

# Complétude des variétés Lorentziennes à courbure constante

**Bruno Klingler\***

226 Bd Raspail, F-75014 Paris, France

Reçu le 7 mai 1995 / Version révisée reçue le 20 septembre 1995

*Mathematics Subject Classification (1991):* 53C50

## Introduction

Rappelons qu'une variété lorentzienne  $M$  de dimension  $n$  est une variété  $\mathcal{C}^\infty$  munie d'une métrique lorentzienne  $g$ , c'est-à-dire d'un champ  $\mathcal{C}^\infty$  de formes bilinéaires symétriques non dégénérées  $g_x$  de signature  $(n-1, 1)$  sur l'espace tangent  $T_x M$ .

Il existe une unique connection affine sans torsion sur le fibré tangent  $TM$  pour laquelle le déplacement parallèle définit une isométrie entre les espaces tangents (connection de Levi-Civita). Les notions de géodésique, de courbure, de complétude géodésique sur  $M$  s'entendent relativement à cette connection.

Il est notoire que la compacité d'une variété riemannienne implique sa complétude, mais que cette implication est fautive dans le cas lorentzien (exemple classique du tore de Clifton-Pohl). Une question naturelle est donc: quelle propriété suffisante demander à une variété lorentzienne compacte pour qu'elle soit complète ?

Nous montrons:

**Théorème:** *Toute variété  $M$  lorentzienne compacte à courbure constante est complète.*

Remarquons que, d'après un résultat classique de Calabi-Markus [1], il n'existe pas de variété lorentzienne compacte complète de courbure constante  $> 0$ . On en déduit immédiatement le:

\* Je remercie vivement Yves Benoist, sans qui ce travail n'aurait jamais abouti.

**Corollaire:** *Il n'existe pas de variété lorentzienne compacte de courbure constante  $> 0$ .*

Ce théorème généralise un théorème de Kamishima [5], qui supposait l'existence sur  $M$  d'un champs de Killing de type temps. On consultera également un preprint de Mess [6] lorsque  $M$  est de dimension 3. Morrill [7] a annoncé avoir montré qu'une variété lorentzienne compacte à courbure constante positive est complète. Surtout, Carrière [2] a montré qu'une variété lorentzienne compacte plate est complète. La démonstration du théorème utilise d'une manière essentielle les idées qu'il a développées à cette occasion.

A la Sect. 1 nous rappelons l'interprétation d'une géométrie lorentzienne à courbure constante en terme de  $(G, X)$ -structure. La Sect. 2 définit une notion adéquate d'étoiles géodésiques dans  $\tilde{M}$  le revêtement universel de  $M$  et établit leur propriété principale: *grosso modo* elles sont convexes. Nous pouvons alors décrire à la Sect. 3 la géométrie de  $\hat{M}$  le complété de  $\tilde{M}$  pour une certaine métrique riemannienne. Si  $M$  n'est pas géodésiquement complète (pour la métrique lorentzienne),  $\hat{M}$  est une variété à bord, dont le bord s'identifie à des hypersurfaces totalement géodésiques coisotropes de  $X$ . Nous concluons en montrant l'impossibilité de ce dernier cas à la Sect. 4.

## 1 Préliminaires

L'hypothèse de courbure constante est très simplificatrice: elle "rigidifie" fortement la géométrie d'une variété. Précisément elle permet d'identifier une variété lorentzienne à courbure constante à une certaine  $(G, X)$ -variété.

### 1.1 $(G, X)$ -variétés

**Définition:** *Soit  $X$  une variété analytique,  $G$  un groupe de Lie agissant analytiquement sur  $X$  à gauche. Une variété  $\mathcal{C}^\infty M$  est une  $(G, X)$ -variété si on se donne un atlas maximal de cartes  $\phi_i : U_i \rightarrow X$  telles que:*

- Les ouverts  $U_i$  recouvrent  $M$ .
- $\phi_i$  est un difféomorphisme sur son image.
- Les changements de cartes  $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$  sont localement des éléments de  $G$ .

Notons  $\tilde{M}$  le revêtement universel de la variété  $M$ , on a la définition équivalente:

**Définition:** *Une variété  $M$  est une  $(G, X)$ -variété si on se donne un difféomorphisme local  $D : \tilde{M} \rightarrow X$  appelé développante, et un morphisme de groupe  $h : \pi_1 M \rightarrow G$  appelé morphisme d'holonomie tels que:*

$$\forall \gamma \in \pi_1 M \quad D \circ \gamma = h(\gamma) \circ D$$

Le groupe  $\Gamma = h(\pi_1 M)$  est appelé groupe d'holonomie de  $M$ .

Pour une  $(G, X)$ -variété, on dispose d'une notion naturelle de complétude:

**Définition:** Une  $(G, X)$ -variété  $M$  est dite complète si la développante  $D : \tilde{M} \rightarrow X$  est un revêtement sur  $X$ .

Si  $M$  est une  $(G, X)$ -variété complète et si  $X$  est simplement connexe,  $D$  est alors un difféomorphisme sur  $X$ , le groupe fondamental  $\pi_1 M$  s'identifie au groupe  $\Gamma$  et  $M$  au quotient  $\Gamma \backslash X$ .

Pour plus ample information, on consultera par exemple [3].

### 1.2 Hyperquadriques

Les variétés modèles  $X$  dans le cas d'une géométrie lorentzienne à courbure constante  $K$  s'obtiennent d'une manière géométrique simple (on pourra consulter [8]):

Sur l'espace vectoriel  $\mathbf{R}^{n+1}$ , on définit deux formes bilinéaires symétriques indicées par  $K = \pm 1$ .

$$Q_K^{n+1}(x, y) = K(x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} - x_{n+1} y_{n+1}) + x_n y_n$$

On considère alors les trois variétés suivantes:

- $\mathbf{R}^{n-1,1}$  est l'espace  $\mathbf{R}^n$  muni de la métrique lorentzienne induite par  $Q_1^n$ : c'est une  $n$ -variété lorentzienne complète plate.
- pour  $K = \pm 1$ ,  $S_K^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1}; Q_K(x, x) = 1\}$ :  $S_K^n$ , muni de la métrique induite par  $KQ_K^{n+1}$ , est une  $n$ -variété lorentzienne complète connexe de courbure constante  $K$ .  $S_1^n$  est appelé espace de De Sitter,  $S_{-1}^n$  espace Anti De Sitter.

Le sous-groupe orthogonal  $O(n-1, 2)$  de  $GL(n+1, \mathbf{R})$  préservant la forme  $Q_{-1}^{n+1}$  est le groupe des isométries de  $S_{-1}^n$ , il agit transitivement sur  $S_{-1}^n$ ; le sous-groupe d'isotropie du point  $(0, \dots, 0, 1)$  de  $S_{-1}^n$  est  $O(n-1, 1)$ ,  $S_{-1}^n$  s'identifie ainsi à l'espace homogène  $O(n-1, 2)/O(n-1, 1)$ . De même, le sous groupe orthogonal  $O(n, 1)$  de  $GL(n+1, \mathbf{R})$  préservant la forme  $Q_1^{n+1}$  est le groupe des isométries de  $S_1^n$ , il agit transitivement sur  $S_1^n$ ; le sous-groupe d'isotropie du point  $(0, \dots, 0, 1)$  de  $S_1^n$  est encore  $O(n-1, 1)$ ,  $S_1^n$  s'identifie ainsi à l'espace homogène  $O(n, 1)/O(n-1, 1)$ . Enfin,  $\mathbf{R}^{n-1,1}$  s'identifie évidemment à l'espace homogène  $(O(n-1, 1) \times \mathbf{R}^n)/O(n-1, 1)$ .

Les géodésiques de  $\mathbf{R}^{n-1,1}$  sont les droites affines de  $\mathbf{R}^n$ . Une géodésique de  $S_K^n$  est l'intersection d'un 2-plan vectoriel de  $\mathbf{R}^{n+1}$  avec  $S_K^n$ . On en déduit aisément que, pour deux points  $x$  et  $y$  de  $S_K^n$ :

- si  $Q_K^{n+1}(x, y) > 1$ ,  $x$  et  $y$  sont reliés par une unique géodésique de  $S_K^n$ , c'est une branche d'hyperbole.

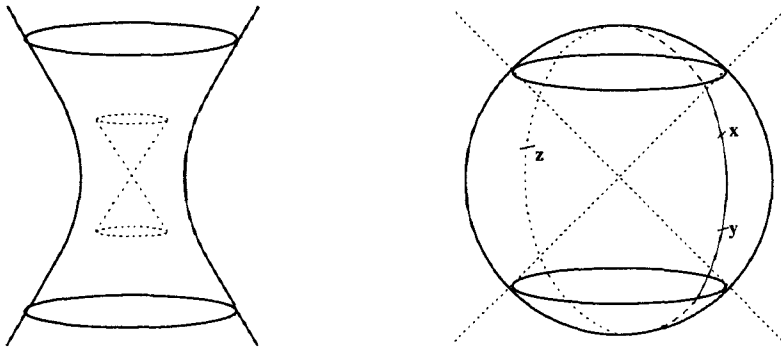


Fig. 1.  $S_K^n$  vu dans  $R^{n+1}$  ou dans la sphère des demi-droites de  $R^n$ . Le point  $x$  voit  $y$  mais pas  $z$

- si  $Q_K^{n+1}(x, y) = 1$ ,  $x$  et  $y$  sont reliés par une unique géodésique de  $S_K^n$ , c'est une droite.
- si  $-1 < Q_K^{n+1}(x, y) < 1$ ,  $x$  et  $y$  sont reliés par une unique géodésique de  $S_K^n$ , c'est une ellipse.
- si  $Q_K^{n+1}(x, y) \leq -1$ ,  $x$  et  $y$  ne sont pas reliés géodésiquement dans  $S_K^n$  (sauf si  $x = -y$ ).

