Zur Theorie der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Von

A. V. Bäcklund in Lund.

Es ist, wie ich glaube, zum ersten Male von Lie in einer Note in den Gött. Nachrichten für 1872, Nr. 25, bemerkt worden, dass eine partielle Differentialgleichung 1. O. mit n unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ und einer unbekannten Function z unter Umständen eine vollständige Lösung besitzen kann, die durch zwei oder drei oder vier ... Gleichungen zwischen $z, x_1, x_2, \cdots, x_n$ und n willkürlichen Constanten auszudrücken ist. Ein Weg zur Ermittelung einer solchen Lösung einer derartigen partiellen Differentialgleichung 1. O. wird auch in der nämlichen Note von Lie angegeben, aber eine eingehende Discussion der betreffenden Differentialgleichungen ist meines Wissens noch nicht unternommen worden. Und doch ist eine Charakterisirung jener Gleichungen, wenn nicht aus anderen Gründen, wenigstens deshalb wichtig, weil sie lehrt, von einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung 1. O. durch Differentiationen und Eliminationen allein zu entscheiden, ob sie eine durch zwei oder eine durch drei oder durch mehrere Gleichungen zwischen $z, x_1, x_2, \cdots, x_n$ ausdrückbare Lösung besitzt. Zu den folgenden auf eine nähere Charakterisirung der fraglichen Differentialgleichungen abzielenden Ueberlegungen bin ich zum Theil durch meine in diesen Annalen veröffentlichten Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung veranlasst worden, wie aus mehreren Stellen im Folgenden erhellen dürfte; jedoch haben die folgenden Ueberlegungen so wenige Berührungspunkte mit jenen Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung gemein, dass zu ihrem Verständniss die Kenntniss der letzteren nicht nothwendig ist.

Freilich werde ich nur die Fälle $n = 3$, $n = 4$ behandeln, und ausführlich nur diejenigen partiellen Differentialgleichungen 1. O. zwischen drei Variablen x_1, x_2, x_3 und der unbekannten Function z besprechen, die eine durch zwei Gleichungen zwischen z, x_1, x_2, x_3 ausgedrückte Lösung gestatten, aber Alles, was für diese Fälle entwickelt wird und auf die Charakterisirung der genannten partiellen Differentialgleichungen hinausläuft (insbes. § 1., Nr. 7, § 6.), lässt sich ohne Mühe auf die Fälle $n = 5$, $n = 6$, etc. ausdehnen.

§ 1.

Ueber die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung des Raumes von vier Dimensionen, die ein erst durch zwei Gleichungen ausdrückbares Integral besitzen.

1. Wenn die Variablen z, x_1, x_2, x_3 als Coordinaten der Punkte eines Raumes von vier Dimensionen interpretirt werden, so stellt jede Gleichung zwischen z, x_1, x_2, x_3 eine Punktmannigfaltigkeit von drei Dimensionen und jedes System von zwei Gleichungen zwischen denselben Grössen eine Punktmannigfaltigkeit von zwei Dimensionen in diesem Raume dar. Betrachten wir irgend eine Punktmannigfaltigkeit von zwei Dimensionen in diesem Raume, kurzgesagt eine M_2^0 dieses R_4:

$$z = f(x_2, x_3), \quad x_1 = \varphi(x_2, x_3),$$

und bezeichnen wir durch p_1, p_2, p_3 derart gewählte Parameter einer Tangentenebene derselben in einem Punkte (z, x_1, x_2, x_3), dass die Gleichung jener Ebene wird:

$$\text{(a)} \qquad \zeta - z = p_1(\xi_1 - x_1) + p_2(\xi_2 - x_2) + p_3(\xi_3 - x_3),$$

so finden wir leicht, dass alle die Punkte der M_2^0, die dem Punkte $(z x_1 x_2 x_3)$ unendlich benachbart sind, in der Axe eines ganzen Büschels von Tangentenebenen liegen. Man hat nämlich für jene Punkte die Gleichungen:

$$dz - df = 0, \quad dx_1 - d\varphi = 0,$$

oder, wenn man p, q, p', q' resp. statt $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$ schreibt, kurz:

$$\text{(a')} \qquad dz - p_1\, dx_1 - p_2\, dx_2 - p_3\, dx_3 = 0$$

für alle diejenigen Werthe von p_1, p_2, p_3, *die den beiden Relationen:*

$$\text{(1)} \qquad p_2 = p - p' p_1, \quad p_3 = q - q' p_1$$

Genüge leisten. Wenn, wie gewöhnlich, der Inbegriff derjenigen Punkte der Ebene (a), die dem Punkte (zx) unendlich benachbart sind, — und die auch allen Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen (M_3^0), welche die Ebene im Punkte (zx) berühren, gemeinsam sind, — als Flächenelement bezeichnet wird, so können wir sagen, dass alle einem Punkte (zx) einer M_2^0 unendlich benachbarten Punkte derselben M_2^0 den Schnitt zweier und somit einfach unendlich vieler Flächenelemente bilden. Einen jeden solchen Inbegriff von unendlich naheliegenden Punkten einer M_2^0 dürfen wir als Element der M_2^0 auffassen; die verschiedenen Elemente unterscheiden sich durch die Werthe ihrer Parameter $(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q')$, in derselben Weise wie die Flächenelemente des Raumes durch ihre Parameterwerthe $(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$ sich unterscheiden. *Ein jedes Element* $(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q')$ *ist*, wie eben gezeigt, *der Schnitt von zwei und somit von einfach unendlich vielen Elementen* $(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$.

2. Jedem Punkte einer M_2^0 wird hiernach ein ganz bestimmtes Element $(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q')$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, ein ganz bestimmter Büschel (1) von Flächenelementen $(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$ zugeordnet. Die Gleichungen (1) repräsentiren aber, wenn p_1, p_2, p_3 als Punktcoordinaten eines Raumes von drei Dimensionen gedeutet werden, eine Gerade in diesem Raume, den ich im Folgenden mit R_3' bezeichnen werde. Demgemäss können wir die eben gemachte Bemerkung auch so ausdrücken: *jedem Punkte einer M_2^0 des Raumes R_4 wird eine Gerade des Raumes R_3' zugeordnet.* Die Grössen p, q, p', q' haben wir als Coordinaten dieser Geraden aufzufassen.

Einfach unendlich viele M_2^0 erzeugen eine M_3^0. Unter zweifach unendlich vielen M_2^0 giebt es also im Allgemeinen wenigstens eine, die durch einen beliebig gewählten Punkt des R_4 hindurchgeht. *Jedem Punkte des R_4 wird daher vermittelst einer zweifach unendlichen Schaar von M_2^0 eine Gerade in R_3' zugeordnet. Durch Schaaren von dreifach, vierfach, fünffach unendlich vielen M_2^0 wird jedem beliebigen Punkte des R_4 eine einfach, zweifach resp. dreifach unendliche Schaar von Geraden in R_3', d. h. eine Linienfläche, eine Congruenz resp. ein Complex von Geraden zugeordnet.*

3. Die Gleichung in Punktcoordinaten p_1, p_2, p_3 derjenigen Linienfläche in R_3', welche die dreifach unendlich vielen M_2^0:

$$z = f(x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu), \quad x_1 = \varphi(x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu), \tag{2}$$

(wo λ, μ, ν variable Parameter bezeichnen)

dem Punkte (z, x_1, x_2, x_3) zuordnen, und die, nach dem Obigen, durch Elimination von λ, μ, ν zwischen den Gleichungen (2) und den Gleichungen

$$p_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} - p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \qquad p_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3} - p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$$

(d. i. den Gleichungen (1)) erhalten wird, sei die folgende:

$$F(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0; \tag{3}$$

durch sie werden auch, wenn man z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3 als Parameter der Flächenelemente in R_4 auffasst, alle diejenigen Flächenelemente dieses Raumes R_4 angegeben, die sich an die vorgelegten dreifach unendlich vielen M_2^0 (2) anschliessen (so dass jedes derselben ∞^1 (unendlich nahe liegende) Punkte mit einer dieser M_2^0 gemein hat).

In Folge dessen wird die Gleichung (3) eine solche partielle Differentialgleichung 1. O. des Raumes R_4, welche die M_2^0 (2) als Integrale besitzt. *Eine erste Bedingung für eine partielle Differentialgleichung 1. O.: $F(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0$, welche eine vollständige Lösung besitzen soll, die sich geometrisch durch ∞^3 M_2^0 darstellt, ist daher die, dass die Differentialgleichung, falls z, x_1, x_2, x_3 als (beliebige) Constanten, p_1, p_2, p_3 als Coordinaten der Punkte in R_3' interpretirt werden, eine Linienfläche in R_3' repräsentiren muss.*

Indem man zwei von den Grössen p_1, p_2, p_3, etwa p_2, p_3, aus den Gleichungen (1) und (3) eliminirt, muss daher, falls die Gleichung (3) nicht linear in den p, aber dennoch eine partielle Differentialgleichung 1. O. mit ∞^3 Integral-M_2^0 sein soll, eine Gleichung von der Form resultiren:

$$\begin{aligned} f(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q') + \alpha\varphi(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q') \\ + \beta\psi(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q') = 0, \end{aligned}$$

wo nur α, β von p_1 abhängen. Das System der Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} f(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q') = 0, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ \psi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{cases}$$

stellt in den Liniencoordinaten p, q, p', q' die durch die Gleichung (3) in den Punktcoordinaten p_1, p_2, p_3 ausgedrückte Fläche des R_3' dar. Dass für diese Darstellung der Fläche drei Gleichungen erfordert werden, zeigt an, dass die Fläche geradlinig, aber keine Ebene ist.

4. Drei Gleichungen zwischen den Liniencoordinaten p, q, p', q' bestimmen immer eine Linienfläche, wie auch die Gleichungen unter sich beschaffen sein mögen. Man erhält die Gleichung derselben Fläche in Punktcoordinaten p_1, p_2, p_3 durch blosse Elimination von p, q, p', q' zwischen jenen drei Gleichungen und den Gleichungen (1). Aber eine so erhaltene Gleichung: $F(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0$, die drei beliebig gewählten Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q') &= 0, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= 0, \\ \psi(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= 0 \end{aligned}$$

äquivalent ist, so dass sie geometrisch für alle Werthe von z, x_1, x_2, x_3 eine Linienfläche repräsentirt, hat im Allgemeinen keine durch ∞^3 M_2^0: $z = F(x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu)$, $x_1 = \Phi(x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu)$ darstellbare Lösung, sogar im Allgemeinen keine einzige Integral-M_2^0. Soll nämlich eine Integral-M_2^0 vorhanden sein, so müssen die angegebenen drei Gleichungen zwischen p, q, p', q', wenn man für diese Grössen setzt resp. $\frac{\partial z}{\partial x_2}$, $\frac{\partial z}{\partial x_3}$, $\frac{\partial x_1}{\partial x_2}$, $\frac{\partial x_1}{\partial x_3}$, von Werthen von z, x_1 von der Form:

$z = F(x_2, x_3)$, $x_1 = \Phi(x_2, x_3)$ befriedigt werden. Diese zwei Gleichungen müssten die Integral-M_2^0 darstellen. Ebenso würde eine dreifach unendliche Schaar von Integral-M_2^0, die eine vollständige Lösung bildete, von einem Gleichungspaare: $z = F(x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu)$, $x_1 = \Phi(x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu)$ mit drei arbiträren Constanten λ, μ, ν bedingt, durch welches den genannten drei partiellen Differentialgleichungen für z, x_1 identisch genügt würde.

Soll also die nicht-lineare Gleichung (3) ∞^3 *Integral-*M_2^0 (2) *besitzen, so müssen die Gleichungen* (4), *als partielle Differentialgleichungen für* z, x_1 *aufgefasst, eine gemeinsame Lösung* (2) *mit drei arbiträren Constanten gestatten.*

§ 2.

Partielle Differentialgleichungen der obigen Art, welche in R_3' Linienflächen darstellen, die zu einer beliebig gegebenen Congruenz gehören.

5. Ich werde mich hier vornehmlich mit dem Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} &f(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q') = 0, \\ &\varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \end{aligned}$$

wo $f = 0$, $\varphi = 0$ ganz beliebig gewählt sind, beschäftigen, und zunächst zeigen, dass dasselbe immer unendlichfach unendlich viele Lösungen:

$$z = F(x_2, x_3), \quad x_1 = \Phi(x_2, x_3),$$
$$p = F'(x_2), \quad q = F'(x_3), \quad p' = \Phi'(x_2), \quad q' = \Phi'(x_3)$$

besitzt. Statt x_1, x_2, x_3 werde ich jedoch hinfort schreiben z', x, y, wodurch p, q, p', q' partielle Differentialquotienten von z, z' nach x, y werden, und die vorgelegten zwei Gleichungen die Form erhalten:

$$(5) \qquad \begin{cases} f(z, z', x, y, p, q, p', q') = 0, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0.- \end{cases}$$

Die Frage, ob es Functionen z, z' von x, y giebt, die diese Gleichungen erfüllen, ist gleichbedeutend mit der Frage, ob es eine Function z' von x, y giebt, durch welche, wenn man sie in die Gleichungen einführt und zugleich für p', q' ihre partiellen Differentialquotienten in Bezug auf x, y setzt, die vorgelegten Gleichungen verwandelt werden in zwei solche partielle Differentialgleichungen 1. O. für z:

$$A(z, x, y, p, q) = 0, \quad B(z, x, y, p, q) = 0,$$

die eine gemeinsame Lösung: $z = F(x, y)$ besitzen. Und diese Frage erledigt sich auf die folgende Weise. Man stelle die Gleichungen auf:

$$(6) \qquad [f\varphi]_{zxp} = 0,^{*)}$$

$$(7) \qquad [f[f\varphi]]_{zxp} = 0, \quad [\varphi[f\varphi]]_{zxp} = 0,$$

von denen die letzteren, durch Elimination von z, p, q vermittelst (5) und (6) in zwei partielle Differentialgleichungen 3. O. für z' übergehen. Wenn diese zwei Gleichungen eine gemeinsame Lösung z' gestatten, — und ich werde gleich zeigen, dass sie das stets thun, — so ist diese Lösung eine Function z' der gesuchten Art; denn durch Substitution derselben in die Gleichungen (5), (6) erhalten diese, auf Grund der jetzigen Identitäten (7), den durch Elimination aus ihnen sich ergebenden Ausdruck für z in x, y als gemeinsame Lösung.

Aus den ersten Derivirten der Gleichungen (5) und (7) nach x, y setzen sich in linearer Weise die Gleichungen:

$$(8) \qquad \begin{array}{ll} \Big[f\big[f[f\varphi]\big]\Big]_{zxp} = 0, & \Big[f\big[\varphi[f\varphi]\big]\Big]_{zxp} = 0, \\ \Big[\varphi\big[\qquad\big]\Big]_{zxp} = 0, & \Big[\varphi\big[\qquad\big]\Big]_{zxp} = 0^{**)} \end{array}$$

zusammen. Aber auf Grund der Jacobi'schen Identität:

$$\big[f[\varphi\psi]\big] + \big[\varphi[\psi f]\big] + \big[\psi[f\varphi]\big]$$
$$= -\frac{\partial f}{\partial z}[\varphi\psi] - \frac{\partial\varphi}{\partial z}[\psi f] - \frac{\partial\psi}{\partial z}[f\varphi]^{***)}$$

---

*) $$\begin{aligned}[f\varphi]_{zxp} = &\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + p'\frac{\partial f}{\partial z'} + r'\frac{\partial f}{\partial p'} + s'\frac{\partial f}{\partial q'}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p} \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + q'\frac{\partial f}{\partial z'} + s'\frac{\partial f}{\partial p'} + t'\frac{\partial f}{\partial q'}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial q} \\ &- \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} + p'\frac{\partial\varphi}{\partial z'} + r'\frac{\partial\varphi}{\partial p'} + s'\frac{\partial\varphi}{\partial q'}\right)\frac{\partial f}{\partial p} \\ &- \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi}{\partial z} + q'\frac{\partial\varphi}{\partial z'} + s'\frac{\partial\varphi}{\partial p'} + t'\frac{\partial\varphi}{\partial q'}\right)\frac{\partial f}{\partial q}.\end{aligned}$$

Mit r', s', t' sind die zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}$$

bezeichnet.

Allgemeiner:

$$[f\psi]_{zxp} = \frac{df}{dx}\frac{\partial\psi}{\partial p} + \frac{df}{dy}\frac{\partial\psi}{\partial q} - \frac{d\psi}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{d\psi}{dy}\frac{\partial f}{\partial q},$$

ψ eine beliebige Function von z, x, y, p, q, z', 1., 2., 3. etc. Differentialquotienten von z' in Bezug auf x, y.

