des Kreisinneren von  $\pi_1$  und  $\pi_2$  fallen\*) und, wenn man den Bereich nach den Anschauungen der Analysis situs zu einer geschlossenen Mannigfaltigkeit zusammenbiegen würde, würde dieselbe eine Doppelfläche darstellen, was hier auszuschliessen ist. Alle diese Verhältnisse finden ganz analog auch im einfachen Falle zweier singulären Punkte statt; an Fig. 14 (pag. 178) anknüpfend kann man sich dieselben leicht klar machen. Wir würden bei der „Doppelflächenzuordnung“ der Begrenzungen dieser Figur den Bereich gewissermassen als ein  $\infty$  breites Möbius'sches Blatt ansehen können.\*\*)

Werden insbesondere die durch verschiedene Zuordnung der begrenzenden Kreisbogen sich ergebenden Fundamentalbereiche functionentheoretisch sämmtlich von einander verschieden sein? Wir wollen diese Frage hier nicht weiter untersuchen; jedenfalls erschöpft die 6-fach unendliche Mannigfaltigkeit aller Figuren von demselben morphologischen Charakter, die sich bei beliebiger zulässiger Zuordnung der Kanten ergeben, keineswegs die Gesamtheit der überhaupt möglichen Fundamentalbereiche für beliebige  $\lambda, \mu, \nu$ , da gewiss schon reelle  $\lambda, \mu, \nu$  ausgeschlossen sind. Jedoch scheinen die Darstellungen des Fundamentalbereichs in den neuen Formen in mancher Hinsicht besonders zweckmässig zu sein. Es sei übrigens bemerkt, dass wir im Falle loxodromischer Zusammenordnung zweier Kanten nach dem Princip der erlaubten Abänderung stets mit leichter Mühe durch Anwendung des umgekehrten Processes der pag. 182 das unendliche Kreisband in eine loxodromische Ecke der gewöhnlichen Form verwandeln können.

Wir wollen nur noch ein Wort über die Methode, wie die Theorie der verwandten Bereiche sich in den neuen Formen darstellt, hinzufügen. Einmal können wir, beispielsweise in Fig. 83a, bei einer bestimmt angenommenen Zuordnung der Seitenpaare jetzt die 3 zur Zuordnung benutzten Punkte der einen Begrenzung, z. B. der Seite  $\pi_1$ , durch 3 andere Punkte derselben Seite ersetzen, die um eine

\*) während sie im anderen Falle sich auf die letzteren vertheilen.

\*\*) Zur leichteren Anschauung denke man sich die ebene Figur 14 stereographisch auf die Kugel übertragen.

volle jeweils in demselben Sinne gerechnete Peripherie von den bisherigen absteht. Durch diesen Process werden wir, wie eine leichte Ueberlegung zeigt, 2 der Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  gerade um die Einheit vermehren. (Insbesondere erhalten wir auf diese Weise verwandte Bereiche zu den Fundamentalbereichen für imaginäre  $\lambda, \mu, \nu$ .) Ferner sei auf die folgenden Figuren hingewiesen, welche mit der Fig. 83 d

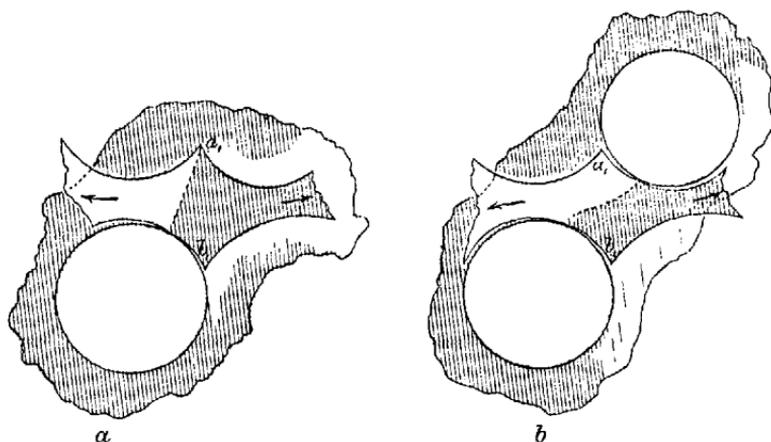


Fig. 84 a, b.

verwandte Bereiche darstellen; das angewandte geometrische Verfahren ist von selbst aus den Figuren einleuchtend.

Wir sehen, eine ungeahnte Fülle der mannigfaltigsten Gestalten unserer Fundamentalbereiche tritt uns entgegen. Es gilt das sich bietende Material zu sichten, die einzelnen Formen exact und übersichtlich zu behandeln, um so schliesslich das Ziel der ganzen Untersuchung zu erreichen, die Fundamentalbereiche im allgemeinen Falle complexer  $\lambda, \mu, \nu$  völlig zu beherrschen.

## VI. Theil.

### Die Fundamentalbereiche für complexe Exponenten unter der Bedingung $\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ .

#### § 24.

#### Construction der reducirten Bereiche.

Um ein bestimmtes Beispiel der Construction der Fundamentalbereiche für complexe Exponenten jedenfalls bis zu Ende durchzuführen und an ihm eine gewiss allgemein nützliche Methode zu zeigen, wollen wir den Fall auswählen, dass die 3 Axen I, II, III des Kernes sich auf der Kugel in einem Punkte schneiden. Wir wissen bereits, derselbe umfasst diejenigen Fundamentalbereiche, deren zugehörige Exponenten die Bedingung  $\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$  erfüllen. Wie uns ferner aus dem ersten Theile bekannt, beruht die ausgezeichnete Stellung dieses

Falles für die Theorie der  $s$ -Function darin, dass eine zweckmässig ausgewählte Particularlösung ihrer Differentialgleichung 3. Ordnung sich durch ein einfaches unbestimmtes Integral darstellen lässt. Aus unserer geometrischen Untersuchung wird insbesondere hervorgehen, dass wir die zugehörigen Fundamentalbereiche stets als *Normalvierecke* wählen können, die wir dann durch Verlegung des Schnittpunktes der Axen  $I, II, III$  in's Unendliche gern *geradlinig begrenzen* können. Dem Falle, dass *einer* der Exponenten reell ganzzahlig ist, werden wir am Schlusse eine Specialbetrachtung widmen. (Zwei Exponenten können nicht ganzzahlig sein, ohne dass gemäss der Bedingung  $\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$  auch der dritte Exponent ganzzahlig ist, wodurch wir auf die früheren Dreiecksconstructions zurückkommen.)