### 1.3 Géométrie pseudo-riemannienne à courbure constante et $(G, X)$ -variétés

L'étude de la complétude des variétés lorentziennes à courbure constante  $K$  se réduit évidemment à l'étude des trois cas  $K = -1$ ,  $K = 0$ ,  $K = 1$ . Utilisant la classification par Wolf des variétés pseudo-riemanniennes à courbure constante complètes simplement connexes, et un argument classique de monodromie (cf. par exemple [9, Théorème 2.3.12]), on identifie une variété lorentzienne  $M^{n-1,1}$  à courbure constante  $K$  à une  $(G, X)$ -variété, où  $(G, X)$  s'identifie à :

- si  $K = -1$ ,  $(O(n-1, 2), S_{-1}^n)$
- si  $K = 0$ ,  $(O(n-1, 1) \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^{n-1,1})$
- si  $K = 1$ ,  $(O(n, 1), S_1^n)$

La complétude géodésique de  $M$  équivaut à sa complétude comme  $(G, X)$ -variété.

Soit donc  $(G, X)$  l'une des géométries précédentes et  $M$  une  $(G, X)$ -variété connexe de développante  $D : \tilde{M} \rightarrow X$ , il nous faut montrer que  $M$  est complète. Nous adopterons les notations suivantes :

- si  $\tilde{x}$  désigne un point de  $\tilde{M}$ ,  $x$  est son image  $D(\tilde{x})$  dans  $X$ .
- $E$  désigne l'espace euclidien ambiant,  $E = \mathbf{R}^n$  dans le cas plat,  $E = \mathbf{R}^{n+1}$  si  $K = \pm 1$ .
- Le produit  $x \cdot y$  désigne  $Q_{-1}^{n+1}(x, y)$ ,  $Q_1^n(x, y)$ ,  $Q_1^{n+1}(x, y)$  respectivement pour les cas  $K = -1$ ,  $K = 0$ ,  $K = 1$ .

## 2 Convexité des étoiles de $\tilde{M}$

### 2.1 Etoiles géodésiques

Montrer la complétude de  $M$  commence avec une étude locale: on cherche à travailler sur un voisinage "plaisant" de chacun des points de  $\tilde{M}$  s'identifiant naturellement à son image dans  $X$ . La développante  $D$  étant une isométrie locale, les étoiles géodésiques de  $\tilde{M}$  fournissent de tels voisinages. A ceci près que les étoiles maximales sont trop "grosses": sauf dans le cas plat, deux points de  $X$  peuvent être reliés par plus d'un arc géodésique, ce qui complique l'opération d'identification. Pour parer à cet inconvénient, nous adoptons les définitions suivantes:

#### Définitions:

- Dans le cas  $K = 0$ , on dispose de la notion habituelle de segment (fermé) de  $X = E$ . Dans les cas  $K = \pm 1$ , on appellera segment de  $X$  un arc géodésique (fermé) de  $X$  ne contenant l'antipodal (dans  $E$ ) d'aucun de ses points. Deux points  $x$  et  $y$  de  $X$  sont reliés au plus par un segment, noté  $[x, y]$  s'il existe. On dira alors que  $x$  voit  $y$ , cette relation est évidemment symétrique et ouverte.

- Etant donné un point  $x$  de  $X$  on appelle étoile de  $x$  et on note  $X_x$  l'ensemble des points vus par  $x$ . L'étoile  $X_x$  est un ouvert de  $X$ , d'après la discussion du paragraphe 1.2:

- pour  $X = S_K^n$ ,  $X_x = \{y \in X; Q_K^{n+1}(x, y) > -1\}$ .
- pour  $X = \mathbf{R}^{n-1,1}$ ,  $X_x = X$ .

On définit des notions analogues dans  $\tilde{M}$ :

- On appelle segment de  $\tilde{M}$  un arc géodésique (fermé) de  $\tilde{M}$  s'identifiant par  $D$  à un segment de  $X$ . Deux points  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  de  $\tilde{M}$  sont alors reliés au plus par un segment noté  $[\tilde{x}, \tilde{y}]$  s'il existe. On dira encore que  $\tilde{x}$  voit  $\tilde{y}$ , cette relation est symétrique et ouverte.

- Etant donné un point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{M}$  on appelle étoile de  $\tilde{x}$  et on note  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$  l'ensemble des points vus par  $\tilde{x}$ .  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$  est un ouvert de  $\tilde{M}$ .

Enfin, donnons la définition des ensembles les plus simples sur lesquels travailler dans  $X$  et  $\tilde{M}$ :

- Un ensemble  $C$  de  $X$  (ou  $\tilde{M}$ ) sera dit simplement convexe si deux de ses points sont toujours reliés par un segment contenu dans  $C$ .

*Remarque:* Par construction,  $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$  est contenu dans  $X_x$ . Surtout, tout a été fait pour avoir le lemme suivant:

**Lemme 1** *L'application  $D$  restreinte à  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$  est injective.*

*Démonstration:* Prenons  $\tilde{y}$  et  $\tilde{z}$  deux points de  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$  de même image par  $D$ . Mais alors les segments  $[\tilde{x}, \tilde{y}]$  et  $[\tilde{x}, \tilde{z}]$  ont même image dans  $X$  (par unicité

du segment entre deux points). Comme ils ont même origine et que  $D$  est un difféomorphisme local, ils coïncident. Donc:  $\tilde{y} = \tilde{z}$ .  $\diamond$

Autrement dit,  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$  s'identifie par  $D$  à un ouvert de  $X$ , inclus dans  $X_{\tilde{x}}$ .

2.2 Une propriété de  $O(n-1,1)$

Pour montrer que la développante  $D : \tilde{M} \rightarrow X$  est un revêtement, la première idée est de tenter d'identifier l'étoile  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$  de  $\tilde{M}$  à l'étoile  $X_{\tilde{x}}$  dans  $X$ . En fait, nous montrons un résultat plus faible.

**Définition:** *Étant données deux parties  $C_1$  et  $C_2$  de  $X$  telles que  $C_1 \subset C_2$ ,  $C_1$  sera dite convexe relativement à  $C_2$  si tout segment dans  $C_2$  reliant deux points de  $C_1$  est inclus dans  $C_1$ .*

Nous allons montrer que pour tout point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{M}$  l'ouvert  $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$  est convexe relativement à l'étoile  $X_{\tilde{x}}$  (Proposition 1). Ceci utilise essentiellement une propriété très simple du groupe  $O(n - 1, 1)$ , soulignée par Carrière [2]:

**Lemme 2** *Soit  $g$  un élément de  $O(n - 1, 1)$  et  $B$  la boule euclidienne unité de  $E$ . Alors  $g.B$  est un ellipsoïde dont les axes principaux ont pour longueur  $e^t, 1, \dots, 1, e^{-t}$  pour un réel  $t \geq 0$ .*

Démonstration:

Notons  $a_t$  l'élément 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & . & \vdots \\ . & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ . & . & 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & 0 & 0 & \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$$
 de  $O(n - 1, 1)$

et  $A^+ = \{a_t ; t \in R^+\}$ . On a la décomposition de Cartan  $O(n - 1, 1) = O(n-1)A^+O(n-1)$ . Soit  $g$  un élément de  $O(n - 1, 1)$ ,  $g = k_1.a_t.k_2$  sa décomposition. Le résultat s'en déduit immédiatement.  $\diamond$

Soit alors  $E$  muni de sa métrique euclidienne standard,  $(F_i)$  une suite de fermés de  $E$ . On dira que la suite  $(F_i)$  converge si pour toute boule euclidienne  $B$  de  $E$ , la suite de compacts  $(F_i \cap B)$  converge vers un compact de  $E$  pour la distance de Hausdorff.

Un ellipsoïde (plein) est la boule unité (compacte) d'une certaine forme quadratique définie positive sur  $E$ . Appellons  $\mathcal{E}$  l'ensemble des ellipsoïdes de  $E$ , on montre qu'une suite  $(\varepsilon_i)$  de  $\mathcal{E}$  qui converge a pour limite un ellipsoïde dégénéré  $\varepsilon$ , c'est-à-dire le produit d'un ellipsoïde plein dans un  $d$ -plan de  $E$  avec un  $d'$ -plan de  $E$ . L'ellipsoïde  $\varepsilon$  est dit de codimension  $dimE - d - d'$ .

