Math. Ann. 306, 257–283 (1996)

Mathematische Annalen

Pseudo-représentations

Louise Nyssen

IRMA, Université Louis Pasteur, 7 rue René Descartes, F-67084 Strasbourg, France

Reçu le 9 septembre 1994 / Version révisée reçue le 3 octobre 1995

Mathematics Subject Classification (1991): 13J15, 16J99, 20C20

Introduction

Représentations et pseudo-représentations à valeurs dans un anneau local

Soit A un anneau et R une A-algèbre. Une *représentation* de dimension d de R dans A est un morphisme de A-algèbres $\rho : R \longrightarrow M_d(A)$. Deux représentations ρ et ρ' sont dites *équivalentes* s'il existe une matrice M dans $GL_d(A)$ tel que $\rho'(a) = M^{-1}\rho(a)M$ pour tout a dans R. Si A est local de corps résiduel F, la *représentation résiduelle* associée est la représentation $\bar{\rho} : R \otimes_A F \longrightarrow M_d(F)$ déduite de ρ par réduction modulo l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A.

Lorsque R est l'algèbre $A[G]$ d'un goupe G, il y a une correspondance bijective naturelle entre les représentations de R dans $M_d(A)$ et les représentations de G dans $M_d(A)$.

C'est Wiles qui a le premier introduit les pseudo-représentations de dimension 2 d'un certain groupe ([W]). Puis Taylor a développé l'étude des pseudo-représentations de dimension d d'un groupe quelconque ([T]). Nous utiliserons ici les pseudo-représentations d'une algèbre:

Une *pseudo-représentation* de dimension d de R dans A est une forme linéaire $T : R \to A$ vérifiant:

(i) $T(1) = d$

(ii) T est centrale, c'est-à-dire que $\forall a_1, a_2 \in R \quad T(a_1a_2) = T(a_2a_1)$

(iii) $\forall a_0, \ldots, a_d \in R \qquad \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma) T_\sigma(a_0, \ldots, a_d) = 0$

Explicitons cette dernière formule. Si σ est une permutation de $\mathscr{S}_{d+1}$, $\epsilon(\sigma)$ est sa signature, σ se décompose en m_σ cycles de supports disjoints:

$$(i_1^1, i_1^2, \ldots, i_1^{k_1})(i_2^1, \ldots, i_2^{k_2}) \ldots (i_{m_\sigma}^1, \ldots, i_{m_\sigma}^{k_{m_\sigma}})$$

où $i_1^1 = 0$ et T_σ est l'application définie par

$$T_\sigma(a_0, \ldots, a_d) = T(a_{i_1^1} a_{i_1^2} \ldots a_{i_1^{k_1}}) T(a_{i_2^1} \ldots a_{i_2^{k_2}}) \ldots T(a_{i_{m_\sigma}^1} \ldots a_{i_{m_\sigma}^{k_{m_\sigma}}})$$

Grâce à la deuxième propriété, cette définition de T_σ est sans ambiguïté. Nous appellerons cette formule essentielle pour la suite, l'identité fondamentale.

Lorsque G est un groupe, on peut définir une pseudo-représentation de dimension d de G dans A: c'est une application $T : G \rightarrow A$ vérifiant les propriétés (i), (ii), (iii) énoncées ci-dessus pour les éléments du groupe. Si $R = A[G]$ ces deux notions sont équivalentes, comme dans le cas des représentations.

On peut montrer que la trace d'une vraie représentation est une pseudo-représentation de même dimension: soit $\rho : R \rightarrow M_d(A)$ une représentation. Bien sûr, $tr\rho$ est une fonction centrale. L'identité fondamentale résulte d'un résultat donné par Procesi ([P] théorème 4.3): soit $\sigma \in \mathcal{S}_{d+1}$ décomposée en cycles comme ci-dessus, et Ψ_σ l'application de $M_d(A)^{d+1}$ à valeurs dans A définie par:

$$\Psi_\sigma(A_0, \ldots, A_d) = tr(A_{i_1^1} \ldots A_{i_1^{k_1}}) \ldots tr(A_{i_{m_\sigma}^1} \ldots A_{i_{m_\sigma}^{k_{m_\sigma}}})$$

Alors, $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma) \Psi_\sigma(A_0, \ldots, A_d)$ est une identité dans A, c'est-à-dire que $\forall A_0, \ldots$ $\ldots, A_d \in M_d(A)^{d+1}$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma) \Psi_\sigma(A_0, \ldots, A_d) = 0$$

En posant $A_i = \rho(a_i)$, $a_i \in R$, on retrouve l'identité fondamentale. Cette formule est en fait une conséquence directe du théorème de Cayley-Hamilton. Si $M \in M_d(A)$, son polynôme caractéristique $P_d(M, X)$ vérifie $P_d(M, M) = 0$. Plus généralement, le polynôme G obtenu en symétrisant complètement $P_d(X, X)$ est une identité dans $M_d(A)$: $\forall A_1, \ldots, A_d \in M_d(A)$

$$G(A_1, \ldots, A_d) = 0$$

Or, toujours d'après Procesi ([P] corollaire 4.4.b):

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma) \Psi_\sigma(A_0, \ldots, A_d) = (-1)^{d+1} tr\Big(A_0 G(A_1, \ldots, A_d)\Big)$$

Ce qui, dans notre cas, devient:

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma) \Big(tr\rho\Big)_\sigma (a_0, \ldots, a_d) = (-1)^{d+1} tr\Big(\rho(a_0) G\big(\rho(a_1), \ldots, \rho(a_d)\big)\Big)$$

Ainsi, la trace d'une vraie représentation est toujours une pseudo-représentation, propriété qui reste vraie pour des représentations de groupes. Naturellement on se demande dans quelles conditions il serait possible d'établir une réciproque.

Taylor démontre dans [T] que si A est un corps algébriquement clos de caractéristique 0, toute pseudo-représentation de dimension d d'un groupe G dans A est la trace d'une représentation semi-simple de G dans $GL_d(A)$, qui est unique à équivalence près. Ce résultat se généralise aux pseudo-représentations d'une algèbre. Le théorème 1 de [Ca] établit un résultat d'unicité dans des conditions plus générales: si A est un anneau local et si ρ est une représentation de R dans A dont la représentation résiduelle est absolument irréductible, ρ est déterminée à équivalence près par sa trace. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit A un anneau commutatif hensélien et séparé . On note $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A et F son corps résiduel. Soit R une A-algèbre et T une pseudo-représentation de dimension d de R dans A. S'il existe une représentation absolument irréductible*

$$\bar{\rho} : R \otimes_A F \longrightarrow M_d(F)$$

dont la trace est T mod $\mathfrak{m}$, alors il existe une représentation, unique à équivalence près

$$\rho : R \longrightarrow M_d(A)$$

dont la trace est T et la représentation résiduelle $\bar{\rho}$.

Remarquons déjà que l'unicité résulte directement du théorème 1 de [Ca]. D'autre part, la continuité ne pose pas de problèmes:

Théorème 2. *Sous les mêmes hypothèses, si l'on suppose en outre que R est doté d'une topologie compatible à celle engendrée dans A par les $\mathfrak{m}^n$, et que T et $\bar{\rho}$ sont continues, alors la représentation ρ obtenue est elle-même continue.*

En particulier, si F est algébriquement clos de caractéristique 0, la démonstration de Taylor, qui reste valable dans le cas des algèbres, montre que la représentation $\bar{\rho}$ existe. Mais elle n'est malheureusement pas *a priori* absolument irréductible.

Dans un article encore en préparation ([R]), Raphaël Rouquier démontre un résultat analogue grâce à une méthode qui est radicalement différente de celle développée ici.

Dans [S], Saito étudie les rapports entre l'anneau des représentations universelles de dimension 2 d'un groupe Γ et un anneau qu'il appelle l'anneau des caractères de Γ et qui correspondrait à un anneau des "pseudo- représentations universelles". Il obtient ainsi, en degré deux, des résultats analogues.

1 Simplification du problème

1.1 Réduction au cas des anneaux locaux artiniens

Tout d'abord, remarquons que la représentation résiduelle $\bar{\rho}$ est absolument irréductible si et seulement si elle est surjective. En effet, d'après un théorème de Burnside ([La] p445), si $\bar{\rho}$ est absolument irréductible, $\bar{\rho}(R) = M_d(F)$. La réciproque est évidente.

Nous allons nous ramener au cas où l'anneau A est artinien de longueur λ, c'est-à-dire que $\mathfrak{m}^\lambda \neq 0$ et $\mathfrak{m}^{\lambda+1} = 0$, afin de prouver le théorème 1 par récurrence sur λ. Si $\lambda = 0$, $A = F$ et il suffit de prendre $\rho = \bar{\rho}$. Afin de poursuivre la récurrence, nous montrerons le résultat suivant, auquel est consacré l'essentiel de cet article: si $\lambda \geq 1$ et si le théorème 1 est vrai pour un anneau artinien de longueur $\lambda - 1$, la pseudo-représentation

$$T' \begin{cases} R \otimes_A A/\mathfrak{m}^\lambda & \longrightarrow \quad A/\mathfrak{m}^\lambda \\ a \otimes 1 & \longmapsto \quad T(a)\ mod\ \mathfrak{m}^\lambda \end{cases}$$

fournit une vraie représentation $\rho' : R \otimes_A A/\mathfrak{m}^\lambda \to M_d(A/\mathfrak{m}^\lambda)$ dont la trace est T' et dont la représentation résiduelle $\bar{\rho}$ est absolument irréductible.

Théorème de récurrence. *Dans ces conditions, il existe une représentation ρ : $R \to M_d(A)$ dont la trace est T et qui fait commuter le diagramme:*

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\rho} & M_d(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R \otimes_A A/\mathfrak{m}^\lambda & \xrightarrow{\rho'} & M_d(A/\mathfrak{m}^\lambda) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R \otimes_A F & \xrightarrow{\bar{\rho}} & M_d(F) \end{array}$$

Ceci résoudra le cas des anneaux locaux artiniens. Si A est un anneau local séparé et complet, A est la limite projective des anneaux locaux artiniens $A/\mathfrak{m}^\lambda$. Pour chaque $\lambda > 1$ le théorème de récurrence appliqué à l'anneau $A/\mathfrak{m}^\lambda$ fournit une suite de représentations $\rho_\lambda : R \otimes_A A/\mathfrak{m}^\lambda \to M_d(A/\mathfrak{m}^\lambda)$ dont la représentation résiduelle est $\bar{\rho}$ et la trace $T\ mod\ \mathfrak{m}^\lambda$. Le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} R \otimes_A A/\mathfrak{m}^{\lambda+1} & \xrightarrow{\rho_{\lambda+1}} & M_d(A/\mathfrak{m}^{\lambda+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R \otimes_A A/\mathfrak{m}^\lambda & \xrightarrow{\rho_\lambda} & M_d(A/\mathfrak{m}^\lambda) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R \otimes_A F & \xrightarrow{\bar{\rho}} & M_d(F) \end{array}$$

est commutatif et la suite des ρ_λ converge vers une représentation ρ dont la représentation résiduelle est $\bar{\rho}$ et la trace T.

