Volumen und Oberfläche.

Von

Hermann Minkowski in Göttingen.

Für die konvexen Körper gibt es einen elementaren Weg, um den Begriff der Oberfläche aus dem einfacheren Begriffe des Volumens heraus zu entwickeln, und in Verfolg dieses Weges gelangt man zu sehr bemerkenswerten Erweiterungen der Tatsache, wonach unter allen Körpern gleichen Volumens die Kugel die kleinste Oberfläche besitzt.

Liegt ein konvexer Körper $\mathfrak{K}$ vor und versteht man unter x, y, z rechtwinklige Koordinaten eines Punktes aus $\mathfrak{K}$, so nimmt ein linearer Ausdruck $ux + vy + wz$, wo u, v, w feste Größen sind, in $\mathfrak{K}$ immer einen bestimmten größten Wert $H(u, v, w)$ an; und diese Funktion $H(u, v, w)$ von drei beliebigen reellen Argumenten, die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{K}$, charakterisiert den konvexen Körper $\mathfrak{K}$ vollkommen. Das Volumen des Körpers $\mathfrak{K}$ erscheint als ein gewisser homogener Ausdruck dritten Grades V_H^3 in den sämtlichen Werten $H(u, v, w)$. Aus diesem Ausdrucke entspringt für drei beliebige konvexe Körper $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ eine polare Bildung, ein symbolisches Produkt $V_{H_1} V_{H_2} V_{H_3}$, das gemischte Volumen der drei Körper $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$. Diese Größe ist invariant bei beliebigen Translationen der einzelnen Körper. Werden zwei der Körper mit einem bestimmten Körper $\mathfrak{K}$, der dritte aber mit einer Kugel vom Radius 1 identifiziert, so ist das dreifache ihres gemischten Volumens die Oberfläche von $\mathfrak{K}$.

Für die gemischten Volumina gilt der wichtige Satz: Für irgend drei Körper vom Volumen 1 wird das gemischte Volumen stets $\geqq 1$ und nur dann $= 1$, wenn die drei Körper mit einander homothetisch sind. Daß jeder konvexe Körper, der keine Kugel ist, eine größere Oberfläche hat als eine Kugel von demselben Volumen, ist nur ein spezieller Fall dieses Satzes.

Diese fundamentale Ungleichung läßt weiter die folgende Auslegung zu: Man bezeichne in der Mannigfaltigkeit aller möglichen Funktionen $H(u, v, w)$ von drei reellen Argumenten u, v, w eine einzelne Funktion

$H(u, v, w)$ als einen „Punkt“, den Inbegriff der aus zwei Funktionen H_1 und H_2 abzuleitenden Funktionen $(1-t)H_1 + tH_2$ für $0 \leqq t \leqq 1$ als die H_1 und H_2 verbindende „Strecke“; alsdann besitzt die Gesamtheit der Stützebenenfunktionen H zu allen denjenigen konvexen Körpern, welche ein Volumen $\geqq 1$ haben, die Eigenschaft, mit irgend zwei Punkten stets die ganze sie verbindende Strecke zu enthalten, stellt also ein „konvexes Gebilde“ in jener Mannigfaltigkeit vor.

Geht man auf die Tangentialebenen des Gebildes ein, so ist sein konvexer Charakter gleichbedeutend mit folgendem Theorem:

Auf der Kugelfläche vom Radius 1 mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt denke man sich Masse in einer beliebigen stetigen und durchweg positiven Flächendichtigkeit ausgebreitet, doch so, daß der Schwerpunkt der ganzen Belegung in den Nullpunkt fällt; alsdann existiert eine geschlossene konvexe Fläche, bei welcher an jeder Stelle das Produkt der Krümmungsradien gleich der Flächendichtigkeit an dem Punkte der Kugel mit gleicher Normale ist; und diese Fläche ist völlig bestimmt bis auf eine beliebige Translation, durch die man sie noch variieren kann.

In diesem Theorem erkennt man eine Aussage über eine gewisse quadratische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Lösbarkeit unter bestimmten Bedingungen hier durch eine eigenartige, wohl noch mancher weiteren Anwendungen fähige Methode sichergestellt wird.

§ 1.

Stützebenenfunktion eines konvexen Körpers.

1. Es seien x, y, z rechtwinklige Koordinaten eines Punktes im Raume, und $\mathfrak{M}$ bedeute eine *abgeschlossene* Menge von Punkten x, y, z, die ganz in einer Kugel von *endlichem* Radius enthalten ist, aber nicht völlig in eine einzige Ebene fällt. Sind u, v, w irgend welche festen Werte, so hat der Ausdruck $ux + vy + wz$ für die Gesamtheit der Punkte x, y, z in $\mathfrak{M}$ ein bestimmtes *Maximum*, das $H(u, v, w)$ heiße.

Diese Funktion $H(u, v, w)$ *von drei beliebigen reellen Argumenten erfüllt* offenbar *folgende Bedingungen* (1)—(4):

$$H(0, 0, 0) = 0, \tag{1}$$

$$H(tu, tv, tw) = tH(u, v, w), \tag{2}$$

wenn $t > 0$ ist. Sind u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 irgend zwei Systeme der Argumente, so gibt es in $\mathfrak{M}$ immer wenigstens einen Punkt x, y, z, wofür

$$(u_1 + u_2)x + (v_1 + v_2)y + (w_1 + w_2)z = H(u_1 + u_2, v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

wird, und da für diesen Punkt sicherlich

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z \leqq H(u_1, v_1, w_1), \quad u_2 x + v_2 y + w_2 z \leqq H(u_2, v_2, w_2)$$

ist, so gilt daher immer:

(3) $$H(u_1+u_2, v_1+v_2, w_1+w_2) \leqq H(u_1, v_1, w_1) + H(u_2, v_2, w_2).$$

Das Maximum von $-(ux+vy+wz)$ in $\mathfrak{M}$ ist $H(-u, -v, -w)$, also gilt in $\mathfrak{M}$ stets:

$$-H(-u, -v, -w) \leqq ux + vy + wz \leqq H(u, v, w).$$

Wenn die Werte $u, v, w \neq 0, 0, 0$ sind, muß daher, da $\mathfrak{M}$ nicht ganz in einer Ebene liegen soll, stets

(4) $$H(u, v, w) + H(-u, -v, -w) > 0$$

sein.

2. Eine Ebene, welche wenigstens einen Punkt der Begrenzung von $\mathfrak{M}$ enthält, aber außer den Punkten, die sie mit $\mathfrak{M}$ gemein hat, $\mathfrak{M}$ ganz auf einer Seite von sich liegen läßt, nennen wir eine *Stützebene an* $\mathfrak{M}$.

Ist $H(u, v, w)$ *eine beliebige reelle Funktion von drei reellen Argumenten* u, v, w, *welche allen den Bedingungen* (1)—(4) *genügt, so bezeichnen wir den Bereich* $\mathfrak{K}$ *von Punkten* x, y, z, *welcher durch die sämtlichen Ungleichungen*

(5) $$ux + vy + wz \leqq H(u, v, w)$$

für alle möglichen Wertsysteme u, v, w *definiert ist, als einen konvexen Körper.*

Die Funktion H nennen wir die *Stützebenenfunktion* von $\mathfrak{K}$, da aus den Ungleichungen (5) offenbar genau die Stützebenen an $\mathfrak{K}$ zu erkennen sind.

Ist $H(u, v, w)$ wie in 1. aus der Punktmenge $\mathfrak{M}$ hergeleitet, so wird der durch die Ungleichungen (5) definierte Bereich $\mathfrak{K}$ *der kleinste,* $\mathfrak{M}$ *enthaltende konvexe Körper*, d. h. $\mathfrak{K}$ ist ein notwendiger Bestandteil *jedes* konvexen Körpers, der $\mathfrak{M}$ ganz in sich aufnimmt.

Ist $\mathfrak{K}^*$ ein zweiter konvexer Körper mit der Stützebenenfunktion $H^*(u, v, w)$, so ist dann und nur dann $\mathfrak{K}$ ganz in $\mathfrak{K}^*$ enthalten, wenn stets

$$H(u, v, w) \leqq H^*(u, v, w)$$

ausfällt.

3. Ein konvexer Körper ist andererseits völlig durch die Eigenschaften zu charakterisieren, *erstens*, daß jede Gerade mit ihm sei es eine Strecke, sei es einen Punkt, sei es keinen Punkt gemein hat, *zweitens*, daß zu ihm wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte gehören.

4. Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Punkt, so verstehen wir unter $\mathfrak{K} + \mathfrak{p}$ den Körper, der aus $\mathfrak{K}$ durch diejenige *Translation* entsteht, durch welche der Nullpunkt nach $\mathfrak{p}$ gelangt. Sind a, b, c die Koordinaten von $\mathfrak{p}$, so wird die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{K} + \mathfrak{p}$:

$$H(u, v, w) + au + bv + cw.$$

Unterwerfen wir $\mathfrak{K}$ einer *Dilatation* vom Nullpunkte aus nach allen Richtungen in einem festen positiven Verhältnisse $t:1$, so bezeichnen wir den entstehenden Körper mit $t\mathfrak{K}$; eine Stützebenenfunktion wird $tH(u, v, w)$.

5. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{G}$ die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$, vom Radius 1 mit dem Nullpunkt $\mathfrak{o}$ als Mittelpunkt, mit $\mathfrak{E}$ die Kugelfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, mit α, β, γ die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf $\mathfrak{E}$, bez. die *Richtung* vom Nullpunkte nach diesem Punkte. Infolge der Eigenschaft (2) sind alle Werte der Funktion H bereits durch deren Werte $H(\alpha, \beta, \gamma)$ für die Punkte auf $\mathfrak{E}$ bestimmt. Die Ungleichung

$$\alpha x + \beta y + \gamma z \leqq H(\alpha, \beta, \gamma)$$

bezeichnen wir als die *Bedingung der Stützebene an $\mathfrak{K}$ mit der äußeren Normale* (α, β, γ).

Die Funktion $H(u, v, w)$ ist nach den Eigenschaften (1)—(4) eine *stetige* Funktion ihrer Argumente, und besitzen infolgedessen die Werte $H(\alpha, \beta, \gamma)$ auf $\mathfrak{E}$ ein bestimmtes *Maximum* G. Ist ein Wert $H(\alpha, \beta, \gamma) \leqq 0$, so ist nach (4) der zugehörige Wert $H(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ positiv und von größerem Betrage; G ist daher jedenfalls > 0. Mit Hülfe von (3) und (2) gewinnen wir die Ungleichung

$$(6) \qquad |H(u-u_0, v-v_0, w-w_0) - H(u_0, v_0, w_0)| \leqq G\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

§ 2.

Annäherung an einen beliebigen konvexen Körper durch vollkommene Ovaloide.