Unsere Aufgabe werden wir uns in die zwei Schritte zerlegen, zunächst alle reducirten Bereiche zu construiren und dann von ihnen aus durch die geometrischen Prozesse der Anhängung von Kugelkalotten und Vollkugeln zu der Gesamtheit der verwandten Bereiche aufzusteigen. Die Methode, deren wir uns bedienen, wird darin bestehen, alle morphologisch möglichen Gestaltungsformen aufzusuchen und direct durch Figuren anschaulich darzustellen. Wir legen den allgemeinen Satz zu Grunde: *Wenn in einem bestimmten Beispiel unserer Figuren geometrische Operationen möglich sind, so sind sie auch in allen den Figuren möglich, die morphologisch von diesem Beispiel nicht verschieden sind.* Hierbei betrachten wir solche Fundamentalbereiche als morphologisch gleichwerthig, die sich in einfacher Weise durch continuirliche Veränderung der Begrenzung in einander überführen lassen, ohne dass man nöthig hat durch irgendwie singuläre Bereiche hindurchzugehen. Die begrenzenden Kreisperipherieen solcher gleichwerthigen Figuren sollen insbesondere die einfache Gesamtkugel in derselben Weise und in derselben Anordnung in einzelne Gebiete zerlegen. — Aus der so durchgeführten Betrachtung wird dann hervorgehen, *dass dieselbe von selbst alle Fälle eines beliebigen, nur an die obige Bedingung gebundenen Werthetripels  $\lambda, \mu, \nu$  erschöpft.*

Wir wissen, zu jedem Kern gehören 16 verschiedene reducirte Bereiche, die sich zu 4 Grundvierecken und je 3 Aussenvierecken zu einem jeden derselben gruppiren. Insbesondere wollen wir, wie wir bereits pag. 240 sagten, jedesmal gerade dasjenige Aussenviereck zu seinem Grundviereck hinzunehmen, welches der Verdoppelung der betr. Ecke entsprechend ist. Indem ganz allgemein gesprochen bei dieser Verabredung jedes Grundviereck (oder wenigstens die ihm entsprechenden Kreisbogen) der verschiedenen Verdoppelung der Ecke gemäss dreimal auftritt, erhalten wir solcherweise auch alle 12 verschiedenen Aussenvierecke. Zugleich können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die reellen Theile der Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  stets positiv annehmen.

Wir denken uns der Einfachheit der Zeichnungen wegen den gemeinsamen Schnittpunkt der Axen zumeist sogleich ins Unendliche transformirt. Wählen wir dann als Eckpunkte der Fundamentalbereiche zunächst die drei im Endlichen gelegenen Fixpunkte  $a_1, b_1, c_1$  der Fundamentalsubstitutionen aus. Der vierte Eckpunkt, z. B.  $c_2'$ , wird noch ganz beliebig in der Ebene liegen können, der Thatsache entsprechend, dass durch Angabe der inneren Axen in unserem Falle noch keineswegs (auch nicht bis auf Vielfache voller Umdrehungen) die drei Fundamentalsubstitutionen eindeutig bestimmt sind, sondern noch eine zweifach unendliche Möglichkeit offen bleibt. Durch die Punkte  $a_1, b_1, c_1, c_2'$  wird jedoch eine bestimmte Auswahl der Fundamentalsubstitutionen festgelegt sein. Wir verbinden nun die Punkte  $a_1$  und  $b_1$  mit  $c_1$  und  $c_2'$  geradlinig und bekommen so einen vierseitigen geschlossenen Linienzug. Wie werden wir an ihm den zugehörigen Fundamentalbereich erkennen? Wir überlegen uns zunächst, welche verschiedenen Formen dieses Linienviereck überhaupt darstellen kann. Es ist leicht zu erkennen, indem wir den Punkt  $c_2'$  beliebig in der Ebene wandern lassen, dass es morphologisch, mit Rücksicht auf die Bezeichnung der Eckpunkte, nur die vier verschiedenen Typen geben kann, wie sie Fig. 85 a—d darstellen, deren

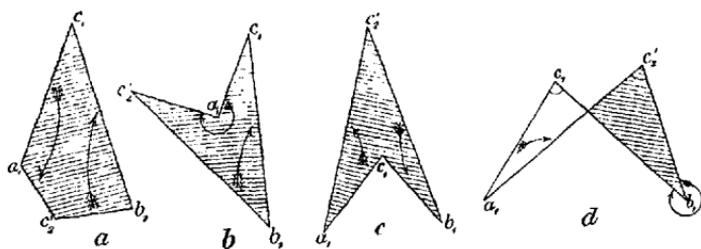


Fig. 85 a, b, c, d.

charakteristische Unterschiede von selbst einleuchten. (Giebt es doch morphologisch überhaupt nur eine Lage von vier Geraden der Ebene.) Allerdings könnte man, wenn man will, die Fig. 85 d noch in zwei zerlegen, je nachdem die sich nicht kreuzenden Linien  $a_1 c_1$  und  $b_1 c_2'$  über die Punkte  $c_1, c_2'$  hinaus oder über die Punkte  $a_1, b_1$  hinaus verlängert sich in einem Punkte schneiden. Doch führen dieselben im Folgenden zu keinen wesentlich verschiedenen Formen, sodass wir dieselben zusammen behandeln wollen. In den Figuren 85 a, b, c umgrenzen die Linienzüge sogleich brauchbare Fundamentalbereiche. Wir wollen ferner bemerken, dass die Typen Fig. 85 a, b auch Beispiele für reelle Werthe der  $\lambda, \mu, \nu$  d. h. symmetrische Normalvierecke zulassen. Wir können die Figuren daher auch für complexe  $\lambda, \mu, \nu$  als erledigt ansehen, indem alle geometrischen Prozesse, die an ihnen zur Construction der übrigen zu dem Kern gehörenden reducirten Bereiche, sowie aller

verwandten Bereiche vorzunehmen sind, genau in derselben Weise auszuführen möglich sind, wie in den entsprechenden Beispielen reeller  $\lambda, \mu, \nu$ . Ueber den Fall 85d werden wir sogleich noch Näheres bemerken. *Es zeigt sich, dass hier alle reducirten Fälle aufgezählt sind, für welche  $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 = 1$  ist.\*)*