Du lemme précédent, on déduit immédiatement:

**Corollaire 1** Soit  $(g_i)$  une suite de  $O(n - 1, 1)$  telle que la suite d'ellipsoïdes  $(g_i.B)$  converge dans  $E$  vers une limite  $\varepsilon$ . Alors l'ellipsoïde dégénéré  $\varepsilon$  est de codimension 0 ou 1 et dans ce dernier cas  $\varepsilon$  est contenu dans un hyperplan coisotrope de  $E$  (hyperplan orthogonal d'une droite vectorielle isotrope de  $E$ ).

### 2.3 Convexité de $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$

Établissons maintenant notre proposition centrale:

**Proposition 1** L'image  $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$  de l'étoile  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$  est convexe relativement à l'étoile  $X_x$ .

*Démonstration:* Supposons par l'absurde que tel ne soit pas le cas. On peut donc trouver deux points  $\tilde{y}$  et  $\tilde{z}$  de l'étoile  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$  dont les images  $y$  et  $z$  se voient dans l'étoile  $X_x$  mais pas dans  $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$ . On vérifie facilement que  $x, y$ , et  $z$  sont libres comme vecteurs de  $E$ .

Les point  $x, y$  et  $z$  réalisent une configuration géométrique particulière:

- si  $K = 0$ , on note  $S$  le 2-plan affine de  $E$  contenant  $x, y$  et  $z$ , et à l'intérieur de  $S, T_{xyz}$  le triangle plein fermé de  $E$  de sommets  $x, y$ , et  $z$ .
- si  $K = \pm 1$ , on note  $S$  la 2-surface intersection de  $X$  avec le 3-espace vectoriel  $Vect(x, y, z)$  de  $E$ , et à l'intérieur de  $S$ , le "triangle"  $T_{xyz}$  intersection de  $X$  avec le demi-cône fermé d'origine 0 de section triangulaire  $xyz$ . En particulier  $T_{xyz}$  peut se voir comme la surface réunion des segments de  $X$  issus du point  $x$ , de seconde extrémité dans le segment  $[y, z]$ . On vérifie facilement que le triangle  $T_{xyz}$  ne contient pas de couples d'antipodaux dans  $E, T_{xyz}$  est donc encore, comme dans le cas affine, une 2-surface simplement convexe de  $X$ .

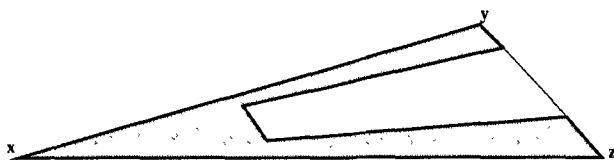


Fig. 2. Le triangle  $T_{xyz}$ , les parties ombrées sont dans  $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$

Paramétrons alors le segment  $[x, y]$  par  $t \mapsto y_t$  ( $y_0 = x, y_1 = y$ ) et le segment  $[x, z]$  par  $t \mapsto z_t$  ( $z_0 = x, z_1 = z$ ). D'après ce qui précède le triangle  $T_{xy,z_t}$  est simplement convexe, inclus dans  $T_{xyz}$ . Notons  $I$  l'intervalle  $\{t, 0 < t \leq 1, T_{xy,z_t} \subset D(\tilde{M}_{\tilde{x}})\}$ ,  $I$  est évidemment non vide, et ouvert dans  $[0, 1]$  puisque l'étoile  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$  est ouverte. Soit  $t_1$  sa borne supérieure, il suffit de montrer que  $t_1$  est dans  $I$ : par connexité  $I$  s'identifie alors à l'intervalle  $[0, 1]$ , le segment  $[\tilde{y}, \tilde{z}]$  est inclus dans  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ . Notons donc encore  $y = y_{t_1}$  et  $z = z_{t_1}$ , et supposons que  $t_1$  n'est pas dans  $I$ . Tous les points du triangle  $T_{xyz}$ , hormis certains points du segment  $[y, z]$ , appartiennent à  $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$ .  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$  étant ouverte, on peut

considérer l'unique point  $v$  dans l'intersection de  $[y, z]$  avec le complémentaire de  $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$  vérifiant:  $[y, v[ \subset D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$ .



Fig. 3. La nouvelle configuration du triangle  $T_{xyz}$

Une fois ramenés à cette configuration, il nous reste à montrer qu'elle est incompatible avec la propriété de l'action du groupe fondamental  $\pi_1 M$  sur  $\tilde{M}$  et la compacité de  $M$ . Choisissons  $(v_p)$  une suite de points du segment  $[x, v[$  tendant vers  $v$ ,  $(\tilde{v}_p)$  leurs relevés dans  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ . La compacité de  $M$  est ici cruciale: on peut trouver une suite  $(\gamma_p)$  d'éléments distincts de  $\pi_1 M$  telle que la suite de points  $(\tilde{w}_p = \gamma_p \tilde{v}_p)$  converge vers un point de  $\tilde{M}$ , noté  $\tilde{w}$ . Soit  $g_p$  l'élément  $h(\gamma_p^{-1})$  du groupe d'holonomie,  $v_p$  est l'image de  $w_p$  sous l'action de  $g_p$ . L'idée consiste à observer comment une suite  $(g_p B_p)$  d'ellipsoïdes centrés aux points  $(v_p)$ , images de boules centrées aux points  $(w_p)$ , s'accumule au point  $v$  quand  $p$  tend vers l'infini.

Pour ce faire, notons  $\phi$  l'application suivante:

- si  $K = 0$ ,  $\phi$  est simplement l'identité de  $X = E$ .
- si  $K = \pm 1$ ,  $\phi$  est l'application  $x \mapsto x/(x \cdot x)^{1/2}$  définie dans un voisinage de  $X$  dans  $E$ .

L'application  $\phi$  est une projection  $G$ -équivariante sur  $X$ . En outre, d'après l'étude des géodésiques de  $X$  menée à la section 1.2, l'image par  $\phi$  d'un petit segment affine de  $E$  passant par un point de  $X$  est un segment de  $X$  passant par ce point.

Choisissons alors:

- $\tilde{B}$  un voisinage compact de  $\tilde{w}$  dans  $\tilde{M}$  tel que: (i)  $\forall \gamma \in \pi_1 M \setminus \{1\}, \gamma \tilde{B} \cap \tilde{B} = \emptyset$ . Un tel compact existe puisque le groupe  $\pi_1 M$  agit proprement sur  $\tilde{M}$ .
- $r$  un réel suffisamment petit pour que le voisinage  $\phi(B(w, 2r))$  de  $w$  dans  $X$  soit inclus dans  $D(\tilde{B})$ , où  $B(w, r)$  désigne la boule euclidienne fermée de  $E$  de centre  $w$  et de rayon  $r$ . Si  $p$  est suffisamment grand, la distance euclidienne  $d(w_p, w)$  est majorée par  $r$ , la boule  $B_p = B(w_p, r)$  est contenue dans la boule  $B(w, 2r)$ . En particulier  $\phi(B_p)$  est inclus dans  $D(\tilde{B})$ , notons  $\tilde{B}_p$  son relevé dans  $\tilde{B}$  et  $\tilde{C}_p$  le transformé de  $\tilde{B}_p$  sous l'action de  $\gamma_p^{-1}$ .  $\tilde{C}_p$  est un voisinage compact de  $\tilde{v}_p$  dans  $\tilde{M}$ , son image  $D(\tilde{C}_p)$  s'identifie à  $\phi(g_p B_p)$  dans  $X$ . De plus, les compacts  $(\tilde{C}_p)$  sont deux à deux disjoints d'après la relation (i).

Utilisons la transitivité de l'action de  $G$  sur  $X$ , et la convergence des suites  $(w_p)$  et  $(v_p)$  vers les points  $w$  et  $v$  respectivement. On peut donc trouver un compact de  $G$ , deux suites  $(c_{1p})$  et  $(k_{1p})$  dans ce compact, et un élément  $g$  de  $G$  tels que  $w_p = c_{1p}^{-1} \cdot w$ ,  $v_p = k_{1p} \cdot v$  et  $v = g \cdot w$ . De l'égalité  $g_p \cdot w_p = v_p$ , on déduit (en notant  $c_{2p} = k_{1p} \cdot g$ ):  $w = (c_{2p}^{-1} \cdot g_p \cdot c_{1p}^{-1}) w$ . C'est-à-dire que  $g_p$  s'écrit comme



produit  $c_{2p} \cdot o_p \cdot c_{1p}$ , où les suites  $(c_{1p})$  et  $(c_{2p})$  restent dans un compact de  $G$  et  $(o_p)$  dans  $O(n - 1, 1)$  le sous-groupe d'isotropie du point  $w$ .