**) Wegen (6) und (7) ziehen diese Gleichungen die folgenden nach sich:

$$\Big[[f\varphi]\,[f[f\varphi]]\Big]_{zxp} = 0, \quad \Big[[f\varphi]\,[\varphi[f\varphi]]\Big]_{zxp} = 0$$

***) Sie ist in dieser Weise von Mayer (in d. A. Bd. IX, p. 370) formulirt worden.

erhält man, wenn $[f\varphi]$ statt ψ gesetzt wird, und überdies die Gleichungen (6) und (7) berücksichtigt werden:

$$\Big[f\big[\varphi[f\varphi]\big]\Big] = \Big[\varphi\big[f[f\varphi]\big]\Big].$$

Also reduciren sich die Gleichungen (8) auf nur drei von einander unabhängige Gleichungen. Dennoch vertreten sie vollständig diejenigen Gleichungen, die durch Differentiation der aus den Gleichungen (7) hergeleiteten Gleichungen 3. O. für z' folgen, — denn die Gleichungen (8) sind durch Elimination von r, s, t [den zweiten Differentialquotienten von z] zwischen den ersten Derivirten von (5) und (7) hervorgegangen und werden daher, nach Substitution der oben angewandten aus (5), (6) zu bestimmenden Werthe von z, p, q den genannten Derivirten der Gleichungen für z' völlig äquivalent. Die ersten Derivirten der zwei Gleichungen 3. O. für z' reduciren sich also auf drei von einander unabhängige Gleichungen, d. i. zwischen den ersten Derivirten der Gleichungen für z' findet eine lineare Relation identisch statt.

Dann aber stehen die Gleichungen für z' in derselben Beziehung zu einander, wie zwei erste Integrale verschiedener Classen einer linearen partiellen Differentialgleichung 4. O., eine Beziehung, die ich in diesen Annalen Bd. XIII, p. 90—93 näher beschrieben habe. *Die zwei Gleichungen 3. O. für z' haben also ∞^∞ Integrale: $z' = \Phi(x, y)$ gemein. Durch jeden Streifen von Elementen (z', x, y, p', q') geht eine einfach unendliche Schaar von Integralen.*

Ein jedes Integral $z' = \Phi(x, y)$ bestimmt, nach dem Obigen, eine einzige Function z von x, y, mit der es zusammen eine Lösung des Systems (5) bildet.

6. Den Gleichungen (5) kann man immer solche Gleichungen:

(9) $$\psi(z, z', x, y, p, q, p', q') = 0$$

hinzufügen, deren jede mit (5) eine dreifach unendliche Schaar von Lösungen: $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$ gemein hat. Es ist nämlich möglich, die Function ψ so zu bestimmen, dass es Werthe $z' = \Phi(x, y)$, $p' = \Phi'(x)$, $q' = \Phi'(y)$ giebt, die, in die Gleichungen (5), (9) eingeführt, diese zu drei solchen partiellen Differentialgleichungen 1. O. für z machen, die ein gemeinsames Integral: $z = F(x, y)$ besitzen. Denn hierfür ist nur erforderlich, dass die drei Gleichungen:

(10) $$[f\varphi]_{zxp} = 0, \quad [\varphi\psi]_{zxp} = 0, \quad [\psi f]_{zxp} = 0,$$

nachdem man aus ihnen vermittelst (5) und (9) z, p, q eliminirt hat, wodurch sie in drei partielle Differentialgleichungen 2. O. für z' übergehen, eine gemeinsame Lösung mit drei arbiträren Constanten zulassen. Und dass in der That ψ so bestimmt werden kann, dass dies eintrifft, zeigt sich folgendermassen:

Die ersten Derivirten der Gleichungen (10) sind, unter gehöriger Berücksichtigung jener Gleichungen selbst, äquivalent den Gleichungen:

$$(11)\quad \begin{array}{lll} \big[f[f\varphi]\big]_{zxp}=0, & \big[f[\varphi\psi]\big]_{zxp}=0, & \big[f[\psi f]\big]_{zxp}=0, \\ \big[\varphi[\quad]\big]_{zxp}=0, & \big[\varphi[\quad]\big]_{zxp}=0, & \big[\varphi[\quad]\big]_{zxp}=0, \end{array}$$

und jedes Paar von unter einander stehenden Gleichungen zieht auf Grund von (10) respective nach sich:

$$\big[\psi[f\varphi]\big]_{zxp}=0,\quad \big[\psi[\varphi\psi]\big]_{zxp}=0,\quad \big[\psi[\psi f]\big]_{zxp}=0.$$

Aber nach der in der vorangehenden Nummer benutzten Jacobi'schen Identität ist die Gleichung $\big[f[\varphi\psi]\big]=0$ eine Folge von

$$\big[\varphi[\psi f]\big]=0 \quad \text{und} \quad \big[\psi[f\varphi]\big]=0.$$

Also reduciren sich die sechs Gleichungen (11) auf nur fünf. D. h. von den ersten Derivirten der Gleichungen (10), — diese Gleichungen als Gleichungen 2. O. für z' betrachtet, — ist die eine eine algebraische Folge der anderen. Daher drückt sich die Bedingung, dass jene ersten Derivirten von einem gemeinsamen Werthsysteme der dritten Differentialquotienten von z' befriedigt werden, durch eine einzige Gleichung aus. *Und diese Gleichung wird* — nachdem man die dritten Differentialquotienten von z' aus (11) eliminirt, und die Werthe von r', s', t', wie sie aus (10) hervorgehen, eingesetzt hat — *eine lineare partielle Differentialgleichung* 2. *Ordnung für* ψ. Als Variablen fungiren hierbei $z, z', x, y, p, q, p', q'$, die aber nur für sechs von einander unabhängige gelten, denn es bestehen ja die Gleichungen (5). — Wenn jene Gleichung für ψ durch die Gleichung (9) erfüllt wird, so haben die Gleichungen (10), in partielle Differentialgleichungen 2. O. für z' verwandelt, ∞^3 gemeinsame Integrale: $z'=\Phi(x,y)$. Denn im angenommenen Falle, wo die Gleichungen für die vier, jenen Gleichungen 2. O. zugehörenden dritten Differentialquotienten von z' auf nur vier Gleichungen sich reduciren, reduciren sich die Gleichungen für die fünf, denselben Gleichungen 2. O. zugehörenden vierten Differentialquotienten von z' auf nur fünf Gleichungen u. s. w. So dass jedem Elemente (z', x, y, p', q') ein einziges Werthsystem von r', s', t', 3., 4. etc. Differentialquotienten von z' zugeordnet wird. D. h. es giebt Flächen: $z'=\Phi(x,y)$, zu einer solchen Anzahl (∞^3), dass durch die Flächenelemente derselben alle (∞^5) Elemente (z', x, y, p', q') des Raumes $(z'xy)$ erfüllt werden.*)

*) Das Gleichungssystem:

$$dz'-p'dx-q'dy=0,\quad dp'-r'dx-s'dy=0,\quad dq'-s'dx-t'dy=0,$$
$(r', s', t'$ bestimmte Functionen von $x, y, z', p', q')$

Ein jedes Integral der linearen partiellen Differentialgleichung 2. O. für ψ kann also als linkes Glied einer Gleichung (9) der geforderten Eigenschaft hinsichtlich der gegebenen, beliebig gewählten Gleichungen (5), gebraucht werden.

Eine jede der in dieser Weise bestimmten Gleichungen:

$$\psi(z, z', x, y, p, q, p', q') = 0$$

bildet mit den Gleichungen (5) *ein System* (4), *das eine partielle Differentialgleichung* 1. *O. in* R_4 *mit* ∞^3 *Integral-*M_2^0, *so wie in Nr.* 3., 4. *beschrieben ist, begründet.*

---

ist gleichbedeutend mit dem Gleichungspaare:

$$(q'r' - p's')\frac{\partial f}{\partial z'} + (r't' - s'^2)\frac{\partial f}{\partial q'} - s'\frac{\partial f}{\partial x} + r'\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$(p't' - q's')\frac{\partial f}{\partial z'} + (r't' - s'^2)\frac{\partial f}{\partial p'} + t'\frac{\partial f}{\partial x} - s'\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

so dass die Möglichkeit, das erste System in der Form: $z' = \Phi(x, y, \lambda, \mu, \nu)$, $p' = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $q' = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, zu integriren, auf der Existenz einer grösstmöglichen Zahl von gemeinsamen Lösungen (derselben Form) der beiden partiellen Differentialgleichungen 1. O. beruht.

Die Bedingung für die grösstmögliche Zahl gemeinsamer Lösungen:

$$A(Bf) - B(Af) = \lambda Af + \mu Bf$$

drückt sich in unserem Falle, wo

$$Af \equiv (q'r' - p's')\frac{\partial f}{\partial z'} + (r't' - s'^2)\frac{\partial f}{\partial q'} - s'\frac{\partial f}{\partial x} + r'\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$Bf \equiv (p't' - q's')\frac{\partial f}{\partial z'} + (r't' - s'^2)\frac{\partial f}{\partial p'} + t'\frac{\partial f}{\partial x} - s'\frac{\partial f}{\partial y},$$

durch die drei Gleichungen:

$$\left(\frac{dr'}{dy} - \frac{ds'}{dx}\right)(q's' - p't') + \left(\frac{ds'}{dy} - \frac{dt'}{dx}\right)(p's' - r'q') = 0,$$

$$\left(\frac{dr'}{dy} - \frac{ds'}{dx}\right)t' \qquad - \left(\frac{ds'}{dy} - \frac{dt'}{dx}\right)s' \qquad = 0,$$

$$\left(\frac{dr'}{dy} - \frac{ds'}{dx}\right)s' \qquad - \left(\frac{ds'}{dy} - \frac{dt'}{dx}\right)r' \qquad = 0$$

(der Kürze halber ist $\frac{dr'}{dx}$ etc geschrieben statt $\frac{\partial r'}{\partial x} + p'\frac{\partial r'}{\partial z'} + r'\frac{\partial r'}{\partial p'} + s'\frac{\partial r'}{\partial q'}$, etc.)

aus. Von ihnen ist aber die eine Gleichung eine algebraische Folge der zwei anderen, so dass die fragliche Bedingung durch die zwei Gleichungen:

$$\frac{dr'}{dy} - \frac{ds'}{dx} = 0, \qquad \frac{ds'}{dy} - \frac{dt'}{dx} = 0$$

vollständig dargestellt ist. Hieraus schliessen wir, dass die Bedingung dafür, dass drei partielle Differentialgleichungen 2. O. ∞^3 Integralflächen gemeinsam haben, durch zwei Gleichungen allein zu formuliren ist. Was ich hier, im Anschlusse an die im Texte angestellte Betrachtung, bemerkt haben wollte.

7. Wie die ∞^3 Integral-M_2^0 der letzterwähnten partiellen Differentialgleichung 1. O. in R_4 herzuleiten sind, ist nun leicht ersichtlich. Aus (5), (9) und (10) werden z, p, q eliminirt. Die drei entstehenden Gleichungen geben r', s', t' in Function von z', x, y, p', q'. Diese Werthe von r', s', t' in das Gleichungssystem:

$$dp' = r'dx + s'dy, \quad dq' = s'dx + t'dy, \quad dz' = p'dx + q'dy$$

eingesetzt, machen, nach dem Nächstvorangehenden, dasselbe zu einem durch Gleichungen von der Form

$$\text{(a)} \qquad \begin{gathered} z' = \Phi(x, y, \lambda, \mu, \nu), \\ p' = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad q' = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{gathered}$$

integrirbaren Systeme.

Wenn ferner diese Werthe für z', p', q' in die Gleichungen (5) und (9) eingetragen und sodann p, q eliminirt werden, so entsteht eine völlig bestimmte Gleichung:

$$\text{(b)} \qquad z = F(x, y, \lambda, \mu, \nu).$$

Durch das System der Gleichungen (a) und (b) sind dann die fraglichen Integral-M_2^0 dargestellt.

8. Ist ψ ein Integral der linearen partiellen Differentialgleichung 2. O., zu der wir in Nr. 6. gelangten, so hat jede Gleichung: $\psi = C$, für jeden beliebigen constanten Werth von C ∞^3 Integrale mit den Gleichungen (5) gemeinsam. Es seien durch die Gleichungen:

$$\text{(12)} \qquad z = F(x, y, C, C', C'', C'''), \quad z' = \Phi(x, y, C, C', C'', C''')$$

diese Integrale ausgedrückt. C', C'', C''' sind die neuen arbiträren Constanten, die Parameter jener dreifachen Integralschaar. Durch Elimination*) aller vier Constanten C, C', C'', C''' kommt man auf die Gleichungen (5) zurück; durch Elimination von je drei derselben erhält man nebst den Gleichungen (5) nach einander diese vier:

$$\text{(13)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \psi(z, z', x, y, p, q, p', q') & = C, \\ \psi'(\qquad\qquad) & = C', \\ \psi''(\qquad\qquad) & = C'', \\ \psi'''(\qquad\qquad) & = C''', \end{array} \right.$$

deren jede also eine in der Schaar (12) enthaltene dreifach unendliche Integralschaar mit (5) gemein hat.

Aus der vierfach unendlichen Schaar (12) mögen ∞^3 Integrale durch die Gleichung:

$$\text{(14)} \qquad \text{eine arb. Funct. von } (C, C', C'', C''') = 0$$

ausgeschieden werden. Dieselben werden nach (13) den Gleichungen (5) und der Gleichung:

---

*) aus (12) und aus den Derivirten dieser Gleichungen in Bezug auf x, y.

(15) eine arb. Funct. von $(\psi, \psi', \psi'', \psi''') = 0$

gemeinsam zugehören.

Die Functionen $\psi, \psi', \psi'', \psi'''$, *aus denen die Gleichungen* (13) *gebildet sind, sind solche Integrale der anfangs erwähnten linearen partiellen Differentialgleichung* 2. O. *für* ψ, *dass jene Gleichungen* (13) *für alle Werthe von* C, C', C'', C''' *mit einander und mit den Gleichungen* (5) *ein Integral:*

$$\text{(a)} \qquad z = F(x, y), \quad z' = \Phi(x, y)$$

gemein haben. Jetzt habe ich bewiesen, dass aus ihnen Gleichungen von der Form (15) beliebig sich zusammensetzen, deren jede mit (5) ∞^3 Integrale (a) gemein hat. Oder, *es ist nun auch*

(15′) eine arb. Funct. von $(\psi, \psi', \psi'', \psi''')$

ein Integral der betrachteten linearen partiellen Differentialgleichung 2. O.

9. Zwei der Variablen $z, z', x, y, p, q, p', q'$, etwa z, z', werden vermittelst (5) aus der Differentialgleichung, die ψ definirt, entfernt. Die Integrale ψ sind dann als Functionen von x, y, p, q, p', q' allein darzustellen, und das Integral (15′) wird das vollständige Integral eines involutorischen Systems:

$$(16)\begin{cases} A_1 \dfrac{\partial\psi}{\partial x} + A_2 \dfrac{\partial\psi}{\partial y} + A_3 \dfrac{\partial\psi}{\partial p} + A_4 \dfrac{\partial\psi}{\partial q} + A_5 \dfrac{\partial\psi}{\partial p'} + A_6 \dfrac{\partial\psi}{\partial q'} = 0, \\ B_1 \dfrac{\partial\psi}{\partial x} + B_2 \dfrac{\partial\psi}{\partial y} + B_3 \dfrac{\partial\psi}{\partial p} + B_4 \dfrac{\partial\psi}{\partial q} + B_5 \dfrac{\partial\psi}{\partial p'} + B_6 \dfrac{\partial\psi}{\partial q'} = 0, \end{cases}$$

wo $A_1, A_2, \cdots, A_6, B_1, B_2, \cdots, B_6$ gewisse Functionen von x, y, p, q, p', q' sind.