Wir werden jetzt wünschen ein *algebraisches Kriterium* zu besitzen, vermöge dessen wir sofort bei gegebenen Exponenten  $\lambda_0, \mu_0, \nu_0$  mit der Bedingung  $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 = 1$  zu entscheiden vermögen, ob zu ihm der Typus der Figuren 85 a, b oder der Typus der Figuren 85 c, d gehört. Nun ergibt sich sofort als unterscheidendes Merkmal, dass die Punkte  $c_1 c_2'$  im ersten Falle auf verschiedenen Seiten der geraden Verbindungslinie  $a_1 b_1$ , im letzten Falle dagegen auf derselben Seite liegen. Hieraus gewinnen wir leicht die gesuchte algebraische Relation. Es seien  $a_1 a_2$  und  $b_1$  als die Punkte  $0, \infty, 1$  der complexen  $s$ -Ebene gewählt. Dann ist gemäss der Formeln auf pag. 194

$$c_1 = D V(a_1 a_2 c_1 b_1) = \frac{e^{-i\pi\lambda} + e^{i\pi(\nu-\mu)}}{e^{i\pi\lambda} + e^{i\pi(\nu-\mu)}}$$

und

$$c_2' = c_1 e^{2i\pi\lambda} = \frac{e^{i\pi\lambda} + e^{i\pi(\mu-\nu)}}{e^{-i\pi\lambda} + e^{i\pi(\mu-\nu)}}$$

oder unter Benutzung der Bedingung, dass hier  $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 = 1$  ist,

$$c_1 = \frac{1 - e^{2i\pi\mu}}{1 - e^{-2i\pi\nu}},$$

$$c_2' = \frac{1 - e^{-2i\pi\mu}}{1 - e^{2i\pi\nu}}.$$

Der Abstand der Punkte  $c_1$  und  $c_2'$  von der Verbindungslinie  $a_1 b_1$  wird nun mit Rücksicht auf die Vorzeichen durch den imaginären Theil der obigen Ausdrücke gegeben. Wenden wir die Weierstrass'sche Bezeichnung des reellen Theiles einer complexen Function mit dem Buchstaben  $\Re$  an, so erhalten wir hiernach das einfache Resultat, welches von der speciellen Werthevertheilung in der  $s$ -Ebene völlig unabhängig ist:

*Je nachdem der Quotient  $\frac{\Re(i c_1)}{\Re(i c_2')}$ , wenn wir für  $c_1$  und  $c_2'$  die gefundenen Ausdrücke eingesetzt haben, negativ oder positiv ist, liegt entsprechend der symmetrische Fall der Figuren 85 a, b oder der unsymmetrische Fall der Figuren 85 c, d vor.* Wir haben hier die Bezeichnung „Symmetrie“ in morphologischem Sinne gebraucht. Der Uebergangsfall, dass jener Quotient gleich 0 oder  $\infty$  ist, kann beliebig dem symmetrischen oder unsymmetrischen Falle zugerechnet werden, und ist geometrisch dadurch ausgezeichnet, dass  $c_2'$  auf der Verbindungslinie  $a_1 b_1$  selbst liegt.

\*) v. pag. 256 dieser Arbeit.

Gehen wir nun zu den übrigen Formen der reducirten Fundamentalbereiche über. Der nicht schraffierte Theil der Ebene in Fig. 85 c stellt uns direct das gewünschte Aussenviereck zu dem Grundviereck dar. Doch wie steht es mit dem Typus der Figur 85 d? Auch hier können wir sofort das entsprechende Aussenviereck angeben. In der Figur ist der bezeichnete Winkel  $c_1$  grösser als der Winkel  $c'_2$ , das Aussenviereck wird daher durch die nebenstehende Figur 86 gegeben. Wie aber verhält es sich mit dem zugehörigen Grundviereck?

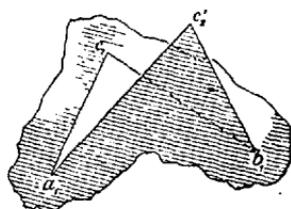


Fig. 86.

Wir wollen kurz anführen, in welchem Sinne auch dieses direct durch den Linienzug der Figur 85 d gegeben wird. Wir haben einfach das schraffierte Dreieck der Figur 85 d als negativ, das nicht schraffierte Dreieck als positiv aufzufassen. Wir haben hier ein Beispiel einer Erweiterung des Begriffes eines Fundamentalbereiches, der in mancher Beziehung von Nutzen sein kann.\*) (Es ist insbesondere interessant, die zugehörige Zerschneidung der Ebene des Argumentes sich klar zu machen. Dort werden die Schnitte sich überkreuzen, und es ist ein bestimmter Theil der Ebene als dreifach überdeckt anzusehen, gleichsam als wäre eine Falte oder eine Tasche in der Ebene vorhanden.) Den Beweis der Brauchbarkeit dieses Bereiches führen wir, indem wir einfach den negativen Theil durch einmalige oder mehrmalige Anwendung der Substitution  $A^{-1}$  nach dem Princip der erlaubten Abänderung auf den

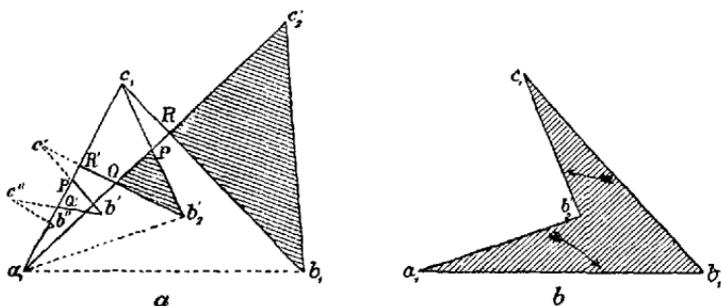


Fig. 87 a, b.

positiven Theil abtragen, wie die Figur 87 a es angeht.\*\*) Man kommt dann schliesslich zu einem aus drei getrennten Stücken bestehenden,

\*) Vgl. pag. 240 dieser Arbeit, sowie Poincaré, Acta Mathematica Bd. I, 1882, pag. 18.

\*\*) Durch die erste Anwendung der Substitution  $A^{-1}$  geht das Dreieck  $c'_2 b_1 R$  in das Dreieck  $c_1 b'_2 R'$  über, es wird also noch ein Theil des negativen Bereiches in Gestalt des Dreiecks  $P Q b'_2$  über den positiven Theil hinausragen. Durch die zweite Anwendung derselben Substitution wird dieses Dreieck  $P Q b'_2$  dann in das Dreieck  $P' Q' b'$  transformirt und so fort.

völlig positiven äquivalenten Bereich, den man leicht mit Hilfe der Substitution A selbst in den zusammenhängenden Bereich der Figur 87b überführt. Doch wollen wir den Uebergang zu der Figur 87b noch in einer einfacheren, übersichtlicheren Weise vornehmen.

Wir stellen, anknüpfend an die Figur 85d, eine einfache elementargeometrische Betrachtung an, um die Punkte  $b_2'$  und  $a_2'$  zu finden. Durch die Punkte  $a_1 b_1 c_1$  denken wir uns den Kreis beschrieben und dann diejenige Substitution ausgeführt, welche als Fixpunkte die Punkte  $a_1$  und  $\infty$  hat und den Punkt  $c_0$  in den Punkt  $c_1$  überführt. Durch dieselbe geht der Punkt  $b_1$  in einen neuen Punkt  $b_0$  über, der auf der Strecke  $b_1 c_1$  gelegen sein muss, da Winkel  $a_1 c b_1$  gleich Winkel  $a_1 c_0 b_1$  ist. Indem nun durch die Substitution  $A^{-1}$  der Punkt  $c_2'$  in den Punkt  $c_1$  übergehen soll, so wird der Punkt  $b_2'$  hierbei auf  $a_1 b_0$  liegen. Das Viereck  $a_1 b_2' c_1 b_1$  ist dann dem aus einem positiven und einem negativen Stücke bestehenden ursprünglichen Bereiche  $a_1 c_1 b_1 c_2'$  äquivalent; dasselbe wird für sich gezeichnet durch die Figur 87b gegeben.