6. Ist $\varphi = 0$ die Gleichung einer Ebene und der konvexe Körper $\mathfrak{K}$ ganz im Bereiche $\varphi \leqq 0$ enthalten, so heißt $\varphi \leqq 0$ ein *Halbraum um* $\mathfrak{K}$. Ist ein Halbraum $\varphi \leqq 0$ um $\mathfrak{K}$ so beschaffen, daß man *nicht* $\varphi = t_1\varphi_1 + t_2\varphi_2$ setzen kann, so daß $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ und $\varphi_1 \leqq 0$, $\varphi_2 \leqq 0$ zwei *verschiedene* Halbräume um $\mathfrak{K}$ sind, so heißt $\varphi \leqq 0$ ein *extremer Halbraum um* $\mathfrak{K}$. Die Ebene $\varphi = 0$ ist dann jedenfalls eine Stützebene an $\mathfrak{K}$ und heißt eine *extreme Stützebene* an $\mathfrak{K}$. Ein konvexer Körper mit einer *endlichen* Anzahl von extremen Stützebenen heißt ein *(konvexes) Polyeder*.

7. Unter einem *vollkommenen Ovaloid* wollen wir einen konvexen Körper verstehen, bei dem die *Begrenzung* durch eine *analytische* Gleichung in den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z definiert wird und überdies in jedem Punkte eine *bestimmte* und immer nur eine *Berührung erster Ordnung* eingehende *Tangentialebene* besitzt.

8. *Ist $\mathfrak{K}$ ein beliebiger konvexer Körper mit dem Nullpunkte als innerem Punkt und ε eine beliebige positive Größe, so läßt sich stets ein vollkommenes Ovaloid $\mathfrak{O}$ bestimmen, so daß $\mathfrak{O}$ den Körper $\mathfrak{K}$ enthält und selbst in $(1+\varepsilon)\,\mathfrak{K}$ enthalten ist.*

Es sei $H(u, v, w)$ die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{K}$. Da der Nullpunkt im Inneren von $\mathfrak{K}$ liegt, ist jede Größe $H(\alpha, \beta, \gamma) > 0$. Es sei nun g das *Minimum* der Werte $H(\alpha, \beta, \gamma)$ auf der Kugelfläche $\mathfrak{E}$, so ist auch $g > 0$. Wir denken uns den ganzen Raum durch ein *Netz von* lauter gleichen *Würfeln* mit einer Kante δ erfüllt. Es sei $\mathfrak{W}$ der Gesamtbereich aller derjenigen Würfel dieses Netzes, welche überhaupt wenigstens einen Punkt von $\mathfrak{K}$ aufnehmen, und $\mathfrak{P}$ der kleinste, diesen Bereich $\mathfrak{W}$ ganz enthaltende konvexe Körper, so ist $\mathfrak{P}$ ein Polyeder, und für jede Richtung (α, β, γ) ist der Abstand derjenigen Stützebene an $\mathfrak{P}$, welche (α, β, γ) als äußere Normale hat, vom Nullpunkte einerseits $\geqq H(\alpha, \beta, \gamma)$, andererseits

$$\leqq H(\alpha, \beta, \gamma) + \delta\sqrt{3} \leqq H(\alpha, \beta, \gamma)\left(1 + \frac{\delta\sqrt{3}}{g}\right).$$

Danach enthält $\mathfrak{P}$ den Körper $\mathfrak{K}$ im Inneren und ist selbst ganz in $\left(1 + \frac{\delta\sqrt{3}}{g}\right)\mathfrak{K}$ enthalten.

Das Polyeder $\mathfrak{P}$ besitze n Seitenflächen; da $\mathfrak{P}$ den Nullpunkt im Inneren enthält, können wir die Bedingungen dieser n extremen Stützebenen an $\mathfrak{P}$ in der Form

$$(7) \qquad \chi_1 \leqq 1, \; \chi_2 \leqq 1, \cdots \chi_n \leqq 1$$

schreiben, so daß dabei $\chi_1, \chi_2, \cdots \chi_n$ *homogene* lineare Ausdrücke in x, y, z sind. Es sei nun ω eine beliebige positive Größe, die wir $> \lg n$ annehmen, und $\mathfrak{Q}$ der durch die Ungleichung

$$(8) \qquad \Omega = e^{\omega\chi_1} + e^{\omega\chi_2} + \cdots + e^{\omega\chi_n} \leqq n e^{\omega}$$

bestimmte Bereich.

Dieser Bereich $\mathfrak{Q}$ enthält jedenfalls das durch die Ungleichungen (7) definierte Polyeder $\mathfrak{P}$ in sich. Andererseits ist $\mathfrak{Q}$ ganz in $\left(1 + \frac{\lg n}{\omega}\right)\mathfrak{P}$ enthalten; denn in jedem Punkte außerhalb des letzteren Polyeders erweist sich stets wenigstens eine der Größen $\chi_1, \chi_2, \cdots \chi_n$ als $> 1 + \frac{\lg n}{\omega}$ und die rechte Seite in (8) daher als $> n e^{\omega}$. Nach der Lagenbeziehung von $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{K}$ wird weiter $\mathfrak{Q}$ den Körper $\mathfrak{K}$ enthalten und selbst in

$$\left(1 + \frac{\delta\sqrt{3}}{g}\right)\left(1 + \frac{\lg n}{\omega}\right)\mathfrak{K}$$

enthalten sein. Wir können nun δ so klein und ω so groß annehmen, daß der hier stehende Faktor von $\mathfrak{K}$ sich $\leqq 1 + \varepsilon$ erweist.

Die Begrenzung von $\mathfrak{Q}$ ist die *analytische* Fläche $\Omega = n e^{\omega}$. Wir finden den Ausdruck

$$(9) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial x} x + \frac{\partial \Omega}{\partial y} y + \frac{\partial \Omega}{\partial z} z = \omega\chi_1 e^{\omega\chi_1} + \omega\chi_2 e^{\omega\chi_2} + \cdots + \omega\chi_n e^{\omega\chi_n},$$

mithin auf der Begrenzung von $\mathfrak{O}$ stets $\geqq \omega e^{\omega} - \frac{n-1}{e}$; denn dort ist in jedem Punkte wenigstens eine der Größen $\chi \geqq 1$ und andererseits gilt immer $\xi e^{\xi} \geqq -\frac{1}{e}$. Mit Berücksichtigung von $e^{\omega} > n$ ersehen wir hieraus, daß auf der Begrenzung von $\mathfrak{O}$ niemals $\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \frac{\partial \Omega}{\partial z}$ gleichzeitig Null sein können, mithin in jedem Punkte dieser Begrenzung stets eine bestimmte Tangentialebene existiert.

Weiter finden wir, wenn x, y, z als lineare Funktionen eines Parameters t dargestellt werden, immer

$$(10) \qquad \frac{d^2\Omega}{dt^2} = \omega^2 \left(\left(\frac{d\chi_1}{dt}\right)^2 e^{\omega\chi_1} + \left(\frac{d\chi_2}{dt}\right)^2 e^{\omega\chi_2} + \cdots + \left(\frac{d\chi_n}{dt}\right)^2 e^{\omega\chi_n} \right) > 0.$$

Aus dieser Beziehung folgt, daß auf einer beliebigen geradlinigen Strecke der Ausdruck $\Omega(x, y, z)$ seinen größten Wert immer an wenigstens einem der Endpunkte annimmt, daß mithin $\mathfrak{O}$ mit irgend zwei Punkten stets die ganze sie verbindende Strecke enthält. Andrerseits ist aus (10) ersichtlich, daß jede Tangentialebene an $\mathfrak{O}$ mit $\mathfrak{O}$ nur eine Berührung erster Ordnung eingeht. Nach allen diesen Umständen besitzt $\mathfrak{O}$ in der Tat die in unserem Satze verlangten Eigenschaften.

9. Auf Grund dieses Satzes können wir weiter zu einem gegebenen konvexen Körper $\mathfrak{K}$, der den Nullpunkt $\mathfrak{o}$ im Inneren enthält, mit einer Stützebenenfunktion H, immer eine unendliche Reihe von vollkommenen Ovaloiden $\mathfrak{O}', \mathfrak{O}'', \cdots$ mit solchen Stützebenenfunktionen $Q', Q'', \cdots$ herstellen, daß die Reihe der Quotienten

$$\frac{Q'(\alpha, \beta, \gamma)}{H(\alpha, \beta, \gamma)}, \frac{Q''(\alpha, \beta, \gamma)}{H(\alpha, \beta, \gamma)}, \cdots$$

nach der Grenze 1 konvergiert und zwar *gleichmäßig* für alle Systeme α, β, γ auf der ganzen Kugelfläche $\mathfrak{E}$. Trifft der hier bezeichnete Umstand zu, so wollen wir sagen, die Reihe der konvexen Körper $\mathfrak{O}', \mathfrak{O}'', \cdots$ hat den konvexen Körper $\mathfrak{K}$ als *Grenze*, oder *konvergiert* nach $\mathfrak{K}$.

Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Punkt, so bezeichnen wir weiter den Körper $\mathfrak{K} + \mathfrak{p}$, der $\mathfrak{p}$ als inneren Punkt enthält, als *Grenze* der Körper

$$\mathfrak{O}' + \mathfrak{p}, \mathfrak{O}'' + \mathfrak{p}, \cdots.$$

§ 3.

Volumen eines konvexen Körpers.

10. Jedem konvexen Körper kommt ein bestimmtes Volumen zu, ferner ein bestimmter Schwerpunkt, welcher stets ein innerer Punkt des Körpers ist.

11. Wir führen für die Punkte α, β, γ der Kugelfläche $\mathfrak{E}$ Polarkoordinaten ein und setzen

$$\alpha = \sin\vartheta\cos\psi, \quad \beta = \sin\vartheta\sin\psi, \quad \gamma = \cos\vartheta,$$

wobei wir ϑ und ψ in den Grenzen $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$, $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$ annehmen. Wir schreiben ferner

$$\alpha_1 = \frac{\partial\alpha}{\partial\vartheta} = \cos\vartheta\cos\psi, \qquad \beta_1 = \frac{\partial\beta}{\partial\vartheta} = \cos\vartheta\sin\psi, \qquad \gamma_1 = \frac{\partial\gamma}{\partial\vartheta} = -\sin\vartheta,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\alpha}{\partial\psi} = -\sin\psi, \qquad \beta_2 = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\beta}{\partial\psi} = \cos\psi, \qquad \gamma_2 = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\gamma}{\partial\psi} = 0;$$

dabei ergeben die drei Gleichungen

$$(11) \quad \xi = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \quad \eta = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \quad \zeta = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

stets eine orthogonale Transformation der Koordinaten x, y, z mit einer Determinante $= +1$.