Der letzt angeführte Satz kann dann so ausgesprochen werden: *Die lineare partielle Differentialgleichung* 2. *O. in* x, y, p, q, p', q' *als unabhängigen Variablen, die* ψ *definirt, hat unendlichfach unendlich viele intermediäre Integrale, deren jedes ausgedrückt ist durch ein involutorisches System von der Form* (16). *Ein jedes Integral* ψ *giebt zu den Integralen* ψ', ψ'', ψ''' *und demnach zu einem bestimmten Systeme* (16), *in dem es enthalten ist, Anlass.*

Die partielle Differentialgleichung 2. O. für ψ hat also in dem Sinne ein *vollständiges* intermediäres Integral von der Form (16), dass jedes Integral ψ derselben eben ein Integral eines Systemes (16) wird. Aber zu zeigen, welchen Nutzen man aus diesem Satze für die Erledigung der partiellen Differentialgleichung 2. O. für ψ ziehen könnte, sehe ich mich gegenwärtig nicht im Stande. Eine solche Darlegung würde auch bei dieser Gelegenheit insofern von geringerem Interesse sein, weil die Herstellung der Integrale (12) des Systemes (5) oben in der 5. Nummer umständlich auseinandergesetzt worden ist. Diese Herstellung erfordert nach dem, was in der erwähnten Nummer 5., verglichen mit der Nummer 14. meiner Abhandlung in diesen Annalen

Bd. XIII, p. 92, erörtert worden ist, einen Integrationsprocess, welcher der Form nach demjenigen sehr ähnlich ist, der für eine partielle Differentialgleichung 2. O. mit zwei Variablen gilt.

10. Wie man, wenn ψ gegeben ist, die zugehörigen ψ', ψ'', ψ''', die zusammen mit ψ die Gleichungen (13) bilden, zu ermitteln habe, geht aus dem jetzt Entwickelten leicht hervor. Man stelle die Gleichungen auf:

$$(5) \qquad \begin{cases} f(z, z', x, y, p, q, p', q') = 0, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \end{cases}$$

$$(10) \qquad [f\varphi]_{zxp} = 0, \quad [\varphi\psi]_{zxp} = 0, \quad [\psi f]_{zxp} = 0,$$

$$(17) \qquad [f\psi']_{zxp} = 0, \quad [\varphi\psi']_{zxp} = 0, \quad [\psi\psi']_{zxp} = 0,$$

und verwandele durch Elimination von z, z', r', s', t', vermittelst der Gleichungen (5) und (10), die letzten Gleichungen (17) in drei lineare partielle Differentialgleichungen 1. O. für ψ' mit x, y, p, q, p', q' als unabhängigen Variablen. Diese Gleichungen werden, nach dem in der vorangehenden Nummer Erörterten, von den drei Functionen ψ', ψ'', ψ''', wie auch von einer jeden Function dieser ψ', ψ'', ψ''', befriedigt. *Daher bilden die genannten drei linearen partiellen Differentialgleichungen* (17) *ein vollständiges System. Durch die Lösungen desselben werden die gesuchten Functionen ψ', ψ'', ψ''' erhalten.*

11. Wird die Gleichung (9), nachdem vermittelst (5) z, z' entfernt sind, nach x (oder y, p, q, p', q') aufgelöst, also auf die Form gebracht:

$$(9') \qquad x - f(y, p, q, p', q') = 0,$$

so tritt an Stelle der in Nummer 6. entwickelten linearen partiellen Differentialgleichung 2. O. für ψ eine ebenfalls lineare partielle Differentialgleichung 2. O. für f, in der jedoch f explicite (neben ihren Differentialquotienten) auftritt.

Die zwei Gleichungen (5) stellen im Raume R_3' (Nr. 2.) eine Liniencongruenz dar. Daher kann man den Satz, dass die Bestimmung der Gleichungen (9′) auf die Integration einer gewissen linearen partiellen Differentialgleichung 2. O. führt, auch so aussprechen: *die Bestimmung aller derjenigen partiellen Differentialgleichungen* 1. O. *in R_4, die eine aus M_2^0 bestehende vollständige Lösung besitzen und die in R_3' Linienflächen* (*Nr.* 3.) *repräsentiren, die zu einer gegebenen, beliebig genommenen Liniencongruenz gehören, wird durch Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung* 2. *O. in fünf unabhängigen Variablen mit einem vollständigen, durch zwei involutorische lineare partielle Differentialgleichungen* 1. *O. ausgedrückten intermediären Integrale bewirkt.*

12. Wenn bei der in der 3. Nr. angezeigten Elimination von p_2, p_3 zwischen den Gleichungen (1) und (3) eine Gleichung von der Form:

$$f(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p' q') + p_1^{\lambda}\varphi(z, x_1, x_2, x_3, p, q, p', q')$$
$$+ p_1^{l}\psi(\qquad) + p_1^{m}\psi'(\qquad) = 0$$

resultirt, so hat die Gleichung (3) keine dreifach unendliche Schaar von Integral-M_2^0. Aber sie wird eine zweifach unendliche Schaar derartiger M_2^0 besitzen, falls die Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(z, z', x, y, p, q, p', q') &= 0, \\ \varphi(\qquad) &= 0, \\ \psi(\qquad) &= 0, \\ \psi'(\qquad) &= 0 \end{aligned}$$

von einem Gleichungspaare:

$$z = F(x, y, \lambda, \mu), \quad z' = \Phi(x, y, \lambda, \mu),$$
(wo λ, μ arbiträre Constanten)

befriedigt werden. Es müssen dann die in der 7. Nr. erörterten drei partiellen Differentialgleichungen 2. O. (10) für z' zweifach unendlich viele Integrale mit der partiellen Differentialgleichung 1. O., die durch Elimination von z, p, q zwischen den vier Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\psi' = 0$ entsteht, gemein haben. Und das Gleiche muss in Bezug auf z gelten.

Oder es entstehen die fraglichen Lösungen in folgender anderen Weise. Man substituire in $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\psi' = 0$ αx statt y und resp. $\frac{dz}{dx} - q\alpha$, $\frac{dz'}{dx} - q'\alpha$ statt p, p', wodurch die genannten Gleichungen in vier Gleichungen zwischen $z, z', x, \alpha, \frac{dz}{dx}, \frac{dz'}{dx}, q, q'$ übergehen. Die Elimination von q, q' führt auf zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} f_0\left(z, z', x, \frac{dz}{dx}, \frac{dz'}{dx}\right) &= 0, \\ \varphi_0(\qquad) &= 0, \end{aligned}$$

die die Grösse α als Constante enthalten. Eine folgende Elimination von $z, \frac{dz}{dx}$ zwischen diesen Gleichungen: $f_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$ und der Gleichung:

$$[f_0\varphi_0]_{zx\frac{dz}{dx}} = 0$$

leitet zu einer Differentialgleichung 2. O., die z' als Function von x, von der Constante α und von zwei arbiträren Parametern bestimmt. Die zwei arbiträren Parameter denke ich mir durch (α und durch) zwei (arbiträre) dem Werthe $x = 0$ entsprechende Werthe z_1', z_2' von z' ausgedrückt. Es wird sodann α entfernt vermittelst der Gleichung $y = \alpha x$; die so entstehende Gleichung in z', x, y mit z_1', z_2' als arbiträren Constanten, ist die der fraglichen Lösung zugehörende Gleichung: $z' = \Phi(x, y, \lambda, \mu)$.

Denn, — die zuletzt erwähnte Differentialgleichung 2. O. für z' hat die Projectionen der Schnitte zwischen der Ebene: $y = \alpha x$, und den Flächen: $z' = \Phi(x, y, \lambda, \mu)$ auf der $z'x$ Ebene zu Integralcurven. Durch bestimmte Werthe von z_1', z_2' sind, unabhängig von dem Werthe von α, zwei Punkte auf der z'-Axe bestimmt, durch welche die Integralcurve, die diesen Werthen z_1', z_2' der arbiträren Constanten entspricht, hindurchgeht. Durch dieselben Punkte geht selbstverständlich auch der Schnitt, dessen Projection die Integralcurve ist. Wird nun in unseren Gleichungen α ins Unendliche variirt, dagegen die Werthe von z_1', z_2' festgehalten, so wird algebraisch diejenige Fläche beschrieben, die den Ort derjenigen Schnitte in den durch die z'-Axe gelegten Ebenen bildet, die durch dieselben zwei bestimmten Punkte (z_1', z_2') hindurchgehen. Dieser Ort ist aber nach dem kurz vorher beim Anfange dieses Beweises Bemerkten, eine gewisse der Flächen: $z' = \Phi(x, y, \lambda, \mu)$. Daher u. s. w.

Die der Gleichung: $z' = \Phi(x, y, \lambda, \mu)$ zugehörige Gleichung: $z = F(x, y, \lambda, \mu)$ wird, wie in dem früheren Falle, sobald die erstere Gleichung, die für z', gefunden ist, eindeutig, durch rein algebraische Operationen bestimmt.

13. Die Elimination von p_1, p_2, p_3 zwischen (1) und (3) würde zu fünf Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
f(z, z', x, y, p, q, p', q') &= 0,\\
\varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= 0,\\
\psi(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= 0,\\
\psi'(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= 0,\\
\psi''(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= 0
\end{aligned}
$$

führen können, und diese könnten durch ein Gleichungspaar:

$$z = F(x, y, \lambda), \quad z' = \Phi(x, y, \lambda),$$

wo λ einen arbiträren Parameter bezeichnet, befriedigt werden. Dann müssten u. A. die zwei partiellen Differentialgleichungen 1. O. für z', die aus den eben hingeschriebenen Gleichungen durch Elimination von z, p, q entspringen, einfach unendlich viele gemeinsame Lösungen besitzen. Dieselben würden die Gleichung:

$$z' = \Phi(x, y, \lambda)$$

darstellen.

14. Endlich würde die mehrmals besprochene Elimination von p_1, p_2, p_3 zu sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned}
f(z, z', x, y, p, q, p', q') &= 0,\\
\varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= 0,\\
\psi(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= 0,\\
\psi'(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= 0,\\
\psi''(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= 0,\\
\psi'''(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= 0
\end{aligned}$$

führen können. Hat dann die partielle Differentialgleichung (3) eine Integral-M_2^0, so ist es diejenige, welche durch die Gleichungen:

$$z = F(x, y), \quad z' = \Phi(x, y)$$

(es sollen nachher x_1, x_2, x_3 für z', x, y gesetzt werden)

ausgedrückt ist, die durch Elimination von z', p', q', p, q bez. z, p, q, p', q' aus den sechs gegebenen Gleichungen erhalten werden. Jene zwei Gleichungen: $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$ müssen alsdann eine gemeinsame Lösung der sechs Gleichungen: $f = 0$, $\varphi = 0, \cdots, \psi''' = 0$ ausmachen.

§ 3.

Von Umhüllungsgebilden von Schaaren von M_2^0.

15. Die vier Gleichungen, durch welche zwei M_2^0 in R_4 zu repräsentiren sind, werden im Allgemeinen nur von einem Werthsysteme (oder einigen Werthsystemen) von (z, x_1, x_2, x_3) befriedigt. Demgemäss schneiden sich zwei M_2^0 im Allgemeinen nur in einem Punkte (oder in einigen Punkten). Von einer einfach unendlichen Schaar von M_2^0:

$$\begin{aligned}
f(z, x_1, x_2, x_3, \lambda) &= 0,\\
\varphi(\qquad\qquad\qquad) &= 0
\end{aligned}$$

gilt daher Folgendes: Sie bilden zusammen eine M_3^0. Die Punktgleichung derselben wird durch Elimination von λ aus $f = 0$, $\varphi = 0$ erhalten. Die Parameter p_1, p_2, p_3 ihres Flächenelements in einem beliebigen Punkte (z, x_1, x_2, x_3) haben die Werthe:

$$p_i = -\frac{f'(x_i)\varphi'(\lambda) - \varphi'(x_i) f'(\lambda)}{f'(z)\varphi'(\lambda) - \varphi'(z) f'(\lambda)}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

und jenes Flächenelement schliesst sich daher einem Elemente (N. 1.) derjenigen M_2^0 an, die durch den Punkt (z, x_1, x_2, x_3) hindurchgeht. Ziehen wir aber insbesondere einen Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter M_2^0 unserer Schaar in Betracht. Die Elemente der beiden M_2^0 in ihrem Schnittpunkte liegen nur ausnahmsweise in einer Ebene [d. i. in einer ebenen M_3^0], und deshalb hat die von der Schaar der M_2^0 gebildete M_3^0 zwei Tangentenebenen in jenem Punkte, die eine Ebene an das Element der einen M_2^0 in jenem Punkte, die andere an das Element der anderen M_2^0 in demselben Punkte sich anschliessend. Die Glieder rechts in den obigen Formeln für p_i nehmen nun auch die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, indem nämlich für den fraglichen Punkt $f'(\lambda) = 0$, $\varphi'(\lambda) = 0$. Die Tangentenebenen der M_3^0 in zwei dem Schnittpunkte unendlich benachbarten Punkten der bezüglichen M_2^0 weichen nur unendlich wenig von einander ab. Deshalb bezeichne ich den in Rede stehenden Punkt, einen Schnittpunkt zweier consecutiver M_2^0 der Schaar, als einen Cuspidalpunkt der M_3^0, in dem dieselbe zwei unendlich benachbarte Tangentenebenen hat. Die Aufeinanderfolge dieser Punkte bildet eine Art von Cuspidal-M_1^0 der M_3^0. — Trifft es sich aber, dass je zwei unendlich benachbarte M_2^0 der Schaar eine ganze Punktmannigfaltigkeit von einer Dimension, eine M_1^0, gemein haben, so erhält unsere M_3^0, statt einer Cuspidal-M_1^0, eine aus den Schnitt-M_1^0 gebildete Cuspidal-M_2^0. Da mit dieser M_2^0 jede M_2^0 der anfänglichen Schaar zwei unendlich benachbarte M_1^0 gemein hat, so wird dieselbe von einer jeden M_2^0 der Schaar nach einer ganzen M_1^0 berührt. In diesem Falle giebt es also eine M_2^0, die ein Umhüllungsgebilde der vorgelegten einfachen Schaar von M_2^0 bildet, nämlich die eben genannte Cuspidal-M_2^0. — Ein Beispiel einer Schaar von M_2^0, die eine Umhüllungs-M_2^0 gestattet, wird von der durch ein Gleichungspaar der Form:

$$f(z, x_1, x_2, x_3 \quad) = 0,$$
$$\varphi(z, x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0$$

darzustellenden Schaar geliefert. Die Gleichungen der Umhüllungs-M_2^0 werden durch Elimination von λ zwischen den Gleichungen: $f = 0$, $\varphi = 0$, $\varphi'(\lambda) = 0$, erhalten.

16. Eine jede aus einer zweifach unendlichen Schaar von M_2^0:

$$f(z, x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu) = 0,$$
$$\varphi(\qquad\qquad\qquad) = 0$$

durch eine beliebige Gleichung: $\lambda = F(\mu)$ ausgeschiedene einfach unendliche Schaar hat, nach dem Nächstvorangehenden, eine M_3^0 als Umhüllungsgebilde. Ausnahmsweise würde die zweifache Schaar so beschaffen sein können, dass sie eine einfache Schaar einschlösse, die eine Umhüllungs-M_2^0 hätte. Eine M_2^0 könnte es auch geben, die sämmtliche M_2^0 der zweifachen Schaar umhüllte. In diesem Falle müsste eine jede M_2^0 der Schaar von allen ∞^1 unendlich benachbarten M_2^0 derselben Schaar in dem nämlichen Punkte geschnitten werden; d. h. es müsste den sechs Gleichungen:

$$f = 0, \quad f'(\lambda) = 0, \quad f'(\mu) = 0,$$
$$\varphi = 0, \quad \varphi'(\lambda) = 0, \quad \varphi'(\mu) = 0$$

für alle Werthe von λ, μ allen durch dasselbe Werthsystem von (z, x_1, x_2, x_3) genügt werden. Durch Elimination von λ, μ zwischen jenen sechs Gleichungen würden alsdann zwei Gleichungen in z, x_1, x_2, x_3 resultiren, und diese gerade müssten die Gleichungen der fraglichen Umhüllungs-M_2^0 sein. Für eine zweifache Schaar allgemeiner Art giebt es folglich keine Umhüllungs-M_2^0.