Ainsi le théorème 1 reste vrai pour un anneau local séparé et complet. En développant la même méthode, nous allons le démontrer pour un anneau hensélien séparé. La démonstration qui suit est calquée sur celle que Carayol donne du théorème 2 de [Ca]. Supposons donc que A est hensélien et séparé. Nous pouvons alors plonger A dans l'anneau

$$A' = \varprojlim_{\lambda > 0} A/\mathfrak{m}^\lambda$$

Si $\mathfrak{m}'$ est son idéal maximal, $A'/\mathfrak{m}' = F$. Remarquons que si A n'est pas nœthérien, A' n'est pas forcément la limite projective des $A'/\mathfrak{m}'^{\lambda}$. Soit R une A-algèbre, $T : R \to A$ une pseudo-représentation de dimension d et $\bar{\rho} : R \otimes_A F \to M_d(F)$ une représentation absolument irréductible dont la trace est T *mod* $\mathfrak{m}$. Comme précédemment, le théorème de récurrence appliqué à chaque $A/\mathfrak{m}^{\lambda}$ pour $\lambda > 1$ fournit un système projectif de représentations $\rho_{\lambda} : R \otimes_A A/\mathfrak{m}^{\lambda} \to M_d(A/\mathfrak{m}^{\lambda})$ de trace T *mod* $\mathfrak{m}^{\lambda}$ qui converge vers une représentation

$$\rho' : R \otimes_A A' \to M_d(A')$$

Sa représentation résiduelle est $\bar{\rho}$. Sa trace T'vérifie: $\forall r \in R$

$$T'(r \otimes 1) = T(r)$$

Considérons $S = \rho'(R \otimes 1)$ qui est une sous A-algèbre de $M_d(A')$. Comme $\bar{\rho}$ est surjective, il existe des éléments $r_1, \ldots, r_{d^2}$ de R tels que les $\bar{\rho}(r_k)$ constituent une base de $M_d(F)$. Posons $e_k = \rho'(r_k \otimes 1)$. Grâce au lemme de Nakayama, on montre que les e_k constituent une famille génératrice du A'-module $M_d(A')$ qui est précisément de rang d^2: la famille $(e_k)_{1 \leq k \leq d^2}$ est une base de $M_d(A')$. Nous allons voir qu'elle est aussi une base de S. En effet, si $s \in S$, il s'écrit:

$$s = \sum_{k=1}^{d^2} a_k e_k$$

avec, *a priori*, $a_k \in A'$. En prenant la trace de cette inégalité mulitipliée par e_l, $1 \leq l \leq d^2$, nous obtenons une série d'équations:

$$tr(se_l) = \sum_{k=1}^{d^2} a_k tr(e_k e_l) \qquad (\diamondsuit)$$

La matrice de terme générique $tr(e_k e_l)$ est une matrice à cœfficients dans A qui est inversible dans $M_d(A')$ puisque $(e_1, \ldots, e_{d^2})$ est une base de $M_d(A')$. Son déterminant est inversible dans A' donc aussi dans A, et les équations $(\diamondsuit)$ constituent un système de Cramer en $(a_1, \ldots, a_{d^2})$. Ainsi, $a_k \in A$ et S est le A-module libre de base $(e_1, \ldots, e_{d^2})$. Nous disposons donc d'un isomorphisme:

$$\mu_{A'} : S \otimes_A A' \simeq M_d(A')$$

qui induit :

$$\mu_F : S \otimes_A F \simeq M_d(F)$$

L'algèbre S est donc une algèbre d'Azumaya. Comme A est hensélien, le théorème d'Azumaya ([Gr] th.6.1) fournit un isomorphisme $\varphi : S \simeq M_d(A)$ qui fait commuter le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & M_d(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S \otimes_A F & \xrightarrow{\mu_F} & M_d(F) \end{array}$$

C'est-à-dire que φ vérifie: $\forall s \in S \subset M_d(A')$

$$\varphi(s)\ mod\ \mathfrak{m} = \mu_F(s \otimes 1_F) = s\ \ mod\ \mathfrak{m}'$$

L'extension $\varphi_{A'}$ de φ à $S \otimes_A A'$ induit alors un automorphisme ν de $M_d(A')$. Nous obtenons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} S \otimes_A A' & \xrightarrow{\varphi_{A'}} & M_d(A') \\ {\scriptstyle \mu_{A'}}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle \nu} & \\ M_d(A') & & \end{array}$$

Or, d'après le corollaire IV.1.3 de [K-O], puisque A' est local, un tel automorphisme est intérieur: il existe une matrice $M \in M_d(A')$ telle que $\forall k,\ 1 \leq k \leq d^2$:

$$\varphi'_A(e_k \otimes 1_{A'}) = M^{-1} e_k M$$

et puisque $\varphi'_A(e_k \otimes 1_{A'}) = \varphi(e_k)$, pour tout $s \in S \subset M_d(A')$:

$$\varphi(s) = M^{-1} s M$$

L'isomorphisme φ nous permet de définir une représentation

$$\rho \begin{cases} R & \longrightarrow & M_d(A) \\ r & \longmapsto & \varphi \circ \rho'(r \otimes 1) \end{cases}$$

dont la trace est T parce que $\forall r \in R$:

$$\rho(r) = M^{-1} \rho'(r \otimes 1) M$$

et dont la représentation résiduelle est $\bar{\rho}$ parce que $\forall r \in R$:

$$\varphi\Big(\rho'(r \otimes 1_{A'})\Big)\ mod\ \mathfrak{m} = \rho'(r \otimes 1_{A'})\ mod\ \mathfrak{m}' = \bar{\rho}(r \otimes 1_F)$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1 pour un anneau hensélien séparé.

Nous voici donc ramenés à démontrer le théorème de récurrence. La situation est plus simple qu'au départ puisque l'anneau A est artinien. Nous allons encore la simplifier en supposant que R est l'algèbre d'un monoïde libre G_0.

1.2 Réduction au cas d'une algèbre libre

Lemme 1. *Si le théorème 1 est vrai pour une algèbre de la forme $A[G_0]$ où G_0 est un monoïde libre, il est vrai pour une algèbre quelconque.*

Démonstration: Soient $(a_i)_{i \in I}$ des générateurs de la A-algèbre R et G_0 le monoïde libre engendré par les a_i. On dispose alors de la A-algèbre libre $R_0 = A[G_0]$, et d'un morphisme surjectif de A-algèbres $\Pi : R_0 \longrightarrow R$ dont on note H le noyau si bien que la suite

$$0 \to H \to R_0 \xrightarrow{\Pi} R \to 0$$

est exacte.

Soit $T : R \to A$ une pseudo-représentation de dimension d et $\bar{\rho} : R \otimes_A F \to M_d(F)$ une représentation absolument irréductible de trace T mod $\mathfrak{m}$. On peut former la pseudo-représentation $T_0 = T \circ \Pi$ et la représentation $\bar{\rho}_0 = \bar{\rho} \circ (\Pi \otimes 1)$. Le théorème 1 appliqué à R_0, T_0 et $\bar{\rho}_0$ fournit une représentation $\rho_0 : R_0 \to M_d(A)$, dont la trace est T_0 et la représentation résiduelle $\bar{\rho}_0$. On dispose du diagramme commutatif $(\mathscr{L})$:

$$\begin{array}{ccc} R_0 & \xrightarrow{\rho_0} & M_d(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_0 \otimes_A F & \xrightarrow{\bar{\rho}_0} & M_d(F) \end{array}$$

La représentation $\bar{\rho}_0$ est surjective. Le lemme de Nakayama permet d'en déduire que ρ_0 aussi est surjective; toute matrice $N \in M_d(A)$ est donc l'image d'un élément a de R_0. Soit $h \in R_0$. Alors

$$\rho_0(h) = 0 \iff \forall N \in M_d(A)\ tr(N\rho_0(h)) = 0 \iff \forall a \in R_0 \quad T_0(ah) = 0$$

C'est pourquoi:

$$ker \rho_0 = \{h \in R_0 \mid \forall a \in R_0 \quad T_0(ah) = 0\}$$

Puisque T_0 est nulle sur l'idéal H, ρ_0 est elle-même nulle sur H, ce qui permet de définir une représentation $\rho : R \longrightarrow M_d(A)$ factorisant ρ_0. Elle fait commuter le diagramme $(\mathscr{L})$, sa représentation résiduelle est donc $\bar{\rho}$ et sa trace est T. □

Nous pouvons désormais supposer que R est l'algèbre $A[G_0]$ d'un monoïde libre G_0.

1.3 Continuité

Le théorème 2 se démontre très facilement à partir du théorème 1. Sous les hypothèses du théorème 2, nous disposons d'une représentation ρ qui, d'après le lemme de Nakayama, est surjective comme $\bar{\rho}$. Soit $E_{ij} \in M_d(A)$ la matrice dont tous les termes sont nuls sauf celui de la i^e ligne, j^e colonne qui vaut 1, et $a_{ij} \in R$ tel que $\rho(a_{ij}) = E_{ij}$. Soit $a \in R$. Son image $\rho(a)$ est la matrice dont le terme (i,j) est $tr(\rho(a)E_{ji}) = T(a\ a_{ji})$. Comme T est continue, ρ aussi. □

2 Ce qu'il advient des anneaux artiniens

Il s'agit à présent de démontrer le théorème de récurrence. Considérons une pseudo-représentation de dimension d, $T : R \to A$, vérifiant T $mod\, \mathfrak{m} = tr\, \bar{\rho}$, où R est l'algèbre $A[G_0]$ d'un monoïde libre G_0 et A un anneau local, artinien, de longueur λ. Supposons que le théorème 1 soit vrai pour un anneau artinien de longueur $\lambda - 1$, la pseudo-représentation

$$T' \begin{cases} R \otimes_A A/\mathfrak{m}^\lambda & \longrightarrow \quad A/\mathfrak{m}^\lambda \\ a \otimes 1 & \longmapsto \quad T(a)\ mod\, \mathfrak{m}^\lambda \end{cases}$$

fournit alors une vraie représentation $\rho' : R \otimes_A A/\mathfrak{m}^\lambda \longrightarrow M_d(A/\mathfrak{m}^\lambda)$ dont la trace est T' et la représentation résiduelle $\bar{\rho}$. Nous voulons montrer que ρ' se relève en une représentation $\rho : R \longrightarrow M_d(A)$ vérifiant $tr\ \rho = T$.