12. Es sei $\mathfrak{K}$ ein vollkommenes Ovaloid, $\mathfrak{F}$ seine begrenzende Fläche, $H(u, v, w)$ die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{K}$. Wir schreiben

$$H(\alpha, \beta, \gamma) = H(\vartheta, \psi) = H.$$

Die Stützebene an $\mathfrak{K}$ mit der äußeren Normale (α, β, γ) hat die Gleichung

$$(12) \qquad \zeta = H(\vartheta, \psi);$$

sie ist hier zugleich Tangentialebene an $\mathfrak{F}$ und berührt $\mathfrak{F}$ in einem bestimmten Punkte $\mathfrak{p}$. Die ganze Fläche $\mathfrak{F}$ erscheint damit punktweise, durch parallele Normalen, auf die Kugelfläche $\mathfrak{E}$ bezogen. Wir wollen nun unter $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \vartheta, \psi$ speziell die betreffenden Bestimmungsstücke für den Punkt $\mathfrak{p}$ verstehen und die Veränderungen dieser Größen beim Übergang zu einem anderen Punkte auf $\mathfrak{F}$ durch Vorsetzen von Δ andeuten; ferner sollen $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta$ die Werte der Ausdrücke (11) bedeuten, wenn darin $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ an die Stelle von x, y, z treten. Dann gilt auf $\mathfrak{F}$ in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{p}$ für $\Delta\zeta$ eine Entwicklung nach Potenzen von $\Delta\xi, \Delta\eta$:

$$\Delta\zeta = -\frac{1}{2}(\mathsf{P}\Delta\xi^2 + 2\Sigma\,\Delta\xi\,\Delta\eta + \mathsf{T}\Delta\eta^2) + (\Delta\xi, \Delta\eta)_3 + \cdots;$$

darin bilden die quadratischen Glieder eine definite negative Form, es ist also $\mathsf{P} > 0$, $\mathsf{PT} - \Sigma^2 > 0$. Wir können alsdann, da $\mathsf{PT} - \Sigma^2 \neq 0$ ist, in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{p}$ die Werte $\Delta\xi, \Delta\eta$ durch $\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial\Delta\xi}$ und $\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial\Delta\eta}$ ausdrücken, welche letzteren Größen sich sofort mittels $\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma$ darstellen lassen. Daraus erkennen wir, daß die Koordinaten x, y, z des Punktes $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{F}$, wo die äußere Normale die Richtung α, β, γ hat, und weiter der zugehörige Wert $H(\alpha, \beta, \gamma)$ *analytische* Funktionen der Größen α, β, γ auf $\mathfrak{E}$ sind.

Da die Ebene (12) Tangentialebene an $\mathfrak{F}$ ist, haben wir

$$(13)\qquad \alpha\frac{\partial x}{\partial\vartheta}+\beta\frac{\partial y}{\partial\vartheta}+\gamma\frac{\partial z}{\partial\vartheta}=0,\quad \frac{1}{\sin\vartheta}\left(\alpha\frac{\partial x}{\partial\psi}+\beta\frac{\partial y}{\partial\psi}+\gamma\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)=0,$$

und mit Rücksicht hierauf folgen aus den allgemeinen Formeln (11) zur Bestimmung der Koordinaten x, y, z des Punktes $\mathfrak{p}$ die Gleichungen:

$$(14)\qquad \xi=\frac{\partial H(\vartheta,\psi)}{\partial\vartheta},\quad \eta=\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial H(\vartheta,\psi)}{\partial\psi},\quad \zeta=H(\vartheta,\psi).$$

13. Um nun das Volumen V des Körpers $\mathfrak{K}$ auszudrücken, zerlegen wir die Kugelfläche $\mathfrak{E}$ in Flächenelemente $d\omega=\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\psi$; jedem Element $d\omega$ entspricht als Abbild durch parallele Normalen ein Element df auf der Fläche $\mathfrak{F}$, und wir konstruieren jedesmal die Pyramide mit dem Nullpunkt $\mathfrak{o}$ als Spitze und dem Element df als Grundfläche; die Höhe dieser Pyramide, mit gewissem Vorzeichen genommen, ist $=H(\alpha,\beta,\gamma)$ und ihr Volumen mit demselben Vorzeichen daher

$$(15)\qquad \frac{1}{3}H\,df=\frac{1}{3}\left|x,\ \frac{\partial x}{\partial\vartheta},\ \frac{\partial x}{\partial\psi}\right|d\vartheta\,d\psi.$$

(Wir bezeichnen hier und weiterhin eine dreireihige Determinante, in welcher die Glieder der ersten Reihe von der Koordinate x abhängen und die der zweiten und dritten in der entsprechenden Weise mit Hülfe des Zeichens y bez. z darzustellen sind, einfach durch Angabe bloß der ersten Reihe). Der Körper $\mathfrak{K}$ ist nun derart das Aggregat aller jener Elementarpyramiden, daß sein Volumen genau

$$(16)\qquad V=\frac{1}{3}\int H\,df=\frac{1}{3}\int\!\!\int\left|x,\ \frac{\partial x}{\partial\vartheta},\ \frac{\partial x}{\partial\psi}\right|d\vartheta\,d\psi$$

wird, wo die Integrale über die ganze Fläche $\mathfrak{F}$, bez. die ganze Kugelfläche $\mathfrak{E}$ zu erstrecken sind.

14. Wir setzen jetzt

$$\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta^2}+\beta\frac{\partial^2 y}{\partial\vartheta^2}+\gamma\frac{\partial^2 z}{\partial\vartheta^2}=-R,\quad \frac{1}{\sin\vartheta}\left(\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta\,\partial\psi}+\beta\frac{\partial^2 y}{\partial\vartheta\,\partial\psi}+\gamma\frac{\partial^2 z}{\partial\vartheta\,\partial\psi}\right)=-S,$$
$$\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial\psi^2}+\beta\frac{\partial^2 y}{\partial\psi^2}+\gamma\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2}\right)=-T.$$

Durch Differentiation der zwei Gleichungen (13) einmal nach ϑ, einmal nach ψ erhalten wir noch die Beziehungen

$$R=\alpha_1\frac{\partial x}{\partial\vartheta}+\beta_1\frac{\partial y}{\partial\vartheta}+\gamma_1\frac{\partial z}{\partial\vartheta},\quad S=\frac{1}{\sin\vartheta}\left(\alpha_1\frac{\partial x}{\partial\psi}+\beta_1\frac{\partial y}{\partial\psi}+\gamma_1\frac{\partial z}{\partial\psi}\right),$$
$$S=\alpha_2\frac{\partial x}{\partial\vartheta}+\beta_2\frac{\partial y}{\partial\vartheta}+\gamma_2\frac{\partial z}{\partial\vartheta},\quad T=\frac{1}{\sin\vartheta}\left(\alpha_2\frac{\partial x}{\partial\psi}+\beta_2\frac{\partial y}{\partial\psi}+\gamma_2\frac{\partial z}{\partial\psi}\right).$$

Nun gilt

$$\Delta x=\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\Delta\vartheta+\frac{\partial x}{\partial\psi}\Delta\psi+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta^2}\Delta\vartheta^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta\,\partial\psi}\Delta\vartheta\,\Delta\psi+\frac{\partial^2 x}{\partial\psi^2}\Delta\psi^2\right)+\cdots,\cdots;$$

aus den Gleichungen (11) gewinnen wir dann mit Rücksicht auf die letzten Ausdrücke und auf (13):

$$\Delta\xi = R\Delta\vartheta + S\sin\vartheta\,\Delta\psi + \cdots,\qquad \Delta\eta = S\Delta\vartheta + T\sin\vartheta\,\Delta\psi + \cdots,$$
$$\Delta\zeta = -\frac{1}{2}\left(R\Delta\vartheta^2 + 2S\sin\vartheta\,\Delta\vartheta\,\Delta\psi + T\sin^2\vartheta\,\Delta\psi^2\right) + \cdots,$$

und hieraus geht durch Elimination von $\Delta\vartheta$ und $\Delta\psi$ eine Entwicklung

$$\Delta\zeta = -\frac{1}{2}\left(\frac{T\Delta\xi^2 - 2S\Delta\xi\,\Delta\eta + R\Delta\eta^2}{RT-S^2}\right) + (\Delta\xi, \Delta\eta)_3 + \cdots$$

hervor.

Wir entnehmen daraus für die in 12. benutzten Größen $\mathsf{P}, \Sigma, \mathsf{T}$:

$$\mathsf{P} = \frac{T}{RT-S^2},\quad \Sigma = \frac{-S}{RT-S^2},\quad \mathsf{T} = \frac{R}{RT-S^2},$$

sodaß

$$RT - S^2 = \frac{1}{\mathsf{PT} - \Sigma^2}$$

das Produkt,

$$R + T = \frac{\mathsf{P}+\mathsf{T}}{\mathsf{PT}-\Sigma^2}$$

die Summe der Hauptkrümmungsradien der Fläche $\mathfrak{F}$ im Punkte $\mathfrak{p}$ darstellen, während von $\frac{2S}{R-T}$ die Neigung der Krümmungskurven auf $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{p}$ gegen die Richtungen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ abhängt.

Von den Relationen (14) ausgehend, erhalten wir folgende Ausdrücke für R, S, T allein durch die Funktion $H = H(\vartheta, \psi)$:

$$(17)\qquad \begin{cases} R = \dfrac{\partial^2 H}{\partial\vartheta^2} + H, \\[2mm] S = \dfrac{1}{\sin\vartheta}\,\dfrac{\partial^2 H}{\partial\vartheta\,\partial\psi} - \dfrac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\,\dfrac{\partial H}{\partial\psi}, \\[2mm] T = \dfrac{1}{\sin^2\vartheta}\,\dfrac{\partial^2 H}{\partial\psi^2} + \dfrac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\,\dfrac{\partial H}{\partial\vartheta} + H. \end{cases}$$

Dabei wird immer $R > 0$, $RT - S^2 > 0$, und in diesen Ungleichungen sind bereits die allgemeinen Bedingungen (1)—(4) für die Stützebenenfunktion H völlig eingeschlossen.

Setzen wir die Determinante $\left|x, \frac{\partial x}{\partial\vartheta}, \frac{\partial x}{\partial\psi}\right|$ zu ihrer linken Seite mit der Determinante 1 der Substitution (11) zusammen, so finden wir sie $= H(RT-S^2)\sin\vartheta$, sodaß aus (15):

$$(18)\qquad df = (RT-S^2)\,d\omega$$

und aus (16):

$$(19)\qquad V = \frac{1}{3}\int H(RT-S^2)\,d\omega$$

hervorgeht.

Das Volumen V erscheint hiernach als ein gewisser homogener Ausdruck dritten Grades in den Werten $H(\vartheta, \psi)$.

15. Ist ein konvexer Körper $\mathfrak{K}$ die Grenze einer unendlichen Reihe vollkommener Ovaloide $\mathfrak{O}', \mathfrak{O}'', \cdots$, so konvergieren die Volumina dieser Ovaloide nach dem Volumen von $\mathfrak{K}$. Man erschließt diese Tatsache ganz allein mit Hülfe des Umstandes, daß, wenn ein Ovaloid ein anderes in sich enthält, das erstere stets ein größeres Volumen besitzt. Ferner konvergieren die Koordinaten der Schwerpunkte von $\mathfrak{O}', \mathfrak{O}'', \cdots$ nach den Koordinaten des Schwerpunktes von $\mathfrak{K}$.

§ 4.

Scharen konvexer Körper. Gemischtes Volumen dreier Körper.