D'après le Lemme 2, les  $(g_p B_p)$  sont, comme les  $(o_p \cdot B_p)$ , des ellipsoïdes de centre  $v_p$  dont les longueurs euclidiennes de tous les axes principaux sauf un sont minorées par une constante  $r'$  strictement positive, inférieure à  $r$ . Intéressons nous à l'intersection de ces ellipsoïdes avec le triangle  $T_{xyz}$ . L'espace tangent  $T_{v_p} S$  s'identifie à un 2-plan affine de  $E$ , on peut trouver dans  $E$  un segment affine  $\sigma_p$  de centre  $v_p$ , de longueur  $2r'$ , inclus dans l'intersection  $(T_{v_p} S \cap g_p B_p)$ . Notons  $\delta_p = \phi(\sigma_p)$  le segment image de  $\sigma_p$  dans  $X$ . Par construction  $\delta_p$  est inclus dans  $S$ , et les segments  $(\delta_p \cap T_{xyz})$  sont disjoints (en effet, ils sont tracés dans  $D(\tilde{C}_p \cap \tilde{M}_{\tilde{x}})$  et comme  $D$  est injectif sur  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$  ils correspondent à des segments dans  $\tilde{C}_p$ . Or les compacts  $(\tilde{C}_p)$  sont disjoints).

Ecrivons alors  $\sigma_p = v_p + \sigma_p^0$ , où  $\sigma_p^0$  est un segment affine de centre 0 dans  $E$ , de longueur  $2r'$ . La boule  $B(0, 2r')$  étant compacte, on peut supposer que la suite  $(\sigma_p^0)$  converge vers un segment affine de centre 0 de longueur  $2r'$  noté  $\sigma^0$ . Les points  $(v_p)$  convergent vers le point  $v$ , les segments affines  $(\sigma_p)$  convergent donc vers le segment affine  $\sigma = v + \sigma^0$ . Par continuité,  $\sigma$  appartient au 2-plan affine  $T_v S$ . Remarquons alors que l'application  $\phi$  établit un difféomorphisme entre un voisinage  $U$  de  $v$  dans  $T_v S$  et un voisinage  $V$  de  $v$  dans  $S$  (pour  $K = 0$ ,  $\phi$  est tout simplement l'identité, pour  $K = \pm 1$ ,  $\phi$  a pour réciproque l'application  $\psi : x \mapsto \frac{x}{x \cdot v}$ ). Mais dans  $U$ , le segment affine  $\sigma$  de centre  $v$  coupe forcément la portion de triangle ouvert affine  $\psi(V \cap T_{xyz})$  ou sa frontière  $\psi(V \cap [y, v])$ . Donc dans  $X$  le segment  $\delta = \phi(\sigma)$  contient un point  $s$  de  $T_{xyz} \cup [y, v]$ . On peut alors trouver des points  $(s_p)$  appartenant aux segments  $(\delta_p \cap T_{xyz})$ , distincts car les  $(\delta_p \cap T_{xyz})$  sont disjoints, qui tendent vers  $s$ . Notons  $(\tilde{s}_p)$  et  $\tilde{s}$  les relevés dans  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$  de  $(s_p)$  et  $s$ , la suite  $(\tilde{s}_p)$  converge vers  $\tilde{s}$ , d'autre part les points  $(\gamma_p \cdot \tilde{s}_p)$  sont dans le compact  $\tilde{B}$  de  $\tilde{M}$ . Ceci contredit la propriété de l'action de  $\pi_1 M$  sur  $\tilde{M}$ .  
 ◊

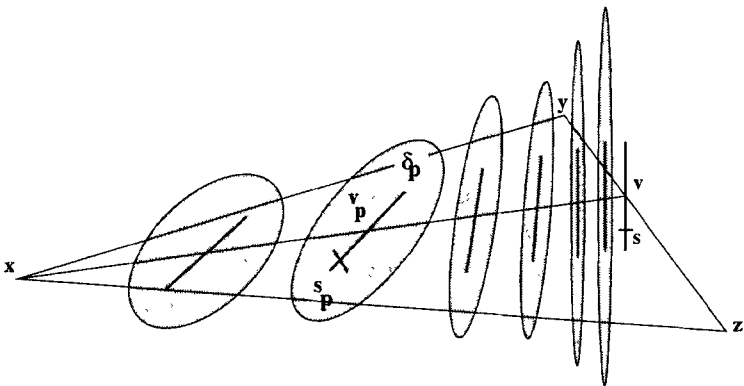


Fig. 4.

*Remarque:* Comme le lecteur averti l'aura noté, c'est cette démonstration de la Proposition 1 qui doit beaucoup à la méthode développée par Carrière dans le cas plat. Son utilisation dans le cas général a nécessité:

- le développement des notions de segment géodésique et de convexité relative.
- l'utilisation de la projection  $G$ -équivariante  $\phi$  sur  $X$ .

Surtout, la méthode de Carrière repose sur le fait que le groupe  $G$  des isométries de  $X$  est, dans le cas plat, de "discompacité" 1 (cf.[2]). *A priori*, cet argument s'applique encore dans le cas  $K = 1$ , mais pas dans le cas  $K = -1$ : le groupe d'isométries de la variété modèle  $X = S_{-1}^n$  est  $O(n-1, 2)$  de discompacité 2. Il a fallu montrer que c'est la valeur 1 de la discompacité du groupe d'isotropie d'un point de  $X$  qui importe réellement. Dans les trois cas de courbure, ce groupe est  $O(n-1, 1)$ , de discompacité 1.

Le lemme suivant va alors nous aider à décrire la frontière de l'étoile  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ :

**Lemme 3** Soient  $\tilde{C}_1$  et  $\tilde{C}_2$  deux parties de  $\tilde{M}$  et  $C$  une partie de  $X$  telles que:

- $D$  restreinte à  $\tilde{C}_1$  est injective et  $D(\tilde{C}_1)$  est convexe relativement à  $C$ .
- $\tilde{C}_2$  est simplement convexe et  $\tilde{C}_2 \subset D^{-1}(C)$ .
- $\tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2 \neq \emptyset$ .

alors l'application  $D$  restreinte à  $\tilde{C}_1 \cup \tilde{C}_2$  est injective.

*Démonstration:* Par hypothèse,  $D$  restreinte à  $\tilde{C}_1$  est injective, et comme  $\tilde{C}_2$  est simplement convexe,  $D$  restreinte à  $\tilde{C}_2$  l'est également. Prenons alors  $\tilde{x}_1$  un point de  $\tilde{C}_1$  et  $\tilde{x}_2$  un point de  $\tilde{C}_2$  ayant même image par  $D$ , choisissons  $\tilde{x}_3$  un point de l'intersection  $\tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2$  (par hypothèse non vide). Comme  $\tilde{C}_2$  est simplement convexe,  $\tilde{x}_2$  voit  $\tilde{x}_3$  dans  $\tilde{C}_2$ , le segment  $[\tilde{x}_3, \tilde{x}_2]$  est donc inclus dans  $C$ . Mais les segments  $[\tilde{x}_3, \tilde{x}_2]$  et  $[\tilde{x}_3, \tilde{x}_1]$  coïncident, et comme  $D(\tilde{C}_1)$  est supposé convexe relativement à  $C$ ,  $[\tilde{x}_3, \tilde{x}_1]$  est tracé dans  $D(\tilde{C}_1)$ . Comme  $\tilde{C}_1$  s'identifie à  $D(\tilde{C}_1)$  par  $D$ ,  $\tilde{x}_3$  voit  $\tilde{x}_1$  dans  $\tilde{M}$ . Les segments  $[\tilde{x}_3, \tilde{x}_2]$  et  $[\tilde{x}_3, \tilde{x}_1]$  ont alors même image dans  $X$ ,  $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$ .  $\diamond$

**Corollaire 2** Soit  $\partial\tilde{M}_{\tilde{x}}$  la frontière de l'étoile  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$  dans  $\tilde{M}$ , son image par  $D$  est une partie de la frontière  $\overline{X_x} \setminus X_x$ .

*Démonstration:* Soient  $\tilde{y}$  un point de  $\partial\tilde{M}_{\tilde{x}}$ ,  $\tilde{B}_{\tilde{y}}$  un voisinage simplement convexe de  $\tilde{y}$ . Evidemment le point  $y$  est dans l'adhérence de  $X_x$ . Si  $y$  appartient à l'étoile  $X_x$ , comme  $X_x$  est ouvert, on peut choisir  $\tilde{B}_{\tilde{y}}$  d'image incluse dans  $X_x$ . Mais  $\tilde{B}_{\tilde{y}}$  coupe  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$ , et d'après la Proposition 1,  $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$  est convexe relativement à  $X_x$ . On peut donc appliquer le Lemme 3,  $D$  restreinte à  $\tilde{M}_{\tilde{x}} \cup \tilde{B}_{\tilde{y}}$  est injective. Le segment  $[x, y]$  se relève alors en un segment  $[\tilde{x}, \tilde{y}]$  dans  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{x}$  voit  $\tilde{y}$ . D'où le résultat.  $\diamond$

### 3 Géométrie de $\tilde{M}$

Le Corollaire 2 constitue un encouragement dans la démonstration de la complétude de  $M$  : il indique que la frontière dans  $\tilde{M}$  d'une étoile  $\hat{M}_{\tilde{x}}$  s'envoie par  $D$  dans la frontière de l'étoile correspondante  $X_x$ . Cependant  $\partial\hat{M}_{\tilde{x}}$  contient trop peu d'informations sur la géométrie de  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$  pour nous permettre de conclure. Il faut encore comprendre comment les points de  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$  peuvent partir à l'infini dans  $\tilde{M}$  tandis que leurs images dans  $X$  convergent. Pour ce faire, il faut travailler dans un espace plus gros que  $\tilde{M}$ .