17. Ebensowenig lässt sich aus den M_2^0 einer dreifach unendlichen Schaar allgemeiner Art, gegeben durch die Gleichungen:

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} f(z, x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu) = 0, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \end{cases}$$

eine Schaar von zweifach unendlich vielen M_2^0 ausscheiden, die eine M_2^0 als Umhüllungsgebilde hat. Nehmen wir an, dass durch die Gleichung:

$$\lambda = \Phi(\mu, \nu)$$

eine zweifache Schaar mit einer Umhüllungs-M_2^0 bestimmt würde. Die sechs Gleichungen:

$$f = 0, \quad f'(\mu) + f'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = 0, \quad f'(\nu) + f'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} = 0,$$

$$\varphi = 0, \quad \varphi'(\mu) + \varphi'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = 0, \quad \varphi'(\nu) + \varphi'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} = 0$$

geben durch Elimination von z, x_1, x_2, x_3 zwei Gleichungen in λ, μ, ν, $\frac{\partial \lambda}{\partial \mu}, \frac{\partial \lambda}{\partial \nu}$, welche im angenommenen Falle von derselben Function $\lambda = \Phi(\mu, \nu)$ erfüllt sein müssten. Die Bedingung für die Existenz einer solchen Function lässt sich leicht finden. Wir schreiben die sechs Gleichungen so:

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} &f = 0, \quad f'(\mu)\varphi'(\lambda) - \varphi'(\mu)f'(\lambda) = 0, \quad f'(\mu) + f'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = 0, \\ &\varphi = 0, \quad f'(\nu)\varphi'(\lambda) - \varphi'(\nu)f'(\lambda) = 0, \quad f'(\nu) + f'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} = 0, \end{aligned}$$

und wenden die vier ersten Gleichungen zur Elimination von z, x_1, x_2, x_3 an. Es muss dann mit den zwei letzten der Gleichungen (b) die folgende Gleichung

$$\text{(c)} \quad f'(\lambda)\left[\frac{d}{d\nu}f'(\mu) - \frac{d}{d\mu}f'(\nu)\right] = f'(\mu)\frac{d}{d\nu}f'(\lambda) - f'(\nu)\frac{d}{d\mu}f'(\lambda)$$

verträglich sein, also ebenfalls durch $\lambda = \Phi(\mu, \nu)$ erfüllt werden, in der $\frac{d}{d\mu}$, $\frac{d}{d\nu}$ resp. die Operationen bezeichnen:

$$-\frac{f'(\mu)}{f'(\lambda)}\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{dz}{d\mu}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{dx_1}{d\mu}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{d\mu}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{dx_3}{d\mu}\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$-\frac{f'(\nu)}{f'(\lambda)}\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \nu} + \frac{dz}{d\nu}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{dx_1}{d\nu}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{d\nu}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{dx_3}{d\nu}\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Die Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{dz}{d\mu}, \quad \frac{dx_1}{d\mu}, \quad \frac{dx_2}{d\mu}, \quad \frac{dx_3}{d\mu}, \quad \frac{dz}{d\nu}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_3}{d\nu}$$

erhält man durch Differentiation der vier ersten von den Gleichungen (b).

Die Gleichung (c) können wir als eine Gleichung für φ betrachten. Sie wird eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung mit $x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu$ als unabhängigen Variablen, falls man sich z durch die Gleichung $f=0$ eliminirt denkt. Ist die Gleichung $f=0$, d. i. die erste der Gleichungen (a), gegeben und ein Integral $\varphi(x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu)$ der partiellen Differentialgleichung 2. O. (c) gefunden, so stellt die Gleichung: $\varphi=0$ eine Gleichung dar, die zusammen mit $f=0$ eine Schaar von M_2^0 darstellt, *die sich in ∞^1 Schaaren von je ∞^2 M_2^0 auflöst, Schaaren, die jede eine Umhüllungs-M_2^0 besitzen.* Wir sehen auch, dass es keine dreifache Schaar von M_2^0 giebt, die sich durch zwei Gleichungen, die beide dreifach unendlich in Bezug auf λ, μ, ν sind, darstellen lässt, und sich in mehr als ∞^1 Schaaren von je ∞^2 M_2^0 spaltet, deren jede eine Umhüllungs-M_2^0 hat.

18. Eine partielle Differentialgleichung 1. O. in R_4, die eine durch ∞^3 M_2^0 (a) ausgedrückte vollständige Lösung besitzt, muss folglich, falls die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &f(z, x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu)=0, \\ &\varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)=0 \end{aligned}$$

jener Integralschaar in der durch die Gleichung (c) formulirten Beziehung zu einander stehen, noch ∞^1 andere Integral-M_2^0 besitzen, die Umhüllungsgebilde von je ∞^2 der ersteren Integrale darstellen. In diesem Falle müssen die Gleichungen (10) für ein jedes einer Umhüllungs-M_2^0 zugehörende Element $(z, z', x, y, p, q, p', q')$ von mehr als einem Werthsysteme von r', s', t', nämlich von einem, das der umhüllenden, und von einem, das einer umhüllten M_2^0 zukommt, — befriedigt werden. Die Bedingung hierfür drückt sich durch zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\alpha(z, z', x, y, p, q, p', q')=0, \\ &\beta(\qquad\qquad\qquad\qquad)=0 \end{aligned}$$

aus. Also: *wenn eine partielle Differentialgleichung* 1. *O. in R_4, die in den Grössen $z, z', x, y, p, q, p', q'$ durch die drei Gleichungen* (5), (9) *repräsentirt ist, einfach unendlich viele Integral-M_2^0 hat, die Umhüllungsgebilde von je ∞^2 der ∞^3 Integral-M_2^0 einer vollständigen Lösung ausmachen, so erhält man erstens die Gleichungen dieser Umhüllungs-M_2^0, vermittelst Elimination zwischen* (5), (9) *und den eben angemerkten Gleichungen: $\alpha=0$, $\beta=0$, in der Form:*

$$p=\bar{f}(z, x, y), \quad q=\bar{\varphi}(z, x, y), \quad z'=\bar{\psi}(z, x, y),$$

und hat hernach, — was jetzt möglich sein muss, — die Gleichung:

$$dz - \overline{f} \cdot dx - \overline{\varphi} \cdot dy = 0,$$

in der Form: $z = F(x, y, C)$*), *wo* C *eine arbiträre Constante bedeutet, zu integriren. Durch die beiden Gleichungen:*

$$z = F(x, y, C), \quad z' = \overline{\psi}\,(F(x, y, C), x, y)$$

sind dann die fraglichen Integral-M_2^0 *gegeben.*

Man ersieht ohne Weiteres hieraus, wie man eine vorgelegte partielle Differentialgleichung 1. O. in R_4 darauf zu prüfen hat, ob sie derartige Umhüllungsintegral-M_2^0 zulässt oder nicht.

19. Der Umstand, dass die Rechnung, die zu jenen Umhüllungs-M_2^0 führt, einfacher ist als diejenige, welche die Integral-M_2^0 der vollständigen Lösung giebt, findet in dem folgenden Satze seine Erklärung. — Aus den dreifach unendlich vielen M_2^0 einer vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung 1. O. in R_4 scheide man beliebig einfach unendlich viele aus. Die aus ihnen gebildete Punktmannigfaltigkeit dreier Dimensionen ist eine Integral-M_3^0 der nämlichen Gleichung 1. O. Aus in dieser Weise gebildeten Integral-M_3^0 setzen sich als deren Umhüllungsgebilde alle andere Integralmannigfaltigkeiten der Gleichung 1. O. zusammen. Giebt es nun einfach unendlich viele Umhüllungsintegral-M_2^0 der eben angegebenen Art, so werden diese, oder wenigstens einige von diesen, von jeder Integral-M_3^0 der partiellen Differentialgleichung berührt. *Die in Rede stehenden* M_2^0 *bilden daher eine singuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung* 1. *O.*

20. Der Fall, dass eine der Gleichungen (a) nur zwei oder nur einen der Parameter λ, μ, ν enthält, ist bisher ausgeschlossen geblieben. Enthält $f = 0$ nur die Parameter λ, μ, so entstehen durch blosse Elimination von ν zwischen den Gleichungen:

$$f(z, x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu) = 0, \quad \varphi(z, x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu) = 0, \quad \varphi'(\nu) = 0$$

zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} &f\,(z, x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu) = 0, \\ &\overline{\varphi}\,(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \end{aligned}$$

durch welche eine zweifache Schaar von Umhüllungs-M_2^0 von der in

*) Es braucht sich selbstverständlich keine der Gleichungen:

$$p = \overline{f}\,(z, x, y), \cdots, z = F(x, y, C)$$

in diesen expliciten Formen zu ergeben. Die betreffenden Rechnungsoperationen werden im Allgemeinen auf Gleichungen von der Form

$$\overline{f}\,(z, x, y, p) = 0, \cdots F(x, y, z, C) = 0$$

führen.

der Nr. 15. erörterten Art ausgedrückt wird. — Enthält die Gleichung $f=0$ nur einen Parameter, z. B. λ, so kann man beliebig $\mu =$ Funct (ν (und λ)) nehmen, und sodann eine Umhüllungs-M_2^0: $f=0$, $\bar{\varphi}=0$ bilden. Es existiren also jetzt ∞^∞ Umhüllungs-M_2^0. Die partielle Differentialgleichung 1. O. in R_4, die eine durch: $f(z, x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0$, $\varphi(z, x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu) = 0$ ausgedrückte vollständige Lösung hat, wird geometrisch durch eine Kegelschaar in R_3' (Nr. 2., 3.) repräsentirt.

21. In einer vierfach unendlichen Schaar von M_2^0:

$$\text{(d)} \qquad \begin{cases} f(z, x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu, \varrho) = 0, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{cases}$$

sind unendlich viele zweifache Schaaren enthalten, die Umhüllungs-M_2^0 besitzen. Werden nämlich ν, ϱ so als Functionen von λ, μ bestimmt, dass die sechs Gleichungen:

$$\text{(e)} \qquad \begin{aligned} f=0, \quad f'(\lambda) + f'(\nu)\frac{\partial \nu}{\partial \lambda} + f'(\varrho)\frac{\partial \varrho}{\partial \lambda} &= 0, \\ f'(\mu) + f'(\nu)\frac{\partial \nu}{\partial \mu} + f'(\varrho)\frac{\partial \varrho}{\partial \mu} &= 0, \\ \varphi=0, \quad \varphi'(\lambda) + \varphi'(\nu)\frac{\partial \nu}{\partial \lambda} + \varphi'(\varrho)\frac{\partial \varrho}{\partial \lambda} &= 0, \\ \varphi'(\mu) + \varphi'(\nu)\frac{\partial \nu}{\partial \mu} + \varphi'(\varrho)\frac{\partial \varrho}{\partial \mu} &= 0 \end{aligned}$$

für alle Werthe von λ, μ verträglich werden, etwa: $\nu = F(\lambda, \mu)$, $\varrho = \Phi(\lambda, \mu)$, so bekommt man eine zweifache Schaar, die von einer M_2^0 umhüllt wird, nämlich die folgende:

$$\begin{aligned} &f(z, x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu, F, \Phi) = 0, \\ &\varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0. \end{aligned}$$

Und es können wirklich ν, ϱ so bestimmt werden. Durch Elimination von z, x_1, x_2, x_3 zwischen den eben hingeschriebenen sechs Gleichungen entstehen nämlich zwei Gleichungen in λ, μ, ν, ϱ, $\frac{\partial \nu}{\partial \lambda}, \ldots, \frac{\partial \varrho}{\partial \mu}$. Dass zwei solche Gleichungen immer ∞^∞ Lösungen: $\nu = F(\lambda, \mu)$, $\varrho = \Phi(\lambda, \mu)$ zulassen, ist aber in der 5. Nr. erwiesen.

Die Lösungen der zwei Gleichungen von der Form (5), die durch Elimination von λ, μ, ν, ϱ aus den Gleichungen (d)*) entspringen, werden sämmtlich aus den Gleichungen (d) selbst und aus Umhüllungsgebilden von ∞^2 derselben bestehen.

Die zwei Gleichungen, die in der oben erwähnten Art durch Elimination von z, x_1, x_2, x_3 aus (e) entstehen, haben Lösungen von derselben Beschaffenheit. Die Gleichungen (d) selbst, — jetzt z, x_1, x_2, x_3

*) diese verbunden mit ihren ersten Derivirten in Bezug auf x_2, x_3 (— z, x_1 als Functionen dieser Grössen aufgefasst).

als arbiträre Parameter betrachtet, — machen eine besondere Lösung jener Gleichungen aus.

Das erste der genannten Gleichungspaare von der Form (5), — das in $z, x_1, x_2, \cdots, \frac{\partial x_1}{\partial x_3}$, — nenne ich Ω, das zweite, — das in $\lambda, \mu, \nu, \cdots, \frac{\partial \varrho}{\partial \mu}$, — nenne ich Ω'. Die Lösungen von Ω, Ω' entsprechen einander eindeutig, so dass aus den Lösungen des einen Gleichungspaares die des anderen durch rein algebraische Operationen hervorgehen. Denn, fassen wir, um uns kürzer ausdrücken zu können, z, x_1, x_2, x_3 als Coordinaten der Punkte eines Raumes R_4, $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ als Coordinaten der Punkte eines Raumes R_4' auf: einem jeden Punkte in R_4' entspricht eine Integral-M_2^0 von Ω, einem jeden Punkte in R_4 eine Integral-M_2^0 von Ω', so dass zwei unendlich benachbarten Punkten einer Integral-M_2^0 von Ω, die einem Punkte $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ entspricht, zwei Integral-M_2^0 von Ω' entsprechen, die beide durch den Punkt $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ hindurchgehen. In Folge dessen wird einer jeden M_2^0 in R_4, die ∞^2 der den Punkten $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ entsprechenden Integral-M_2^0 von Ω umhüllt und die folglich selbst ein Integral von Ω ausmacht, eine M_2^0 in R_4' entsprechen, die ∞^2 der den Punkten (z, x_1, x_2, x_3) entsprechenden Integral-M_2^0 von Ω' umhüllt und also auch eine Intetegral-M_2^0 dieses selben Gleichungspaares Ω' bildet, und umgekehrt. Einer zufälliger Weise vorhandenen Umhüllungs-M_2^0 von ∞^1 der den Punkten $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ entsprechenden Integralen von Ω entspricht eine Punktmannigfaltigkeit von einer Dimension als Integral von Ω'.

Diese Correspondenz zwischen den Integralen von Ω, Ω' ist genau diejenige, die von der durch die Gleichungen (d) begründeten Berührungstransformation der Räume R_1, R_1' bewirkt wird.

§ 4.

Verallgemeinerung der in § 2. behandelten Probleme.

22. Von den zwei Gleichungen: $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$, durch welche eine Lösung der Gleichungen (5) ausgedrückt wird, ist im Allgemeinen die eine Gleichung unzweideutig bestimmt durch die andere. Nun ist jedes System von vier Gleichungen der Form:

$$\begin{gathered} x' = x, \\ y' = y, \\ f(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') = 0, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{gathered}$$

äquivalent einem Gleichungspaare (5). Fassen wir x, y, z, x', y', z' als Punktcoordinaten zweier Gebiete R, R' eines Raumes von drei Dimensionen auf, so definirt jenes System eine Transformation von

R, R' in einander. Durch die Lösungen: $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$, d. i. $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x', y')$, werden diejenigen Flächen in R (oder R') angegeben, die hierbei in Flächen in R' (oder R) umgeformt werden. *Es giebt nur ∞^4 Flächen in R (oder R'), so wie gewisse unter den Umhüllungsgebilden von zweifach unendlich vielen derselben, denen wiederum Flächen in R' (oder R) entsprechen.* Und das Entsprechen der Flächen in R und R' ist ein eindeutiges.*) — Wie diese Flächen zu bestimmen sind, ist oben (Nr. 5.) erörtert worden, wo gezeigt wurde, wie man die Gleichungen: $z' = \Phi(x, y)$ zu ermitteln hat.

Dieses Problem ist selbstverständlich enthalten in dem folgenden weit mehr umfassenden:

Eine Transformation von R, R' in einander wird definirt durch die k Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} F_1(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') & = 0, \\ F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad) & = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ F_k(\qquad\qquad\qquad\qquad) & = 0; \end{array}$$

man fragt nach dem Bezirke, innerhalb dessen diese Transformation eine Flächentransformation ist. Ich bespreche nur die Fälle $k = 3$, $k = 4$.