16. Sind $H_1, H_2, \cdots H_m$ die Stützebenenfunktionen von m konvexen Körpern $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots \mathfrak{K}_m$, so genügt die Funktion

$$H(u, v, w) = t_1 H_1(u, v, w) + t_2 H_2(u, v, w) + \cdots + t_m H_m(u, v, w),$$

wenn die Parameter $t_1, t_2, \cdots t_m$ sämtlich $\geqq 0$, aber nicht durchweg $= 0$ sind, stets ebenfalls allen Bedingungen (1)—(4) in § 1 und bildet daher wiederum die Stützebenenfunktion eines konvexen Körpers. Diesen Körper bezeichnen wir durch

$$\mathfrak{K} = t_1 \mathfrak{K}_1 + t_2 \mathfrak{K}_2 + \cdots + t_m \mathfrak{K}_m \tag{20}$$

und die Gesamtheit aller in solcher Weise aus gegebenen Grundkörpern $\mathfrak{K}_i$ herzuleitenden Körper $\mathfrak{K}$ nennen wir eine *Schar konvexer Körper.*

17. Sind $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots \mathfrak{K}_m$ *vollkommene Ovaloide*, so gilt das gleiche von jedem Körper $\mathfrak{K}$ der Schar (20). Bezeichnen wir die Punkte auf den Begrenzungen von $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_i$, in welchen eine bestimmte (und die nämliche) äußere Normale α, β, γ vorhanden ist, mit x, y, z; x_i, y_i, z_i, so finden wir auf Grund der Gleichungen (14) die Beziehungen gültig:

$$x = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n, \cdots. \tag{21}$$

Stellen wir nun das Volumen V von $\mathfrak{K}$ gemäß der Formel (16) dar, so resultiert mit Rücksicht auf diese Gleichungen (21) für V ein homogener Ausdruck dritten Grades in den Parametern t_i:

$$V = \sum V_{jkl}\, t_j t_k t_l \qquad (j, k, l = 1, 2, \cdots m); \tag{22}$$

die Koeffizienten V_{jkl} mit nicht lauter gleichen Indizes denken wir uns dabei so eingeführt, daß sie bei Permutationen der Indizes sich nicht ändern. Ein jeder Koeffizient V_{jkl} ist allein von den drei zugehörigen Körpern $\mathfrak{K}_j, \mathfrak{K}_k, \mathfrak{K}_l$ abhängig; wir bezeichnen ihn auch mit $V(\mathfrak{K}_j, \mathfrak{K}_k, \mathfrak{K}_l)$ und nennen ihn das *gemischte Volumen* der Körper $\mathfrak{K}_j, \mathfrak{K}_k, \mathfrak{K}_l$.

18. Betrachten wir nun das gemischte Volumen $V_{123} = V(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3)$ dreier vollkommener Ovaloide $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$. Schreiben wir

$$J_{123} = \frac{1}{3}\int\!\!\int \left| x_1, \frac{\partial x_2}{\partial \vartheta}, \frac{\partial x_3}{\partial \psi} \right| d\vartheta\, d\psi$$

und definieren die analogen Ausdrücke für die Permutationen der Indizes 1, 2, 3, so ist

$$6V_{123} = (J_{123} + J_{132}) + (J_{231} + J_{213}) + (J_{312} + J_{321}).$$

Nun gilt

$$\frac{1}{3}\int\!\!\int \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left| x_1, x_2, \frac{\partial x_3}{\partial \psi} \right| d\vartheta\, d\psi = J_{123} - J_{213} + \frac{1}{3}\int\!\!\int \left| x_1, x_2, \frac{\partial^2 x_3}{\partial \vartheta\, \partial \psi} \right| d\vartheta\, d\psi,$$

$$\frac{1}{3}\int\!\!\int \frac{\partial}{\partial \psi}\left| x_1, x_2, \frac{\partial x_3}{\partial \vartheta} \right| d\vartheta\, d\psi = J_{231} - J_{132} + \frac{1}{3}\int\!\!\int \left| x_1, x_2, \frac{\partial^2 x_3}{\partial \vartheta\, \partial \psi} \right| d\vartheta\, d\psi.$$

Die linken Seiten in diesen zwei Gleichungen sind gleich Null, weil die Integranden Differentialquotienten nach ϑ, bez. ψ sind und die Integrationen sich über die ganze Kugelfläche $\mathfrak{E}$ erstrecken. Durch Subtraktion der damit hervorgehenden Relationen folgt nun

$$(23)\qquad J_{123} + J_{132} = J_{231} + J_{213},$$

und durch cyklische Vertauschung von 1, 2, 3 hier finden wir weiter diese Ausdrücke $= J_{312} + J_{321}$, sodaß sich

$$V_{123} = \frac{1}{2}(J_{123} + J_{132})$$

herausstellt.

Multiplizieren wir in J_{123} die Determinante $\left| x_1, \frac{\partial x_2}{\partial \vartheta}, \frac{\partial x_3}{\partial \psi} \right|$ zur linken Seite mit der Determinante 1 der Substitution (11), und bezeichnen wir die den Formeln (17) gemäß herzustellenden Ausdrücke R, S, T für $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ mit den entsprechenden Indizes, so entsteht

$$J_{123} = \frac{1}{3}\int H_1(R_2 T_3 - S_2 S_3)\, d\omega;$$

analog drücken wir J_{132} aus, und wir erhalten endlich

$$(24)\qquad V_{123} = \frac{1}{6}\int H_1(R_2 T_3 - 2 S_2 S_3 + T_2 R_3)\, d\omega.$$

Nach der Gleichung (23) *besteht für diesen Ausdruck die wichtige Eigenschaft, daß er bei beliebigen Permutationen von* 1, 2, 3 *seinen Wert nicht ändert.*

19. Wir knüpfen an diese Formel einige einfache Bemerkungen an. Die Größen R_3, S_3, T_3 bleiben bei einer Translation von $\mathfrak{K}_3$ ungeändert, mithin bleibt dabei auch V_{123} ungeändert, und da $V_{123} = V_{231} = V_{132}$ ist, so folgt allgemein:

Der Wert $V(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3)$ bleibt bei beliebigen Translationen der einzelnen Körper $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ ungeändert.

Der Ausdruck $R_2 T_3 - 2 S_2 S_3 + T_2 R_3$ ist als die Simultaninvariante zweier positiver binärer quadratischer Formen stets > 0. Hat $\mathfrak{K}_1$ den Nullpunkt im Inneren liegen (was sich stets durch eine Translation von $\mathfrak{K}_1$ hervorrufen läßt), so ist durchweg $H_1(\vartheta, \psi) > 0$ und also dann auch $V_{123} > 0$. Mit Rücksicht auf den eben bewiesenen Satz gilt daher allgemein:

Die Größe $V(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3)$ ist stets > 0.

Ist der Körper $\mathfrak{K}_1$ in einem anderen vollkommenen Ovaloide $\mathfrak{K}_1^*$ mit der Stützebenenfunktion H_1^* enthalten, so gilt stets $H_1(\vartheta, \psi) \leqq H_1^*(\vartheta, \psi)$ und entnehmen wir aus (24):

$$V(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3) \leqq V(\mathfrak{K}_1^*, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3). \tag{25}$$

Endlich bemerken wir die Regel: Ist t ein positiver Faktor, so gilt

$$V(t\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3) = t\, V(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3). \tag{26}$$

20. Sind die Körper $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ mit einem und demselben Körper $\mathfrak{K}$ identisch, so wird $V(\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3)$ das *Volumen* von $\mathfrak{K}$.

Die Stützebenenfunktion der Kugel $\mathfrak{G}(x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1)$ ist für die Systeme α, β, γ auf $\mathfrak{E}$ konstant $= 1$. Beziehen sich H, R, S, T auf ein vollkommenes Ovaloid $\mathfrak{K}$ und bezeichnen wir das Oberflächenelement dieses Körpers mit df, seine ganze *Oberfläche* mit O, so folgt daher aus (24):

$$3V(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = \int (RT - S^2)\, d\omega = \int df = O, \tag{27}$$

und durch (23) gelangen wir noch zu dem Ausdrucke

$$O = 3V(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}, \mathfrak{K}) = \frac{1}{2} \int H(R + T)\, d\omega. \tag{28}$$

Andrerseits wird

$$3V(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{K}) = \frac{1}{2} \int (R + T)\, d\omega = \int \frac{\frac{1}{2}(R + T)}{RT - S^2}\, df; \tag{29}$$

die Größe $\dfrac{\frac{1}{2}(R+T)}{RT - S^2}$ hier bedeutet die mittlere Krümmung am Flächenelement df und können wir danach $3V(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{K})$ als *das Integral der mittleren Krümmung* von $\mathfrak{K}$ bezeichnen. Wir haben dann noch die Beziehung

$$3V(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{K}) = 3V(\mathfrak{K}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = \int H\, d\omega. \tag{30}$$

21. Sind $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots \mathfrak{K}_m$ beliebige konvexe Körper, so können wir nach § 2 jeden dieser Körper $\mathfrak{K}_i$ als Grenze einer Reihe vollkommener

Ovaloide $\mathfrak{O}_i$ darstellen. Auf Grund der in 19. abgeleiteten Regeln läßt sich dann zeigen, daß dabei ein jeder Ausdruck $V(\mathfrak{O}_j, \mathfrak{O}_k, \mathfrak{O}_l)$ immer nach einer bestimmten, von der Wahl der annähernden Ovaloide unabhängigen Grenze konvergiert, die wir mit $V(\mathfrak{K}_j, \mathfrak{K}_k, \mathfrak{K}_l)$ bezeichnen und das *gemischte Volumen von* $\mathfrak{K}_j, \mathfrak{K}_k, \mathfrak{K}_l$ nennen. Es übertragen sich dann alle Regeln aus 19. und die Entwicklung (22) sofort auf beliebige konvexe Körper.

Für die gemischten Volumina bestehen einige fundamentale Ungleichungen, die in dem Satze gipfeln, daß irgend drei Körper vom Volumen 1 stets ein gemischtes Volumen $\geqq 1$ ergeben. Als Vorbereitung zum Nachweis dieser Ungleichungen behandeln wir zunächst die entsprechenden Fragen für die Ebene.

§ 5.

Ovale. Gemischter Flächeninhalt zweier Ovale.

22. Wir betrachten jetzt Figuren in einer Ebene $z = \text{const.}$ Es sei $H(u, v)$ eine reelle Funktion zweier reeller Argumente mit den Eigenschaften:

$$H(0, 0) = 0, \quad H(tu, tv) = tH(u, v), \quad \text{wenn} \quad t > 0 \quad \text{ist},$$
$$H(u_1 + u_2, v_1 + v_2) \leqq H(u_1, v_1) + H(u_2, v_2),$$
$$H(u, v) + H(-u, -v) > 0, \quad \text{wenn} \quad u, v \neq 0, 0 \quad \text{ist}.$$

Den durch die sämtlichen Ungleichungen

$$ux + vy \leqq H(u, v)$$

für alle möglichen Systeme u, v definierten Bereich $\mathfrak{F}$ von Punkten x, y in der Ebene $z = \text{const.}$ bezeichnen wir als ein *Oval* in dieser Ebene, und wir nennen $H(u, v)$ die *Stützgeradenfunktion* dieses Ovals. Jedem solchen Oval $\mathfrak{F}$ kommt ein bestimmter Flächeninhalt, ferner ein bestimmter Schwerpunkt zu; der Schwerpunkt wird stets ein innerer Punkt des Ovals.

Ist s ein positiver Wert > 0, so stellt $sH(u, v)$ wieder die Stützgeradenfunktion eines Ovals vor, das wir dann $s\mathfrak{F}$ nennen.

23. Wir bezeichnen ein Oval $\mathfrak{F}$ als ein *vollkommenes Oval*, wenn die Begrenzung von $\mathfrak{F}$ durch eine *analytische* Gleichung in x, y gegeben ist und in jedem Punkte eine *bestimmte* und immer nur eine *Berührung erster Ordnung* eingehende *Tangente* hat.