Soient $(a_i)_{i \in I}$ des générateurs de G_0. Choisissons arbitrairement $M_i \in M_d(A)$ tel que $M_i \ mod \ \mathfrak{m}^\lambda = \rho'(a_i \otimes 1)$ pour $i \in I$, et posons $\rho(a_i) = M_i$. La représentation ainsi définie fait commuter le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\rho} & M_d(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R \otimes_A A/\mathfrak{m}^\lambda & \xrightarrow{\rho'} & M_d(A/\mathfrak{m}^\lambda) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R \otimes_A F & \xrightarrow{\bar{\rho}} & M_d(F) \end{array}$$

Ici encore, le lemme de Nakayama permet de montrer que ρ et ρ' sont surjectives comme $\bar{\rho}$. La trace vérifie $tr\ \rho \equiv T \ mod\ \mathfrak{m}^\lambda$, mais il n'y a aucune raison pour que $tr\ \rho = T$. Posons donc:

$$\Delta = T - tr\ \rho$$

C'est une application de R dans $\mathfrak{m}^\lambda$ dont nous allons montrer qu'elle s'écrit

$$\Delta = tr\ c$$

où c est dans l'ensemble $Z^1_{\mathscr{R}}$ des applications A-linéaires de R dans $M_d(\mathfrak{m}^\lambda)$ vérifiant, $\forall a, b \in R$

$$c(ab) = c(a)\rho(b) + \rho(a)c(b)$$

Autrement dit, c est un cocycle. L'ensemble $B^1_{\mathscr{R}}$ des cobords correspondants est constitué des applications A-linéaires de R dans $M_d(\mathfrak{m}^\lambda)$ de la forme: $\forall a \in R$

$$\varphi(a) = \rho(a)M_0 - M_0\rho(a)$$

où $M_0 \in M_d(\mathfrak{m}^\lambda)$.

Si c est un cocycle, $\rho_1 = \rho + c$ est une représentation:

$$\begin{aligned} \rho_1(a)\rho_1(b) &= (\rho(a) + c(a))(\rho(b) + c(b)) \\ &= \rho(ab) + c(a)\rho(b) + \rho(a)c(b) \\ &= \rho(ab) + c(ab) = \rho_1(ab) \end{aligned}$$

puisque $c(a)c(b) \in \mathfrak{m}^{\lambda+1} = 0$. La représentation résiduelle de ρ_1 est $\bar{\rho}$ et sa trace T, ce qui achèvera la démonstration du théorème de récurrence.

Nous pouvons donner une interprétation du groupe de cohomologie $H^1_{\mathscr{R}} = Z^1_{\mathscr{R}}/B^1_{\mathscr{R}}$. Considérons l'ensemble $\mathscr{R}$ des représentations $\rho_1 : R \longrightarrow M_d(A)$ qui vérifient $\rho_1 \equiv \rho \ mod\ \mathfrak{m}^\lambda$. D'après ce qui précède, $\rho_1 \in \mathscr{R}$ si et seulement si $\rho_1 - \rho \in Z^1_{\mathscr{R}}$. D'autre part, un élément ρ_1 de $\mathscr{R}$ est équivalent à ρ si et seulement si il existe une matrice $M \in GL_d(A)$ telle que: $\forall a \in R$

$$\rho_1(a) = M\,\rho(a)M^{-1}$$

Notons $\sim$ cette relation d'équivalence. Dans $M_d(A/\mathfrak{m}^\lambda)$, avec $M' = M \ mod\, \mathfrak{m}^\lambda$, cette relation devient: $\forall a \in R$

$$\rho'(a \otimes 1) = M'\rho'(a \otimes 1)M'^{-1}$$

Puisque ρ' est surjective M' est une homothétie et, quitte à multiplier M par un scalaire inversible, on peut supposer que

$$M = I - M_0$$

où $M_0 \in M_d(\mathfrak{m}^\lambda)$. Alors

$$M^{-1} = I + M_0$$

et $\forall a \in R$

$$\rho_1(a) = (I - M_0)\rho(a)(I + M_0) = \rho(a) + \rho(a)M_0 - M_0\rho(a)$$

C'est pourquoi ρ_1 est équivalente à ρ si et seulement si $\rho_1 - \rho \in B^1_{\mathscr{R}}$. Aussi, l'application naturelle:

$$\begin{cases} Z^1_{\mathscr{R}} & \to & \mathscr{R} \\ c & \mapsto & \rho + c \end{cases}$$

induit-elle un isomorphisme:

$$H^1_{\mathscr{R}} \simeq \mathscr{R}/\sim$$

Soit $t = tr\,\rho$. Par analogie notons H^1_{PR} l'ensemble des formes A-linéaires $\Delta : R \to \mathfrak{m}^\lambda$ telles que $t + \Delta$ est une pseudo-représentation, c'est-à-dire telles que:

(i) $t(1) + \Delta(1) = d$

(ii) $t + \Delta$ est une fonction centrale

(iii) $\forall a_0, \ldots, a_d \in R \quad \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma)(t + \Delta)_\sigma(a_0, \ldots, a_d) = 0$

La première condition revient à dire que $\Delta(1) = 0$ et la deuxième que Δ est une fonction centrale. La troisième s'écrit: $\forall a_0, \ldots, a_d \in R$

$$\sum_{\sigma \in \mathscr{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma) \prod_{s=1}^{m_\sigma} \left(t(a_{i_s^1} a_{i_s^2} \ldots a_{i_s^{k_s}}) + \Delta(a_{i_s^1} a_{i_s^2} \ldots a_{i_s^{k_s}}) \right) = 0$$

où σ est décomposée en cycles comme au début. Puisque Δ est à valeurs dans $\mathfrak{m}^\lambda$, si A et B sont dans R, $\Delta(A)\Delta(B) \in \mathfrak{m}^{\lambda+1} = 0$. Il ne reste donc que les termes où Δ intervient au plus une fois. Le terme où Δ n'intervient pas est:

$$\sum_{\sigma \in \mathscr{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma) \prod_{s=1}^{m_\sigma} t(a_{i_s^1} a_{i_s^2} \ldots a_{i_s^{k_s}})$$

qui est nul car t est une pseudo-représentation. Il reste donc:

$$\sum_{\sigma \in \mathscr{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma) \sum_{j=1}^{m_\sigma} \left(\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{m_\sigma} t(a_{i_s^1} a_{i_s^2} \ldots a_{i_s^{k_s}}) \right) \Delta(a_{i_j^1} \ldots a_{i_j^{k_j}}) = 0 \qquad (iii)'$$

Ainsi , H^1_{PR} est l'ensemble des formes A-linéaires $\Delta : R \to \mathfrak{m}^\lambda$ qui sont nulles en 1, centrales et qui vérifient $(iii)'$. La trace induit un morphisme:

$$H^1_{\mathscr{R}} \to H^1_{PR}$$

D'après le théorème 1 de [Ca], ce morphisme est injectif. A présent, nous nous proposons de montrer qu'il est surjectif, ce qui assurera l'existence d'un cocycle $c \in Z^1_{\mathscr{R}}$ tel que $\Delta = T - tr\,\rho = tr\,c$.

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\rho} & M_d(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R \otimes_A F & \xrightarrow{\bar\rho} & M_d(F) \end{array}$$

est commutatif. On note $\mathscr{N}$ l'image réciproque de $ker\,\bar\rho$ dans R qui jouera un rôle fondamental dans la démonstration. On procède en plusieurs étapes. Tout d'abord, au paragraphe 2.1, on déduit de l'identité $(iii)'$ caractérisant les éléments de H^1_{PR}, une égalité (iv), vérifiée par Δ dont on calcule les deux membres. Au paragraphe 2.2 on montre que Δ est nul sur $\mathscr{N}^2$ en annulant le premier membre de (iv). C'est la partie la plus compliquée. De sérieux problèmes apparaissent lorsque la caractéristique de F divise $(d!)$. Au paragraphe 2.3, on construit le cocycle c: la relation $\Delta(\mathscr{N}^2) = 0$ détermine uniquement c sur $\mathscr{N}$. On le prolonge arbitrairement en une application linéaire $\tilde c : R \to M_d(\mathfrak{m}^\lambda)$, c'est-à-dire un élément de $C^1_{\mathscr{R}}$. *A priori*, $\tilde c \notin Z^1_{\mathscr{R}}$. On le modifie donc, par des considérations cohomologiques, pour obtenir un cocycle qui vérifie $\Delta = tr\,c$ sur $\mathscr{N}$. Il ne reste plus qu'à vérifier que $\Delta = tr\,c$ sur R tout entier. C'est l'objet du paragraphe 2.4 où l'on remplace ρ par la représentation $\rho + c$ et Δ par $\Delta - tr\,c = T - tr\,(\rho + c)$. Alors, en annulant le second membre de (iv), on montre que $\Delta = 0$ sur R. La surjectivité sera ainsi établie.

2.1 Une égalité essentielle

Pour simplifier les notations, on définit deux applications:

$$\Phi_\sigma \left\{ \begin{array}{ccc} R^r & \longrightarrow & A \\ (a_1, \dots, a_r) & \longmapsto & t(a_{i_1^1} a_{i_1^2} \dots a_{i_1^{k_1}}) t(a_{i_2^1} \dots a_{i_2^{k_2}}) \dots t(a_{i_{m_\sigma}^1} \dots a_{i_{m_\sigma}^{k_{m_\sigma}}}) \end{array} \right.$$

et

$$\partial\Phi_\sigma^\Delta \left\{ \begin{array}{ccc} R^r & \longrightarrow & A \\ (a_1, \dots, a_r) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{m_\sigma} \Big(\prod_{s \neq j} t(a_{i_s^1} a_{i_s^2} \dots a_{i_s^{k_s}}) \Big) \Delta(a_{i_j^1} \dots a_{i_j^{k_j}}) \end{array} \right.$$

Puisque t est une pseudo-représentation elle vérifie: $\forall (a_0, \dots, a_d) \in R^{d+1}$

$$\sum_{\sigma \in \mathscr{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma) \Phi_\sigma(a_0, \dots, a_d) = 0$$

Et d'après $(iii)'$, Δ vérifie: $\forall (a_0, \dots, a_d) \in R^{d+1}$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma)\partial\Phi_\sigma^\Delta(a_0, \ldots, a_d) = 0$$

Tout le problème est de déduire de cette identité que Δ est la trace d'un cocycle. En séparant les termes correspondant à $j = 1$ des autres, on obtient l'égalité fondamentale pour la construction de ce cocycle:

$$\Delta\Big(a_0 B(a_1, \ldots, a_d)\Big) = tr\Big(\rho(a_0)\, C(a_1, \ldots, a_d)\Big) \qquad (iv)$$

Où, puisque $i_1^1 = 0$

$$B(a_1, \ldots, a_d) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma)\left(\prod_{s=2}^{m_\sigma} t(a_{i_s^1} \ldots a_{i_s^{k_s}})\right) a_{i_1^2} a_{i_1^3} \ldots a_{i_1^{k_1}}$$

est un élément de R et

$$\begin{aligned} &C(a_1, \ldots, a_d) \\ &= -\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma)\left(\sum_{j=2}^{m_\sigma} \Delta(a_{i_j^1} \ldots a_{i_j^{k_j}}) \prod_{\substack{s=2 \\ s \neq j}}^{m_\sigma} t(a_{i_s^1} \ldots a_{i_s^{k_s}})\right) \rho(a_{i_1^2} a_{i_1^3} \ldots a_{i_1^{k_1}}) \end{aligned}$$

est un élément de $M_d(A)$.