23. Drei Gleichungen:

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} F_1(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') & = 0, \\ F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad) & = 0, \\ F_3(\qquad\qquad\qquad\qquad) & = 0 \end{array} \right.$$

ordnen einer (beliebigen) Fläche in R alle diejenigen Flächen in R' zu, welche Integrale einer gewissen (der Fläche entsprechenden) partiellen Differentialgleichung 1. O. sind. Wenn $z = F(x, y)$ die Gleichung der Fläche in R ist, so erhält man die entsprechende partielle Differentialgleichung 1. O. in R', indem man in $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ resp. $F(x, y)$, $F'(x)$, $F'(y)$ statt z, p, q setzt und hierauf x, y eliminirt. Ein ähnliches Verfahren führt für eine jede Fläche in R' zu einer entsprechenden partiellen Differentialgleichung 1. O. in R. — Einem jeden Flächenelemente (z, x, y, p, q) entspricht ein durch die Gleichungen (18), diese als partielle Differentialgleichungen 1. O. in R' aufgefasst, bestimmter Complex von Flächenelementen in R'. Einem jeden Streifen:

$$z = f(x), \quad y = \varphi(x), \quad p = \psi(x), \quad q = \frac{f'(x) - \psi(x)}{\varphi'(x)} = \chi(x)$$

entspricht folglich der Complex der gemeinsamen Flächenelemente zweier partieller Differentialgleichungen 1. O. in R'. Diese Flächen-

*) Man bemerke jedoch den am Schlusse der Nr. 25. cursiv gedruckten Satz.

elemente ordnen sich im Allgemeinen nicht zu Flächen zusammen. Denn, wie ich zeigen werde, sind jene partielle Differentialgleichungen 1. O. nur ausnahmsweise involutorisch. Man erhält nämlich die fraglichen Gleichungen durch Elimination von x zwischen den drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} &F_1(f(x), x, \varphi(x), \psi(x), \chi(x), z', x', y', p', q') = 0, \\ &F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ &F_3(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0. \end{aligned}$$

Der Werth von x, der aus der ersten Gleichung folgt, wird in die zwei anderen Gleichungen eingetragen. Bezeichnen wir die so erhaltenen Gleichungen, die gerade die in Rede stehenden ausmachen, oder wenigstens ihnen äquivalent sind, durch $F_2' = 0$, $F_3' = 0$, so haben wir:

$$[F_2' F_3'] = [F_2 F_3]_{z'x'p'} + \frac{dF_2}{dx}[x F_3] + \frac{dF_3}{dx}[F_2 x],\text{*})$$

[F_1' identisch Null, also:]

$$0 = [F_1' F_2]_{z'x'p'} = [F_1 F_2]_{z'x'p'} + \frac{dF_1}{dx}[x F_2],$$

$$0 = [F_1' F_3]_{z'x'p'} = [F_1 F_3]_{z'x'p'} + \frac{dF_1}{dx}[x F_3],$$

woraus

$$\frac{dF_1}{dx}[F_2' F_3'] = \frac{dF_1}{dx}[F_2 F_3]_{z'x'p'} + \frac{dF_2}{dx}[F_3 F_1]_{z'x'p'} + \frac{dF_3}{dx}[F_1 F_2]_{z'x'p'}.$$

Hier steht

$$\frac{dF_i}{dx} \text{ statt } \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y}\varphi'(x) + \frac{\partial F_i}{\partial z}f'(x) + \frac{\partial F_i}{\partial p}\psi'(x) + \frac{\partial F_i}{\partial q}\chi'(x).$$

Die Bedingung $[F_2' F_3'] = 0$ dafür, dass unsere zwei Gleichungen in Involution liegen, lautet dann so:

$$(19)\quad \frac{dF_1}{dx}[F_2 F_3]_{z'x'p} + \frac{dF_2}{dx}[F_3 F_1]_{z'x'p'} + \frac{dF_3}{dx}[F_1 F_2]_{z'x'p} = 0,$$

und sie ist offenbar im Allgemeinen nicht erfüllt.

Im Falle:

$$[F_2 F_3]_{z'x'p'} = 0, \quad [F_3 F_1]_{z'x'p'} = 0, \quad [F_1 F_2]_{z'x'p} = 0,$$

---

*) $$[F_i F_k]_{z'x'p'} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x'} + p'\frac{\partial F_i}{\partial z'}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p'} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y'} + q'\frac{\partial F_i}{\partial z'}\right)\frac{\partial F_k}{\partial q'} - \left(\frac{\partial F_k}{\partial x'} + p'\frac{\partial F_k}{\partial z'}\right)\frac{\partial F_i}{\partial p'} - \left(\frac{\partial F_k}{\partial y'} + q'\frac{\partial F_k}{\partial z'}\right)\frac{\partial F_i}{\partial q'}.$$

und nur in diesem Falle, wird *einem jeden* Streifen in R eine einfach unendliche Flächenschaar in R' zugeordnet. In diesem Falle wird einem jeden Flächenelemente in R eine Fläche in R' entsprechen. Die Gleichungen (18) können dann durch eine Gleichung:

$$F(z, x, y, p, q, z', x', y') = 0,$$

oder durch zwei oder drei solche Gleichungen ersetzt werden. *Sie begründen folglich jetzt eine solche Flächentransformation, wie ich sie in einer Abhandlung in diesen Annalen Bd. XI, p.* 199 *aufgestellt habe.*

Dagegen kann man andere Transformationen (18) aufstellen, die jeden Streifen einer beliebig gegebenen vierfach unendlichen Streifenschaar in R in ∞^1 Flächen in R' überführen. Sei nämlich die Streifenschaar definirt durch die Gleichungen:

$$(20) \qquad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy, \\ dy = \bar{\varphi}(z, x, y, p, q)\,dx, \\ dp = \bar{\psi}(\qquad\qquad)\,dx, \\ dq = \bar{\chi}(\qquad\qquad)\,dx, \end{cases}$$

wo $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$, $\bar{\chi}$ ganz beliebige Functionsformen bezeichnen, so führe man nur in den in (19) eingehenden $\frac{dF_i}{dx}$ statt $[f'(x)=]\ \frac{dz}{dx}$, $[\varphi'(x)=]\ \frac{dy}{dx}$, etc. $p + q\bar{\varphi}$, $\bar{\varphi}$, etc. ein. Für F_1, F_2 nehme man beliebige Functionen von z, x, y, p, q, z', x', y', p', q' und für F_3 ein Integral der so modificirten Gleichung (19). Durch die Gleichungen: $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ ist dann eine Transformation der fraglichen Beschaffenheit bestimmt.

24. Wir behandeln etwas näher die zuletzt genannte Transformation. Aus den Differentialen der Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ erhält man nach Elimination von dx', dy':

$$\begin{vmatrix} \frac{dF_1}{dx}\,dx + \frac{dF_1}{dy}\,dy & \frac{dF_1}{dx'} & \frac{dF_1}{dy'} \\ \frac{dF_2}{dx}\,dx + \frac{dF_2}{dy}\,dy & \frac{dF_2}{dx'} & \frac{dF_2}{dy'} \\ \frac{dF_3}{dx}\,dx + \frac{dF_3}{dy}\,dy & \frac{dF_3}{dx'} & \frac{dF_3}{dy'} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Hier ist

$$\frac{dF_i}{dx} = \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial z}p + \frac{\partial F_i}{\partial p}r + \frac{\partial F_i}{\partial q}s, \qquad \frac{dF_i}{dy} = \frac{\partial F_i}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial z}q + \frac{\partial F_i}{\partial p}s + \frac{\partial F_i}{\partial q}t,$$

$$\frac{dF_i}{dx'} = \frac{\partial F_i}{\partial x'} + \frac{\partial F_i}{\partial z'}p' + \frac{\partial F_i}{\partial p'}r' + \frac{\partial F_i}{\partial q'}s', \qquad \frac{dF_i}{dy'} = \frac{\partial F_i}{\partial y'} + \frac{\partial F_i}{\partial z'}q' + \frac{\partial F_i}{\partial p'}s' + \frac{\partial F_i}{\partial q'}t'.$$

Zwischen r, s, t, r', s', t', hat man also den durch folgende zwei Gleichungen ausgedrückten Zusammenhang:

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} \frac{dF_1}{dx} & \frac{dF_1}{dx'} & \frac{dF_1}{dy'} \\ \frac{dF_2}{dx} & \frac{dF_2}{dx'} & \frac{dF_2}{dy'} \\ \frac{dF_3}{dx} & \frac{dF_3}{dx'} & \frac{dF_3}{dy'} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{dF_1}{dy} & \frac{dF_1}{dx'} & \frac{dF_1}{dy'} \\ \frac{dF_2}{dy} & \frac{dF_2}{dx'} & \frac{dF_2}{dy'} \\ \frac{dF_3}{dy} & \frac{dF_3}{dx'} & \frac{dF_3}{dy'} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass, wenn (z', x', y', p', q') eines der Flächenelemente ist, die dem Flächenelemente (z, x, y, p, q) entsprechen, einem jeden dem ersten Flächenelemente zugeordneten Werthsysteme von r', s', t' ein Büschel*) von dem letzten Elemente zugeordneten Werthen von r, s, t entspricht.

Durch die Streifenschaar (20) kommt einem jeden Flächenelemente (z, x, y, p, q) ein Büschel von r, s, t zu, nämlich der folgende:

$$r + \bar{\varphi} s = \bar{\psi},$$
$$s + \bar{\varphi} t = \bar{\chi},$$

und derselbe fällt mit dem Büschel (21):

$$r + m(z,x,y,p,q,z',x',y',p',q',r',s',t')\, s = \mu\,(z,x,y,p,q,z',x',y',p',q',r',s',t'),$$
$$s + m(\qquad\qquad\qquad)\, t = \nu\,(\qquad\qquad\qquad),$$

zusammen, falls:

$$(22)\qquad m = \bar{\varphi}, \quad \mu = \bar{\psi}, \quad \nu = \bar{\chi}$$

die drei neuen Gleichungen zwischen $z, x, y, p, q, z', x', y', p', q', r', s', t'$ bilden.

Die Elimination von z, x, y, p, q zwischen den sechs Gleichungen (18) und (22) führt zu einer Gleichung:

$$(23)\qquad \Phi(z', x', y', p', q', r', s', t') = 0,$$

die in folgender Weise das Bild in R' von der Streifenschaar (20) ausmacht. Einem jeden Flächenelemente (z, x, y, p, q) entspricht eine Schaar von ∞^1 Streifen, nämlich die durch die Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$, als Gleichungen in z', x', y', p', q' aufgefasst, gegebene Streifenschaar. Zwei unendlich benachbarten Flächenelementen in R, die vereinigt liegen, entsprechen zwei Streifenschaaren, die so auf einander bezogen sind, dass jedes Flächenelement eines Streifens der einen Schaar mit einem Flächenelemente eines Streifens der anderen Schaar

*) Werthe von r, s, t, die zwei Gleichungen: $r + ms = \mu$, $s + mt = \nu$, wo m, μ, ν von r, s, t frei sind, befriedigen, bilden ein einfach unendliches System, das ich einen Büschel nenne. Vgl. meine Abh. im XI. und XIII. Band d. Ann.

vereinigt liegt. Und dies gilt in gleicher Weise von denjenigen Figuren, die den Flächenelementen in R' entsprechen. Ist nun aber die Transformation (18) von der am Schlusse der vorangehenden Nummer angezeigten Beschaffenheit und S' irgend einer der Streifen, die vermittelst einer solchen Transformation aus einem Flächenelemente (z, x, y, p, q) in R entstehen, so muss, wenn das Flächenelement (z, x, y, p, q) einen der Streifen (20) durchläuft, der entsprechende Streifen S' *eine Fläche beschreiben.* Seien (z, x, y, p, q), (z', x', y', p', q') zwei einander entsprechende Flächenelemente unserer Figuren; dann kommt, wegen (22), dem letzten Flächenelemente ein gewisses Werthsystem von r', s', t' zu. Es werden nun diese p', q', r', s', t' die von der Gleichung der eben erwähnten Fläche gelieferten Werthe der ersten und zweiten Differentialquotienten von z' in Bezug auf x', y' für den Punkt (x', y', z').

Die ∞^4 den Streifen (20) entsprechenden einfach unendlichen Flächenschaaren sind folglich Integrale der partiellen Differentialgleichung 2. O. (23).

Jeder Fläche in R' entspricht eine partielle Differentialgleichung 1. O. in R. Einem Elemente $(z', x', y', p', q', r', s', t')$ der Fläche entsprechen ∞^2 Büschel (z, x, y, p, q, r, s, t). Daher entsprechen der Fläche in R' im Ganzen ∞^4 Büschel (z, x, y, p, q, r, s, t). Es muss nun, wenn $dp' = r'dx' + s'dy'$, $dq' = s'dx' + t'dy'$, auch sein: $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$, und umgekehrt. Also erhält man alle diejenigen Elemente $(z + dz, x + dx, \cdots, q + dq)$ von der, der Fläche entsprechenden partiellen Differentialgleichung 1. O., die mit dem Elemente (z, x, y, p, q) vereinigt liegen, wenn man die Gleichungen $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$ für solche Werthe von r, s, t anwendet, die den genannten Büscheln zugehören. Deshalb werden aber die Linienrichtungen*) jener Büschel charakteristische Richtungen für die partielle Differentialgleichung 1. O.

Wenn die Fläche in R' ein Integral von (23) ist, so muss die ihr entsprechende partielle Differentialgleichung 1. O. ∞^2 Charakteristiken haben, die je einen Streifen (20) berühren.

Anm. Für Räume mehrerer Dimensionen gelten ähnliche Sätze. Man findet somit durch eine leichte Uebertragung des Vorangehenden auf den Raum von vier Dimensionen Folgendes. Durch drei Gleichungen zwischen $z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, z', x_1', x_2', x_3', p_1', p_2', p_3'$, von denen zwei beliebig sind, ist es möglich, solche Transformationen zweier Gebiete eines Raumes von vier Dimensionen zu bestimmen, die jeden Streifen (M_1, Reihe von ∞^1 vereinigt liegenden Flächenelementen)

*) Die Linienrichtung des Büschels, dessen Gleichungen: $r + ms = \mu$, $s + mt = \nu$ sind, wird durch die Gleichungen: $dy = mdx$, $dz = pdx + qdy$ bestimmt.

einer gegebenen sechsfach unendlichen Schaar des einen Gebietes in zwei involutorische partielle Differentialgleichungen 1. O. des anderen Gebietes überführen. Durch vier Gleichungen zwischen $z, x_1, \cdots, p_3$, $z', x_1', \cdots, p_3'$, von denen drei ganz beliebig sind, kann eine Transformation begründet werden, die jede M_2 (Reihe von ∞^2 vereinigt liegenden Flächenelementen) einer gegebenen fünffach unendlichen Schaar in zwei involutorische partielle Differentialgleichungen 1. O. verwandelt. —

25. Wenn, wie oben näher auseinandergesetzt worden ist, durch drei Gleichungen zwischen den Parametern der Flächenelemente zweier Gebiete R, R' eines Raumes von drei Dimensionen die Flächen des einen Gebietes stets in Flächen des anderen verwandelt werden, so führt dagegen eine durch vier Gleichungen zwischen denselben Parametern ausgedrückte Transformation nur eine beschränkte Zahl von Flächen des einen Gebietes in Flächen des anderen über. (Vergl. Nr. 22.) Seien

$$
(24) \qquad \begin{cases} F_1(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') = 0, \\ F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ F_3(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ F_4(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{cases}
$$

die vier Gleichungen einer Transformation. Jede Fläche in R (oder R') geht in Streifenschaaren in R' (oder R) über. Nur dann vereinigen sich diese zu Flächen, wenn die zwei partiellen Differentialgleichungen 1. O., die sie definiren, involutorisch werden. Die Bedingung dafür, dass die Fläche: $z = f(x, y)$ zu zwei solchen partiellen Differentialgleichungen in R' Anlass gebe, erhalten wir auf folgende Weise. Wir setzen in die zwei ersten der Gleichungen (24) für z, p, q die Werthe $f(x, y)$, $f'(x)$, $f'(y)$ ein, und denken uns sodann die Grössen x, y eliminirt. — Dadurch, — durch Substitution der so erhaltenen Werthe von z, x, y, p, q in z', x', y', p', q', — sind die zwei letzten Gleichungen (24) auf die Form:

$$
\begin{aligned} F_3'(z', x', y', p', q') &= 0, \\ F_4'(\qquad\qquad\qquad) &= 0 \end{aligned}
$$

zu bringen. Nun hat man:

$$
(25) \qquad \begin{aligned} [F_3' F_4'] = [F_3 F_4]_{z' x' p'} &+ \frac{dF_3}{dx} [x F_4'] + \frac{dF_3}{dy} [y F_4'] \\ &+ \frac{dF_4}{dx} [F_3 x] + \frac{dF_4}{dy} [F_3 y] \\ &+ \left(\frac{dF_3}{dx} \frac{dF_4}{dy} - \frac{dF_4}{dx} \frac{dF_3}{dy} \right) [xy]. \end{aligned}
$$

Es sind F_1', F_2' identisch Null, daher:

$$[F_1'F_3] = 0 = [F_1 F_3]_{z'x'p'} + \frac{dF_1}{dx}[xF_3] + \frac{dF_1}{dy}[yF_3],$$

$$[F_2'F_3] = 0 = [F_2 F_3]_{z'x'p'} + \frac{dF_2}{dx}[xF_3] + \frac{dF_2}{dy}[yF_3],$$

$$[F_1'F_4] = 0 = [F_1 F_4]_{z'x'p'} + \frac{dF_1}{dx}[xF_4] + \frac{dF_1}{dy}[yF_4],$$

$$[F_2'F_4] = 0 = [F_2 F_4]_{z'x'p'} + \frac{dF_2}{dx}[xF_4] + \frac{dF_2}{dy}[yF_4],$$

$$[F_1'F_2] = 0 = [F_1 F_2]_{z'x'p'} + \frac{dF_1}{dx}[xF_2] + \frac{dF_1}{dy}[yF_2],$$

$$[F_2'x] \;\; = 0 = [F_2 x]_{z'x'p'} \;\; + \frac{dF_2}{dy}[yx],$$

$$[F_2'y] \;\; = 0 = [F_2 y]_{z'x'p'} \;\; + \frac{dF_2}{dx}[xy].$$

Zur Abkürzung ist resp. $\frac{dF_i}{dx}$, $\frac{dF_i}{dy}$ statt:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial z} f'(x) + \frac{\partial F_i}{\partial p}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial F_i}{\partial q}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial z} f'(y) + \frac{\partial F_i}{\partial p}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial q}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

geschrieben.