Munissons donc  $X$  d'une métrique riemannienne complète  $g_0$  (par exemple la métrique induite par la métrique euclidienne canonique de  $E$ ). Cette métrique se transporte par  $D$  en une métrique riemannienne  $D^*g_0$  sur  $\tilde{M}$ , appelons  $\hat{M}$  le complété de  $\tilde{M}$  pour  $D^*g_0$ .  $D$  s'étend en une unique application continue contractante de  $\hat{M}$  dans  $X$ , encore notée  $D$ . Pour un point  $\hat{x}$  de  $\hat{M}$ , on notera encore  $x = D(\hat{x})$  son image dans  $X$ .

#### Définitions:

· Soient  $\tilde{x}$  un point de  $\tilde{M}$  et  $\hat{y}$  un point de  $\hat{M}$ ,  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \hat{M}$  un arc reliant  $\tilde{x}$  à  $\hat{y}$ . On dira que  $\alpha$  est un segment de  $\hat{M}$  si  $\alpha([0, 1[)$  est tracé dans  $\tilde{M}$  et si  $D(\alpha([0, 1]))$  est un segment de  $X$ . Un tel segment, s'il existe, est évidemment unique, on le notera  $[\tilde{x}, \hat{y}]$  et on dira que  $\tilde{x}$  voit  $\hat{y}$  (attention, cette relation n'est plus symétrique).

· Etant donné un point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{M}$ , on appelle étoile de  $\tilde{x}$  (dans  $\hat{M}$ ) et on note  $\hat{M}_{\tilde{x}}$  l'ensemble des segments de  $\hat{M}$  d'origine  $\tilde{x}$ .

· Pour une partie  $\tilde{A}$  de  $\tilde{M}$ , on note  $\partial\tilde{A}$  sa frontière dans  $\tilde{M}$  qu'on décompose en deux parties  $\hat{\partial}\tilde{A} = \partial\tilde{A} \cap (\hat{M} \setminus \tilde{M})$  et  $\tilde{\partial}\tilde{A} = \partial\tilde{A} \cap \tilde{M}$ .

#### 3.1 Géométrie de $\partial\tilde{M}$

**Lemme 4** L'étoile  $\hat{M}_{\tilde{x}}$  d'un point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{M}$  s'identifie à la réunion des parties  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$  et  $(\partial\tilde{M}_{\tilde{x}} \cap D^{-1}(X_x))$  de  $\hat{M}$ .

*Démonstration:* L'inclusion  $\hat{M}_{\tilde{x}} \subset \tilde{M}_{\tilde{x}} \cup (\partial\tilde{M}_{\tilde{x}} \cap D^{-1}(X_x))$  résulte immédiatement des définitions et du Corollaire 2. Réciproquement, il suffit de montrer qu'un point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{M}$  voit tout point  $\hat{v}$  de la partie  $\partial\tilde{M}_{\tilde{x}} \cap D^{-1}(X_x)$  de  $\hat{M}$ . Choisissons une suite de Cauchy  $(\tilde{v}_p)$  de points de  $\tilde{M}_{\tilde{x}}$  convergeant vers le point  $\hat{v}$ , la suite de segments  $D([\tilde{x}, \tilde{v}_p])$  converge vers le segment  $[x, v]$  de  $X$ . Comme d'après la Proposition 1  $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$  est ouvert convexe relativement à  $X_x$ , le segment  $[x, v]$  est tracé dans  $D(\tilde{M}_{\tilde{x}})$  d'où le résultat.

**Lemme 5** Les étoiles  $\hat{M}_{\tilde{x}}$  sont des ouverts de  $\hat{M}$  qui recouvrent  $\hat{M}$ , et l'application  $D$  restreinte à  $\hat{M}_{\tilde{x}}$  est injective.

*Démonstration:*

· *Montrons l'injectivité de  $D$  restreinte à  $\hat{M}_{\bar{x}}$ :*

Il suffit de remarquer que par définition un point  $\bar{x}$  de  $\tilde{M}$  voit tout point  $\hat{v}$  de son étoile  $\hat{M}_{\bar{x}}$ .

· *Montrons que  $\hat{M}_{\bar{x}}$  est un ouvert de  $\hat{M}$ :*

Soit  $\hat{v}$  un point de la frontière  $\partial\tilde{M}_{\bar{x}} \cap D^{-1}(X_x)$ , il suffit de trouver un voisinage de  $\hat{v}$  inclus dans  $\hat{M}_{\bar{x}}$ . Notons  $\hat{V}_1$  et  $\hat{V}_2$  les boules ouvertes de  $\hat{M}$  de centre  $\hat{v}$  de rayons respectifs  $\varepsilon$  et  $3\varepsilon$  pour la distance  $d$  induite par  $D^*g_0$  sur  $\hat{M}$ , on peut prendre  $\varepsilon$  suffisamment petit pour que  $\hat{V}_2$  soit inclus dans l'ouvert  $D^{-1}(X_x)$ . Choisissons alors  $\tilde{v}_0$  un point de l'intersection  $[\bar{x}, \hat{v}[\cap\hat{V}_1$ , on construit pour tout point  $\hat{y}$  de  $\hat{V}_1$  un chemin  $\beta_{\hat{y}}$  dans l'intersection  $\hat{V}_2 \cap \tilde{M}$  reliant  $\tilde{v}_0$  à  $\hat{y}$  (Pour ce faire, choisissons  $(\tilde{y}_p)$  une suite de Cauchy de points de  $\tilde{M}$  convergeant vers le point  $\hat{y}$  et telle que la série des distances  $\sum_0^{+\infty} d(\tilde{y}_p, \tilde{y}_{p+1})$  converge. On construit passant par ces points un chemin  $\beta : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$  d'extrémités  $\tilde{y}_0$  et  $\hat{y}$  tel que l'arc  $\beta([0, 1])$  soit tracé dans  $\tilde{M}$ . On peut supposer que le point  $\tilde{y}_0$  appartient à l'ouvert  $\hat{V}_1$  et que le chemin  $\beta$  est de longueur strictement inférieure à  $\varepsilon$ . Comme la distance  $d(\tilde{v}_0, \tilde{y}_0)$  est strictement inférieure à  $2\varepsilon$ , on peut construire un chemin de  $\tilde{M}$  de longueur inférieure à  $2\varepsilon$  reliant les deux points  $\tilde{v}_0$  et  $\tilde{y}_0$ . Son produit avec le chemin  $\beta$  est le chemin  $\beta_{\hat{y}}$  recherché.) Considérons le produit du chemin  $\beta_{\hat{y}}$  avec le segment  $[\bar{x}, \tilde{v}_0]$  de  $\tilde{M}$ , on a construit, pour tout  $\hat{y}$  de  $\hat{V}_1$ , un chemin  $\alpha_{\hat{y}} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$  d'extrémités  $\bar{x}$  et  $\hat{y}$ , d'image dans  $X_x$ , et tel que l'arc  $\alpha_{\hat{y}}([0, 1])$  soit tracé dans  $\tilde{M}$ . Pour un tel  $\hat{y}$ , notons  $T$  la borne inférieure de l'ensemble  $\{t, 0 < t \leq 1, \alpha_{\hat{y}}(t) \notin \tilde{M}_{\bar{x}}\}$ . Supposons  $T < 1$ , le point  $\alpha_{\hat{y}}(T)$  appartient par construction à la frontière  $\partial\tilde{M}_{\bar{x}}$ , ce qui contredit le Corollaire 2 puisque son image est dans  $X_x$ . Donc  $T = 1$  et la boule  $\hat{V}_1$  est incluse dans  $\hat{M}_{\bar{x}}$ .

· *Montrons que les ouverts  $\hat{M}_{\bar{x}}$  recouvrent  $\hat{M}$ :*

Il suffit de montrer que pour un point  $\hat{v}$  de la frontière  $\partial\tilde{M}$  on peut trouver un point  $\bar{x}$  de  $\tilde{M}$  voyant  $\hat{v}$ . Notons encore  $\hat{V}_1$  et  $\hat{V}_2$  les boules ouvertes de  $\hat{M}$  de centre  $\hat{v}$  de rayons respectifs  $\varepsilon$  et  $3\varepsilon$  pour la distance  $d$  induite par  $D^*g_0$  sur  $\hat{M}$ . Comme l'application  $D$  est contractante, on peut choisir  $\varepsilon$  suffisamment petit pour que  $D(\hat{V}_2)$  soit inclus dans un ouvert simplement convexe de  $X$ : pour tout  $\hat{x}$  de  $\hat{V}_2$ ,  $D(\hat{V}_2) \subset X_x$ . Prenons  $\bar{x}$  un point de  $\hat{V}_1 \cap \tilde{M}$ , on peut trouver un chemin  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \tilde{V}_2$  d'extrémités  $\bar{x}$  et  $\hat{v}$  tel que l'arc  $\alpha([0, 1])$  soit tracé dans  $\tilde{M}$ . Soit  $T$  la borne inférieure de l'ensemble  $\{t, 0 < t \leq 1, \alpha(t) \notin \tilde{M}_{\bar{x}}\}$ . Comme précédemment  $T = 1$  et donc  $\bar{x}$  voit  $\hat{v}$ .  $\diamond$

*Remarque:* Du Lemme 5, on déduit immédiatement:

$D : \hat{M} \rightarrow X$  est localement injective.