Proposition 2.1.1. *On peut exprimer B et C autrement:*

$$B(a_1, \ldots, a_d) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \sum_{i_1 \neq \ldots \neq i_k} a_{i_1} \ldots a_{i_k} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_{d-k}} \epsilon(\tau)\Phi_\tau(a_{j_1}, \ldots, a_{j_{d-k}}) \qquad (v)$$

$$\begin{aligned} C(a_1, \ldots, a_d) &= \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 \neq \ldots \neq i_k} \rho(a_{i_1} \ldots a_{i_k}) \\ &\times \sum_{\tau \in \mathcal{S}_{d-k}} \epsilon(\tau)\partial\Phi_\tau^\Delta(a_{j_1}, \ldots, a_{j_{d-k}}) \end{aligned} \qquad (vi)$$

La notation $i_1 \neq \ldots \neq i_k$ signifie que les i_s sont deux à deux distincts; $\{i_1, \ldots, i_k\}$ est alors une partie à k éléments de $\{1, \ldots, d\}$ dont $\{j_1, \ldots, j_{d-k}\}$ désigne la partie complémentaire.

Démonstration de la proposition 2.1.1: On sait que

$$B(a_1, \ldots, a_d) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma)\left(\prod_{s=2}^{m_\sigma} t(a_{i_s^1} \ldots a_{i_s^{k_s}})\right) a_{i_1^2} a_{i_1^3} \ldots a_{i_1^{k_1}}$$

On pose

$$B'(a_1, \ldots, a_d) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \sum_{i_1 \neq \ldots \neq i_k} a_{i_1} \ldots a_{i_k} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_{d-k}} \epsilon(\tau)\Phi_\tau(a_{j_1}, \ldots, a_{j_{d-k}})$$

pour montrer que $B = B'$. Un terme $\epsilon(\sigma)\prod_{s=2}^{m_\sigma} t(a_{i_s^1},\dots,a_{i_s^{k_s}})a_{i_1^2}a_{i_1^3}\dots a_{i_1^{k_1}}$ de $B(a_1,\dots,a_d)$ correspond à une permutation $\sigma \in \mathscr{S}_{d+1}$, tandis qu'un terme $(-1)^k\epsilon(\tau)\Phi_\tau(a_{j_1},\dots,a_{j_{d-k}})a_{i_1}\dots a_{i_k}$ de $B'(a_1,\dots,a_d)$ correspond à la donnée de:

- un entier k compris entre 0 et d,
- une partie ordonnée $\{i_1,\dots,i_k\}$ de $\{1,\dots,d\}$,
- une permutation τ sur la partie complémentaire de $\{i_1\dots i_k\}$ dans$\{1,\dots,d\}$.

A une permutation $\sigma \in \mathscr{S}_{d+1}$ on associe un unique triplet $(k,(i_1,\dots,i_k),\tau)$ en posant:

- $k = k_1 - 1$
- $i_1 = i_1^2 \quad i_2 = i_1^3 \quad \dots \quad i_k = i_1^{k_1}$
- $\tau = (i_2^1,\dots,i_2^{k_2})\dots(i_{m_\sigma}^1,\dots,i_{m_\sigma}^{k_{m_\sigma}})$

Alors

$$\epsilon(\sigma)\prod_{s=2}^{m_\sigma} t(a_{i_s^1}\dots a_{i_s^{k_s}})a_{i_1^2}a_{i_1^3}\dots a_{i_1^{k_1}} = (-1)^k\epsilon(\tau)\Phi_\tau(a_{j_1},\dots,a_{j_{d-k}})a_{i_1}\dots a_{i_k}$$

Cette correspondance est bijective car un triplet $(k,(i_1,\dots,i_k),\tau)$ défini comme ci-dessus est associé à la permutation $\sigma = (i_1^1,\dots,i_1^{k_1})\dots(i_{m_\sigma}^1,\dots,i_{m_\sigma}^{k_{m_\sigma}})$ où:

- $i_1^1 = 0,\ i_2^1 = i_1,\ i_3^1 = i_2,\ \dots,\ i_{k_1}^1 = i_k$ avec $k_1 = k+1$,
- sur $i_2^1,\dots,i_{m_\sigma}^{k_{m_\sigma}}$ σ se décompose comme τ. En d'autres termes $\sigma = (0,i_1,\dots,i_k)\,\tau$.

Donc $B = B'$. On montrerait de la même façon l'égalité (vi). □

2.2 *Un résultat fondamental*

L'objet de ce paragraphe est de montrer:

Proposition 2.2. *Δ est nul sur $\mathscr{N}^2$*

Commençons par remarquer:

Proposition 2.2.1. $B(a_1,\dots,a_d) \in \mathscr{N}$

Démonstration: Revenons à l'article [P] de Procesi, en conservant les notations de l'introduction. D'après le corollaire 4.4 (b et c) de [P], le polynôme G obtenu en symétrisant complètement $P_d(X,X)$ s'écrit:

$$G(X_1,\dots,X_d) = \sum_{k=0}^{d}(-1)^k \sum_{i_1\neq\dots\neq i_k} X_{i_1}\dots X_{i_k} \sum_{\tau\in\mathscr{S}_{d-k}} \epsilon(\tau)\Psi_\tau(X_{j_1},\dots,X_{j_{d-k}})$$

Donc:

$$\rho\Big(B(a_1,\dots,a_d)\Big) = G\Big(\rho(a_1),\dots,\rho(a_d)\Big)$$

et, puisque G est une identité dans dans $M_d(A)$, $B(a_1,\dots,a_d)$ est dans le noyau de ρ; a fortiori, il est dans $\mathcal{N}$. $\square$

Choisissons à présent $a_0 \in \mathcal{N}$ dans (iv). Alors $tr\Big(\rho(a_0)C(a_1,\dots,a_d)\Big)$ est une somme de termes de la forme $\Delta\Big(\dots\Big)tr\Big(\rho(a_0)\dots\Big)$. Le premier facteur est dans $\mathfrak{m}^\lambda$ et le second dans $\mathfrak{m}$. Le produit est donc dans $\mathfrak{m}^{\lambda+1}$ qui est nul. La formule (iv) devient:

$$a_0 \in \mathcal{N} \Rightarrow \Delta\Big(a_0 B(a_1,\dots,a_d)\Big) = 0$$

Soit K l'idéal bilatère de R engendré par $\mathfrak{m}R$ et par les $B(a_1,\dots,a_d)$ où $(a_1,\dots,a_d) \in R^d$. On sait que $K \subset \mathcal{N}$, et d'après la relation ci-dessus Δ est nul sur $\mathcal{N}K$. Pour montrer que $\Delta(\mathcal{N}^2) = 0$, il suffit de montrer

Proposition 2.2.2. $K = \mathcal{N}$

C'est la proposition la plus importante. Pour simplifier, on préfère remplacer R par R/K, $\mathcal{N}$ par $\mathcal{N}/K$ et prouver que $\mathcal{N} = 0$. Il faut pour cela démontrer deux lemmes. Le lemme 2.2.3 établit que $Rad(R) = \mathcal{N}$. C'est la partie qui demande le plus de travail, surtout lorsque la caractéristique de F divise $(d!)$. Ensuite le lemme 2.2.4 permet de décomposer $\mathcal{N}$ en une somme directe d'espaces vectoriels dont on montre facilement qu'ils sont tous nuls.

Démonstration de la proposition 2.2.2: On dispose de la suite exacte de A-algèbres:

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow R \longrightarrow M_d(F) \longrightarrow 0 \qquad (\spadesuit)$$

qui induit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}/K \longrightarrow R/K \longrightarrow M_d(F) \longrightarrow 0 \qquad (\spadesuit\spadesuit)$$

Quitte à remplacer R par R/K et $\mathcal{N}$ par $\mathcal{N}/K$, on peut supposer $K = 0$ et considérer $(\spadesuit)$. Le problème se ramène alors à montrer que $\mathcal{N} = 0$. Sous cette hypothèse tous les éléments de la forme $B(a_1,\dots,a_d)$ sont nuls, $\mathfrak{m}R = 0$ et l'action de A sur R et $\mathcal{N}$ est en fait une action de F: R et $\mathcal{N}$ sont des F-algèbres et $(\spadesuit)$ est une suite exacte de F-algèbres. Il est naturel de s'intéresser au radical de R. Il s'agit de démontrer le lemme fondamental:

Lemme 2.2.3. $Rad(R) = \mathcal{N}$

Démonstration: On utilise le théorème IV 1.8 de [J] qui dit:

$$Rad(R) = \{z \in R \mid \forall a \in R\ (za - 1) \text{ est inversible à droite}\}$$

L'inclusion $Rad(R) \subset \mathcal{N}$ est évidente grâce à la surjectivité de $\bar{\rho}$: $\bar{\rho}(Rad(R)) \subset Rad(M_d(F)) = 0$.

Pour l'inclusion inverse, le cas simple est celui où la caractéristique de F est nulle ou strictement supérieure à d. Alors, si $n \in \mathcal{N}$ on calcule $B(n, \dots, n)$ grâce à la proposition 2.1.1: si $k < d$ et $\tau \in S_{d-k}$, $\Phi_\tau(n, \dots, n) \in \mathfrak{m}R$. Puisque $\mathfrak{m}R = 0$ il ne reste que les termes en $k = d$

$$B(n, \dots, n) = (-1)^d d!\, n^d$$

Alors, puisque $B(n, \dots, n) = 0$ et que la caractéristique de F ne divise pas $(d!)$

$$n^d = 0$$

Ainsi, tout $n \in \mathcal{N}$ est nilpotent et $n - 1$ est inversible à droite. De même, $\forall a \in R$, $an \in \mathcal{N}$ et $an - 1$ est inversible à droite. Donc $n \in Rad(R)$. On en déduit $Rad(R) = \mathcal{N}$.

Pour compléter la démonstration du lemme 2.2.3, il suffit de montrer que $n \in \mathcal{N}$ est nilpotent même lorsque la caractéristique de F est comprise entre 1 et d. Par exemple, si F est de caractéristique d (d premier), on remarque que pour tout $a \in R$:

$$(-1)^{d-1}(d-1)!\, n^{d+1} = nB(n, \dots, n, a)n - B(n, \dots, n, nan) \quad \Rightarrow \quad n^{d+1} = 0$$

Cette formule reste valable si la caractéristique est nulle ou strictement supérieure à d. On peut généraliser dans la mesure où il existe une formule valable en toute caractéristique; mais elle est suffisamment compliquée pour qu'on essaie de l'éviter le plus possible. Posons, pour $n \in \mathcal{N}$ et $a_1, \dots, a_d \in R$:

$$F(a_1, \dots, a_d, n) = \sum_{r=0}^{d} \sum_{\substack{s \in \{0,1\}^d \\ t \in \{0,1\}^d \\ |s|+|t| = 2d-2r}} (-1)^{|t|}\, n^r B(n^{s_1} a_1 n^{t_1}, \dots, n^{s_d} a_d n^{t_d}) n^r$$

Où, si $s = (s_1, \dots, s_d) \in \{0,1\}^d$, $|\, s \,| = \sum_{i=1}^{d} s_i$.