Ich setze weiter:

$$\frac{dF_m}{dx}\frac{dF_n}{dy} - \frac{dF_m}{dy}\frac{dF_n}{dx} = (mn).$$

Durch Elimination von $[xF_3], \cdots, [xy]$ aus (25) erhält man dann:

$$(12)\ [F_3'F_4'] = (34)\,[F_1F_2]_{z'x'p'} + (42)\,[F_1F_3]_{z'x'p'} + (23)\,[F_1F_4]_{z'x'p'} + (12)\,[F_3F_4]_{z'x'p'} + (13)\,[F_4F_2]_{z'x'p'} + (14)\,[F_2F_3]_{z'x'p'};$$

und die fragliche Involutionsbedingung nimmt also folgende Form an:

$$(26)\quad \begin{aligned} &(34)\,[F_1F_2]_{z'x'p'} + (42)\,[F_1F_3]_{z'x'p'} + (23)\,[F_1F_4]_{z'x'p'} \\ &+ (12)\,[F_3F_4]_{z'x'p'} + (13)\,[F_4F_2]_{z'x'p'} + (14)\,[F_2F_3]_{z'x'p'} = 0. \end{aligned}$$

Wenn sie identisch erfüllt ist, so besteht die Figur in R', die der Fläche: $z = f(x, y)$ entspricht, aus ∞^1 Flächen. Wenn sie nicht erfüllt ist, so kann es doch geschehen, dass die drei Gleichungen:

$$F_3' = 0, \quad F_4' = 0, \quad [F_3'F_4'] = 0$$

eine, aber nur eine Integralfläche gemein haben. Hierzu ist nöthig, dass gleichzeitig mit jenen drei Gleichungen diese zwei:

$$(27)\qquad \begin{aligned} \big[F_3'[F_3'F_4']\big] &= 0, \\ \big[F_4'[F_3'F_4']\big] &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt werden. In diesem Falle kommt eine Fläche in derjenigen Figur in R' vor, die der Fläche: $z = f(x, y)$ entspricht.

Sehen wir $f(x, y)$ als unbekannt an; es ist leicht zu sehen, dass, wie auch die Gleichungen (24) beschaffen sein mögen, sich immer Functionen $f(x, y)$ bestimmen lassen, für welche die Bedingungen (27) erfüllt werden. Stellen wir nämlich die Gleichungen (27) in der nämlichen Weise in einer Form dar, die auf F_1, F_2, F_3, F_4 explicite sich bezieht, wie wir vorher die Gleichung $[F_3' F_4'] = 0$ in der Form (26) dargestellt haben, und eliminiren wir dann zwischen (24), (26) und den neuen Gleichungsformen (27) die Grössen z', x', y', p', q', so erhalten wir zwei partielle Differentialgleichungen der 3. O. zur Bestimmung von $z (= f(x, y))$. Diese zwei partiellen Differentialgleichungen 3. O. sind immer mit einander verträglich; sie hängen sogar in der besonderen Weise zusammen, dass von den vier Gleichungen, die ihre ersten Derivirten in Bezug auf x, y bilden, eine Gleichung eine algebraische Folge der anderen ist. Vgl. Nr. 22., 5.

Die Transformation (24) *führt also eine jede Fläche, welche einer gewissen Flächenschaar zugehört, die durch zwei solche partielle Differentialgleichungen 3. O. definirt wird, deren erste Derivirten sich auf nur drei von einander unabhängige Gleichungen reduciren, wiederum in eine bestimmte Fläche über.*

Die vierte der Gleichungen (24) könnte so bestimmt werden, dass F_4 ein Integral derjenigen Gleichung würde, auf welche die Gleichung (26) sich reducirt, falls man statt der in derselben eingehenden $f(x, y)$, $f'(x)$, $f'(y)$ setzt z, p, q und statt $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ irgend welche mögliche Functionen (desselben Charakters) φ_1, φ_2, φ_3 von z, x, y, p, q. *Eine jede der dreifach unendlich vielen Integralflächen:*

$$r = \varphi_1, \quad s = \varphi_2, \quad t = \varphi_3$$

wird von der so bestimmten Transformation (24) *in eine ganze Schaar von* ∞^1 *Flächen verwandelt.* —

Die Gleichungen (24) würden schliesslich im Verein mit einer fünften Gleichung auf eine Berührungstransformation führen können. Eine solche Transformation führt bekanntlich eine jede Fläche wiederum in eine Fläche über.

§ 5.

Eine specielle Art von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung der in § 1. behandelten Beschaffenheit.

26. Die partiellen Differentialgleichungen 1. O. in R_4, von denen oben die Rede gewesen ist, deren jede ∞^3 Punktmannigfaltigkeiten zweier Dimensionen zu Integralen hat, gehen bei einer dualistischen

Umformung in solche partielle Differentialgleichungen 1. O. über, deren jede ∞^3 durch je zwei Gleichungen in Ebenencoordinaten ausgedrückte Mannigfaltigkeiten zu Integralen hat. Es giebt einen Fall, in dem die partielle Differentialgleichung 1. O. ∞^3 Integrale hat, deren jedes für ihre analytische Darstellung zwei Gleichungen in Punktcoordinaten, sowie zwei Gleichungen in Ebenencoordinaten erfordert. Jeder Punkt einer solchen Integralmannigfaltigkeit hat ∞^1 Tangentenebenen und jede Tangentenebene derselben hat ∞^1 Berührungspunkte. Diese Berührungspunkte bilden eine *gerade* Mannigfaltigkeit einer Dimension, wesshalb jede der fraglichen Integralmannigfaltigkeiten aus ∞^1 Geraden zusammengesetzt ist, von denen jede eine Berührungslinie für ∞^1 Tangentenebenen bildet.

Ist durch die Gleichung:

$$F(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0$$

eine partielle Differentialgleichung jener Art gegeben, so muss erstens, wenn z, x_1, x_2, x_3 als Constanten und p_1, p_2, p_3 als Coordinaten der Punkte eines Raumes R_3' aufgefasst werden, die Gleichung $F = 0$ eine Linienfläche in R_3' darstellen (Nr. 3.), weiter muss, wenn p_1, p_2, p_3 als Constanten betrachtet werden, und wenn man

$$z - z^0 = p_1(x_1 - x_1^0) + p_2(x_1 - x_2^0) + p_3(x_3 - x_3^0)$$

setzt und sodann x_1, x_2, x_3 als Coordinaten der Punkte eines Raumes R_3'' auffasst, die Gleichung $F = 0$ eine Linienfläche in R_3'' repräsentiren. Hierzu treten jedoch ferner noch gewisse Integrabilitätsbedingungen, die erfüllt sein müssen.

§ 6.

Von partiellen Differentialgleichungen 1. O. in R_5 mit durch mehrere Gleichungen zwischen z, x_1, x_2, x_3, x_4 ausgedrückten Lösungen.

27. In derselben Weise, in der wir in Nr. 5. die zwei Gleichungen (5) behandelt haben, lassen sich auch die folgenden zwei Gleichungen:

$$(28)\qquad \begin{cases} f(z, z', x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, p_1', p_2', p_3') = 0, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{cases}$$

$\left(\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i, \ \frac{\partial z'}{\partial x_i} = p_i'\right)$ behandeln. Es werden z, p_1, p_2, p_3 aus den Gleichungen:*)

---

*) in denen $[f\psi]_{zxp} = \sum_{i=1}^{i=3}\left(\frac{df}{dx_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i} - \frac{d\psi}{dx_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)$. Vgl. Nr. 5.

$$(29)\quad \begin{gathered} f=0,\ \varphi=0,\ [f\varphi]_{zxp}=0,\ \Big[f[f\varphi]\Big]_{zxp}=0,\ \Big[\varphi\,[f\varphi]\Big]_{zxp}=0, \\ \Big[f\Big[f\,[f\varphi]\Big]\Big]_{zxp}=0,\ \Big[\varphi\Big[f\,[f\varphi]\Big]\Big]_{zxp}=0,\ \Big[[f\varphi]\Big[f[f\varphi]\Big]\Big]_{zxp}=0 \end{gathered}$$

eliminirt. Die resultirenden vier partiellen Differentialgleichungen für z', von denen die erste: $\Big[\varphi\,[f\varphi]\Big]_{zxp}=0$, nachdem man für die Grössen z, p_1, p_2, p_3 ihre aus den vier ersten Gleichungen (29) hervorgehenden Werthe in z', x_i, p_i', p_{ik}', p_{ikl}' eingesetzt hat, von der dritten, die drei übrigen von der vierten Ordnung werden, haben desshalb ∞^∞ Integrale gemeinsam, weil sie, mit ihren Derivirten vereint, ergeben:

für die vierten Differentialquotienten von z', deren Anzahl 15 ist, fünf Gleichungen,

für die fünften Differentialquotienten von z', deren Anzahl 21 ist, neun Gleichungen,

für die sechsten Differentialquotienten von z', deren Anzahl 28 ist, vierzehn Gleichungen,

u. s. w.,

also stets eine Anzahl von Gleichungen, die kleiner ist als die Anzahl der zu bestimmenden Differentialquotienten von z'.

Ein jedes Integral: $z'=\bar{f}(x_1, x_2, x_3)$ dieser Differentialgleichungen gehört mit einer gewissen Gleichung: $z=\varphi(x_1, x_2, x_3)$ zusammen. Die eine dieser Gleichungen ist durch die andere eindeutig bestimmt. Jene Gleichung für z wird aus den vier ersten Gleichungen (29) durch Einsetzung des Werthes $\bar{f}$ von z' und durch Elimination von p_1, p_2, p_3 erhalten. Durch gleichzeitige Substitution von:

$$\begin{aligned} z' &= \bar{f}(x_1, x_2, x_3), \\ z &= \varphi(\qquad\qquad), \end{aligned}$$

in die Gleichungen (28) werden diese identisch erfüllt. Die zuletzt hingeschriebenen zwei Gleichungen stellen daher, sagen wir, eine Lösung von (28) dar.

28. Gesetzt man habe eine Lösung mit sechs arbiträren Constanten gefunden:

$$(30)\qquad \begin{cases} z' = \bar{f}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_6), \\ z = \bar{\varphi}(\qquad\qquad\qquad\qquad), \end{cases}$$

deren Elemente $\left(z, z', x_1, x_2, x_3, p_i\left(=\frac{\partial z}{\partial x_i}\right), p_i'\left(=\frac{\partial z'}{\partial x_i}\right)\right)$ sämmtliche Elemente der Gleichungen (28) umfassen: die übrigen Lösungen, deren Existenz eben nachgewiesen worden ist, werden dann Umhüllungsgebilde von dreifach (oder zufällig zweifach, einfach) unendlich vielen der Lösungen (30), nämlich in folgender Weise. Wenn z, z', x_1, x_2, x_3 als Coordinaten der Punkte eines Raumes R_5 von fünf Dimensionen interpretirt werden, so bilden die Gleichungen (30) den analytischen Ausdruck einer völlig bestimmten sechsfach unendlichen Schaar von Punktmannigfaltigkeiten dreier Dimensionen in R_5. Dreifach unendlich viele werden vermittelst der Gleichungen:

$$(31)\qquad \begin{cases} \lambda_1 = F(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6), \\ \lambda_2 = \Phi(\qquad\quad), \\ \lambda_3 = \Psi(\qquad\quad) \end{cases}$$

ausgeschieden. Wir bilden jetzt die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
z' &= \bar{f}, & \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_4} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_1} F'(\lambda_4) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_2} \Phi'(\lambda_4) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_3} \Psi'(\lambda_4) = 0, \\
z &= \bar{\varphi}, & \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_4} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_1} F'(\lambda_4) + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_2} \Phi'(\lambda_4) + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_3} \Psi'(\lambda_4) = 0, \\
& & \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_5} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_1} F'(\lambda_5) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_2} \Phi'(\lambda_5) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_3} \Psi'(\lambda_5) = 0, \\
& & \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_5} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_1} F'(\lambda_5) + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_2} \Phi'(\lambda_5) + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_3} \Psi'(\lambda_5) = 0, \\
& & \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_6} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_1} F'(\lambda_6) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_2} \Phi'(\lambda_6) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda_3} \Psi'(\lambda_6) = 0, \\
& & \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_6} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_1} F'(\lambda_6) + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_2} \Phi'(\lambda_6) + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \lambda_3} \Psi'(\lambda_6) = 0,
\end{aligned}$$

und eliminiren z, z', x_1, x_2, x_3 aus denselben Wenn die dann resultirenden drei Gleichungen in den λ durch (31) identisch erfüllt werden, so bekommen wir, indem wir λ_4, λ_5, λ_6 eliminiren, zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} z' &= \bar{F}(x_1, x_2, x_3), \\ z &= \bar{\Phi}(\qquad\quad), \end{aligned}$$

die eine Punktmannigfaltigkeit dreier Dimensionen in R_5 darstellen, welche eben die betrachtete dreifache Schaar umhüllt. Es werden nämlich die Differentialquotienten $\bar{F}'(x_i)$, $\bar{\Phi}'(x_i)$, resp. gleich $\bar{f}'(x_i)$, $\bar{\varphi}'(x_i)$ für passend gewählte Werthe von λ_4, λ_5, λ_6. Aus diesem Grunde stellt das letzte Gleichungspaar eine Lösung von (28) dar. Wir haben oben gesehen, dass es ∞^∞ Lösungen von (28) giebt, weiter ist ersichtlich, dass jede Lösung, die nicht in der Schaar (30) enthalten ist, ein Umhüllungsgebilde von der jetzt angemerkten Beschaffenheit sein muss. In Uebereinstimmung hiermit werden auch die drei oben erwähnten Gleichungen für F, Φ, Ψ von ∞^∞ Functionssystemen (31) befriedigt.

29. Fünffach unendlich viele Punktmannigfaltigkeiten dreier Dimensionen in R_5 (dem Raume, dessen Punkte z, z', x_1, x_2, x_3 zu

Coordinaten haben) führen zu drei Gleichungen zwischen z, z', x_i, p_i, p_i'; vierfach unendlich viele führen zu vier derartigen Gleichungen:

$$(32)\qquad \begin{cases} f_1(z, z', x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, p_1', p_2', p_3') = 0, \\ f_2(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ f_3(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ f_4(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von $p_1, p_2, p_3, p_1', p_2', p_3'$ zwischen diesen Gleichungen und den drei folgenden:

$$(33)\qquad \begin{cases} \pi_2 = p_1 - \pi_1 p_1', \\ \pi_3 = p_2 - \pi_1 p_2', \\ \pi_4 = p_3 - \pi_1 p_3', \end{cases}$$

und indem man hierauf z, x_1, x_2, x_3, x_4 statt z, z', x_1, x_2, x_3 setzt, resultirt eine Gleichung:

$$(34)\qquad F(z, x_1, x_2, x_3, x_4, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0,$$

welche diejenige partielle Differentialgleichung 1. O. in R_5 ist, die jene ∞^4 Punktmannigfaltigkeiten dreier Dimensionen zu Integralen hat. Umgekehrt muss jede nicht-linear partielle Differentialgleichung 1. O. in R_5, die eine, aus ∞^4 Punktmannigfaltigkeiten dreier Dimensionen bestehende vollständige Lösung besitzt, vermöge der Gleichungen (33) auf vier, oder unter Umständen nur drei Gleichungen (32) gebracht werden können. Ich betrachte nur den Fall, dass vier Gleichungen (32) resultiren.