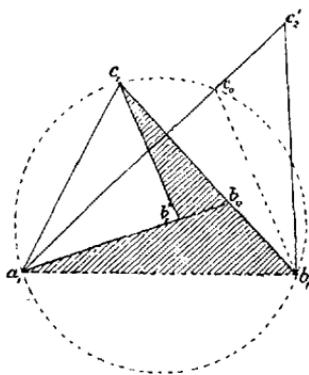


Fig. 88.

Führt man die analoge Betrachtung für die Verdoppelung des Punktes  $a_1$  mit 'der

Substitution B aus, so erkennt man, die dritte Form des Grundvierecks wird stets wieder den Typus der Figur 85d aufweisen. Auch gilt dieses Verhältniss umgekehrt. Wir haben daher den Satz: *Jedes Grundviereck der Form Figur 85d kann durch ein äquivalentes Viereck der Form Figur 85c ersetzt werden. Jedes Grundviereck der Form Figur 85c hat als äquivalente Vierecke bei der Verdoppelung der anderen Ecken zwei Vierecke der Form Figur 85d.*

Nun sind wir am Ziele, insofern wir überblicken, dass man in jedem Falle ein brauchbares Normalviereck, sowohl für das Grundviereck, wie für die Aussenvierecke erhält, und somit sind wir mit der Construction aller reducirten Bereiche, deren Ecken sämmtlich im Endlichen gelegen sind, zu Ende gekommen. *Es sind dies die sämmtlichen Fälle  $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 = 1$  bzw. 3.*

Wir wenden uns nun weiter zu den Bereichen, für die eine oder zwei der Ecken in dem unendlich fernen Punkte der Ebene liegen (werden uns aber durchaus auf rein positive Bereiche beschränken, so interessant es ist, gerade Bereiche mit theilweise negativem Gebiete zu betrachten). Die neuen Bereiche werden uns für den einzelnen Kern noch die übrigen drei Grundvierecke und ihre Aussenvierecke liefern müssen. Und zwar wollen wir die Fälle der Figuren 85c, d einfach durch die bezüglichlichen Figuren erledigen; es stellt sich heraus, dass (bei

der gewählten Verdoppelung der Ecken) genau wie im Falle reeller  $\lambda, \mu, \nu$  entweder die Ecken  $c_1$  und  $c_2'$  oder aber die Ecken  $a_1$  und  $b_1$  im Unendlichen liegen. Bezeichnen wir die Exponenten des Grundvierecks, dessen Ecken sämtlich im Endlichen liegen, mit  $\lambda_0, \mu_0, \nu_0$ , so werden die übrigen drei Grundvierecke nach der Tabelle pag. 219 durch die Exponenten:

- 1)  $\lambda_0, \quad 1 - \mu_0, \quad 1 - \nu_0,$
- 2)  $1 - \lambda_0, \quad \mu_0, \quad 1 - \nu_0,$
- 3)  $1 - \lambda_0, \quad 1 - \mu_0, \quad \nu_0$

gegeben sein, zu denen dann die entsprechenden Aussenvierecke hinzukommen.

Für den Fall der Figur 85 c stellt Figur 89 a, b das Grundviereck 3 mit seinem Aussenviereck, Figur 89 c und eine ihr entsprechende Figur

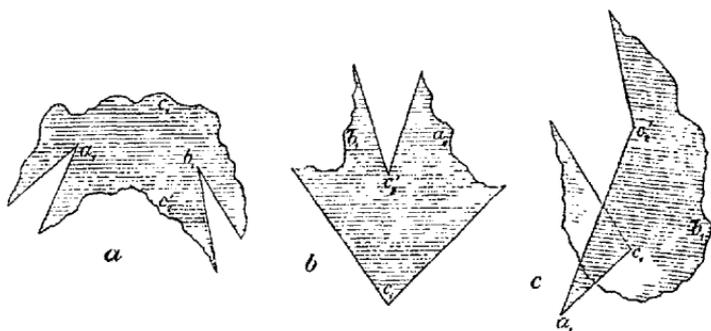


Fig. 89 a, b, c.

das Aussenviereck zu dem Grundviereck 2 resp. 1 dar. Die Grundvierecke 1 und 2 selbst werden bei der angenommenen Verdoppelung der Ecken nicht durch positive Bereiche darstellbar sein.

Für den Fall der Figur 85 d stellen Figur 90 a, b in den schraffirten Theilen der Ebene die Grundvierecke 1 und 2 und in den

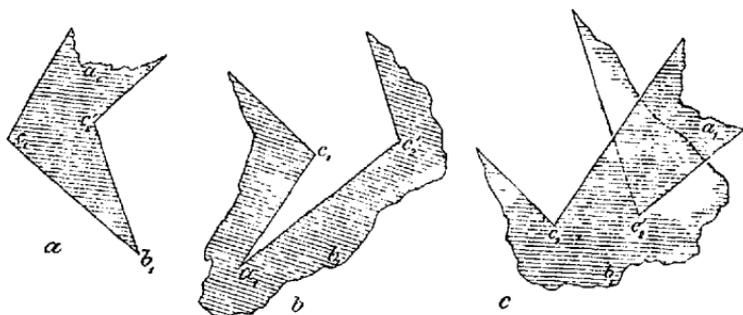


Fig. 90 a, b, c.

nicht schraffirten Theilen die zugehörigen Aussenvierecke dar; Figur 90 c dagegen das Aussenviereck zu dem Grundviereck 3, während letzteres

selbst wiederum bei der angenommenen Verdoppelung der Ecken nicht positiv darstellbar ist.

Das erste Resultat dieser Betrachtung ist daher: *Das Aussenviereck ist stets als brauchbarer Normalbereich darstellbar.* Nun aber wissen wir, daß z. B. der Fall der Figur 85d bei Verdoppelung der Ecke  $b_1$  zum Typus Figur 85c und bei Verdoppelung der Ecke  $a_1$  wieder zum Typus Figur 85d führt. Diese neue Auswahl der Verdoppelungen liefert aber entsprechend die Grundvierecke 2 resp. 3 und 2. (Analoges gilt, wenn man vom Falle der Figur 85d ausgeht.) Demnach ist unser zweites Resultat: *Bei geeigneter Wahl der Verdoppelung der Ecken ist auch das Grundviereck stets als brauchbarer Normalbereich darstellbar.*

Beide Sätze fassen wir zusammen in den Satz:

*Zu jedem Kern können wir die 16 reducirten Bereiche stets durch Normalvierecke darstellen, und zwar durch ausschliesslich positive Normalvierecke.*

### § 25.

Die Fundamentalbereiche für die Bedingung  $\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$ ;  
Construction der Gesamtheit aller verwandten Bereiche.