Nous allons montrer pour tout $n \in \mathcal{N}$ et $a_1, \dots, a_d \in R$:

$$F(a_1, \dots, a_d, n) = \Big(\sum_{\tau \in \mathcal{S}_d} \epsilon(\tau) \Phi_\tau(a_1, \dots, a_d) \Big) n^{2d} \qquad (\clubsuit)$$

Soit E_{ij} la matrice de $M_d(A)$ dont tous les cœfficients sont nuls sauf celui de la i^e ligne et j^e colonne qui vaut 1. Pour $1 \leq i \leq d$ on choisit $a_i \in R$ tel que $\rho(a_i) = E_{ii}$. Ils vérifient $t(a_i) = 1$ et, si $i \neq j$, $\rho(a_i a_j) = 0$. Alors $\Phi_\tau(a_1, \dots, a_d) = 0$, sauf dans le cas $\tau = id$ où $\Phi_{id}(a_1, \dots, a_d) = 1$. La formule ($\clubsuit$) donne:

$$F(a_1, \dots, a_d, n) = n^{2d}$$

Ainsi $n^{2d}=0$ et n est nilpotent. Il ne reste plus qu'à prouver (♣).

En remplacant $B(a_1,\ldots,a_d)$ par son expression dans la proposition 2.1.1 on obtient:

$$F(a_1,\ldots,a_d,n)=\sum_{r=0}^{d}\sum_{\substack{s\in\{0,1\}^d\\ t\in\{0,1\}^d\\ |s|+|t|=2d-2r}}(-1)^{|t|}\,n^r$$

$$\times\left\{\sum_{k=0}^{d}(-1)^k\left(\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_k} n^{s_{i_1}}a_{i_1}n^{t_{i_1}+s_{i_2}}\ldots n^{t_{i_{k-1}}+s_{i_k}}a_{i_k}n^{t_{i_k}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\sum_{\tau\in\mathscr{S}_{d-k}}\epsilon(\tau)\Phi_\tau(n^{s_{j_1}}a_{j_1}n^{t_{j_1}},\ldots,n^{s_{j_{d-k}}}a_{j_{d-k}}n^{t_{j_{d-k}}})\right)\right\}\times n^r$$

C'est-à-dire:

$$F(a_1,\ldots,a_d,n)=\sum_{k=0}^{d}\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_k}(-1)^kF_k(a_{i_1},\ldots,a_{i_k},a_{j_1},\ldots,a_{j_{d-k}},n)$$

avec

$$F_k(a_1,\ldots,a_d,n)=\sum_{r=0}^{d}\sum_{\substack{s\in\{0,1\}^d\\ t\in\{0,1\}^d\\ |s|+|t|=2d-2r}}(-1)^{|t|}\,n^{r+s_1}a_1n^{t_1+s_2}\ldots n^{t_{k-1}+s_k}a_kn^{t_k+r}$$
$$\left(\sum_{\tau\in\mathscr{S}_{d-k}}\epsilon(\tau)\Phi_\tau(n^{s_{k+1}}a_{k+1}n^{t_{k+1}},\ldots,n^{s_d}a_dn^{t_d})\right)$$

NB: *a priori*, si on écrit $F_k(a_{i_1},\ldots,a_{i_k},a_{j_1},\ldots,a_{j_{d-k}},n)$ on va obtenir des termes de la forme $n^{s_j}a_{i_j}n^{t_j}$. Mais puisqu'on peut effectuer une permutation sur les $i\in\{1,\ldots,d\}$ sans changer les conditions sur les s et les t, on se ramène à des $n^{s_{i_j}}a_{i_j}n^{t_{i_j}}$.

Calculons d'abord F_d:

$$F_d(a_1,\ldots,a_d,n)=\sum_{r=0}^{d}\sum_{\substack{s\in\{0,1\}^d\\ t\in\{0,1\}^d\\ |s|+|t|=2d-2r}}(-1)^{|t|}\,n^{r+s_1}a_1n^{t_1+s_2}\ldots n^{t_{d-1}+s_d}a_dn^{t_d+r}$$

Effectuons le changement de variable $\sigma_1=t_1+s_2\quad\sigma_2=t_2+s_3\quad\ldots\quad\sigma_d=t_d+s_1$. Alors $|s|+|t|=\sum_{i=1}^d\sigma_i=|\sigma|$. Il vient:

$$\begin{aligned}F_d(a_1,\ldots,a_d,n)&=\sum_{r=0}^{d}\sum_{t\in\{0,1\}^d}\sum_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_d\\ \sigma_i\in\{t_i,t_i+1\}\\ |\sigma|=2d-2r}}(-1)^{|t|}\,n^{r+\sigma_d-t_d}a_1n^{\sigma_1}\ldots n^{\sigma_{d-1}}a_dn^{t_d+r}\\&=\sum_{t\in\{0,1\}^d}\sum_{r=0}^{d}\sum_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_d\\ \sigma_i\in\{t_i,t_i+1\}\\ |\sigma|=2d-2r}}(-1)^{|t|}\,n^{r+\sigma_d-t_d}a_1n^{\sigma_1}\ldots n^{\sigma_{d-1}}a_dn^{t_d+r}\end{aligned}$$

Le terme $a(\sigma) = a_1 n^{\sigma_1} \dots n^{\sigma_{d-1}} a_d$ ne dépend ni de t_d ni de σ_d. On sépare cette somme en quatre termes: $t_d = 0$ et $\sigma_d = 0$ ou 1, puis $t_d = 1$ et $\sigma_d = 1$ ou 2.

$$\begin{aligned}
F_d(a_1, \dots, a_d, n) = & \sum_{t \in \{0,1\}^{(d-1)}} \sum_{r=1}^{d} \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_{d-1} \\ \sigma_i \in \{t_i, t_i+1\} \\ |\sigma| = 2d-2r}} (-1)^{|t|} \, n^r a(\sigma) n^r \\
& + \sum_{t \in \{0,1\}^{(d-1)}} \sum_{r=1}^{d-1} \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_{d-1} \\ \sigma_i \in \{t_i, t_i+1\} \\ |\sigma| = 2d-2r-1}} (-1)^{|t|} \, n^{r+1} a(\sigma) n^r \\
& + \sum_{t \in \{0,1\}^{(d-1)}} \sum_{r=1}^{d-1} \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_{d-1} \\ \sigma_i \in \{t_i, t_i+1\} \\ |\sigma| = 2d-2r-1}} (-1)^{(1+|t|)} \, n^r a(\sigma) n^{r+1} \\
& + \sum_{t \in \{0,1\}^{(d-1)}} \sum_{r=0}^{d-1} \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_{d-1} \\ \sigma_i \in \{t_i, t_i+1\} \\ |\sigma| = 2d-2r-2}} (-1)^{(1+|t|)} \, n^{r+1} a(\sigma) n^{r+1}
\end{aligned}$$

Si l'on effectue le changement de variable $r' = r + 1$ dans le quatrième terme, on le trouve égal à l'opposé du premier. Il reste:

$$\begin{aligned}
& F_d(a_1, \dots, a_d, n) \\
& = \sum_{t \in \{0,1\}^{(d-1)}} \sum_{r=1}^{d-1} \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_{d-1} \\ \sigma_i \in \{t_i, t_i+1\} \\ |\sigma| = 2d-2r-1}} (-1)^{|t|} \, (n^{r+1} a(\sigma) n^r - n^r a(\sigma) n^{r+1}) \\
& = \sum_{r=1}^{d-1} \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_{d-1} \\ \sigma_i \in \{0,1,2\} \\ |\sigma| = 2d-2r-1}} \sum_{\substack{t \in \{0,1\}^{(d-1)} \\ t_i \in \{0,1\} \cap \{\sigma_i - 1, \sigma_i\}}} (-1)^{|t|} \, (n^{r+1} a(\sigma) n^r - n^r a(\sigma) n^{r+1})
\end{aligned}$$

Le terme $a(\sigma)$ ne dépend que de $\sigma_1, \dots, \sigma_{d-1}$, pas de $t_1, \dots, t_{d-1}$ Fixons $r \in \{1, \dots, d-1\}$ et $(\sigma_1, \dots, \sigma_{d-1}) \in \{0, 1, 2\}^{(d-1)}$ tel que $\sum_{i=1}^{d-1} \sigma_i = 2d - 2r - 1$. Il existe au moins un $i_0 \in \{1, \dots, d-1\}$ tel que $\sigma_{i_0} = 1$ sans quoi la somme serait paire. Séparons le terme:

$$S(r, \sigma) = \sum_{\substack{t \in \{0,1\}^{(d-1)} \\ t_i \in \{0,1\} \cap \{\sigma_i - 1, \sigma_i\}}} (-1)^{|t|} \, (n^{r+1} a(\sigma) n^r - n^r a(\sigma) n^{r+1})$$

en deux termes: celui obtenu pour $t_{i_0} = 0$

$$\sum_{\substack{t \in \{0,1\}^{(d-2)} \\ t_i \in \{0,1\} \cap \{\sigma_i - 1, \sigma_i\}}} (-1)^{|t|} \, (n^{r+1} a(\sigma) n^r - n^r a(\sigma) n^{r+1})$$

et celui obtenu pour $t_{i_0} = 1$ qui est l'opposé puisque seule $\sum_{i=1}^{d-1} t_i$ change pour devenir $|\, t \,| + 1$. Ainsi, $S(r, \sigma) = 0$ et

$$F_d(a_1,\dots,a_d,n)=0 \qquad (vii)$$

Nous pouvons maintenant calculer F_k pour $0 \le k \le d-1$.

$$F_k(a_1,\dots,a_d,n) = \sum_{r=0}^{d} \sum_{\substack{s\in\{0,1\}^d\\ t\in\{0,1\}^d\\ |s|+|t|=2d-2r}} (-1)^{|t|}\, n^{r+s_1}a_1n^{t_1+s_2}\dots n^{t_{k-1}+s_k}a_kn^{t_k+r}$$
$$\times\left(\sum_{\tau\in\mathscr{S}_{d-k}} \epsilon(\tau)\Phi_\tau(n^{s_{k+1}}a_{k+1}n^{t_{k+1}},\dots,n^{s_d}a_dn^{t_d})\right)$$

Si $\exists i \ge k+1$ tel que $t_i = 1$ ou $s_i = 1$, alors $\forall\tau \in \mathscr{S}_{d-k}$:

$$\Phi_\tau(n^{s_{k+1}}a_{k+1}n^{t_{k+1}},\dots,n^{s_d}a_dn^{t_d}) \in \mathfrak{m}R = 0$$

On ne conserve donc que les (2d)-uplets où $s_i = t_i = 0$ pour $k+1 \le i \le d$. Si $k=0$, le seul terme qui n'est pas dans $\mathfrak{m}R$ est obtenu pour $s_1 = \dots = s_d = t_1 = \dots = t_d = 0$ et $r=0$. On trouve:

$$F_0(a_1,\dots,a_d,n) = \sum_{\tau\in\mathscr{S}_d} \epsilon(\tau)\Phi_\tau(a_1,\dots,a_d)n^{2d}$$

Si $1 \le k \le d-1$:

$$\begin{aligned}
&F_k(a_1,\dots,a_d,n)\\
&= \sum_{r=d-k}^{d} \sum_{\substack{s\in\{0,1\}^k\\ t\in\{0,1\}^k\\ |s|+|t|=2d-2r}} (-1)^{|t|}\, n^{r+s_1}a_1n^{t_1+s_2}\dots n^{t_{k-1}+s_k}a_kn^{t_k+r}\\
&\times\left(\sum_{\tau\in\mathscr{S}_{d-k}} \epsilon(\tau)\Phi_\tau(a_{k+1},\dots,a_d)\right)
\end{aligned}$$