Jene Gleichungen (32) sind keineswegs beliebig. Denn sie sollen mit einander so verbunden sein, dass sie ∞^4 gemeinsame Lösungen von der Form:

$$(35)\qquad \begin{cases} z' = \bar{F}(x_1, x_2, x_3), \\ z = \bar{\Phi}(\qquad\qquad) \end{cases}$$

gestatten. Es ist leicht, die Bedingungen hierfür zu erkennen, wie auch, wenn dieselben erfüllt sind, die gemeinsamen Lösungen zu ermitteln. Man stelle nämlich neben den Gleichungen (32) die Gleichungen:*)

*) in denen wie in Nr. 27.

$$[f_i f_k]_{zxp} = \sum_{m=1}^{m=3} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_m} + p_m \frac{\partial f_i}{\partial z} + p_m' \frac{\partial f_i}{\partial z'} + p_{1m}' \frac{\partial f_i}{\partial p_1'} + p_{2m}' \frac{\partial f_i}{\partial p_2'} + p_{3m}' \frac{\partial f_i}{\partial p_3'} \right) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial p_m}$$
$$- \sum_{m=1}^{m=3} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_m} + p_m \frac{\partial f_k}{\partial z} + p_m' \frac{\partial f_k}{\partial z'} + p_{1m}' \frac{\partial f_k}{\partial p_1'} + p_{2m}' \frac{\partial f_k}{\partial p_2'} + p_{3m}' \frac{\partial f_k}{\partial p_3'} \right) \frac{\partial f_i}{\partial p_m}.$$

$$[f_1 f_2]_{zxp}=0,\ [f_1 f_3]_{zxp}=0,\ [f_1 f_4]_{zxp}=0,\ [f_2 f_3]_{zxp}=0,\ [f_2 f_4]_{zxp}=0,$$
$$[f_3 f_4]_{zxp}=0$$

auf, die nach Elimination von z, p_1, p_2, p_3 mit Hülfe der Gleichungen (32) sechs partielle Differentialgleichungen 2. O. zur Bestimmung von z' $(=\overline{F})$ ergeben. Die Anzahl der zweiten Differentialquotienten p'_{ik} von z' ist eben sechs. Daher werden durch die genannten Gleichungen 2. O. bestimmte Werthe für die p'_{ik} in $z', x_1, x_2, x_3, p_1', p_2', p_3'$ geliefert. Man hat nun auszudrücken, dass diese Werthe die Gleichungen:

$$(36)\quad dz'=p_1'dx_1+p_2'dx_2+p_3'dx_3,\quad dp_i'=p'_{i1}dx_1+p'_{i2}dx_2+p'_{i3}dx_3,$$
$$(i=1,2,3)$$

durch ein Gleichungssystem: $z'=\overline{F}(x_1, x_2, x_3)$, $p_i'=\overline{F}'(x_i)$ integrabel machen. Hieraus ergiebt sich sowohl der analytische Ausdruck des zwischen vier Gleichungen von der Form (32) und von der Eigenschaft, ∞^4 gemeinsame Integrale von der Form (35) zu besitzen, nothwendig bestehenden Zusammenhangs, wie auch — durch Integration eines Systems von Differentialgleichungen (36) — die Bestimmung der ∞^4 Integrale (35) solcher vier Gleichungen wie (32).

Eine Lösung wird also erhalten, die sich durch zwei Gleichungen mit vier arbiträren Parametern λ:

$$z'=\overline{F}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4),$$
$$z=\overline{\Phi}(\qquad\qquad\qquad),$$

ausdrückt; d. i. der Repräsentant der vierfach unendlich vielen Punktmannigfaltigkeiten dreier Dimensionen, von denen ausgehend wir zu den Gleichungen (32) gelangt sind. Jede andere Lösung von der Form (35) würde ein Umhüllungsgebilde von dreifach oder zweifach, einfach unendlich vielen dieser Punktmannigfaltigkeiten dreier Dimensionen darstellen. [Ein solches Umhüllungsgebilde giebt es aber im Allgemeinen nicht, — ähnliche Betrachtungen wie die der Nr. 18. zeigen es; daher giebt es im Allgemeinen keine andere Lösungen von der Form (35) als die schon angemerkten.]

30. Wie überhaupt alle Integrale einer partiellen Differentialgleichung 1. O. in R_5 die Punktmannigfaltigkeiten dreier Dimensionen darstellen, erhalten werden, leuchtet hiernach ohne Weiteres ein. Vgl. auch die Nr. 12. — 14. In ähnlicher Weise bestimmen sich diejenigen, zufälliger Weise vorhandenen Integrale einer partiellen Differentialgleichung 1. O., die Punktmannigfaltigkeiten zweier Dimensionen desselben Raumes R_5 repräsentiren. Jedem Punkte einer Punktmannigfaltigkeit zweier Dimensionen:

$$
\begin{aligned}
z &= f(x_3, x_4), \\
x_1 &= \varphi(\quad\quad), \\
x_2 &= \psi(\quad\quad),
\end{aligned}
$$

schliesst sich eine zweifache Schaar von Flächenelementen*) an, die die Punktmannigfaltigkeit berühren. Die Parameter $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ dieser Flächenelemente sind gebunden an die Bedingungen:

$$
(37) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_3} - \pi_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \pi_2 \dfrac{\partial \psi}{\partial x_3} - \pi_3 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_4} - \pi_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_4} - \pi_2 \dfrac{\partial \psi}{\partial x_4} - \pi_4 = 0. \end{cases}
$$

Desshalb bilden die Flächenelemente, die sich an die Mannigfaltigkeiten einer vierfach unendlichen Schaar von Punktmannigfaltigkeiten zweier Dimensionen als Berührende anschliessen, ein durch eine Gleichung:

$$
(38) \qquad F(z, x_1, x_2, x_3, x_4, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0
$$

zu definirendes System. Diese Gleichung wird durch Elimination der vier Parameter der Mannigfaltigkeitsschaar zwischen den drei Gleichungen derselben:

$$
(39) \qquad \begin{cases} z = f(x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), \\ x_1 = \varphi(\quad\quad\quad\quad\quad\quad), \\ x_2 = \psi(\quad\quad\quad\quad\quad\quad), \end{cases}
$$

und den hierzu gehörigen Gleichungen (37) erhalten.

Andererseits, wenn wir z, z', z'', x, y statt z, x_1, x_2, x_3, x_4 schreiben und resp. durch p, q, p', q', p'', q'' die ersten Differentialquotienten von z, z', z'' in Bezug auf x, y bezeichnen, so wird durch Elimination von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ zwischen (39) und den aus ihnen folgenden Gleichungen:

$$
p = \frac{\partial f}{\partial x_3}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial x_4}, \quad p' = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \quad \cdots, \quad q'' = \frac{\partial \psi}{\partial x_4}
$$

ein System von fünf Gleichungen abgeleitet:

$$
(40) \qquad \begin{cases} f_1(z, z', z'', x, y, p, q, p', q', p'', q'') = 0, \\ f_2(\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad) = 0, \\ f_3(\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad) = 0, \\ f_4(\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad) = 0, \\ f_5(\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad) = 0, \end{cases}
$$

*) Die Inbegriffe aller einem Punkte einer Punktmannigfaltigkeit von vier Dimensionen unendlich benachbarter Punkte derselben Mannigfaltigkeit werden Flächenelemente im Raume R_5 genannt.

welches also mit der partiellen Differentialgleichung 1. O. (38) äquivalent ist, — nämlich in dem Sinne, dass die Elimination von $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ zwischen der Gleichung (38) und den beiden folgenden:

$$(41) \qquad \begin{cases} p - \pi_1 p' - \pi_2 p'' - \pi_3 = 0, \\ q - \pi_1 q' - \pi_2 q'' - \pi_4 = 0 \end{cases}$$

zu einer Gleichung:

$$af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 + ef_5 = 0,$$

wo nur a, b, c, d, e von π abhängen, — führen muss. Dies ist des Näheren folgendermassen zu verstehen. $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ werden als Coordinaten der Punkte eines Raumes R_4' gedeutet. Die Gleichung (38) ist dann als Repräsentant einer gewissen Flächenschaar in R_4' aufzufassen, jede Fläche als eine Punktmannigfaltigkeit dreier Dimensionen dieses Raumes betrachtet. Im vorliegenden Falle ist aber jede der Flächen aus ∞^1 ebenen Mannigfaltigkeiten zweier Dimensionen (41) erzeugt, und stellt sich daher auch in den sechs Parametern p, q, p', q', p'', q'' dieser ebenen Mannigfaltigkeiten durch fünf Gleichungen (40) dar. Eine nicht-lineare partielle Differentialgleichung 1. O. in R_5, die ein vollständiges Integral von der Form (39) besitzt, muss also in den Parametern p, q, p', q', p'', q'' durch fünf Gleichungen sich darstellen lassen; weiterhin müssen solche Beziehungen zwischen den fünf Gleichungen statthaben, dass dieselben, als partielle Differentialgleichungen 1. O. für z, z', z'' betrachtet, ∞^4 gemeinsame Lösungen von der Form:

$$z = f(x, y), \quad z' = \varphi(x, y), \quad z'' = \psi(x, y)$$

gestatten.

31. Denken wir uns die fünf Gleichungen (40) nach p', q', z'', p'', q'' aufgelöst, also auf die Form gebracht:

$$\begin{aligned} p' &= f(z', z, x, y, p, q), \\ q' &= f_1(\qquad\qquad), \\ z'' &= \varphi(\qquad\qquad), \\ p'' &= \psi(\qquad\qquad), \\ q'' &= \psi_1(\qquad\qquad); \end{aligned}$$

und stellen wir die folgenden Gleichungen in $z', z, x, y, p, q, r, s, t$ auf:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \psi, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \psi_1, \quad \frac{df}{dy} = \frac{df_1}{dx},$$

so muss die Elimination von z' aus ihnen zwei partielle Differentialgleichungen der 2. O. für z ergeben, die ∞^4 Lösungen gemein haben. Als eine gemeinsame Lösung muss nämlich die erste der Gleichungen (39): $z = f(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ herauskommen; die zwei übrigen Gleichungen (39): $z' = \varphi(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, $z'' = \psi(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ werden hernach durch blosse Elimination erhalten.

Die Gleichungen $[f_i f_k]_{zxp} = 0$, die sich aus fünf Gleichungen $f_i(z, z', z'', x, y, p, q, p', q', p'', q'') = 0$ bilden lassen, müssen also, wenn die fünf Gleichungen $f_i = 0$ einer partiellen Differentialgleichung 1. O. in R_5 angehören, die ∞^4 Punktmannigfaltigkeiten zweier Dimensionen als Integrale besitzt, u. A. durch geeignete Elimination zwei und nicht mehr als zwei von einander unabhängige partielle Differentialgleichungen 2. O. für z' ergeben, und diese Gleichungen 2. O. müssen ausserdem ∞^4 gemeinsame Integrale besitzen.

Ist die Anzahl derartiger particulärer Lösungen einer partiellen Differentialgleichung 1. O. in R_5, die geometrisch Punktmannigfaltigkeiten zweier Dimensionen repräsentiren, kleiner als ∞^1, so findet man sie durch etwas einfachere Rechnungen als die jetzt beschriebenen, was manchmal darauf beruht, dass zu den Gleichungen (40) eine oder mehrere Gleichungen derselben Form hinzukommen.

§ 7.

Angabe einiger specieller Fälle der vorangehenden Probleme.

32. Ein System von zwei Gleichungen:

$$F(x, y, z, z', p, q, q') = 0, \quad p' - q = 0 \tag{5*}$$

ist einer partiellen Differentialgleichung 2. O.:

$$F\left(x, y, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) = 0$$

äquivalent. Indem man in den Gleichungen (5*) z, z' durch $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ ersetzt, wird die zweite dieser Gleichungen von selbst erfüllt. Einer jeden Lösung: $V = \int(A(x, y)\, dx + B(x, y)\, dy)$ der partiellen Differentialgleichung 2. O. entspricht eine Lösung: $z = A(x, y)$, $z' = B(x, y)$ des Systems (5*).

Die allgemeine partielle Differentialgleichung 2. O.:

$$F\left(x, y, V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) = 0$$

ist äquivalent dem Gleichungspaare:

$$(28^*) \quad \left\{ \begin{array}{c} F(x_1, x_2, x_3, z, z', \;\; p_1 + z p_3, \;\; p_2 + z' p_3, \;\; p_2' + z' p_3') = 0, \\ p_2 + z' p_3 - p_1' - z p_3' = 0, \\ (\text{wo } x_1, x_2, x_3 \text{ an Stelle von } x, y, V \text{ stehen}), \end{array} \right.$$

so dass jeder Lösung: $z = f(x_1, x_2, x_3)$, $z' = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ dieses Systems das folgende involutorische Gleichungspaar entspricht:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f(x, y, V), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \varphi(x, y, V),$$

dessen allgemeines Integral eine Schaar von Integralen (Integralflächen) der partiellen Differentialgleichung 2 O. darstellt. Jede Schaar von Integralen (Integralflächen) der partiellen Differentialgleichung 2. O.: $f(x, y, V) =$ eine arb. Const., ist in dieser Weise einer Lösung von (28*) äquivalent.

Jetzt betrachte ich diejenige partielle Differentialgleichung 2. O. des Raumes $R_4(zx_1 x_2 x_3)$, die eine durch das *involutorische* Gleichungspaar:

$$(42) \qquad \begin{cases} p_1 - f(x_1, x_2, x_3, z, p_3, c_1, c_2, \cdots, c_6) = 0, \\ p_2 - \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \end{cases}$$

($c_1, c_2, \cdots, c_6$ bezeichnen arbiträre Constanten),

ausgedrückte Lösung besitzt. In erster Hand ist diese partielle Differentialgleichung 2. O folgendermassen ausgezeichnet. Wenn für den Augenblick $z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$ als Constanten, und die p_{ik} als Coordinaten der Punkte eines Raumes $R^{(6)}$ aufgefasst werden, so stellt die fragliche partielle Differentialgleichung 2. O. eine Mannigfaltigkeit von fünf Dimensionen, eine Fläche in $R^{(6)}$ dar, *die von* ∞^4 *Geraden:*

$$\begin{aligned} p_{11} - f'(p_3)p_{31} - f'(x_1) - p_1 f'(z) &= 0, \\ p_{12} - f'(p_3)p_{32} - f'(x_2) - p_2 f'(z) &= 0, \\ p_{13} - f'(p_3)p_{33} - f'(x_3) - p_3 f'(z) &= 0, \\ p_{22} - \varphi'(p_3)p_{32} - \varphi'(x_2) - p_2 \varphi'(z) &= 0, \\ p_{23} - \varphi'(p_3)p_{33} - \varphi'(x_3) - p_3 \varphi'(z) &= 0 \end{aligned}$$

erzeugt wird. Diese Geraden gehören dem Liniensysteme an:

$$(43) \qquad \begin{cases} p_{11} - mp_{31} - \mu_1 = 0, & p_{21} - np_{31} - \nu_1 = 0, \\ p_{12} - mp_{32} - \mu_2 = 0, & p_{22} - np_{32} - \nu_2 = 0, \\ p_{13} - mp_{33} - \mu_3 = 0, & p_{23} - np_{33} - \nu_3 = 0, \end{cases}$$

wo $m, n, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ Parameter und nur an die eine Bedingung gebunden sind:

$$(44) \qquad \mu_2 - n\mu_3 = \nu_1 - m\nu_3.$$

Dieses System ist u. A. so beschaffen, dass durch jeden Punkt des Raumes $R^{(6)}$ ∞^2 Gerade des Systemes gehen, auf jeder Punktmannigfaltigkeit von vier Dimensionen des Raumes ∞^3 im Allgemeinen völlig bestimmte Curven, Mannigfaltigkeiten einer Dimension, verlaufen, deren Tangenten Gerade des Systemes sind, und dass es also auf jeder Punktmannigfaltigkeit von fünf Dimensionen, jeder Fläche, eine unendlichfach unendliche Schaar derartiger Curven giebt. Nur ausnahmsweise finden sich Gerade unter diesen Curven, ausnahmsweise kann die Fläche aus ∞^4 solchen Geraden bestehen. Ist die Fläche eben, so läuft auf derselben von jedem Punkte aus ein Büschel von ∞^1 derartigen Geraden.