Achevons alors la description des étoiles de  $\tilde{M}$  commencée à la Proposition 1. Au vu du Lemme 5, cela revient à décrire la frontière  $\partial\tilde{M}$ .

**Définitions:**

- Dans  $(E, (\cdot, \cdot))$ , un hyperplan vectoriel coisotrope est l'orthogonal d'une droite (vectorielle) isotrope. On définit alors la notion d'hyperplan coisotrope dans  $X$ :
- dans  $\mathbf{R}^{n-1,1}$ , c'est un hyperplan coisotrope affine.
- dans  $S_K^n$ , c'est l'intersection de  $S_K^n$  avec un hyperplan vectoriel coisotrope de  $E$ .
- Une partie de  $\hat{M}$  sera dite "totalement géodésique coisotrope" si elle s'identifie localement par  $D$  à un hyperplan coisotrope de  $X$ .

**Proposition 2** La frontière  $\hat{\partial M}$  est totalement géodésique coisotrope, ou vide.

*Démonstration:* Soit  $\hat{v}$  un point de la frontière  $\hat{\partial M}$ , on peut d'après le Lemme 5 trouver un voisinage  $\hat{V}$  de  $\hat{v}$  dans  $\hat{M}$  et un point  $\bar{x}$  de  $\hat{M}$  tels que  $\bar{x}$  voit  $\hat{V}$  et  $\hat{V}$  s'identifie par  $D$  à son image dans  $X$ . Notons  $\tilde{V}$  l'intersection du voisinage  $\hat{V}$  avec l'étoile  $\tilde{M}_{\bar{x}}$  de  $\hat{M}$ .

Paramétrons par  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \hat{M}$  le segment  $[\bar{x}, \hat{v}]$ , l'arc  $\alpha([0, 1[)$  est tracé dans  $\tilde{M}$ . Soit  $(t_p)$  une suite croissante de  $[0, 1[$  convergeant vers 1, notons  $(\tilde{v}_p)$  la suite de points  $(\alpha(t_p))$  de  $\tilde{M}$  convergeant vers  $\hat{v}$ . Comme  $M$  est compacte, on peut trouver une suite  $(\gamma_p)$  d'éléments distincts de  $\pi_1 M$  telle que la suite de points  $(\tilde{w}_p = \gamma_p \tilde{v}_p)$  converge vers un point de  $\tilde{M}$  noté  $\tilde{w}$ . Reprenons alors la construction des voisinages compacts  $\tilde{B}_p$  de  $\tilde{w}_p$  et  $\tilde{C}_p$  de  $\tilde{v}_p$  effectuée à la Proposition 1, rappelons que les compacts  $(\tilde{C}_p)$  sont disjoints.

La suite de fermés de  $\tilde{M}_{\bar{x}}$   $(\tilde{C}_p \cap \tilde{V})$  s'identifie par  $D$  à la suite de fermés de  $X$   $\phi(g_p B_p) \cap D(\hat{V})$ , où  $B_p$  est la boule euclidienne fermée de centre  $w_p$  de rayon  $r$  dans  $E$ . Mais la suite  $(v_p)$  converge vers le point  $v$ , la suite d'ellipsoïdes  $(g_p B_p)$  converge donc dans  $E$  vers un ellipsoïde  $\varepsilon$  de centre  $v$ , nécessairement dégénéré puisque les compacts  $\phi(g_p B_p)$  sont disjoints. Comme dans la Proposition 1, écrivons  $g_p$  comme produit  $c_{2p} \cdot o_p \cdot c_{1p}$ , où  $(c_{1p})$  et  $(c_{2p})$  sont deux suites restant dans un compact de  $G$  et  $(o_p)$  une suite de  $O(n-1, 1)$ . Quitte à extraire une sous suite, on peut appliquer le Corollaire 1: l'ellipsoïde  $\varepsilon$  est de codimension 1, supporté par un hyperplan coisotrope affine  $(v + H)$  de  $E$ .

La suite de fermés de  $D(\tilde{M}_{\bar{x}})$   $\phi(g_p B_p) \cap D(\hat{V})$  converge alors vers le fermé  $\phi(\varepsilon) \cap D(\hat{V})$ . Le groupe fondamental  $\pi_1 M$  agissant proprement sur  $\tilde{M}$ ,  $\phi(\varepsilon)$  et  $D(\hat{V})$  sont d'intersection vide et donc le fermé  $\phi(\varepsilon) \cap D(\hat{V})$  est contenu dans  $D(\hat{V} \setminus \tilde{V})$ . Comme un segment d'origine  $x$  voit au plus un point de  $D(\hat{V} \setminus \tilde{V})$ ,  $\phi(\varepsilon) \cap D(\hat{V})$  est exactement un voisinage de  $v$  dans  $D(\hat{V} \setminus \tilde{V})$ . Donc la frontière  $\hat{\partial M}$  au voisinage de  $\hat{v}$  s'identifie à un voisinage de  $v$  dans l'hyperplan coisotrope affine  $v + H$  de  $E$ .

- Dans le cas plat c'est exactement la Proposition 2.
- Pour  $K = \pm 1$ , remarquons que  $D(\hat{V} \setminus \tilde{V})$  est d'intérieur vide, donc  $\phi(\varepsilon) \cap D(\hat{V})$  également: ceci impose au point  $v$  d'appartenir à  $H$ , et on a encore la Proposition 2.  $\diamond$

*Remarques:*

· En particulier il découle de la Proposition 2 que si la frontière  $\hat{\partial}\tilde{M}$  est non vide,  $\hat{M}$  est une variété à bord. Munie de la distance induite par la métrique riemannienne  $D^*g_0$ ,  $\hat{M}$  est *complète* pour cette métrique.

· Remarquons que  $S_1^2$  s'identifie à  $S_{-1}^2$ , nous restreindrons désormais l'étude du cas  $K = 1$  à  $n > 2$ . On vérifie alors facilement que pour  $K = 0$  ou  $K = 1$  un hyperplan coisotrope de  $X$  est connexe par arcs, alors que dans le cas  $K = -1$ , il a deux composantes connexes par arcs antipodales l'une de l'autre, qu'on appellera *demi-hyperplan coisotrope* de  $X$ .

**Définition:** Pour  $K = 0$  ou  $K = 1$ , on appellera *hyperplan coisotrope* de  $\hat{M}$  une partie connexe  $\hat{H}$  de  $\hat{M}$  s'identifiant par  $D$  à un hyperplan coisotrope  $H$  de  $X$ . Pour  $K = -1$ , on définit de manière analogue les *demi-hyperplans coisotropes* de  $\hat{M}$ .

De la Proposition 2 et des deux remarques précédentes, on déduit immédiatement:

**Corollaire 3** *Supposons la frontière  $\hat{\partial}\tilde{M}$  non vide, chaque composante connexe de  $\hat{\partial}\tilde{M}$  est:*

- si  $K = 0$  ou  $K = 1$ , un hyperplan coisotrope de  $\hat{M}$ .
- si  $K = -1$ , un demi-hyperplan coisotrope de  $\hat{M}$ .

### 3.2 Géométrie de $\tilde{M}$

Nous sommes dès lors en mesure d'identifier complètement  $\tilde{M}$ :

**Proposition 3** *Supposons  $M$  non complète,  $\tilde{M}$  s'identifie alors par l'application  $D$  à une composante connexe  $\Omega$  de  $X \setminus H$ , où  $H$  désigne un hyperplan coisotrope de  $X$ .*

Pour la démonstration de la Proposition 3, nous distinguerons les trois cas de courbure.