Nun gehen wir an die Ausführung des zweiten Schrittes, von diesen reducirten Vierecken aus zu den sich auf ihnen aufbauenden verwandten Bereichen aufzusteigen. Wir erinnern uns hierbei der allgemeinen Angaben, die wir auf pag. 241 gegeben haben. Die zu einem reducirten Vierecke mit den Exponenten  $\lambda_0, \mu_0, \nu_0$  zugehörigen Bereiche der Verwandtschaft werden durch die Exponenten  $\lambda_0 + P, \mu_0 + Q, \nu_0 + R$  dargestellt, woselbst  $P, Q, R$  ganze positive Zahlen bedeuten, deren Summe  $P + Q + R = 2S$  gerade ist. Wir flechten zunächst eine arithmetische Betrachtung ein, die ganz den Ansätzen auf pag. 210 entsprechend ist. Wir setzen

$$P = B + C,$$

$$Q = C + A,$$

$$R = A + B.$$

Dann ist:

$$A = \frac{Q + R - P}{2} = S - P,$$

$$B = \frac{R + P - Q}{2} = S - Q,$$

$$C = \frac{P + Q - R}{2} = S - R,$$

d. h.  $A, B, C$  sind selbst wieder ganze Zahlen. Es sei wieder  $P > Q > R$  angenommen. Dann unterscheiden wir die Fälle:

$$1) P \leq Q + R,$$

$$2) P > Q + R.$$

1) *Im ersten Falle* sind die Grössen  $A, B, C$  positiv oder gleich 0; wir werden daher zu dem allgemeinen Bereiche von dem Viereck  $\lambda_0, \mu_0, \nu_0$  aus aufsteigen, indem wir einmal an je 2 entsprechenden Seiten eine bestimmte Anzahl von Kalotten (oder Halbebenen) in bekannter Weise lateral anhängen, — dieser Process begegnet aber niemals einer Schwierigkeit, da ja keine der Seiten im reducirten Bereiche sich überschlägt — und indem wir zweitens an einen Verzweigungsschnitt, der die beiden einfachen Ecken verbindet, gleichfalls eine bestimmte Anzahl Vollebenen anhängen. Ob dies letztere stets möglich ist, bleibt zu prüfen; die zu erfüllende Bedingung verlangt ja, dass der genannte Verzweigungsschnitt völlig auf der Fläche des Vierecks verläuft und sich nicht selbst überkreuzt, wenn man ihn auf die einfache Kugel überträgt (mit anderen Worten, dass derselbe die Fläche in nicht mehr als zwei Stücke zerlegt und die Vollkugel, die anzuhängen ist, nur einschneidet). Sehen wir nun daraufhin unsere Figuren einmal durch. Für die *Grundvierecke* ist es unmittelbar klar, dass der Ausführung des geometrischen Processes nichts im Wege steht, da es ja genügt, für einen der äquivalenten Bereiche es nachzuweisen. Was jedoch die *Aussenvierecke* anbetrifft, so verlangen die Fälle der Figuren 89b und 90c eine besondere Behandlung.\*) Im ersten Beispiele gehen wir von den beiden Zweiecken aus, die den nicht schraffirten Theil der Ebene der Fig. 89a bilden; in diesem hängen wir längs eines ganz auf ihm verlaufenden Schnittes von  $a_1$  über den Unendlichkeitspunkt nach  $b_1$  eine Vollebene an und erhalten so dasjenige Viereck, welches der Vermehrung der Exponenten  $\lambda_0$  und  $\mu_0$  je um die Einheit entspricht. Dasselbe wird durch Figur 91 dargestellt.

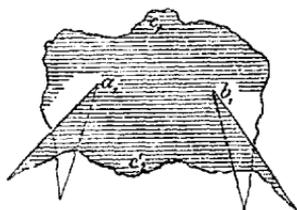


Fig. 91.

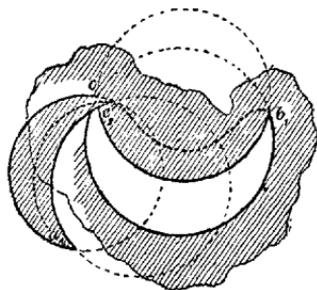


Fig. 92.

Würden wir dagegen in Figur 89b längs eines Verzweigungsschnittes von  $a_1$  nach  $b_1$  eine Vollebene angehängt haben, so würde unser Bereich in 2 Zweiecke zerfallen sein. Diese geometrischen Verhältnisse ent-

\*) Wenn man will, kann man dieselben am einfachsten erledigen, indem man sich überzeugt, dass die entsprechenden Aussenvierecke, die zu jedem der beiden Figuren bei anderer Verdoppelung der Ecken gehören, die genannten Prozesse gestatten, was dann genügt.

sprechen durchaus den analogen Vorgängen in den symmetrischen Fällen der Figuren 85 a, b. \*) In dem zweiten Beispiel Fig. 90 c endlich findet ganz das Analoge statt; wir gehen wieder von 2 Zweiecken (Fig. 92) aus und hängen

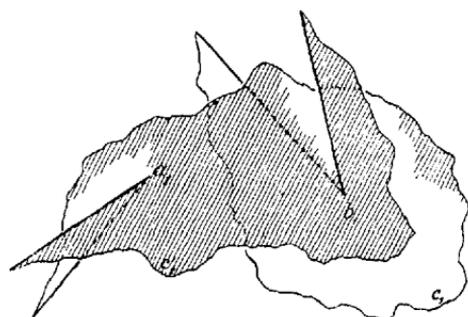


Fig. 93.

längs eines Schnittes von  $a_1$  nach  $b_1$  eine Vollebene an. Um den Bereich der beiden Zweiecke möglichst klar hervortreten zu lassen, ist derselbe in einer Grenzlage gezeichnet, in der die Punkte  $c_1$  und  $c_2'$  noch nicht völlig zusammengefallen sind. Das schliessliche Viereck stellt Figur 93 dar.