Ist $\mathfrak{F}$ ein beliebiges Oval mit dem Nullpunkt als Schwerpunkt, und ε eine beliebige positive Größe, so kann man stets ein vollkommenes Oval $\mathfrak{F}^*$, ebenfalls mit dem Nullpunkte als Schwerpunkt, finden, welches $\mathfrak{F}$ enthält und selbst ganz in $(1 + \varepsilon)\,\mathfrak{F}$ enthalten ist. Jedes Oval kann als *Grenze* vollkommener Ovale mit dem nämlichen Schwerpunkt dargestellt werden.

24. Es sei $\mathfrak{F}$ ein vollkommenes Oval, $H(u, v)$ seine Stützgeradenfunktion. Wir bezeichnen mit α, β die Koordinaten eines Punktes der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$ bez. die Richtung von $x = 0$, $y = 0$ nach diesem Punkte, führen $\alpha = \cos\vartheta$, $\beta = \sin\vartheta$, $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ ein und schreiben $H(\alpha, \beta) = H(\vartheta) = H$. Der Krümmungsradius der Begrenzung von $\mathfrak{F}$ in einem Punkte $\mathfrak{p}$, wo die äußere Normale die Richtung (α, β) hat, wird $R = H + \frac{\partial^2 H}{\partial \vartheta^2}$ und der Flächeninhalt von $\mathfrak{F}$ bekommt den Ausdruck:

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} H\left(H + \frac{\partial^2 H}{\partial \vartheta^2}\right) d\vartheta. \tag{31}$$

Wir haben nun in Bezug auf den Flächeninhalt $\mathfrak{F}$ noch einige Bemerkungen zu entwickeln, die bald Anwendung finden werden.

Es sei a der kleinste, A der größte Wert von x in $\mathfrak{F}$ und bezeichnen wir für ein $x \geqq a$ und $\leqq A$ mit $y(x)$ die Länge der zur y-Achse parallelen Sehne von $\mathfrak{F}$, auf welcher der betreffende Abszissenwert x konstant ist. Die Funktion $y(x)$ ist im Inneren des Intervalls $a \leqq x \leqq A$ regulär und an den Grenzen nähert sie sich stetig dem Werte Null. *Ferner ist darin* $\frac{dy}{dx}$ *eine mit wachsendem* x *stets abnehmende Funktion.* Infolgedessen ist weiter insbesondere

$$\frac{\int_a^x \frac{dy}{dx}\,dx}{\int_a^x dx} = \frac{y}{x-a}$$

eine stets abnehmende und analog $\frac{y}{A-x}$ eine stets wachsende Funktion von x.

Der Flächeninhalt F von $\mathfrak{F}$ besitzt nun auch den Ausdruck

$$F = \int_a^A y(x)\,dx. \tag{32}$$

Setzen wir, wenn $a \leqq x \leqq A$ ist,

$$\int_a^x y(x)\,dx = \tau F,$$

so ist $\tau = \tau(x)$ eine solche Funktion der oberen Grenze x dieses Integrals, welche *kontinuierlich* von 0 bis 1 *zunimmt,* während x von a bis A läuft, und *können wir* daher *umgekehrt die obere Grenze dieses Integrals als eine* *bestimmte Funktion* $x(\tau)$ *des Wertes* τ *im Intervalle* $0 \leqq \tau \leqq 1$ *einführen.* Dabei gilt

$$y \frac{dx}{d\tau} = F, \qquad \frac{d(y^2)}{d\tau} = 2F \frac{dy}{dx}.$$

Nach der zweiten Gleichung hier wird $\frac{d(y^2)}{d\tau}$ eine mit wachsendem τ stets abnehmende Funktion von τ; infolgedessen ist weiter $\frac{y^2}{\tau}$ eine stets abnehmende, $\frac{y^2}{1-\tau}$ eine stets zunehmende Funktion von τ.

Die Länge der Sehne $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{F}$ auf der Geraden $x = \frac{a+A}{2}$, also $y\left(\frac{a+A}{2}\right)$, sei $= h$. Die Tangenten an $\mathfrak{F}$ in den Endpunkten dieser Sehne bilden mit den Geraden $x = a$ und $x = A$ ein Trapez, welches $\mathfrak{F}$ ganz in sich enthält; also folgt

$$(A-a)h \geqq F. \tag{33}$$

Andrerseits enthält $\mathfrak{F}$ das Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ mit jener Sehne $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ als Basis und der Spitze in dem Punkte $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{F}$, für den $x = a$ ist; daher gilt

$$\frac{1}{4}(A-a)h < \tau\left(\frac{a+A}{2}\right) F,$$

woraus mit Rücksicht auf (33) nun $\tau\left(\frac{a+A}{2}\right) < \frac{1}{4}$ hervorgeht; analog finden wir $\tau\left(\frac{a+A}{2}\right) > \frac{3}{4}$.

Für einen Wert $\tau > \frac{3}{4}$ fällt danach stets $x(\tau) > \frac{a+A}{2}$ aus; da $\frac{y}{A-x}$ und $\frac{y^2}{1-\tau}$ mit wachsendem x bez. τ zunehmen, haben wir alsdann

$$\frac{y}{A-x} > \frac{h}{\frac{1}{2}(A-a)}, \quad (1-\tau)F = \int_x^A y\,dx > \frac{(A-x)^2 h}{A-a},$$

woraus mit Rücksicht auf (33) sich

$$A - x(\tau) < (A-a)\sqrt{1-\tau} \tag{34}$$

ergibt, und erhalten wir andrerseits

$$\frac{y^2}{1-\tau} > \frac{h^2}{1-\tau\left(\frac{a+A}{2}\right)} > \frac{4}{3}h^2, \quad \frac{y^2}{\tau} > \frac{4}{3}\,\frac{(1-\tau)}{\tau}\,\frac{F^2}{(A-a)^2} \tag{35}$$

Nehmen wir an, der Schwerpunkt von $\mathfrak{F}$ liege im Nullpunkte, so führt die Betrachtung der x-Koordinate des Schwerpunktes zur Gleichung

$$0 = \frac{1}{F}\int_a^A xy\,dx = \int_0^1 x\,d\tau,$$

woraus durch partielle Integration

$$(36)\qquad A = \int_a^A \tau\, dx, \quad A = F\int_0^1 \frac{\tau\, d\tau}{y}$$

folgt. Zerlegen wir $\mathfrak{F}$ in die Dreiecke mit a als Spitze und den einzelnen Bogenelementen des Umfangs von $\mathfrak{F}$ als Grundlinien, so ist für den Schwerpunkt eines jeden dieser Dreiecke offenbar $A - x > \frac{1}{3}(A-a)$ und muß die gleiche Relation daher auch für den Schwerpunkt von $\mathfrak{F}$ selbst gelten, d. h. wir haben

$$(37)\qquad A > \frac{A-a}{3}.$$

25. Es seien $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zwei beliebige Ovale und $H_1(u, v)$, $H_2(u, v)$ ihre Stützgeradenfunktionen; alsdann bildet $(1-t)\,H_1(u, v) + tH_2(u, v)$, wenn $t > 0$ und < 1 ist, immer ebenfalls die Stützgeradenfunktion eines Ovals, das mit $\mathfrak{F} = (1-t)\mathfrak{F}_1 + t\mathfrak{F}_2$ bezeichnet werde. Dieser Herstellung von $\mathfrak{F}$ steht folgende Erzeugungsweise desselben Ovals dual gegenüber. Man verbinde jeden Punkt $\mathfrak{k}_1$ von $\mathfrak{F}_1$ mit jedem Punkte $\mathfrak{k}_2$ von $\mathfrak{F}_2$ und teile immer die Verbindungsstrecke $\mathfrak{k}_1\mathfrak{k}_2$ in einem Punkte $\mathfrak{k}$ so, daß

$$\mathfrak{k} = (1-t)\,\mathfrak{k}_1 + t\mathfrak{k}_2$$

ist (d. h. daß die Längen der Strecken $\mathfrak{k}_1\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}\mathfrak{k}_2$ sich wie $t : 1 - t$ verhalten). Die Menge aller verschiedenen Punkte $\mathfrak{k}$, die auf diese Weise gefunden werden, bildet dann genau den Bereich des Ovals $\mathfrak{F}$. Bei dieser Konstruktion von $\mathfrak{F}$ denken wir uns zweckmäßig $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ in zwei verschiedenen Ebenen $z =$ const., etwa $\mathfrak{F}_1$ in $z = 0$ und $\mathfrak{F}_2$ in $z = 1$ gelegen; alsdann stellt $\mathfrak{F} = (1-t)\mathfrak{F}_1 + t\mathfrak{F}_2$ den Schnitt des kleinsten, die beiden Ovale $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ ganz enthaltenden konvexen Körpers mit der Ebene $z = t$ vor.

Der Flächeninhalt des Ovals $\mathfrak{F}$ besitzt einen Ausdruck

$$(38)\qquad F = (1-t)^2 F_{11} + 2(1-t)tF_{12} + t^2 F_{22},$$

wobei F_{11} den Flächeninhalt von $\mathfrak{F}_1$, F_{22} den von $\mathfrak{F}_2$ und F_{12} eine weitere Konstante bedeutet, die wir den *gemischten Flächeninhalt* von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ nennen. F_{12} ändert sich nicht bei beliebigen Translationen von $\mathfrak{F}_1$ oder von $\mathfrak{F}_2$.

Sind $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ vollkommene Ovale, so finden wir, von der Formel (31) ausgehend,

$$F_{12} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} H_1\left(H_2 + \frac{\partial^2 H_2}{\partial \vartheta^2}\right) d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} H_2\left(H_1 + \frac{\partial^2 H_1}{\partial \vartheta^2}\right) d\vartheta,$$

worin H_1 für $H_1(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ und H_2 für $H_2(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ steht.

Stellt $\mathfrak{F}_2$ die Kreisfläche $x^2+y^2 \leqq 1$ vor, so ist H_2 hier konstant $=1$, $F_{22}=\pi$ und wird $2F_{12}$ die *Länge des Umfangs* von $\mathfrak{F}_1$.

26. Wir wollen nun den Satz beweisen, *daß stets die Ungleichung gilt:*

$$F_{12} \geqq \sqrt{F_{11}F_{22}}. \tag{39}$$

Diese Ungleichung ist gleichbedeutend mit folgender Beziehung für den in (38) entwickelten Ausdruck F:

$$\sqrt{F} \geqq (1-t)\sqrt{F_{11}} + t\sqrt{F_{22}}. \tag{40}$$

Von besonderem Werte ist es, auch die Grenzfälle der Ungleichung (39) mit aufzuklären. Wir werden den Zusatz gewinnen, *daß in dieser Ungleichung dann und nur dann das Gleichheitszeichen eintritt, wenn* $\mathfrak{F}_1$ *und* $\mathfrak{F}_2$ *homothetisch sind* (d. h. aus einander durch Translation und Dilatation hervorgehen, mit einander ähnlich und ähnlich gelegen sind).