#### Cas $K = 1$

*Démonstration* de la Proposition 3 pour  $K = 1$ : Supposons  $M$  non complète, soit  $\hat{H}$  un hyperplan coisotrope de la frontière  $\hat{\partial}\tilde{M}$ . Son image  $H$  dans  $X$  est l'orthogonal dans  $X$  de la droite de lumière  $\mathbf{Re}_1$  pour une base  $(e_1, \dots, e_{n+1})$  de  $E$  dans laquelle  $x.x = 2x_1x_2 + x_3^2 + \dots + x_{n+1}^2$ . Choisissons  $\tilde{x}$  un point de  $\tilde{M}$  voyant un point de  $\hat{H}$ , la composante connexe  $\Omega$  de  $X \setminus H$  contenant  $x$  s'identifie à l'ensemble des points  $y$  de  $X$  vérifiant l'inégalité  $y.e_1 > 0$ . Définissons alors le champ de vecteurs tangents sur  $X$   $Y_y = e_2 - (y.e_2)y$ , notons  $\Theta_t$  son flot, et

considérons pour  $\hat{y}$  dans  $\hat{H}$  le chemin de  $X$  d'origine  $y$   $t \mapsto \Theta_t(y)$  défini sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  si  $y \cdot e_2 \geq 0$ , sur l'intervalle  $[0, -1/(y \cdot e_2)[$  sinon:

$$\Theta_t(y) = \frac{1}{1 + (y \cdot e_2)t} \left[ y + \frac{t}{2}(2 + (y \cdot e_2)t) e_2 \right]$$

Si ce chemin ne se relève pas en un chemin de  $\hat{M}$  d'origine  $\hat{y}$  défini sur le même intervalle, c'est qu'il rencontre transversalement un hyperplan coisotrope de la frontière  $\hat{\partial M}$ , d'image  $H_{\hat{y}}$  dans  $X$ . Sinon on pose  $H_{\hat{y}}$  égal à l'ensemble vide.

Remarquons que pour tout point  $x$  de  $X$  et tout hyperplan coisotrope  $P$  de  $X$ , l'intersection de l'étoile  $X_x$  avec  $P$  contient un ouvert de  $P$  (en effet l'étoile  $X_x$  est contenue dans un demi-espace de  $E$ ). De cette remarque et du Corollaire 3, on déduit que l'application  $\hat{y} \mapsto H_{\hat{y}}$  est localement constante. Comme  $\hat{H}$  est connexe, elle est constante. Notons  $\hat{P}$  son image, si  $P$  n'est pas vide c'est un hyperplan coisotrope de  $X$  distinct de  $H$ ; mais deux hyperplans coisotropes de  $X$  se coupent nécessairement, d'où une contradiction au Corollaire 3 aux points de  $\hat{H}$  correspondant à l'intersection de  $P$  et  $H$ . Donc  $P$  est vide.

On vérifie facilement que l'image de l'hyperplan  $H$  sous le flot  $\Theta_t$  est l'ouvert  $\Omega$  privé de l'arc géodésique  $\gamma(]0, \infty[)$  défini par  $\gamma(t) = te_1 + \frac{1}{2t}e_2$ . On a donc construit dans  $\tilde{M}$  un ensemble difféomorphe par  $D$  à  $\Omega \setminus \{\gamma(]0, \infty[)\}$ . Mais  $\gamma(]0, \infty[)$  se relève évidemment par continuité: tout hyperplan coisotrope en un point  $\gamma(t)$  couperait nécessairement  $\Omega$ . On a ainsi construit dans  $\tilde{M}$  un ensemble  $\tilde{\Omega}$  difféomorphe par  $D$  à  $\Omega$ , et  $\tilde{\Omega}$  est ouvert et fermé dans  $\tilde{M}$  connexe. Donc  $\tilde{M}$  s'identifie par  $D$  à  $\Omega$ , c'est la Proposition 3.  $\diamond$

**Cas  $K = 0$**

*Démonstration* de la Proposition 3 pour  $K = 0$ : Supposons  $M$  non complète, soit  $\hat{H}$  un hyperplan coisotrope de la frontière  $\hat{\partial M}$  d'image  $H$  dans  $X = \mathbf{R}^n$ . Choisissons  $\hat{x}$  un point de  $\tilde{M}$  voyant un point  $\hat{h}$  de  $\hat{H}$ , pour tout point  $\hat{y}$  de  $\hat{H}$ , relevons le chemin  $t \mapsto y + t(x - h)$  de  $X$  d'origine  $y$  en un chemin de  $\hat{M}$  d'origine  $\hat{y}$ . Si ce relevé n'est pas défini sur  $\mathbf{R}^+$ , c'est qu'il rencontre transversalement un hyperplan coisotrope de la frontière  $\hat{\partial M}$ , d'image  $H_{\hat{y}}$  dans  $X$ . Sinon on pose  $H_{\hat{y}}$  égal à l'ensemble vide.

Comme dans le cas précédent, l'application  $\hat{y} \mapsto H_{\hat{y}}$  est localement constante. Comme  $\hat{H}$  est connexe, elle est constante. Notons  $P$  son image. Si  $P$  n'est pas vide, c'est un hyperplan coisotrope de  $X = \mathbf{R}^{n-1,1}$ , nécessairement parallèle à  $H$ ; on note alors  $\Omega$  l'ouvert de  $X$  bordé par  $H$  et  $P$ . Sinon on note  $\Omega$  le demi-espace affine ouvert de frontière  $H$  contenant  $x$ .

On a ainsi construit dans  $\tilde{M}$  un ensemble  $\tilde{\Omega}$  difféomorphe par  $D$  à  $\Omega$ , et  $\tilde{\Omega}$  est ouvert et fermé dans  $\tilde{M}$  connexe. Donc  $\tilde{M}$  s'identifie par  $D$  à  $\Omega$ . Supposons alors que  $\Omega$  ait pour frontière les deux hyperplans coisotropes parallèles  $H$  et  $P$ . Comme le remarque Carrière [2], la forme linéaire valant 1 sur l'un et 0 sur l'autre serait invariante sous le groupe d'holonomie  $\Gamma$  et donnerait ainsi naissance à une fonction sans extremum local sur  $M$ , ce qui contredit la compacité de  $M$ . D'où la Proposition 3 dans ce cas.  $\diamond$

**Cas  $K = -1$**

Ce cas est un peu plus compliqué, du fait que  $X$  n'est pas simplement connexe.

· *Géométrie de  $\tilde{X}$*  .

Rappelons que dans  $E = \mathbf{R}^{n+1}$  on considère la forme quadratique

$$x.x = -(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2) + x_n^2 + x_{n+1}^2$$

et

$$X = S_{-1}^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1}, x.x = 1\}$$

Notons  $\tilde{X}$  le revêtement universel de  $X$ ,  $\tilde{X}$  s'identifie à  $\mathbf{R}^n$ , la projection canonique de  $\tilde{X}$  dans  $X$  est donnée par:

$$p(\Theta, x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = \sqrt{x^2 + 1} \cos \Theta, x_{n+1} = \sqrt{x^2 + 1} \sin \Theta)$$

où  $x^2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$ .

On notera  $D_1$  une développante de  $\tilde{M}$  dans  $\tilde{X}$  telle que  $D = p \circ D_1$ .

· *Demi-hyperplan coisotrope de  $\tilde{X}$*  .

Soit  $H$  un hyperplan coisotrope de  $X$  orthogonal d'un vecteur de lumière de  $E$   $e = (e_1, \dots, e_{n-1}, f_1, f_2)$ . Ecrivons  $f_1 = \sqrt{e^2} \cos \Theta_1, f_2 = \sqrt{e^2} \sin \Theta_1$ . L'équation de  $p^{-1}(H)$  est:

$$\cos(\Theta - \Theta_1) = \langle x, e \rangle / \sqrt{e^2(x^2 + 1)}$$

avec  $\langle x, e \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i, e^2 = \langle e, e \rangle, x^2 = \langle x, x \rangle$ .

$p^{-1}(H)$  a une infinité de composantes connexes

$$\tilde{H}_k = \{(\Theta, x) \in p^{-1}(H); \Theta - \Theta_1 \in ]k\pi, (k + 1)\pi[ \} , k \in \mathbf{Z}$$

appelées demi-hyperplan coisotrope de  $\tilde{X}$ . On remarquera que  $\tilde{X} \setminus \tilde{H}_k$  a deux composantes connexes, l'une contenant  $\tilde{H}_{k-1}$ , l'autre contenant  $\tilde{H}_{k+1}$ . On notera aussi que  $\tilde{H}_k$  est diffeomorphe à  $\mathbf{R}^{n-1}$ : notons  $\mathbf{H}^n$  l'espace hyperbolique de dimension  $n$ , un demi-hyperplan coisotrope de  $X$  s'identifie facilement à  $\mathbf{R} \times \mathbf{H}^{n-2}$ .

· *Type des demi hyperplans de  $\hat{\partial}\tilde{M}$*  .

Soit  $\hat{H}_0$  un demi hyperplan coisotrope de la frontière  $\hat{\partial}\tilde{M}$  d'image  $\tilde{H}_0$  dans  $\tilde{X}$ ,  $\hat{v}$  un point de  $\hat{H}$  et  $\tilde{x}$  un point de  $\tilde{M}$  voyant  $\hat{v}$ . Si  $D_1(\tilde{x})$  est contenu dans la composante connexe de  $\tilde{X} \setminus \tilde{H}_0$  contenant  $\tilde{H}_1$ , on dira que  $\hat{H}_0$  est de type *positif*, sinon on dira que  $\hat{H}_0$  est de type *négatif*.