Le terme $\Phi = \sum_{\tau\in\mathscr{S}_{d-k}} \epsilon(\tau)\Phi_\tau(a_{k+1},\dots,a_d)$ se met en facteur:

$$F_k(a_1,\dots,a_d,n) = \Phi \times \left(\sum_{r=d-k}^{d} \sum_{\substack{s\in\{0,1\}^k\\ t\in\{0,1\}^k\\ |s|+|t|=2d-2r}} (-1)^{|t|}\, n^{r+s_1}a_1n^{t_1+s_2}\dots n^{t_{k-1}+s_k}a_kn^{t_k+r}\right)$$

Effectuons le changement de variable $r' = r-k+d$:

$$\begin{aligned}
&F_k(a_1,\dots,a_d,n)\\
&= \Phi \times \left(\sum_{r=0}^{k} \sum_{\substack{s\in\{0,1\}^k\\ t\in\{0,1\}^k\\ |s|+|t|=2k-2r}} (-1)^{|t|}\, n^{r+s_1}a_1n^{t_1+s_2}\dots n^{t_{k-1}+s_k}a_kn^{t_k+r}\right)\\
&= \Phi \times F_k(a_1,\dots,a_k,n)\\
&= 0
\end{aligned}$$

comme dans (vii). Donc $F_k(a_1,\ldots,a_d,n)=0$ et finalement:

$$F(a_1,\ldots,a_d,n)=F_0(a_1,\ldots,a_d,n)=\sum_{\tau\in\mathcal{S}_d}\epsilon(\tau)\Phi_\tau(a_1,\ldots,a_d)n^{2d}$$

C'est la formule (♣) qu'on cherchait à prouver. Ceci achève la démonstration du lemme 2.2.3.

On peut maintenant prouver que $\mathcal{N}=0$. On sait que R est une F-algèbre dont le radical, $\mathcal{N}$, est nilpotent, et que:

$$R/Rad(R)\simeq M_d(F)$$

D'après un théorème de Wedderburn ([Ka] II.4 th.33) , il existe une sous-algèbre S de R isomorphe à $M_d(F)$, telle que R est la somme directe d'espaces vectoriels:

$$R=S\oplus\mathcal{N}$$

Ceci permet de doter $\mathcal{N}$ d'une structure de $M_d(F)$-module bilatère: soit $U\in M_d(F)$ et $n\in\mathcal{N}$. Soit $u\in S$ l'élément qui correspond à U par l'isomorphisme $S\simeq M_d(F)$. Comme u et n sont dans R, on peut les multiplier pour définir:

$$\begin{aligned}U.n&=un\in\mathcal{N}\\ n.U&=nu\in\mathcal{N}\end{aligned}$$

On applique alors les idées de l'équivalence de Morita à $\mathcal{N}$: soit a_{ij} l'élément de S qui correspond à $\bar{E}_{ij}\in M_d(F)$. On a $\sum_{i=1}^{d}a_{ii}=1_R$ et $a_{ij}a_{kl}=\delta_{jk}a_{il}$. On définit:

$$\mathcal{N}_{ij}=\{n\in\mathcal{N}\ \mid\ a_{ii}n=n\ et\ na_{jj}=n\}$$

Lemme 2.2.4. *$\mathcal{N}$ est la somme directe des espaces vectoriels $\mathcal{N}_{ij}$:*

$$\mathcal{N}=\bigoplus_{1\le i,j\le d}\mathcal{N}_{ij}$$

Démonstration: D'une part, puisque $\sum_{i=1}^{d}a_{ii}=1$, on peut écrire pour tout $n\in\mathcal{N}$:

$$n=(\sum_{i=1}^{d}a_{ii})\ n\ (\sum_{j=1}^{d}a_{jj})=\sum_{i,j=1}^{d}a_{ii}na_{jj}$$

Or $a_{ii}a_{jj}=\delta_{ij}a_{ii}$, donc $a_{ii}na_{jj}\in\mathcal{N}_{ij}$ et $\mathcal{N}=\sum_{i,j}\mathcal{N}_{ij}$. D'autre part, s'il existe des éléments $n_{ij}\in\mathcal{N}_{ij}$ tels que

$$\sum_{i,j=1}^{d}n_{ij}=0$$

on choisit $i_0, j_0 \in \{1, \dots, d\}$. En multipliant cette égalité à gauche par $a_{i_0 i_0}$ et à droite par $a_{j_0 j_0}$, on obtient $n_{i_0 j_0} = 0$ ce qui prouve que la somme est directe.

Choisissons maintenant $n \in \mathcal{N}_{11}$ pour calculer:

$$B(n, a_{22}, \dots, a_{dd}) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_k} a_{i_1} \dots a_{i_k} \Big(\sum_{\tau \in \mathcal{S}_{d-k}} \epsilon(\tau) \Phi_\tau(a_{j_1}, \dots, a_{j_{d-k}}) \Big)$$

avec $a_1 = n$ et $a_i = a_{ii}$ pour $2 \leq i \leq d$. Alors $\forall i,j \;\; i \neq j \;\; a_i a_j = 0$. Il ne reste donc que les termes en $k = 0$ et $k = 1$. Si $\tau \in \mathcal{S}_{d-k}$, $\Phi_\tau(a_{j_1}, \dots, a_{j_{d-k}})$ est nul sauf pour $\tau = id$. Et comme $t(a_{i_l}) \equiv 1 \; mod \; \mathfrak{m}$ on obtient:

$$B(n, a_{22}, \dots, a_{dd}) = -\Big(n + \sum_{k=2}^{d} a_k t(n) \Big) + t(n).1_R = -n$$

Donc $n = 0$.

Ainsi $\mathcal{N}_{11} = 0$. Donc $\mathcal{N}_{ij} = a_{i1} \mathcal{N}_{11} a_{1j} = 0$. Donc $\mathcal{N} = 0$ ce qui achève la démonstration de la proposition 2.2.2 et par conséquent de la proposition 2.2.

2.3 Construction du cocycle

Nous cherchons un morphisme de A-modules $c : R \to M_d(\mathfrak{m}^\lambda)$ vérifiant:

(i) $\Delta = trc$
(ii) $\forall a, b \in R \;\; c(ab) = \rho(a)c(b) + c(a)\rho(b)$

Si $n \in \mathcal{N}$, sachant que $\rho(n) \in M_d(\mathfrak{m})$ et que $c(a) \in M_d(\mathfrak{m}^\lambda)$, on doit avoir:

$$c(an) = \rho(a)c(n)$$
$$c(na) = c(n)\rho(a)$$

D'où:

$$\Delta(an) = tr(\rho(a) \; c(n))$$

Fixons $n \in \mathcal{N}$. Comme ρ est surjective et $\Delta(\mathcal{N}^2)$ nul, on définit une forme A-linéaire $f : M_d(A) \to A$ en posant $f(U) = \Delta(an)$ où $a \in \rho^{-1}(U)$. Puisque la trace est une forme bilinéaire non dégénérée $M_d(A) \times M_d(A) \to A$, il existe un unique élément de $M_d(A)$, noté $c(n)$, vérifiant:

$$\forall U \in M_d(A) \quad f(U) = tr\Big(Uc(n)\Big)$$

C'est-à-dire

$$\forall a \in R \quad \Delta(an) = tr\Big(\rho(a) \; c(n)\Big)$$

Ceci détermine une application $c : \mathcal{N} \to M_d(A)$. Soit $E_{i,j} \in M_d(A)$ la matrice dont tous les termes sont nuls sauf celui de la i^e ligne et j^e colonne, et $a_{ij} \in \rho^{-1}(E_{ij})$. Si $n \in \mathcal{N}$, $c(n)$ est la matrice dont le coefficient (i,j) est $\Delta(na_{ji})$.

L'application c est donc A-linéaire de $\mathcal{N}$ dans $M_d(\mathrm{m}^\lambda)$. Soit $n \in \mathcal{N}$ et $a \in A$; $\forall b \in A$

$$tr\Big(c(na)\rho(b)\Big) = \Delta(nab) = tr\Big(c(n)\rho(a)\rho(b)\Big)$$

D'où

$$c(na) = c(n)\rho(a)$$

De même, on montrerait

$$c(an) = \rho(a)c(n)$$

Enfin, en choisissant $a = 1_R$ on obtient

$$tr\Big(c(n)\Big) = \Delta(n)$$

Maintenant que c est déterminée sur $\mathcal{N}$, on peut la prolonger en une application A-linéaire $\tilde{c} : R \to M_d(\mathrm{m}^\lambda)$ en adoptant, par exemple: $\tilde{c}(a) = \sum_{i,j} \Delta(aa_{ji})E_{ij}$. Il n'y a aucune raison *a priori* pour que $\tilde{c}$ vérifie la relation (ii). Posons

$$u(a,b) = \rho(a)\tilde{c}(b) - \tilde{c}(ab) + \tilde{c}(a)\rho(b)$$

qui est en fait une application F-bilinéaire:

$$u \ : \ R/\mathcal{N} \times R/\mathcal{N} \longrightarrow M_d(\mathrm{m}^\lambda)$$

puisque $u(a,b) = 0$ si a ou $b \in \mathcal{N}$. Nous allons montrer qu'elle peut être interprétée comme un 2-cocycle de Hochshild.

Si $\mathcal{A}$ est une F-algèbre associative, on peut définir la cohomologie de Hochschild $HH^*(\mathcal{A})$ ([Lo] I.5.5). C'est la cohomologie du complexe $(C^\bullet;\delta)$ où $C^p(\mathcal{A})$ est l'ensemble des formes $(p+1)$-linéaires de $\mathcal{A}^{p+1}$ dans F et dont la dérivation $\delta \ : \ C^{p-1}(\mathcal{A}) \to C^p(\mathcal{A})$ est donnée par:

$$\delta f(x_0,\ldots,x_p) = \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i f(x_0,\ldots,x_i x_{i+1},\ldots,x_p) + (-1)^p f(x_p x_0, x_1,\ldots,x_{p-1})$$

Si $\mathcal{A} = M_d(F)$, ce complexe est isomorphe à un autre complexe, noté $(K^\bullet;\partial)$ où $K^p(M_d(F))$ est l'ensemble des applications p-linéaires de $M_d(F)^p$ dans $M_d(F)$, et dont la dérivation $\partial \ : \ K^{p-1}(M_d(F)) \to K^p(M_d(F))$ est donnée par:

$$\begin{aligned}\partial v(x_1,\ldots,x_p) &= x_0 v(x_1,\ldots,x_p)\\ &+\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i v(x_1,\ldots,x_i x_{i+1},\ldots,x_p) + (-1)^p v(x_1,\ldots,x_{p-1})x_p\end{aligned}$$