Wir denken uns der Einfachheit wegen den Schwerpunkt von $\mathfrak{F}_1$ wie den von $\mathfrak{F}_2$ im Nullpunkte gelegen (was stets durch Translation dieser Ovale zu erreichen ist). Alsdann sind $H_1(\alpha, \beta)$ und $H_2(\alpha, \beta)$ immer >0. Auf der Kreislinie $\alpha^2+\beta^2=1$ hat die daselbst stetige Funktion

$$\frac{\sqrt{F_{11}}\,H_2(\alpha, \beta)}{\sqrt{F_{22}}\,H_1(\alpha, \beta)} \tag{41}$$

ein bestimmtes *Maximum*, das wir D nennen. Dieser Wert hat die Bedeutung, daß das Oval $\frac{1}{\sqrt{F_{22}}}\mathfrak{F}_2$ vom Flächeninhalt 1 im Oval $\frac{s}{\sqrt{F_{11}}}\mathfrak{F}_1$ vom Flächeninhalt s^2 enthalten ist, wenn $s \geqq D$ ist, aber nicht ganz darin enthalten, wenn $s<D$ ist. Sind $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ homothetisch, so decken sich die Ovale $\frac{1}{\sqrt{F_{22}}}\mathfrak{F}_2$ und $\frac{1}{\sqrt{F_{11}}}\mathfrak{F}_1$ und ist daher auch ihr gemischter Flächeninhalt $=1$, also $F_{12}=\sqrt{F_{11}F_{22}}$ und wird andrerseits $D=1$.

Jetzt verfolgen wir die Annahme, daß $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ *nicht homothetisch* sind. Alsdann muß $D>1$ ausfallen. Wir werden nun eine Ungleichung aufstellen

$$\frac{F_{12}}{\sqrt{F_{11}F_{22}}} - 1 \geqq \Pi(D),$$

worin $\Pi(D)$ eine stetige Funktion von D sein wird, die für ein $D>1$ stets >0 ist. Diese Beziehung setzt dann in Evidenz, daß stets $F_{12}>\sqrt{F_{11}F_{22}}$ wird, wenn $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ nicht homothetisch sind.

Eine Beziehung von diesem Charakter mit einer stetigen Funktion $\Pi(D)$ *braucht offenbar nur für vollkommene Ovale erwiesen zu werden.* Durch unseren Hülfssatz in 23. über die Annäherung eines beliebigen Ovals durch vollkommene Ovale gilt sie dann sofort für alle Ovale.

27. Es seien nunmehr $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zwei vollkommene Ovale und sie seien nicht homothetisch. Wir drehen die Koordinatenachsen um den Nullpunkt derart, daß die positive x-Achse in eine solche Richtung fällt, wofür die Funktion (40) ihren größten Wert D erhält, d. h. also, wir nehmen

$$(42) \qquad \frac{\sqrt{F_{11}}\,H_2(1,0)}{\sqrt{F_{22}}\,H_1(1,0)} = D$$

an.

Es sei jetzt t irgend ein bestimmter Wert > 0 und < 1; wir gebrauchen für das Oval $\mathfrak{F} = (1-t)\mathfrak{F}_1 + t\mathfrak{F}_2$ die Zeichen a, A, $y(x)$ in derselben Weise, wie sie für ein Oval $\mathfrak{F}$ in 24. erklärt sind; die entsprechenden Größen für $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ bezeichnen wir mit a_1, A_1, $y_1(x)$, a_2, A_2, $y_2(x)$; insbesondere ist $A_1 = H_1(1, 0)$, $A_2 = H_2(1, 0)$. Alsdann bestehen für a und A, den kleinsten bez. größten Wert von x in $\mathfrak{F}$, die Ausdrücke

$$(43) \qquad a = (1-t)a_1 + ta_2, \quad A = (1-t)A_1 + tA_2.$$

Die Flächeninhalte von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ stellen wir gemäß der Formel (32) dar:

$$(44) \qquad F_{11} = \int_{a_1}^{A_1} y_1(x)\,dx, \quad F_{22} = \int_{a_2}^{A_2} y_2(x)\,dx.$$

Wir setzen nun, wenn $a_1 \leqq x_1 \leqq A_1$, $a_2 \leqq x_2 \leqq A_2$ ist,

$$(45) \qquad \int_{a_1}^{x_1} y_1(x)\,dx = \tau F_{11}, \quad \int_{a_2}^{x_2} y_2(x)\,dx = \tau F_{22}$$

und führen die oberen Grenzen dieser Integrale als Funktionen $x_1(\tau)$, $x_2(\tau)$ des Wertes τ ein, der sich im Intervalle $0 \leqq \tau \leqq 1$ bewegt. Indem wir unter τ in diesen beiden Funktionen ein und dasselbe Argument verstehen, wird ein gewisser Zusammenhang zwischen den zur y-Achse parallelen Sehnen von $\mathfrak{F}_1$ und von $\mathfrak{F}_2$ hergestellt*).

Wir ziehen jetzt die in 25. angegebene Methode zur Erzeugung des Ovals $\mathfrak{F}$ aus den Punkten von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ heran und bringen sie zunächst auf die Punkte der Sehne $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1$ von $\mathfrak{F}_1$ auf der Geraden $x = x_1(\tau)$ und der Sehne $\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$ von $\mathfrak{F}_2$ auf der Geraden $x = x_2(\tau)$ in Anwendung; dadurch erkennen wir, daß zu $\mathfrak{F}$ auf der Geraden

$$(46) \qquad x = (1-t)\,x_1(\tau) + t\,x_2(\tau)$$

*) Die Idee dieser Zuordnung der parallelen Sehnen in zwei Ovalen nach dem Verhältnis der je zwei Flächenstücke, in welche sie die Ovale zerschneiden, rührt von Herrn H. Brunn her (vgl. *Ovale und Eiflächen*, Inauguraldissertation, München, 1887, pag. 23).

jedenfalls alle diejenigen Punkte gehören müssen, welche diese Gerade aus dem Trapeze $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_2$ herausschneidet. Die Längen der Sehnen $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$ sind $y_1(x_1(\tau))$ bez. $y_2(x_2(\tau))$; danach muß für die Länge $y(x)$ der Sehne $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{F}$ auf der durch (46) angewiesenen Geraden jedenfalls die Ungleichung

$$y(x) \geqq (1-t)\, y_1(x_1(\tau)) + t y_2(x_2(\tau)) \tag{47}$$

gelten.

Für den Flächeninhalt F des Ovals $\mathfrak{F}$ haben wir

$$F = \int_a^A y(x)\, dx.$$

Nun wächst die durch (46) gegebene Funktion x kontinuierlich und läuft nach (43) in den Grenzen a bis A, wenn τ von 0 bis 1 zunimmt, und können wir sie daher als Variable in dieses Integral für F einführen. Schreiben wir zur Abkürzung x_1, y_1 und x_2, y_2 für $x_1(\tau)$, $y_1(x_1(\tau))$ und $x_2(\tau)$, $y_2(x_2(\tau))$ und machen von (47) Gebrauch, so ergibt sich

$$F \geqq \int_0^1 ((1-t)\, y_1 + t y_2) \left((1-t)\, \frac{dx_1}{d\tau} + t\, \frac{dx_2}{d\tau}\right) d\tau.$$

Jetzt ziehen wir den Ausdruck (38) für F heran und benutzen die Gleichungen (44); dadurch erhalten wir

$$2 F_{12} \geqq \int_0^1 \left(y_1\, \frac{dx_2}{d\tau} + y_2\, \frac{dx_1}{d\tau}\right) d\tau.$$

Hier führen wir gemäß (45):

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{F_{11}}{y_1}, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{F_{22}}{y_2}$$

ein, und wir erzielen endlich

$$2\left(F_{12} - \sqrt{F_{11} F_{22}}\right) \geqq \int_0^1 \frac{\left(y_1 \sqrt{F_{22}} - y_2 \sqrt{F_{11}}\right)^2}{y_1 y_2}\, d\tau. \tag{48}$$

Andrerseits haben wir der Formel (36) zufolge:

$$A_1 = F_{11} \int_0^1 \frac{\tau\, d\tau}{y_1}, \quad A_2 = F_{22} \int_0^1 \frac{\tau\, d\tau}{y_2},$$

mithin

$$\int_0^1 \frac{y_1 \sqrt{F_{22}} - y_2 \sqrt{F_{11}}}{y_1 y_2}\, \tau\, d\tau = \frac{A_2}{\sqrt{F_{22}}} - \frac{A_1}{\sqrt{F_{11}}} = (D-1)\, \frac{A_1}{\sqrt{F_{11}}} > 0. \tag{49}$$

Mit Hülfe der letzteren Beziehung suchen wir eine positive untere Grenze für das Integral auf der rechten Seite in (48) herzuleiten; dabei entsteht eine Schwierigkeit durch den Umstand, daß $\frac{\tau}{\sqrt{y_1 y_2}}$ bei Annäherung an $\tau = 1$ über jede Grenze hinauswächst. Es sei nun δ eine positive Größe $< \frac{1}{4}$, so gilt

$$F_{22} \int_{1-\delta}^{1} \frac{\tau\, d\tau}{y_2} < F_{22} \int_{1-\delta}^{1} \frac{d\tau}{y_2} = A_2 - x_2(1-\delta);$$

mit Rücksicht auf (34) und (37) finden wir die rechte Seite hier $< 3 A_2 \sqrt{\delta}$, und wir erhalten aus (49) die Ungleichung

$$(50) \qquad \int_0^{1-\delta} \frac{y_1 \sqrt{F_{22}} - y_2 \sqrt{F_{11}}}{y_1 y_2} \tau\, d\tau > \left(D\left(1 - 3\sqrt{\delta}\right) - 1\right) \frac{A_1}{\sqrt{F_{11}}} \cdot$$

Die Ungleichung (48) bleibt bestehen, wenn wir die Integration rechts nur bis zur oberen Grenze $1 - \delta$ erstrecken. Im Intervalle 0 bis $1 - \delta$ sind zufolge einer in 24. gemachten Bemerkung $\frac{y_1}{\sqrt{\tau}}$ und $\frac{y_2}{\sqrt{\tau}}$ beständig abnehmende Funktionen und haben wir mit Rücksicht auf (35) und (37) und auf $\tau < 1$ durchweg

$$\frac{y_1 y_2}{\tau^2} > \frac{4}{27} \delta \frac{F_{11} F_{22}}{A_1 A_2};$$

damit erhalten wir aus (48) die Beziehung

$$2\left(F_{12} - \sqrt{F_{11} F_{22}}\right) \geqq \frac{4}{27} \delta \frac{F_{11} F_{22}}{A_1 A_2} \int_0^{1-\delta} \frac{\left(y_1 \sqrt{F_{22}} - y_2 \sqrt{F_{11}}\right)^2}{y_1^2 y_2^2} \tau^2 d\tau .$$

Bezeichnen wir den Integranden in (50) zur Abkürzung mit Ψ, so ist

$$\int_0^{1-\delta} (\Psi + s)^2 d\tau$$

für jeden reellen Wert von s stets $\geqq 0$ und gilt infolgedessen

$$(51) \qquad \int_0^{1-\delta} \Psi^2 d\tau \geqq \frac{1}{1-\delta} \left(\int_0^{1-\delta} \Psi\, d\tau\right)^2 .$$