*Démonstration* de la Proposition 3 pour  $K = -1$ : Supposons  $M$  non complète, la frontière  $\hat{\partial}\tilde{M}$  contient donc un demi hyperplan coisotrope  $\hat{H}_0$  s'identifiant par  $D_1$  à un demi-hyperplan coisotrope  $\tilde{H}_0$  de  $\tilde{X}$ .  $\tilde{H}_0$  est par exemple de type positif. Conformément aux notations précédentes, on définit le demi-hyperplan coisotrope  $\hat{H}_1$  de  $\tilde{X}$ . Pour tout point  $\hat{y}$  de  $\hat{H}_0$  d'image  $y = D_1(\hat{y})$  dans  $\tilde{X}$ , considérons alors le chemin  $\alpha_y : \mathbf{R}^+ \rightarrow \tilde{X}$  donné par  $\alpha_y(\Theta) = y + (\Theta, 0, \dots, 0)$ . Si  $\alpha_y$  ne se relève pas dans  $\hat{M}$  pour toute valeur du paramètre  $\Theta$ , c'est qu'il rencontre transversalement



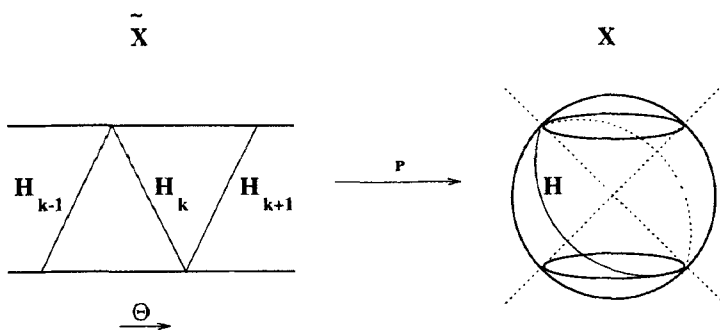


Fig. 5.

un demi-hyperplan coisotrope de  $\hat{\partial}\tilde{M}$  que l'on note  $\hat{P}_{\hat{y}}$ . Sinon, on pose  $\hat{P}_{\hat{y}}$  égal à l'ensemble vide. L'application  $\hat{y} \mapsto \hat{P}_{\hat{y}}$  est localement constante d'après le Corollaire 3. Comme  $\hat{H}_0$  est connexe, elle est constante. Son image  $\hat{P}$  est un demi hyperplan coisotrope de  $\hat{M}$  ou l'ensemble vide.

- Si  $\hat{P}$  est vide, on a construit dans  $\tilde{M}$  un ensemble  $\tilde{\Omega}$  difféomorphe par  $D_1$  à la composante connexe  $\Omega$  de  $\tilde{X} \setminus \tilde{H}_0$  contenant  $\tilde{H}_1$ .
- Si  $\hat{P}$  est non vide, notons  $\tilde{P}$  son image par  $D_1$  dans  $\tilde{X}$ . Comme les deux demi-hyperplans  $\tilde{H}_0$  et  $\tilde{P}$  ne se coupent pas, ils bordent un unique ouvert  $\Omega$  de  $\tilde{X}$ , et on a construit un ouvert  $\tilde{\Omega}$  de  $\tilde{M}$  difféomorphe à  $\Omega$  par  $D_1$ .

Dans les deux cas,  $\tilde{\Omega}$  est ouvert et fermé dans  $\tilde{M}$  connexe, donc  $\tilde{M}$  s'identifie par  $D_1$  à l'ouvert  $\Omega$  de  $\tilde{X}$  et  $\pi_1 M$  s'identifie à un sous groupe discret  $\Gamma$  de  $G$  agissant proprement sur  $\Omega$ . Comme  $\Omega$  s'identifie à  $\mathbf{R}^n$  et comme  $M \simeq \Gamma \backslash \Omega$  est compacte, la dimension cohomologique de  $\Gamma \backslash \Omega$  égale la dimension de  $M$ , c'est-à-dire  $n$ .

Si  $\hat{P}$  est vide ou si  $\tilde{P}$  diffère de  $\tilde{H}_1$ , le fermé  $\Omega \cap p^{-1}(H_0)$  est non vide. Soit alors  $\Omega'$  l'une de ses composantes connexes,  $\Omega'$  est difféomorphe à  $\mathbf{R}^{n-1}$  et invariante sous l'action d'un sous groupe d'indice fini  $\Gamma'$  de  $\Gamma$ .  $\Gamma'$  agit proprement sur  $\Omega'$  et  $\Gamma' \backslash \Omega'$  est compact. Mais alors,  $cd \Gamma = cd \Gamma' = \dim(\Omega') = n - 1$ . D'où la contradiction.

Donc le demi-hyperplan  $\tilde{P}$  de  $\tilde{X}$  s'identifie à  $\tilde{H}_1$ : c'est la Proposition 3. Si le demi-hyperplan  $\tilde{H}_0$  de  $\hat{\partial}\tilde{M}$  est de type négatif, on tient le même raisonnement avec  $-\Theta$  et  $\tilde{H}_{-1}$ .  $\diamond$

#### 4 Démonstration du théorème

Supposons  $M$  non complète. D'après la Proposition 3,  $\tilde{M}$  s'identifie à un ouvert  $\Omega$  de  $X$  de frontière un hyperplan coisotrope  $H$  de  $X$ .

- Dans le cas plat, le groupe d'holonomie  $\Gamma$  laisse invariant un hyperplan affine de  $\mathbf{R}^n$ . Ceci est impossible d'après un théorème de Goldman et Hirsch [4, Theorem 2.8, p.644].

· Si la courbure  $K$  vaut  $\pm 1$ , notons  $e$  un vecteur coisotrope de  $E$  orthogonal à  $H$  et  $G_1$  le groupe des isométries de  $\Omega$ . Le groupe  $G_1$  agit transitivement sur l'ouvert  $\Omega$  de  $X$ . Notons  $H_1$  le sous-groupe d'isotropie d'un point de  $\Omega$  sous l'action de  $G_1$ ,  $\Omega$  s'identifie alors à l'espace homogène  $G_1/H_1$ . Soit  $\omega_1$  la forme volume lorentzienne de  $\Omega$ ,  $\omega_1$  est naturellement  $G_1$ -invariante. Définissons aussi le champ de vecteurs  $Y_1$  sur  $\Omega$ :

Pour  $y_1 \in \Omega$ ,

$$Y_{1,y_1} = \frac{e}{(e.y_1)} - y_1 \in T_{y_1}\Omega = \{\mathbf{R}y_1\}^\perp$$

Le champ  $Y_1$  est également  $G_1$ -invariant (le groupe  $G_1$  agit par multiplication scalaire sur le vecteur  $e$  et conserve le produit  $(e.y_1)$ ).

$Y_1$  et  $\omega_1$  étant  $G_1$ -invariants, ils induisent un champ de vecteurs  $Y$  et une forme volume  $\omega$  sur  $M$ . La dérivée de Lie  $L_{Y_1}\omega_1$  est encore  $G_1$ -invariante donc proportionnelle à  $\omega_1$ :  $L_{Y_1}\omega_1 = \lambda\omega_1$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Comme  $M$  est une variété compacte sans bord, on a d'après la formule de Stokes:  $\int_M L_Y\omega = \lambda \int_M \omega = 0$  d'où  $\lambda = 0$  et  $L_{Y_1}\omega_1 = 0$ .

Mais on vérifie que le champ  $Y_1$  n'est pas de divergence nulle relativement à  $\omega_1$ : pour une base  $(e_1, \dots, e_{n+1})$  de  $E$  dans laquelle:

$$x.x = 2x_1x_2 + K(x_3^2 + \dots + x_n^2) + x_{n+1}^2$$

$\Omega$  est l'ensemble des points  $x$  de  $E$  tels que  $x.x = 1$  et  $x_2 > 0$ , l'hyperplan coisotrope  $H$  est l'orthogonal de  $\mathbf{R}e_1$  dans  $X$ . Un système de coordonnées pour  $\Omega$  est  $(x_2, \dots, x_{n+1})$ , et on a:

$$Y_1(x_2, \dots, x_{n+1}) = -(x_2, \dots, x_{n+1})$$

$$\omega_1(x_2, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{x_2} dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{n+1}$$

d'où  $\lambda = -(n-1)$  et la contradiction.  $\diamond$

## Références

1. E. Calabi: *Markus: Relativistic space forms*. Ann. of Math. **75** (1962), 63–76
2. Y. Carrière: *Autour de la conjecture de L.Markus sur les variétés affines*. Invent. Math. **95** (1989), 615–628
3. W. Goldman: *Geometric Structures on manifolds and varieties of representations*. Contemporary Mathematics, Vol.74, (1988)
4. W. Goldman, M. Hirsch: *The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds*. Trans. Am. Math. Soc. **286**, 629–649 (1984)
5. Y. Kamishima: *Completeness of Lorentz Manifolds of Constant Curvature admitting Killing Vector Fields*. J. Differential Geometry **37** (1993), 569–601
6. G. Mess: *Lorentz Spacetimes of Constant Curvature*, preprint
7. M.M. Morrill: *Non-existence of Closed de Sitter Manifolds*. Article annoncé dans Abstracts of Papers Presented to the American Mathematical Society **16** (1995)
8. B. O'Neill: *Semi Riemannian Geometry*. Academic Press, New York (1993)
9. J. Wolf: *Spaces of Constant Curvature*. Mc Graw-Hill, New York (1967)