Eine erste Forderung für eine partielle Differentialgleichung 2. O.:

$$F(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{33}) = 0, \tag{45}$$

die erfüllt sein muss, damit sie eine Lösung von der Form (42) besitze, ist daher die, dass, durch Elimination der p_{ik} zwischen (43) und (45), neben der Gleichung (44) drei Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{ll} f_1(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, m, n, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3) & = 0, \\ f_2(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) & = 0, \\ f_3(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) & = 0, \end{array}\right. \tag{46}$$

oder eine kleinere Anzahl derartiger Gleichungen resultiren. Hierdurch wird nur ausgedrückt, dass jede der Flächen (45) in $R^{(6)}$ aus wenigstens ∞^4 Geraden des Systemes (43) besteht. Es kommt aber noch das hinzu, dass die Gleichungen (44), (46), wenn sie durch die folgenden Substitutionen:

$$m = \frac{\partial p_1}{\partial p_3}, \quad \mu_1 = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial p_1}{\partial z}, \quad \mu_2 = \frac{\partial p_1}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial p_1}{\partial z},$$
$$\mu_3 = \frac{\partial p_1}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial p_1}{\partial z},$$
$$n = \frac{\partial p_2}{\partial p_3}, \quad \nu_1 = \frac{\partial p_2}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial p_2}{\partial z}, \quad \nu_2 = \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial p_2}{\partial z},$$
$$\nu_3 = \frac{\partial p_2}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial p_2}{\partial z}$$

in vier Gleichungen für p_1, p_2 verwandelt werden, eine gemeinsame Lösung mit sechs arbiträren Constanten, ausgedrückt durch ein Gleichungspaar (42), gestatten müssen.

Anstatt

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ z,\ p_3,\ p_1,\ p_2$$

schreibe ich

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ z,\ z',$$

und statt

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_i},\ \frac{\partial p_1}{\partial z},\ \frac{\partial p_1}{\partial p_3},\ \frac{\partial p_2}{\partial x_i},\ \frac{\partial p_2}{\partial z},\ \frac{\partial p_2}{\partial p_3}$$

$$p_i,\ p_4,\ p_5,\ p_i',\ p_4',\ p_5'.$$

Die in Rede stehenden Gleichungen erhalten dann die Form:

$$p_2 + z' p_4 - p_5'(p_3 + x_5 p_4) = p_1' + z p_1' - p_5(p_3' + x_5 p_4'), \tag{44'}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(z, z', x_1, x_2, \cdots, x_5, p_1 + z p_4, p_2 + z' p_4, p_3 + x_5 p_4, p_5, p_1' + z p_1', \\ \qquad p_2' + z' p_4', p_3' + x_5 p_4', p_5') = 0, \\ f_2(z, z', x_1, x_2, \cdots, x_5, p_1 + z p_4, p_2 + z' p_4, p_3 + x_5 p_4, p_5, p_1' + z p_1', \\ \qquad p_2' + z' p_4', p_3' + x_5 p_4', p_5') = 0, \\ f_3(z, z', x_1, x_2, \cdots, x_5, p_1 + z p_4, p_2 + z' p_4, p_3 + x_5 p_4, p_5, p_1' + z p_4', \\ \qquad p_2' + z' p_4', p_3' + x_5 p_4', p_5') = 0, \end{array}\right. \tag{46'}$$

und jede ihnen gemeinsame Lösung:

$$(47)\qquad \begin{cases} z = f(x_1, x_2, \cdots, x_5), \\ z' = \varphi(\qquad\qquad) \end{cases}$$

stellt ein involutorisches Paar von partiellen Differentialgleichungen 1. O.

$$p_1 = f(x_1, x_2, x_3, z_1, p_3),$$
$$p_2 = \varphi(\qquad\qquad)$$

dar, dessen sämmtliche Integral-M_3 Integrale der partiellen Differentialgleichung (45) werden.

Die partielle Differentialgleichung 1. O. im Raume $R_7(zz'x_1\cdots x_5)$, welche die ∞^6 Punktmannigfaltigkeiten von fünf Dimensionen:

$$(42')\qquad \begin{cases} z = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, c_1, c_2, \cdots, c_6), \\ z' = \varphi(\qquad\qquad\qquad) \end{cases}$$

zur vollständigen Lösung hat, ist durch die Gleichungen (44'), (46') im Verein mit zwei anderen Gleichungen von der Form:

$$(48)\qquad \begin{cases} f_4(z, z', x_1, \cdots, x_5, p_1, \cdots p_5, p_1', \cdots, p_5') = 0, \\ f_5(\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{cases}$$

darzustellen. Vgl. Nr. 3., 29. Wenn die Gleichung (45) keine andere Lösungen von der Form (42) als die schon angenommenen besitzt, so müssen also die Gleichungen (44'), (46') in eindeutiger Weise durch ein Gleichungspaar (48) zu einem, eine partielle Differentialgleichung 1. O. in R_7 begründenden Systeme vervollständigt werden können. Die Lösung (42), wenn nicht von vornherein gegeben, wird daher jetzt durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen erhalten. (Die Ermittelung der Punktmannigfaltigkeiten von fünf Dimensionen, die Integrale einer partiellen Differentialgleichung 1. O. in R_7 ausmachen, erfordert nämlich Operationen derselben Beschaffenheit wie die in Nr. 7. und 29. beschriebene Ermittelung von Integralmannigfaltigkeiten zweier, dreier Dimensionen von partiellen Differentialgleichungen 1. O. in R_4, R_5 resp.)

Eine *lineare* partielle Differentialgleichung 2. O. (45) wird durch (44) und zwei andere solche Gleichungen, wie zwei der Gleichungen (46), vollständig dargestellt. Die Frage nach ihren Lösungen von der Form (42) ist daher mit der Frage nach den gemeinsamen Lösungen von der Form (47) von gewissen drei Gleichungen:

$$(44')\quad p_2 + z'p_4 - p_5'(p_3 + x_5 p_4) = p_1' + zp_4' - p_5(p_3' + x_5 p_4'),$$

$$(46'')\quad \begin{cases} f_1(z, z', x_1, \cdots, x_5, p_1 + zp_4, p_2 + z'p_4, p_3 + x_5 p_4, p_5, p_1' + zp_4', \\ \qquad p_2' + z'p_4', p_3' + x_5 p_4', p_5') = 0, \\ f_2(z, z', x_1 \cdots, x_5, p_1 + zp_4, p_2 + z'p_4, p_3 + x_5 p_4, p_5, p_1' + zp_4', \\ \qquad p_2' + z'p_4', p_3' + x_5 p_4', p_5') = 0 \end{cases}$$

äquivalent.

33. Eine partielle Differentialgleichung 2. O. mit einer Lösung (42), die in der oben genannten Weise durch vier Gleichungen (44), (46) dargestellt werden kann, hat im Allgemeinen keine Lösungen von der Form (42), die eine beliebig gewählte Integral-$M_3{}^0$ der Differentialgleichung 2. O. als eigenes Integral enthält. Denn wenn es ein involutorisches Gleichungspaar gäbe, das keines der Gleichungspaare (42) wäre, dessen sämmtliche Integral-$M_3{}^0$ dennoch der Gleichung 2. O. genügten, so hätten wir auf jeder dieser $M_3{}^0$ eine einfache Schaar von M_2, die für jenes involutorische Gleichungspaar charakteristische M_2 wären und deren jede desshalb ∞^2 Büschel von Werthen der p_{ik} (43) enthielte, die sämmtlich der Gleichung 2. O. zugehörten. In Folge dessen würde jede jener M_2, als Inbegriff von ∞^2 Flächenelementen (z, x_i, p_i) betrachtet, zweifach unendlich viele charakteristische M_2 der anfänglichen Gleichungspaare (42) umhüllen. Aber wir sehen in folgender Weise, dass es im Allgemeinen, auf einer beliebigen Integral-$M_3{}^0$ der Gleichung 2. O., keine solche Umhüllungs-M_2 giebt. Wir bestimmen zu jedem Elemente (z, x_i, p_i, p_{ik}) einer (beliebig gewählten) Integral-$M_3{}^0$ der Gleichung 2. O. (44), (46) ein Gleichungspaar (42), das eben dasselbe Element (für sich und für die ersten Derivirten der Gleichungen des Paares) besitzt. Die so entstehenden dreifach unendlich vielen Gleichungspaare mögen heissen:

$$f(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0,$$
$$\varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0.$$

Das Umhüllungsgebilde der ∞^3 Gleichungen $f = 0$ nenne ich $F(z, x_i, p_i) = 0$, dasjenige der ∞^3 Gleichungen $\varphi = 0$ nenne ich $\Phi(z, x_i, p_i) = 0$. Es besteht die Gleichung $[F\Phi] = 0$ für alle Elemente (z, x_i, p_i) der betrachteten Integral-$M_3{}^0$. Durch irgend ein Element (z, x_i, p_i) der $M_3{}^0$ legen wir die Mannigfaltigkeit einer Dimension:

$$\text{(49)} \qquad dz = \Sigma p_i\, dx_i, \quad dx_i = \varrho F'(p_i) + \sigma \Phi'(p_i),$$
$$dp_i = -[\varrho(F'(x_i) + p_i F'(z)) + \sigma(\Phi'(x_i) + p_i \Phi'(z))],$$

wo ϱ, σ Constanten bedeuten. Entsprechend den ∞^1 Zahlenwerthen von $\frac{\sigma}{\varrho}$ erhalten wir ∞^1 derartige Elementenmannigfaltigkeiten, deren Inbegriff eine auf der $M_3{}^0$ verlaufende M_2 wird. Dieselbe hat nur dann in jedem anderen Punkte als dem obigen Ausgangspunkte einen Tangentenbüschel, der die Gleichungen:

$$\text{(50)} \qquad dx_i = \varrho F'(p_i) + \sigma \Phi'(p_i)$$

befriedigt, wenn diese letzteren Gleichungen, — z, p_i mit Hülfe der Gleichungen der $M_3{}^0$ entfernt gedacht, — ein Integral von der Form: $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ gestatten. Durch die Gleichung der $M_3{}^0$: $z = f(x_1, x_2, x_3)$, vereint mit der letzten Gleichung: $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$, muss alsdann die fragliche M_2 ausgedrückt sein.

Es sind $F'(p_i)$, $\Phi'(p_i)$ resp. proportional $f'(p_i)$, $\varphi'(p_i)$, und solche Gleichungen wie:

$$dx_i = \varrho f'(p_i) + \sigma\varphi'(p_i), \quad dz = \Sigma p_i dx_i,$$
$$dp_i = -\varrho[f'(x_i) + p_i f'(z)] - \sigma[\varphi'(x_i) + p_i\varphi'(z)],$$

— wo $\frac{\sigma}{\varrho}$ einen unbestimmten, herauszueliminirenden Parameter bezeichnet, — gehören einer charakteristischen M_2 von einem der Gleichungspaare:

$$f(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0,$$
$$\varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0$$

an. Desshalb wird die eben angemerkte $M_2 : z = f(x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$, aufgefasst als Inbegriff von ∞^2 Flächenelementen (z, x_i, p_i), in einem beliebigen ihrer Elemente (z, x_i, p_i), von einer Mannigfaltigkeit [von ∞^2 Flächenelementen] berührt, die eine charakteristische M_2 eines Gleichungspaares: $f = 0$, $\varphi = 0$ ist. Im vorliegenden Falle, — und nur in solchem Falle, — ist also jene M_2 (49) ein Umhüllungsgebilde von ∞^2, für ebensoviele der anfänglichen Gleichungspaare (42) charakteristischen M_2.

Sollen auf der betrachteten M_3^0 ∞^1 M_2 (49) von der zuletzt besprochenen Eigenschaft liegen, so müssen die Gleichungen (50) ein Integral: $\varphi(x_1, x_2, x_3) =$ eine arb. Const., besitzen. Dafür ist aber erforderlich, dass die folgende Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial p_1}[F\Phi] & F'(p_1) & \Phi'(p_1) \\ \frac{\partial}{\partial p_2}[F\Phi] & F'(p_2) & \Phi'(p_2) \\ \frac{\partial}{\partial p_3}[F\Phi] & F'(p_3) & \Phi'(p_3) \end{vmatrix} = 0$$

erfüllt werde, wenn man, nach vollendeten Differentiationen, für z, p_i ihre aus der Gleichung: $z = f(x_1, x_2, x_3)$ der vorgelegten M_3^0 folgenden Ausdrücke in x_1, x_2, x_3 substituirt.

Weil dies eine neue Bedingung ist, so sind im Allgemeinen die M_2 (49) keine Umhüllungsgebilde von für Paare (42) charakteristischen M_2.*) Und also kann es im Allgemeinen kein involutorisches Paar

*) Ich habe mich früher in diesem Punkte geirrt, da ich in meiner Abh. in diesen Annalen Bd. XV, pp. 83, 84 den Satz aufstellte, dass sich auf jeder Integralfläche der partiellen Differentialgleichung 2. O. ∞^1 Umhüllungs-M_2 von der im Texte besprochenen Art, die daher besondere charakteristische M_2 für die Gleichung 2. O. werden würden, finden sollten. Aus dem oben Auseinander-

von partiellen Differentialgleichungen 1. O. geben, das jene jetzt betrachtete M_3^0 als Integral enthält und dessen sämmtliche übrige Integral-M_3^0 zugleich Integrale der partiellen Differentialgleichung 2. O. werden. Wie im Anfange dieser Nummer behauptet war.

In Betreff der partiellen Differentialgleichungen 2. O. in Räumen von mehreren Dimensionen, die intermediäre Integrale, ausgedrückt durch je zwei involutorische partielle Differentialgleichungen 1. O., besitzen, will ich nur an die in Nr. 11. und der vorangehenden Nr. 9. erörterte partielle Differentialgleichung 2. O. für ψ erinnern als Beispiel einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. O. in einem Raume von sechs Dimensionen, die ∞^∞ derartige intermediäre Integrale besitzt.

34. Schaaren von Integral-M_3^0 der allgemeinen partiellen Differentialgleichung 2. O. in R_4 sind erst durch Schaaren von je drei involutorischen partiellen Differentialgleichungen 1. O. darzustellen. Wenn $F(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{33}) = 0$ die Gleichung ist, so wird sie also äquivalent dem Systeme der vier Gleichungen:

$$F\Big(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial p_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial p_1}{\partial z}, \cdots, \\ \frac{\partial p_3}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial p_3}{\partial z}\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{\partial p_2}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial p_2}{\partial z},$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{\partial p_3}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial p_3}{\partial z},$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial p_2}{\partial z} = \frac{\partial p_3}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial p_3}{\partial z}$$

in dem Sinne, dass jede Lösung:

$$\begin{aligned} p_1 &= f(z, x_1, x_2, x_3), \\ p_2 &= \varphi(\qquad\qquad), \\ p_3 &= \psi(\qquad\qquad) \end{aligned}$$

dieses Systems eben eine Schaar Integral-M_3^0:

$$\int (dz - f\,dx_1 - \varphi\,dx_2 - \psi\,dx_3) = 0$$

der partiellen Differentialgleichung 2. O. liefert. Die allgemeine partielle Differentialgleichung 2. O. in R_4 bildet daher einen speciellen Fall eines Systems von der Form:

gesetzten leuchtet das Fehlerhafte einer solchen Behauptung ein. Ich habe auch schon in XVI. Bd. dieser Annalen (zweite Seite des Inhaltsverzeichnisses) jenen von mir in der erwähnten Abhandlung begangenen Fehler angemerkt.

$$f_1(z, z', z'', x_1, \cdots, x_4, p_1 + z p_4, \cdots, p_3 + z'' p_4, p_1' + z p_4', \cdots, p_3' + z'' p_4',$$
$$p_1'' + z p_4'', \cdots, p_3'' + z'' p_4'') = 0,$$
$$f_2(z, z', z'', x_1, \cdots, x_4, p_1 + z p_4, \cdots, p_3 + z'' p_4, p_1' + z p_4', \cdots, p_3' + z'' p_4',$$
$$p_1'' + z p_4'', \cdots, p_3'' + z'' p_4'') = 0,$$
$$f_3(z, z', z'', x_1, \cdots, x_4, p_1 + z p_4, \cdots, p_3 + z'' p_4, p_1' + z p_4', \cdots, p_3' + z'' p_4',$$
$$p_1'' + z p_4'', \cdots p_3'' + z'' p_4'') = 0,$$
$$f_4(z, z', z'', x_1, \cdots, x_4, p_1 + z p_4, \cdots, p_3 + z'' p_4, p_1' + z p_4', \cdots, p_3' + z'' p_4',$$
$$p_1'' + z p_4'', \cdots, p_3'' + z'' p_4'') = 0,$$

und zwar hat das der partiellen Differentialgleichung 2. O. in R_4 entsprechende System ∞^∞ Lösungen:

$$z = f(x_1, \cdots, x_4), \quad z' = \varphi(x_1, \cdots, x_4), \quad z'' = \psi(x_1, \cdots, x_4).$$

Helsingborg im Juli 1880.