Diese Beziehung führt uns nun mit Rücksicht auf (50) und, wenn wir noch hier rechts $1 - \delta$ im Nenner durch 1 ersetzen, zu

$$2\left(F_{12} - \sqrt{F_{11} F_{22}}\right) \geqq \frac{4}{27} \delta \frac{F_{11} F_{22}}{A_1 A_2} \frac{A_1^2}{F_{11}} \left(D\left(1 - 3\sqrt{\delta}\right) - 1\right)^2 .$$

Das Maximum von $3\sqrt{\delta}(D-1-3D\sqrt{\delta})$ tritt für $3\sqrt{\delta}=\frac{D-1}{2D}$ ein, wobei $\delta<\frac{1}{36}$, also gewiß $<\frac{1}{4}$ ist, und wird $=\frac{(D-1)^2}{4D}$. Mit diesem Werte von δ entsteht, wenn wir noch von (42) Gebrauch machen:

(52)
$$\frac{F_{12}}{\sqrt{F_{11}F_{22}}}-1\geqq\frac{1}{2^3\cdot 3^5}\,\frac{(D-1)^4}{D^3}.$$

In der hier geschriebenen Form (mit dem Zeichen $\geqq$) überträgt sich diese Relation unmittelbar auf beliebige Ovale; sie liefert in der Tat den Satz, *daß stets* $F_{12}>\sqrt{F_{11}F_{22}}$ *ist, wenn* $\mathfrak{F}_1$ *und* $\mathfrak{F}_2$ *nicht homothetisch sind.*

28. Nehmen wir für $\mathfrak{F}_2$ eine Kreisfläche vom Radius 1, so bedeutet $2F_{12}$ die Länge des Umfangs von $\mathfrak{F}_1$, während $F_{22}=\pi$ zu setzen ist. Die für diesen Fall aus (39) entstehende Ungleichung

$$\frac{2F_{12}}{2\pi}\geqq\sqrt{\frac{F_{11}}{\pi}}$$

besagt, *daß jedes Oval, welches von einem Kreise verschieden ist, immer kleineren Inhalt besitzt als ein Kreis von demselben Umfange. Diese Aussage läßt sich sogleich auch auf nicht konvexe Flächen ausdehnen*, indem zu jeder abgeschlossenen und zusammenhängenden Figur, welche nicht ein Oval vorstellt und welcher ein bestimmter Flächeninhalt und eine bestimmte Länge des Umfanges zukommt, immer ein bestimmtes kleinstes, die Figur ganz enthaltendes Oval gehört, und für dieses der Flächeninhalt größer, der Umfang kleiner ausfällt als für die Ausgangsfigur.

§ 6.

Eine kubische Ungleichung für die gemischten Volumina.

29. Wir suchen jetzt die entsprechenden Tatsachen für den Raum abzuleiten. Zunächst schicken wir einige Hülfsbemerkungen voraus.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein vollkommenes Ovaloid, c der kleinste, C der größte Wert von z in $\mathfrak{K}$; für jeden Wert $z\geqq c$ und $\leqq C$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}(z)$ den Schnitt von $\mathfrak{K}$ mit der Ebene, in welcher der betreffende Wert z konstant ist, mit $(f(z))^2$ den Flächeninhalt von $\mathfrak{F}(z)$. Für die Werte im Inneren des Intervalls $c\leqq z\leqq C$ stellt $\mathfrak{F}(z)$ Ovale vor und ist die Funktion $f(z)$ immer regulär, an den Grenzen nähert sich $f(z)$ stetig dem Werte Null. Ist $c<z'<z<z''<C$, $z=(1-t)z'+tz''$, so enthält das Schnittoval $\mathfrak{F}(z)$, da $\mathfrak{K}$ ein konvexer Körper ist, jedenfalls das ganze durch $(1-t)\mathfrak{F}(z')+t\mathfrak{F}(z'')$ dargestellte Oval in sich und gilt daher zufolge der Ungleichung (40) sicherlich

$$f(z)\geqq(1-t)f(z')+tf(z'').$$

Auf Grund dieser Eigenschaften erkennen wir, wenn wir z und f als rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene deuten, daß der Bereich

$$c \leqq z \leqq C, \quad 0 \leqq f \leqq f(z) \tag{53}$$

ein Oval in dieser Ebene vorstellt, und nimmt infolgedessen $\frac{df(z)}{dz}$ mit wachsendem z beständig ab.

Das Volumen V von $\mathfrak{K}$ drückt sich durch

$$V = \int_c^C (f(z))^2 \, dz \tag{54}$$

aus. Setzen wir nun, wenn $c \leqq z \leqq C$ ist,

$$\int_c^z (f(z))^2 \, dz = \tau V,$$

so wächst $\tau = \tau(z)$ kontinuierlich von 0 bis 1, während die obere Grenze z von c bis C zunimmt; wir können dann umgekehrt die obere Grenze z dieses Integrals als eine bestimmte Funktion $z(\tau)$ des Wertes τ einführen, die ihrerseits kontinuierlich von c bis C zunehmen wird, während τ von 0 bis 1 wächst. Dabei gilt, wenn wir zur Abkürzung $f(z(\tau)) = f$ setzen,

$$f^2 \frac{dz}{d\tau} = V.$$

Wir entnehmen daraus weiter

$$\frac{d(f^3)}{d\tau} = 3 \frac{df}{dz} V,$$

sodaß auch $\frac{d(f^3)}{d\tau}$ mit wachsendem τ beständig abnimmt; infolgedessen wird weiter $\frac{f^3}{\tau}$ eine beständig abnehmende und andrerseits $\frac{f^3}{1-\tau}$ eine beständig zunehmende Funktion von τ sein.

Betrachten wir wieder das durch (53) bestimmte Oval in seiner zf-Ebene. Es sei h die Länge derjenigen Sehne dieses Ovals, auf der $z = \frac{c+C}{2}$ ist, also $h = f\left(\frac{c+C}{2}\right)$. Die Tangente des Ovals im Endpunkte $f = h$ dieser Sehne bildet mit den Geraden $z = c$, $z = C$ und $f = 0$ ein Trapez, in welchem das Oval ganz enthalten ist; dadurch ergibt sich

$$V < \frac{4}{3}(C-c)h^2. \tag{55}$$

Andrerseits ist das Dreieck mit jener Sehne als Basis und der Spitze $z = c$, $f = 0$ ganz im Bereiche $z \leqq \frac{c+C}{2}$ des Ovals enthalten, und geht hieraus

$$\frac{1}{6}(C-c)h^2 < \tau\left(\frac{c+C}{2}\right) V$$

hervor; mit Rücksicht auf die Relation (55) erhalten wir sodann

$$\tau\left(\frac{c+C}{2}\right)>\frac{1}{8}.$$

Analog finden wir $1-\tau\left(\frac{c+C}{2}\right)<\frac{1}{8}$, also $\tau\left(\frac{c+C}{2}\right)>\frac{7}{8}$.

Für einen Wert $\tau>\frac{7}{8}$ wird demnach immer $z(\tau)>\frac{c+C}{2}$ sein; es folgt dann

$$\frac{f(z)}{C-z}>\frac{h}{\frac{1}{2}(C-c)},\quad (1-\tau)V=\int\limits_z^C (f(z))^2 dz>\frac{4}{3}\,\frac{(C-z)^3}{(C-c)^2}h^2,$$

woraus mit Hülfe von (55) die Ungleichung

(56) $$C-z(\tau)<(C-c)\sqrt[3]{1-\tau}$$

hervorgeht, und es ergibt sich ferner

(57) $$\frac{(f(z))^3}{1-\tau}>\frac{h^3}{1-\tau\left(\frac{c+C}{2}\right)}>\frac{8}{7}h^3,\quad \frac{(f(z))^3}{\tau}>\frac{8}{7}\,\frac{1-\tau}{\tau}\left(\frac{3}{4}\,\frac{V}{C-c}\right)^{\frac{3}{2}},$$

Nehmen wir den Schwerpunkt von $\mathfrak{K}$ im Nullpunkt gelegen an, so führt die Betrachtung der z-Koordinate dieses Schwerpunkts zur Gleichung

(58) $$0=\frac{1}{V}\int\limits_c^C zf^2\,dz=\int\limits_0^1 z\,d\tau,\quad C=\int\limits_c^C \tau\,dz=V\int\limits_0^1\frac{\tau\,d\tau}{f^2}.$$

Zerlegen wir $\mathfrak{K}$ in lauter Pyramiden mit der Spitze in demjenigen Punkte von $\mathfrak{K}$, für den $z=c$ ist, und mit den einzelnen Oberflächenelementen von $\mathfrak{K}$ als Grundflächen, so ist für den Schwerpunkt einer jeden dieser Pyramiden $C-z>\frac{1}{4}(C-c)$ und gilt daher die gleiche Relation auch für den Schwerpunkt von $\mathfrak{K}$ selbst, d. h. man hat

(59) $$C-c<4C.$$

30. Es seien jetzt $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zwei beliebige konvexe Körper mit den Stützebenenfunktionen H_1 und H_2 und t ein beliebiger Wert >0 und <1. Verbindet man jeden Punkt $\mathfrak{k}_1$ von $\mathfrak{K}_1$ mit jedem Punkte $\mathfrak{k}_2$ von $\mathfrak{K}_2$ und teilt die Strecke $\mathfrak{k}_1\mathfrak{k}_2$ immer in dem Punkte $\mathfrak{k}=(1-t)\mathfrak{k}_1+t\mathfrak{k}_2$, so erfüllt die Gesamtheit aller verschiedenen in dieser Weise entstehenden Punkte $\mathfrak{k}$ genau den konvexen Körper $\mathfrak{K}=(1-t)\mathfrak{K}_1+t\mathfrak{K}_2$, der als Stützebenenfunktion $H=(1-t)H_1+tH_2$ besitzt (vgl. hierzu die Formel (21) in § 4). Das Volumen dieses Körpers $\mathfrak{K}$ wird durch einen Ausdruck

(60) $$V=(1-t)^3V_0+3(1-t)^2tV_1+3(1-t)t^2V_2+t^3V_3$$

dargestellt, worin V_0, V_1, V_2, V_3 die gemischten Volumina

(61) $$V(\mathfrak{K}_1,\mathfrak{K}_1,\mathfrak{K}_1),\quad V(\mathfrak{K}_1,\mathfrak{K}_1,\mathfrak{K}_2),\quad V(\mathfrak{K}_1,\mathfrak{K}_2,\mathfrak{K}_2),\quad V(\mathfrak{K}_2,\mathfrak{K}_2,\mathfrak{K}_2)$$

bedeuten, insbesondere also V_0 das Volumen von $\mathfrak{K}_1$ und V_3 das von $\mathfrak{K}_2$ vorstellt. Diese vier Konstanten bleiben bei beliebigen Translationen von $\mathfrak{K}_1$ und von $\mathfrak{K}_2$ ungeändert.

Wir wollen nun den Satz beweisen:

Für diese Konstanten im Ausdruck von V gilt stets die Ungleichung

$$V_1^3 \geqq V_0^2 V_3 \tag{62}$$

und zwar tritt hier das Gleichheitszeichen dann und nur dann ein, wenn $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ homothetisch sind (auseinander durch Translation und Dilatation hervorgehen).