2) Ist  $P$  dagegen zweitens  $> Q + R$ , so setzen wir dasselbe gleich  $Q + R + 2m$  und erhalten als Exponenten des erweiterten Bereiches:

$$\lambda_0 + Q + R + 2m,$$

$$\mu_0 + Q,$$

$$\nu_0 + R.$$

Was zunächst wieder die *Grundvierecke* anbetrifft, so werden wir von den drei möglichen Gestalten eines jeden derselben gerade diejenige Verdoppelung der Fixpunkte bevorzugen, die dem Exponenten  $\lambda_0$  entspricht. Dann haben wir nur zu zeigen, dass wir ein Viereck für die Exponenten  $\lambda_0 + 2m, \mu_0, \nu_0$  zeichnen können. Denn dem weiteren Schritte, der Vermehrung je zweier Exponenten um  $Q$  resp.  $R$ , entspricht geometrisch wieder die laterale Anhängung von Kugelkalotten an entsprechende Seitenpaare, die keine Schwierigkeit bietet. Blicken wir nun wieder auf unsere Figuren zurück. Die Ausführbarkeit des ersten Schrittes werden wir jedenfalls nachgewiesen haben, sobald wir

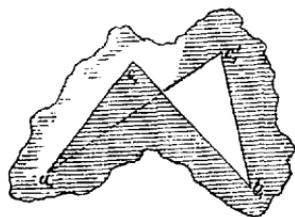


Fig. 94.

zeigen, dass wir stets längs eines Verzweigungsschnittes, der die verdoppelten Ecken verbindet, eine Vollebene anhängen können ev., falls kein (positives) Viereck für die betreffende Verdoppelung existiert, immer doch das Viereck  $\lambda_0 + 2, \mu_0, \nu_0$  konstruieren können. Figur 85 d führt uns so zu Figur 94. In Figur 89 a ersetzen wir den in der Anhängung der

Vollebene längs eines Schnittes  $c_1 c_2'$  bestehenden geometrischen Process wieder durch die Anhängung einer Vollebene längs eines Schnittes  $c_1 c_2'$  in dem durch die beiden Zweiecke ausserhalb des

\*) v. pag. 247, sowie pag. 220 dieser Arbeit.

schraffirten Theiles der Figur 89b gebildeten Bereiche. Es bleibt noch das entsprechende erweiterte Grundviereck für die Figuren der Aussenvierecke 89c und 90c zu zeichnen. Dieselben sind durch die folgenden Figuren 95 und 96 gegeben.

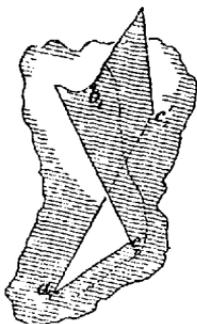


Fig. 95.

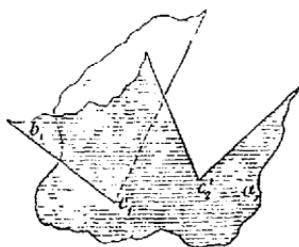


Fig. 96.

Was nun die *Aussenvierecke* anbetrifft, so wollen wir daran denken, dass wir zu jedem Grundviereck, mag dieses selbst für jede Verdoppelung gezeichnet werden können oder nicht, stets drei verschiedene Aussenvierecke construirt haben, die sich darin unterscheiden, dass allemal einer von den drei Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  in seinem reellen Theile grösser als 1 ist. Sollen wir nun ein Viereck für die Exponenten  $\lambda_0 + 2m, \mu_0, \nu_0$  zeichnen, so können wir offenbar den reellen Theil von  $\lambda_0$  grösser als 1 annehmen, ohne die Allgemeinheit zu beschränken. Denn angenommen nicht  $\lambda_0$ , sondern etwa  $\mu_0$  wäre in dem reellen Theile  $> 1$ , so stellen wir uns zunächst das Viereck  $\lambda_0 + 1, \mu_0 - 1, \nu_0$  her, indem dann sicher der reelle Theil des ersten Exponenten  $> 1$  ist, gehen von ihm aus zum Viereck  $\lambda_0 + 1 + 2(m-1), \mu_0 - 1, \nu_0$  über, und hängen dann nur noch längs der Seiten  $a_1 b_1$  und  $a_2' b_1$  je eine Kalotte (lateral) an, und erhalten so das Viereck  $\lambda_0 + 2m, \mu_0, \nu_0$ . Dieser Bemerkung gemäss haben wir also nur für alle von uns bezeichneten Formen der Aussenvierecke zu zeigen, dass wir stets längs eines Verzweigungsschnittes  $c_1 c_2'$  Vollebenen anhängen können. Dies aber lassen alle unsere Figuren unmittelbar erkennen.

Wir sind somit zu dem allgemeinen Resultat gelangt, dessen *Richtigkeit in aller Strenge nachgewiesen ist*:

*Man kann für jedes beliebige nicht ganzzahlige Werthetripel  $\lambda, \mu, \nu$ , das an die Bedingung  $\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$  gebunden ist, stets einen zugehörigen Fundamentalbereich in Gestalt eines Normalvierecks construiren; letzteres können wir stets durch geeignete Transformation in ein geradliniges Viereck verwandeln.*

Zugleich haben wir die Mittel gegeben, diesen Bereich in jedem Falle geometrisch wirklich zu zeichnen. Ich brauche wohl kaum hinzu-

zufügen, dass natürlich der einzelne Bereich, wie wir bereits pag. 242 sahen, zwar nicht geometrisch, wohl aber in seiner functionentheoretischen Bedeutung eindeutig bestimmt ist.

Wollen wir schliesslich wieder einfache Kriterien aufstellen, um sogleich zu wissen, welche Ecken bei Einführung geradliniger Begrenzung jedesmal im Unendlichen liegen, so gehen wir die vorstehenden Betrachtungen noch einmal durch und werden dann leicht die Richtigkeit der folgenden Sätze erkennen, die wir als eine Verallgemeinerung der entsprechenden Dreieckssätze anzusehen haben.

Ist  $\lambda + \mu + \nu = 2n + 1$  (Bedingung A), so liegen alle Ecken des Bereiches im Endlichen.

Ist  $\lambda + \mu - \nu = 2n + 1$  (Bedingung B), so liegt die Ecke  $c_1$  und, wenn  $c_1$  die verdoppelte Ecke ist, auch  $c_2'$  im Unendlichen.

Ist  $\lambda - \mu - \nu = 2n + 1$  (Bedingung C), so liegen die stets nicht verdoppelten Ecken  $b_1$  und  $c_1$  im Unendlichen.

Natürlich gestatten die letzten Bedingungen wieder die cyklische Vertauschung der Buchstaben. Wir bemerken endlich, dass zwei der genannten Bedingungen natürlich nicht gleichzeitig gelten können, ohne dass in den reellen Theilen ganzzahlige Exponenten auftreten, ein Vorkommniss, welches wir jetzt noch näher untersuchen wollen.

## § 26.

Die Fundamentalbereiche unter der Bedingung  $\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$  für einen ganzzahligen Werth eines der Exponenten.

Wie finden wir nun schliesslich die Fundamentalbereiche für den Fall, dass einer der Exponenten, etwa  $\lambda$ , bei der Bedingung

$$\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$$

ganzzahlig ist?