L'isomorphisme entre $(C^\bullet;\delta)$ et $(K^\bullet;\partial)$ est donné par:

$$\begin{array}{ccc} K^p(M_d(F)) & \longrightarrow & C^p(M_d(F)) \\ v & \longmapsto & f_v \end{array}$$

avec:

$$f_v(x_0,\ldots,x_p) = tr\Big(x_0 \ v(x_1,\ldots,x_p)\Big)$$

Il s'agit bien d'un isomorphisme de complexes, car, si $v \in K^{p-1}(M_d(F))$:

$$\delta f_v(x_0, \ldots, x_p) = tr\Big(x_0\ \partial v(x_1, \ldots, x_p)\Big) = f_{\partial v}(x_0, \ldots, x_p)$$

Revenons à notre application u. Nous savons que $R/\mathcal{N} \simeq M_d(F)$. D'autre part,$\mathfrak{m}^\lambda$ est un F-espace vectoriel et $M_d(\mathfrak{m}^\lambda) \simeq M_d(F) \otimes \mathfrak{m}^\lambda$ qui est lui-même isomorphe à une somme directe de copies de $M_d(F)$. En choisissant une base $(m_\alpha)_{\alpha \in X}$, de $\mathfrak{m}^\lambda$ sur F, nous pouvons écrire u comme une somme directe:

$$u(a,b) = \sum_{\alpha \in X} \tilde{u}_\alpha\Big(\bar{\rho}(a), \bar{\rho}(b)\Big) m_\alpha$$

où $\tilde{u}_\alpha$ est une application F-bilinéaire:

$$\tilde{u}_\alpha\ :\ M_d(F) \times M_d(F) \to M_d(F)$$

c'est-à-dire que $\tilde{u}_\alpha \in K^2(M_d(F))$. On calcule facilement que si a, b, $c \in R$, alors:

$$\rho(a)u(b,c) - u(ab,c) + u(a,bc) - u(a,b)\rho(c) = 0$$

Donc $\partial\tilde{u}_\alpha = 0$. Or la cohomologie de Hochschild vérifie l'invariance de Morita ([Lo] I.5.6). En particulier

Théorème 2.3. $HH^*\Big(M_d(F)\Big) = HH^*(F)$

où $HH^*(F)$ est la cohomologie du complexe:

$$F \xrightarrow{0} F \xrightarrow{1} F \xrightarrow{0} F \to \cdots$$

c'est pourquoi $HH^2\Big(M_d(F)\Big) = 0$ et $\tilde{u}_\alpha$, qui est un cocycle, est aussi un cobord. Il existe donc une application linéaire $\tilde{v}_\alpha : M_d(F) \to M_d(F)$ vérifiant:

$$\forall x, y \in M_d(F) \quad \tilde{u}_\alpha(x,y) = x\tilde{v}_\alpha(y) - \tilde{v}_\alpha(xy) + \tilde{v}_\alpha(x)y$$

Posons, pour $a \in R$:

$$v(a) = \sum_{\alpha \in X} \tilde{v}_\alpha\Big(\bar{\rho}(a)\Big) m_\alpha$$

L'application ainsi définie est un morphisme de A-modules:

$$v\ \ : R \to M_d(\mathfrak{m}^\lambda)$$

nul sur $\mathcal{N}$ et vérifiant: $\forall a.b \in R$

$$u(a,b) = \rho(a)v(b) - v(ab) + v(a)\rho(b) \tag{$*$}$$

Puisque v est nul sur $\mathcal{N}$, $\tilde{c} + v$ est un autre prolongement de c à R. En posant $c = \tilde{c} + v$, nous obtenons un morphisme de A-modules:

$$c : R \to M_d(\mathfrak{m}^\lambda)$$

qui vérifie:

$$\forall n \in \mathcal{N} \quad trc(n) = \Delta(n)$$

et, par $(*)$:

$$\forall a, b \in R \quad c(ab) = \rho(a)c(b) + c(a)\rho(b)$$

2.4 Où l'on s'achemine vers une heureuse conclusion

Comme nous l'avions remarqué au début de la deuxième partie, $\rho + c$ est une représentation de R dans A. Elle relève ρ' puisque c est à valeurs dans $M_d(\mathfrak{m}^\lambda)$ et sa représentation résiduelle est $\bar{\rho}$. Quitte à reprendre tout ce que nous avons fait dans cette partie en remplaçant ρ par $\rho + c$ et Δ par $\Delta - tr(c) = T - tr(\rho+c)$, nous pouvons supposer que $\Delta(\mathcal{N}) = 0$. La relation fondamentale (iv): $\forall(a_0, \dots, a_d) \in R^{d+1}$

$$\Delta\Big(a_0 B(a_1, \dots, a_d)\Big) = tr\Big(\rho(a_0)C(a_1, \dots, a_d)\Big)$$

devient alors

$$tr\Big(\rho(a_0)C(a_1, \dots, a_d)\Big) = 0$$

puisque $B(a_1, \dots, a_d) \in \mathcal{N}$. Ainsi $\forall(a_1, \dots, a_d) \in R^d$

$$C(a_1, \dots, a_d) = 0$$

c'est-à-dire que Δ vérifie la relation $(\heartsuit)$

$$\sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_k} \rho(a_{i_1} \dots a_{i_k}) \sum_{\tau \in \mathcal{S}_{d-k}} \epsilon(\tau) \sum_{x=1}^{m_\tau} \left(\prod_{s \neq x} t(a_{j_s^1} \dots a_{j_s^{k_s}})\right) \times \Delta(a_{j_x^1} \dots a_{j_x^{k_x}})$$

Pour achever la démonstration du théorème de récurrence, nous n'avons plus qu'à montrer $tr\rho = T$, c'est-à-dire:

Proposition 2.4. $\Delta = 0$

Démonstration: Comme celle du lemme 2.2.3, cette démonstration est très simple dans le cas où la caractéristique de F ne divise pas d. L'application Δ est A-linéaire de R dans $M_d(\mathfrak{m}^\lambda)$, elle est nulle sur 1_R et sur $\mathcal{N}$, c'est une fonction centrale et elle vérifie $(\heartsuit)$.

Puisque $\Delta(\mathcal{N}) = 0$, Δ est en fait un morphisme $R/\mathcal{N} \to M_d(\mathfrak{m}^\lambda)$ qu'on peut identifier à une application F-linéaire $M_d(F) \to M_d(\mathfrak{m}^\lambda)$ nulle sur les homothéties car $\Delta(1_R) = 0$. Comme Δ est centrale, elle est également nulle sur les matrices de trace nulle. Or, si la caractéristique de F ne divise pas d, $M_d(F)$ est engendrée par ces deux types de matrices puisqu'on peut écrire:

$$M \in M_d(F) \Rightarrow M = \left(M - \frac{1}{d}trM.I_n\right) + \frac{1}{d}trM.I_n$$

Donc $\Delta = 0$.

Pour conclure lorsque la caractéristique de F divise d, il faut appliquer la formule $(\heartsuit)$ à des éléments $a_i \in \rho^{-1}(E_{ii})$ pour $1 \leq i \leq d$. Alors $\rho(a_i a_j) = 0$ si $i \neq j$ et seuls les termes correspondants à $k = 0$ et $k = 1$ subsistent dans $(\heartsuit)$. Pour $k = 0$ on a:

$$\sum_{\tau \in \mathcal{S}_d} \epsilon(\tau) \sum_{x=1}^{m_\tau} \left(\prod_{s \neq x} t(a_{j_s^1} \dots a_{j_s^{k_s}})\right) \times \Delta(a_{j_x^1} \dots a_{j_x^{k_x}})$$

dont tous les termes sont nuls, sauf celui correspondant à $\tau = id$ qui vaut:

$$\sum_{j=1}^{d}\left(\prod_{s\neq j} 1\right)\Delta(a_j) = 0$$

car $\sum_{j=1}^{d} a_j \equiv 1_R \; mod \; \mathcal{N}$ et $\Delta(1) = 0$. Pour $k = 1$ on a:

$$-\sum_{i=1}^{d}\rho(a_i)\sum_{\tau\in\mathscr{S}_{d-1}}\epsilon(\tau)\sum_{x=1}^{m_\tau}\left(\prod_{s\neq x} t(a_{j_s^1}\dots a_{j_s^{k_s}})\right)\times\Delta(a_{j_x^1}\dots a_{j_x^{k_x}})$$

Comme précédemment, il ne reste que les termes où $\tau = id$:

$$-\sum_{i=1}^{d}\rho(a_i)\sum_{j\neq i}\Delta(a_j) = \sum_{i=1}^{d}\Delta(a_i)E_{ii}$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^{d}\Delta(a_i)E_{ii} = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall i \quad 1 \leq i \leq d \quad \Delta(a_i) = 0$$

Lorsqu'on considère Δ comme un morphisme $M_d(F) \longrightarrow M_d(\mathrm{m}^\lambda)$, cela signifie que Δ est nul sur toutes les matrices diagonales. Comme elle est nulle aussi sur les matrices de trace nulle, $\Delta = 0$. □

Ceci achève la démonstration du théorème 1.

3 Déformations

Soit G un groupe profini, F un corps fini de caractéristique p et $\bar{\rho} : G \longrightarrow GL_d(F)$ une représentation continue absolument irréductible. Notons $\mathscr{C}$ la catégorie dont les objets sont les anneaux locaux nœthériens complets de corps résiduel F et dont les morphismes sont les homomorphismes d'anneaux locaux qui induisent l'identité sur F. On dit que G vérifie la condition ϕ_p si, pour chaque sous-groupe ouvert d'indice fini $G_0 \subset G$, il n'y a qu'un nombre fini d'homomorphismes continus de G_0 dans $\mathbb{F}_p$. Dans son article sur les déformations, Mazur a démontré grâce au critère de pro-représentabilité de Schlessinger [Sch], que si G vérifie la condition ϕ_p, il existe un anneau universel de déformation de $\bar{\rho}$ dans la catégorie $\mathscr{C}$.