Von vornherein wissen wir wieder, dass entweder der Kern  $c, 1$ , oder der Kern  $c, 2$  auf pag. 204 zur Anwendung kommen muss. Es werden sich dann durchaus die Verhältnisse in allgemeiner Gestalt reproduciren, die wir pag. 225 für die Dreiecke mit einem ganzzahligen Exponenten kennen gelernt haben. Vor allem wird das Wesentliche jener Betrachtung sich hier wiederholen, dass die Gesamtheit der reducirten Fundamentalbereiche, wie sie die Tabelle pag. 219 darstellt, sich auf zwei verschiedene Gruppen verwandter Bereiche vertheilen, die sich beziehungsweise auf den eben genannten beiden Kernen aufbauen.

Gehen wir zunächst von dem Kern  $c, 1$  aus; es seien die Punkte  $b_1$  und  $c_2$  als Fixpunkte der zu einander inversen Fundamentalsubstitutionen  $B$  und  $\Gamma$  irgendwie auf der Kugel gegeben. Man wird dann den Punkt  $a_1$  beliebig hinzunehmen und von ihm aus den Punkt  $a_2'$  construiren können. Ist dann durch die Punkte  $b_1, c_1$  und  $a_1$  resp.  $a_2'$

je ein Kreisbogen gelegt, so erhalten wir die Figur 97. Dieselbe liefert uns stets sogleich zwei reducirte Fundamentalbereiche; von ihnen ist der eine durch Schraffirung hervorgehoben, der andere wird von dem

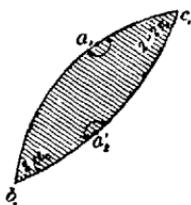


Fig. 97.

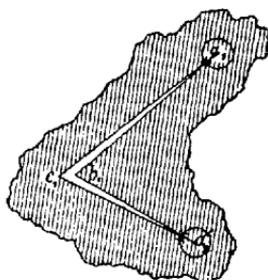


Fig. 98.

ausserhalb gelegenen Theile der Kugel gebildet. Die Exponenten des schraffirten Vierecks seien (in Rücksicht auf den entsprechenden Dreiecksfall pag. 226) mit  $1, \mu_0, 1 - \nu_0$  bezeichnet, woselbst wieder  $0 < \mu_0 < 1, 0 < \nu_0 < 1$  und  $\mu_0 + \nu_0 = 1$  ist. Das zweite reducirte Viereck hat dann die Exponenten  $1, 1 - \mu_0, 1 - \mu_0$ . Die Figur 98 möge ferner noch den dritten hierher gehörigen reducirten Bereich darstellen, dessen Exponenten  $2, \mu_0, 1 - \mu_0$  sind (dieselbe entspricht der Fig. 61 a der pag. 226).

Dem entgegen stellen wir nun *die reducirten Bereiche des zweiten Kernes c, 2*. Der Fundamentalbereich für die Exponenten  $0, \mu_0\pi, \nu_0\pi$  mit der Bedingung  $\mu_0 + \nu_0 = 1$  wird durch die Figur 99a gegeben,

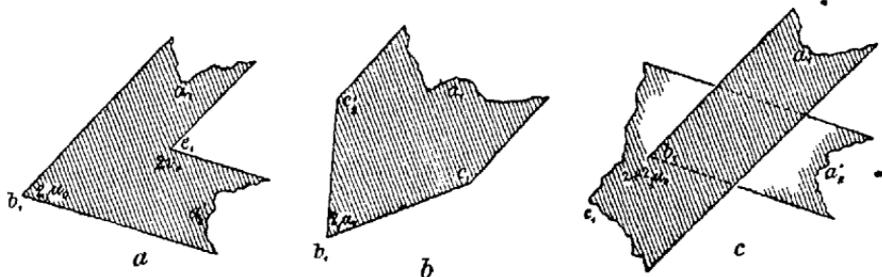


Fig. 99 a, b, c.

deren directe Construction, wie man sofort sieht, im einzelnen Falle nicht die geringste Schwierigkeit bietet. (Die Zuordnung der Seiten  $b_1 a_1$  und  $b_1 a_2'$  und analog der Seiten  $c_1 a_2'$  und  $c_1 a_1$  in der Figur 99a ist in der Weise bestimmt zu denken, dass ausser den Endpunkten die gegenseitigen Schnittpunkte beider Seitenpaare resp. ihrer Verlängerungen einander entsprechen.)

Es ist nun nichts leichter als die vier reducirten Bereiche dieser Verwandtschaft zu construiren. Einmal kann man dem Bereich der

Figur 99a\* durch andere Verdoppelung der Ecken noch zwei weitere äquivalente Bereiche gegenüberstellen, deren einer z. B. durch Fig. 99b gegeben wird. Der Aussenbereich der letzten Figur stellt dann (Fig. 59b entsprechend) den unmittelbar brauchbaren Fundamentalbereich für die Exponenten  $1, 1 - \mu_0, 1 + \mu_0$ , vor, während z. B. der Fundamentalbereich für die Exponenten  $0, 1; + \mu_0, \mu_0$  (der Figur 59a entsprechend) durch Fig. 99c gegeben wird.

Wie nun auf den reducirten Dreiecken der pag. 225 u. 226 sich die Gesamtheit der jedesmal mit ihnen verwandten Bereiche aufbaut, genau in derselben Weise ist es auch hier der Fall, da ja die Figuren von den durch Spiegelung an der entsprechenden Seite zu Fundamentalbereichen ergänzten Dreiecken morphologisch nicht verschieden sind. Wir werden daher nicht nöthig haben, näher auf die Theorie der Verwandtschaft einzugehen. Eine einfache Ueberlegung zeigt sofort, dass auch die für die sphärischen Dreiecke pag. 226 aufgestellten Sätze sich unmittelbar auf unsere allgemeinen Fundamentalbereiche übertragen lassen. Ist nämlich für die complexen Exponenten  $\lambda, \mu, \nu$  eines Fundamentalbereiches eine der Bedingungen  $\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$  erfüllt, so besteht die entsprechende Bedingung auch für die morphologisch gleichen symmetrischen Fundamentalbereiche, deren Exponenten durch die reellen Theile der Grössen  $\lambda, \mu, \nu$  gegeben sind. Es gilt sonach zunächst der Satz:

*Der Kern c, 1 liegt dem zu konstruirenden Fundamentalbereiche zu Grunde, wenn  $\lambda - \mu \pm \nu = 2n + 1$  (für  $\mu > \nu$ ) ist, andernfalls kommt der Kern c, 2 zur Anwendung.*

Was endlich die Bedingungen anbetrifft, welche Ecken bei Einführung geradliniger Begrenzung ins Unendliche fallen, so ist hier wieder zu berücksichtigen, dass die verdoppelten Ecken naturgemäss entweder beide im Endlichen oder beide im Unendlichen liegen. Die für alle geradlinigen Bereiche mit einem ganzzahligen Exponenten  $\lambda$ , geltenden Sätze sind dann die folgenden:

*Für die geradlinig begrenzten Fundamentalbereiche des Kernes c, 2 gilt:*

Die dem Exponenten  $\lambda$  entsprechende Ecke liegt stets im Unendlichen.

Ist  $\lambda + \mu + \nu = 2n + 1$  (Bedingung A), so liegen die übrigen Ecken sämmtlich im Endlichen. [Es gilt dann stets auch  $\mu + \nu - \lambda = 2n + 1$  (Bedingung B).]

Ist dagegen  $\mu - \nu - \lambda = 2n + 1$  resp.  $\nu - \mu - \lambda = 2n + 1$  (Bedingung C), so liegt auch die dem Exponenten  $\nu$  (resp.  $\mu$ ) entsprechende Ecke im Unendlichen. [Es gilt dann wieder stets auch  $\lambda + \mu - \nu = 2n + 1$  für  $\mu > \nu$  resp.  $\lambda + \nu - \mu = 2n + 1$  für  $\nu > \mu$  (Bedingung B).]

Für die geradlinig begrenzten Fundamentalbereiche des Kernes  $c, 1$  gilt:

Die dem Exponenten  $\lambda$  entsprechende Ecke liegt stets im Endlichen.

Ist nun  $\lambda - \mu - \nu = 2n + 1$  (Bedingung C), so werden die den Exponenten  $\mu$  und  $\nu$  entsprechenden Ecken entweder alle im Endlichen oder alle im Unendlichen liegen, je nachdem man den einen oder anderen Schnittpunkt der begrenzenden Kreisperipherieen ins Unendliche transformiren will. [In diesem Falle ist auch  $\lambda + \mu + \nu = 2n + 1$  (Bedingung A).]

Ist dagegen  $\lambda - \mu + \nu = 2n + 1$  für  $\mu > \nu$  (Bedingung B), so liegt entweder die dem Exponenten  $\mu$  oder die dem Exponenten  $\nu$  entsprechende Ecke im Unendlichen; man hat wiederum in der Hand, welches von beiden man eintreten lassen will.

Es sei gestattet, in diesem Paragraphen sogleich noch einige Worte den Grenzbereichen zu widmen, die sich bei der Bedingung  $\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2n + 1$  für  $\infty$  grosse Werthe der Exponenten ergeben. Man wird dieselben ebenso wie im Dreiecksfalle erhalten, indem man die geometrischen Prozesse der lateralen und der polaren Anhängung von Kugelkalotten oder Vollkugeln vom reducirten Bereich ausgehend in unendlicher Wiederholung anwendet. Wir wollen es unterlassen, die Bereiche, auf welche man solcherweise kommt, im einzelnen näher zu behandeln. Um jedoch wenigstens ein Beispiel anzuführen, sei auf den einfachen Fall des Fundamentalbereiches Fig. 100 verwiesen, woselbst die unendlich hohen Windungspunkte wieder durch Pfeile angedeutet sind.

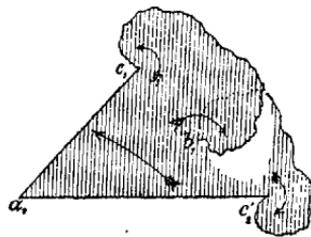


Fig. 100.

### Schlussbemerkung.

Sei es uns gestattet am Schlusse dieser Betrachtungen doch auch betreffs der *functionentheoretischen Bedeutung und Anwendung derselben* ein Wort hinzuzufügen. Ist erst einmal die Darstellung der Kreisbogenvierecke oder sonstiger allgemeinerer Bereiche, die das Abbild der  $s$ -Ebene darstellen, für beliebige complexe  $\lambda, \mu, \nu$  bis zu Ende durchgeführt, so gilt es natürlich, diese geometrische Theorie analytisch zu verwerthen, indem man dieselbe geradezu als Ausgangspunkt für das Studium der  $s$ -Function und damit der hypergeometrischen Function wählt.\*) Insbesondere wird man vorerst den Schnitten, welche in der  $z$ -Ebene nach den singulären Punkten zu ziehen sind (damit man die in der  $s$ -Ebene construirten Bereiche erhält), noch ein Capitel der

\*) Klein, Ann. 40, pag. 138 (1892).

weiteren Untersuchung zu widmen haben. Die Vortheile aber, die eine solche geometrische Behandlung unserer transcendenten Function bietet, dürften vor allem in den folgenden Punkten zu suchen sein. Sagen wir zunächst, dass die conforme Abbildung in ihrer concreten Form immer ein erster Schritt zu einer unmittelbaren Einsicht in das Wesen der Function, in ihre organische Natur, ist. Dies gilt schon, wenn wir, wie jetzt im Falle der  $s$ -Function, nur die allgemeinen Umrisse der Abbildung kennen. Es gilt in erhöhtem Maasse, wenn wir noch ins Einzelne verfolgen wollen, welche Curven auf den Fundamentalbereichen der  $s$ -Ebene irgend welchem Curvennetz der  $x$ -Ebene entsprechen, oder umgekehrt. Darüber hinaus aber seien die Fragen, wie oft ein bestimmt isolirter Zweig der Function gewisse Werthe annimmt, wie viel Nullstellen in einem bestimmten Intervall oder in einem bestimmten Gebiete der Ebene des Argumentes liegen,\*) sowie die Theorie der höheren (rationalen und algebraischen) Transformation der  $s$ -Function genannt. Die Methode der Fundamentalbereiche dürfte endlich besonders in Specialfällen und Grenzfällen der Function einen guten Einblick gewähren, der auf rein analytischem Wege nicht in gleichem Maasse zu erlangen ist. Specielle Fragen dieser Art sind z. B. die, wann sich die Particularlösungen in der Nähe der singulären Punkte wie ein Logarithmus oder wie eine Exponentialfunction verhalten werden. Alle diese Fragen werden sich mit Vortheil von der geometrischen Theorie der  $s$ -Function aus behandeln lassen.

Doch auch noch in anderer Richtung hin dürften diese geometrischen Untersuchungen bemerkenswerth sein. Wenn wir dieselben nochmals überschauen, so werden wir den durchaus elementaren Charakter derselben nicht verkennen, der insonderheit insofern hervortritt, als wir mit allgemeinen Ansätzen nicht durchkommen, sondern die verschiedenen Fälle einzeln nach einander construiren müssen. Jedenfalls haben wir in den modernen Bestrebungen, die Differentialgleichungen 2. Ordnung geometrisch zu behandeln, zugleich ein vorzügliches Beispiel zu erblicken, wie die höhere Mathematik insbesondere in der auf Riemann's grundlegenden Arbeiten sich aufbauenden functionentheoretischen Anschauung sehr wohl auf die Entwicklung der Elementarmathematik von Einfluss sein kann.

Göttingen, Februar 1893.

---

\*) Klein, Ann. 37 (1890), pag. 573 ff. Die dort gegebenen Resultate werden sich z. B. leicht auf den Fall der geradlinig begrenzten Dreiecke auf Grund unserer Betrachtungen auf pag. 218 ff. specialisiren lassen.