Soit A un anneau local de corps résiduel F. Rappelons qu'une déformation de $\bar{\rho}$ dans A est une classe d'équivalence de représentations continues $\rho : G \longrightarrow M_d(A)$ dont la représentation résiduelle est $\bar{\rho}$. Une déformation de $tr\bar{\rho}$ dans A est une pseudo-représentation continue $T : G \longrightarrow A$ de dimension d, dont la réduction modulo l'idéal maximal de A est $tr\bar{\rho}$. En déformant $tr\bar{\rho}$ pour un groupe vérifiant ϕ_p, nous obtenons le même résultat que Mazur. Mais notre méthode permet de construire explicitement l'anneau universel. Plus précisément:

Théorème 3. *Si G vérifie la condition ϕ_p, il existe un anneau A_u dans $\mathscr{C}$ et une déformation T_u de $tr\bar{\rho}$ dans A_u qui est universelle au sens suivant: toute déformation T de $tr\bar{\rho}$ dans un anneau A de $\mathscr{C}$ se déduit de T_u par un unique morphisme d'anneaux locaux Φ_A de A_u dans A tel que*

$$T = \Phi_A \circ T_u$$

3.1 Cas des groupes finis

Supposons dans un premier temps que G soit fini. Il vérifie donc la condition ϕ_p. L'anneau $W(F)$ des vecteurs de Witt à cœfficients dans F est un anneau local séparé et complet. Puisque F est parfait, il est nœthérien. Son idéal maximal est $V_1(F) = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid x_0 = 0\} = pW(F)$ et son corps résiduel est F. L'application τ de F dans $W(F)$ donnée par $\tau(x) = (x, 0, 0, \ldots)$ est un morphisme multiplicatif [B.IX.1.6 prop.4]. Considérons l'anneau

$$W = W(F)[[X_g, g \in G]].$$

C'est un anneau local de corps résiduel F, dont l'idéal maximal $\mathfrak{m}_W$ est engendré par p et les $(X_g)_{g\in G}$. D'après [B.III.2.6 prop.6] il est complet pour la topologie $\mathfrak{m}_W$-adique. Prenons dans cet anneau, l'idéal I engendré par les polynômes:

(i) $X_e - d + \tau(d)$

(ii) $\forall g, h \in G \quad X_{gh} - X_{hg}$

(iii) $\forall g_0, \ldots g_d \in G \quad \sum_{\sigma\in\mathscr{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma) \prod_{s=1}^{m_\sigma} \Big(X_{g_{i_s^1}\cdots g_{i_s^{k_s}}} + \tau \circ tr\bar{\rho}(g_{i_s^1} \cdots g_{i_s^{k_s}}) \Big).$

Le noyau de la projection π de W dans F qui prolonge la projection naturelle de $W(F)$ dans F en s'annulant sur tous les X_g est exactement $\mathfrak{m}_W$. Il contient I puisque π est nulle sur tous les polynômes qui engendrent I. Nous pouvons donc construire l'anneau:

$$A_u = W(F)[[X_g, g \in G]] \,/\, I$$

qui est local de corps résiduel F et d'idéal maximal $\mathfrak{m}_u = \mathfrak{m}_W / I$. Il est nœthérien et le corollaire 1 de [B.III.2.12 prop.16] nous dit qu'il est complet pour la topologie $\mathfrak{m}_u$ -adique. L'application

$$T_u \begin{cases} G & \longrightarrow \quad A_u \\ g & \longmapsto \quad \Big(\tau \circ tr\bar{\rho}(g) + X_g\Big) \; mod\, I \end{cases}$$

est une pseudo-représentation continue qui vérifie

$$T_u \; mod\, \mathfrak{m}_u = tr\bar{\rho}.$$

Avant de démontrer que le couple (A_u, T_u) ainsi obtenu est universel, nous pouvons faire quelques remarques sur les morphismes de la catégorie $\mathscr{C}$. D'une part, ils sont toujours continus, puisque ce sont des morphismes d'anneaux locaux. D'autre part, si A est un anneau de $\mathscr{C}$, il est séparé et complet; comme F

est parfait, il existe dans $\mathscr{C}$ un unique morphisme $W(F) \to A$ c'est-à-dire que A possède une unique structure de $W(F)$-algèbre locale [B.IX.2.4 th.12]. L'unicité de cette stucture permet en outre de montrer que les morphismes de $\mathscr{C}$ sont exactement les morphismes de $W(F)$-algèbres.

Ainsi, étant donnés A un anneau de la catégorie $\mathscr{C}$ et T une déformation de $tr\bar{\rho}$ dans A, on définit un morphisme de $W(F)$-algèbres locales de W dans A en posant:

$$\forall g \in G \quad \Phi(X_g) = T(g) - \big(\tau \circ tr\bar{\rho}(g)\big) \cdot 1_A.$$

Alors, Φ est nul sur tous les polynômes qui engendrent I, aussi Φ induit-il un morphisme de $\mathscr{C}$

$$\Phi_A : A_u \longrightarrow A$$

qui vérifie

$$\Phi_A \circ T_u(g) = \tau \circ tr\bar{\rho}(g) \cdot 1_A + T(g) - \tau \circ tr\bar{\rho}(g) \cdot 1_A = T(g)$$

c'est-à-dire

$$\Phi_A \circ T_u = T.$$

Cette relation impose l'unicité d'un morphisme tel que Φ_A. Le théorème 3 est donc vrai si G est un groupe fini.

3.2 Cas des groupes profinis

Supposons à présent que

$$G = \varprojlim_{n>0} G/\Gamma_n$$

où $(\Gamma_n)_{n>0}$ est une suite décroissante de sous-groupes distingués d'indice fini de G, et qu'il vérifie la condition ϕ_p. Comme le noyau K de la représentation $\bar{\rho}$ est ouvert dans G, il existe un entier N tel que $\Gamma_N \subset K$. Alors, pour tout $n \geq N$, $\Gamma_n \subset K$ et

$$G = \varprojlim_{n>0} G/\Gamma_n \cap K.$$

Quitte à remplacer Γ_n par $\Gamma_n \cap K$, on peut supposer que K contient tous les Γ_n, ce qui nous permet de déduire de $\bar{\rho}$, pour chaque n, une représentation absolument irréductible $\bar{\rho}_n : G/\Gamma_n \to GL_d(F)$. On obtient un système projectif tel que

$$\bar{\rho} = \varprojlim_{n>0} \bar{\rho}_n.$$

Puisque chaque groupe G/Γ_n est fini, on peut construire l'anneau universel de déformation de $tr\bar{\rho}_n$

$$A_u^n = W(F)[[X_g, g \in G/\Gamma_n]] \,/\, I_n$$

où I_n est l'idéal de $W(F)[[X_g, g \in G/\Gamma_n]]$ défini comme I au paragraphe précédent. On dispose en outre de la pseudo-représentation universelle T_u^n : $G/\Gamma_n \to A_u^n$ définie par:

$$\forall g \in G/\Gamma_n \quad T_u^n(g) = \left(X_g + \tau \circ tr\bar{\rho}_n(g)\right) \; mod \, I_n.$$

Si $g \in G$ et $n > m$, en associant $X_{g \; mod \, \Gamma_m}$ à $X_{g \; mod \, \Gamma_n}$, on induit un système projectif qui fournit, à la limite, un anneau:

$$A_u = \varprojlim_{n>0} W(F)[[X_g, g \in G/\Gamma_n]] \; / \; I_n$$

et une pseudo-représentation continue:

$$T_u = \varprojlim_{n>0} T_u^n$$

On démontre qu'elle est universelle en écrivant que toute déformation de $tr\bar{\rho}$, parce qu'elle est continue, est la limite d'un système projectif de déformations de $tr\bar{\rho}_n$. Reste à vérifier que l'anneau A_u est dans la catégorie $\mathscr{C}$. En tant que limite projective d'anneaux séparés et complets, il est lui-même séparé et complet. Le plus difficile est de démontrer qu'il est nœthérien.

Nous disposons de deux foncteurs notés $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$: si A est un anneau de $\mathscr{C}$, $\mathscr{F}(A)$ est l'ensemble des déformations de $\bar{\rho}$ dans A et $\mathscr{G}$ celui des déformations de $tr\bar{\rho}$ dans A. Les espaces tangeants à ces foncteurs, obtenus pour $A = F[\varepsilon]$, l'ensemble des nombres duaux où $\varepsilon^2 = 0$, sont des F espaces vectoriels ([Sch] lemme 2.10). Notons $Ad\bar{\rho}$ le F espace vectoriel $M_d(F)$ où G agit par conjugaison via $\bar{\rho}$. On dispose d'un isomorphisme F-linéaire

$$\mathscr{F}(F[\varepsilon]) \simeq \mathrm{H}_c^1(G, Ad\bar{\rho}).$$

Puisque $tr\bar{\rho}$ est absolument irréductible, la trace en induit un autre

$$\mathscr{F}(F[\varepsilon]) \simeq \mathscr{G}(F[\varepsilon])$$

D'après [M], $\mathrm{H}_c^1(G, Ad\bar{\rho})$ est un F espace vectoriel de dimension finie parce que le groupe G vérifie la condition ϕ_p. Donc $\mathscr{G}(F[\varepsilon])$ aussi. Puisque T_u est universelle, $\mathscr{G}(F[\varepsilon])$ est isomorphe à l'ensemble $\mathrm{Hom}_{W(F)}(A_u, F[\varepsilon])$ des homomorphismes de $W(F)$-algèbres locales de A_u dans $F[\varepsilon]$. C'est un F espace vectoriel dont le dual est $\mathfrak{m}_u/\mathfrak{m}_u{}^2 + pA_u$. Ce dernier espace est donc encore de dimension finie. Donc $\mathfrak{m}_u/\mathfrak{m}_u{}^2$ aussi. D'après [B.III.2.10 théorème 2 corollaire 5], puisque A_u est séparé et complet, il est nœthérien. Ainsi, le théorème 3 est vrai.

Remarque: Nous travaillons avec la catégorie $\mathscr{C}$ des anneaux nœthériens et complets, parce que c'est celle utilisée par Mazur. Mais nous pourrions tout aussi bien nous situer dans la catégorie $\mathscr{C}'$, plus grande, des anneaux locaux séparés et complets, de corps résiduel F. Nous n'aurions alors plus besoin de supposer que le groupe profini G vérifie l'hypothèse ϕ_p. Dans ces conditions, la démonstration qui précède permettrait de construire un anneau universel de déformations de la pseudo-représentation $tr\bar{\rho}$ dans la catégorie $\mathscr{C}'$.

Références

[B.III] N. Bourbaki: Algèbre commutative, chapitre 3. Hermann, 1962

[B.IX] N. Bourbaki: Algèbre commutative, chapitre 9. Masson, 1983

[Ca] H. Carayol: Formes modulaires et représentations galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet, publication de l'IRMA, ULP Strasbourg

[Gr] A. Grothendieck: Dix exposés sur la cohomologie des schémas. Advanced Studies in Pure Mathematics, 1968, pp. 46–66

[J] N. Jacobson: Basic Algebra II. San Fransisco, W.H. Freeman and Company, 1980

[Ka] I. Kaplansky: Fields and Rings. Chicago Lectures in Math., 1972

[K-O] M.-A. Knuss, M. Ojanguren: Théorie de la descente et algèbres d'Azumaya. Springer Lecture Notes in Math. 389, 1974

[La] S. Lang: Algebra. Reading, Addison-Wesley, 1984

[Lo] J.-L. Loday: Cyclic Homology. Grundlehren der mathematischen wissenschaften 301, 1992

[M] B. Mazur: Deforming Galois representations in "Galois groups over $\mathbb{Q}$" pp. 385–437. MSRI publications 16, Springer Verlag, 1989

[P] C. Procesi: Invariant Theory of N $\times$ N Matrices. Advances-in-Mathematics, 1976, t. 19 n^o 3, pp. 306–381

[R] R. Rouquier: Caractérisation des caractères et pseudo-représentations. ens, en préparation

[S] K. Saito: Representation varieties of a finitely generated group into SL_2 or GL_2. preprint RIMS Kyoto University

[Sch] M. Schlessinger: Functors on Artin rings. Trans. A.M.S., t. 130, 1968, 208–222

[T] R. Taylor: Galois Representations associated to Siegel Modular forms of low Weight. Duke Math. Journal, t. 63 n^o 2, 1991, pp. 281–332

[W] A. Wiles: On ordinary λ-adic Representation Associated to Modular Forms. Invent. Math., 94, 1988, pp. 529–573