Wir denken uns von vornherein mit $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ solche Translationen vorgenommen, daß sowohl der Schwerpunkt von $\mathfrak{K}_1$ wie der von $\mathfrak{K}_2$ in den Nullpunkt zu liegen kommt. Alsdann sind die Stützebenenfunktionen dieser Körper, $H_1(u, v, w)$ und $H_2(u, v, w)$, für alle Argumente $u, v, w \neq 0, 0, 0$ stets > 0. Es sei D das Maximum der Funktion

$$\frac{\sqrt[3]{V_0}\, H_2(\alpha, \beta, \gamma)}{\sqrt[3]{V_3}\, H_1(\alpha, \beta, \gamma)} \tag{63}$$

auf der ganzen Kugelfläche $\mathfrak{E}$ $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$; alsdann ist der Körper $\frac{1}{\sqrt[3]{V_3}}\, \mathfrak{K}_2$ vom Volumen 1 im Körper $\frac{s}{\sqrt[3]{V_0}}\, \mathfrak{K}_1$ vom Volumen s^3 enthalten, wenn $s \geqq D$ ist, aber nicht ganz darin enthalten, wenn $s < D$ ist. Wenn $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ homothetisch sind, gilt $D = 1$ und entnehmen wir aus der Regel (26) in 19., daß alsdann $\frac{V_1}{V_0} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_2}$ und daher $V_1^3 = V_0^2 V_3$ ist.

Sind $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ nicht homothetisch, was wir jetzt annehmen wollen, so fällt $D > 1$ aus, und wir werden zeigen, daß alsdann eine Ungleichung besteht:

$$\frac{V_1}{\sqrt[3]{V_0^2 V_3}} - 1 \geqq \Pi(D),$$

worin $\Pi(D)$ eine stetige Funktion von D vorstellt, welche für ein $D > 1$ stets > 0 ausfällt. Eine derartige Relation mit einer *stetigen* Funktion $\Pi(D)$ braucht nur für vollkommene Ovaloide $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ bewiesen zu werden; vermöge unseres Hülfssatzes aus § 2 über die Annäherung beliebiger konvexer Körper durch vollkommene Ovaloide gilt sie dann sofort für alle konvexen Körper.

31. Es seien jetzt $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zwei vollkommene Ovaloide und sie seien nicht einander homothetisch. Wir geben den Koordinatenachsen eine solche Lage, daß die positive z-Achse in eine Richtung fällt, wofür die Funktion (63) ihren größten Wert D annimmt. Wir verwenden die Zeichen c, C, $\mathfrak{F}(z)$, $f(z)$ für den Körper $\mathfrak{K} = (1-t)\,\mathfrak{K}_1 + t\mathfrak{K}_2$, wie sie für den Körper $\mathfrak{K}$ in 29. erklärt sind, und bezeichnen die entsprechenden Größen und Bereiche in Bezug auf $\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_2$ analog unter Hinzufügung

des Index 1 oder 2. Alsdann ist $C_1 = H_1(1,0,0)$, $C_2 = H_2(1,0,0)$ und nach der eben gemachten Voraussetzung wird

$$\frac{\sqrt[3]{V_0}\,C_2}{\sqrt[3]{V_3}\,C_1} = D > 1. \tag{64}$$

Der kleinste und größte Wert von z in $\mathfrak{K}$ bestimmen sich gemäß

$$c = (1-t)c_1 + tc_2, \qquad C = (1-t)\,C_1 + tC_2. \tag{65}$$

Wir setzen nun, wenn $c_1 \leqq z_1 \leqq C_1$, $c_2 \leqq z_2 \leqq C_2$ ist,

$$\int_{c_1}^{z_1} (f_1(z))^2\,dz = \tau V_0, \qquad \int_{c_2}^{z_2} (f_2(z))^2\,dz = \tau V_3, \tag{66}$$

und führen umgekehrt die oberen Grenzen dieser zwei Integrale als Funktionen $z_1(\tau)$, $z_2(\tau)$ der Variablen τ ein, die sich im Intervalle $0 \leqq \tau \leqq 1$ bewegt. Indem wir für τ in beiden Funktionen dasselbe Argument verwenden, erhalten wir eine gewisse Zuordnung der Schnitte $\mathfrak{F}_1(z_1(\tau))$ von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{F}_2(z_2(\tau))$ von $\mathfrak{K}_2$.

Andrerseits stellen wir das Volumen von $\mathfrak{K}$ in der Formel

$$V = \int_{c}^{C} (f(z))^2\,dz \tag{67}$$

dar. Setzen wir

$$z = (1-t)\,z_1(\tau) + tz_2(\tau), \tag{68}$$

so nimmt diese Funktion von τ, wenn τ von 0 bis 1 läuft, kontinuierlich wachsend die Werte von c bis C an. Wir wenden nun die in 30. erörterte Konstruktion, welche aus den Punkten von $\mathfrak{K}_1$ und von $\mathfrak{K}_2$ die Punkte von $\mathfrak{K}$ herzuleiten gestattet, speziell auf die Punkte $\mathfrak{k}_1$ von $\mathfrak{K}_1$ in seinem Schnitte $\mathfrak{F}_1(z_1(\tau))$ und die Punkte $\mathfrak{k}_2$ von $\mathfrak{K}_2$ in seinem Schnitte $\mathfrak{F}_2(z_2(\tau))$ an, wobei τ irgend ein Wert > 0 und < 1 sei. Die Menge der dabei hervorgehenden Punkte $\mathfrak{k} = (1-t)\,\mathfrak{k}_1 + t\mathfrak{k}_2$ bildet alsdann genau den Bereich

$$(1-t)\,\mathfrak{F}_1(z_1(\tau)) + t\,\mathfrak{F}_2(z_2(\tau)) \tag{69}$$

in derjenigen Ebene $z = \text{const.}$, die durch den Wert z in (68) bestimmt ist; danach muß der zu diesem Werte z gehörige Schnitt $\mathfrak{F}(z)$ von $\mathfrak{K}$ gewiß den ganzen Bereich (69) in sich enthalten. Ziehen wir die Relation (40) aus 26. heran, so geht daraus

$$f(z) \geqq (1-t)\,f_1(z_1(\tau)) + tf_2(z_2(\tau)) \tag{70}$$

hervor. Aus (67) erhalten wir nunmehr, wenn wir für $z_1(\tau)$, $f_1(z_1(\tau))$, $z_2(\tau)$, $f_2(z_2(\tau))$ zur Abkürzung z_1, f_1, z_2, f_2 schreiben:

$$V \geqq \int_0^1 ((1-t)\,f_1 + tf_2)^2 \left((1-t)\,\frac{dz_1}{d\tau} + t\,\frac{dz_2}{d\tau}\right) d\tau\,.$$

Wir verwenden jetzt den Ausdruck (60) für V, machen noch von

$$V_0 = \int_0^1 f_1^2 \frac{dz_1}{d\tau}\, d\tau$$

Gebrauch und lassen endlich in der entstehenden Ungleichung die Größe t sich der Grenze Null nähern; dadurch kommen wir zur Ungleichung

$$3V_1 \geqq \int_0^1 \left(f_1^2 \frac{dz_2}{d\tau} + 2 f_1 f_2 \frac{dz_1}{d\tau}\right) d\tau.$$

Nach den Gleichungen (66) haben wir

$$f_1^2 \frac{dz_1}{d\tau} = V_0, \quad f_2^2 \frac{dz_2}{d\tau} = V_3,$$

und so ergibt sich weiter

$$3V_1 \geqq \int_0^1 \left(V_3 \frac{f_1^2}{f_2^2} + 2V_0 \frac{f_2}{f_1}\right) d\tau.$$

Setzen wir

(71) $$\frac{f_1}{\sqrt[3]{V_0}} = \varphi_1, \quad \frac{f_2}{\sqrt[3]{V_3}} = \varphi_2,$$

so läßt sich diese letzte Ungleichung in

(72) $$3\left(\frac{V_1}{\sqrt[3]{V_0^2 V_3}} - 1\right) \geqq \int_0^1 \left(\frac{\varphi_1^2}{\varphi_2^2} - 3 + \frac{2\varphi_2}{\varphi_1}\right) d\tau = \int_0^1 \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2 (\varphi_1 + 2\varphi_2)}{\varphi_1 \varphi_2^2}\, d\tau$$

umwandeln.

Andrerseits haben wir gemäß (58):

$$\frac{C_1}{\sqrt[3]{V_0}} = \int_0^1 \frac{\tau\, d\tau}{\varphi_1^2}, \quad \frac{C_2}{\sqrt[3]{V_3}} = \int_0^1 \frac{\tau\, d\tau}{\varphi_2^2},$$

mithin

(73) $$\int_0^1 \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 + \varphi_2)\tau}{\varphi_1^2 \varphi_2^2}\, d\tau = \frac{C_2}{\sqrt[3]{V_3}} - \frac{C_1}{\sqrt[3]{V_0}} = (D-1)\frac{C_1}{\sqrt[3]{V_0}} > 0.$$

Nehmen wir jetzt eine positive Größe $\delta < \frac{1}{8}$ an, so wird unter Verwendung von (56) und (59):

$$\int_{1-\delta}^1 \frac{\tau\, d\tau}{\varphi_2^2} < \int_{1-\delta}^1 \frac{d\tau}{\varphi_2^2} = \frac{C_2 - z_2(1-\delta)}{\sqrt[3]{V_3}} < 4\sqrt[3]{\delta}\, \frac{C_2}{\sqrt[3]{V_3}},$$

und mit Rücksicht hierauf folgt aus (73):

$$(74)\qquad \int_0^{1-\delta} \frac{(\varphi_1-\varphi_2)(\varphi_1+\varphi_2)\tau}{\varphi_1{}^2\varphi_2{}^2}\,d\tau > \left(D\left(1-4\sqrt[3]{\delta}\right)-1\right)\frac{C_1}{\sqrt[3]{V_0}}.$$

Die Ungleichung (72) bleibt gültig, wenn wir auf der rechten Seite die Integration nur bis zur oberen Grenze $1-\delta$ erstrecken. Bezeichnen wir den Integranden in (74) mit Ψ, so wird der Integrand in (72):

$$(75)\qquad \frac{(\varphi_1+2\varphi_2)\,\varphi_1{}^3\varphi_2{}^2}{(\varphi_1+\varphi_2)^2\tau^2}\,\Psi^2.$$

Nun ist im Intervalle $0<\tau\leqq 1-\delta$ zufolge (57) und (59):

$$\frac{\varphi_1{}^2}{\tau^{\frac{2}{3}}} > \frac{3}{7^{\frac{2}{3}}\cdot 4}\,\delta^{\frac{2}{3}}\,\frac{\sqrt[3]{V_0}}{C_1},\qquad \frac{\varphi_2{}^2}{\tau^{\frac{2}{3}}} > \frac{3}{7^{\frac{2}{3}}\cdot 4}\,\delta^{\frac{2}{3}}\,\frac{\sqrt[3]{V_3}}{C_2},$$

wobei von den zwei unteren Grenzen hier wegen (64) die erste die größere ist; andrerseits hat man $\frac{\varphi_1(\varphi_1+2\varphi_2)}{(\varphi_1+\varphi_2)^2}\geqq\frac{3}{4}$, wenn $\varphi_1\geqq\varphi_2$ ist, und $\frac{\varphi_2(\varphi_1+2\varphi_2)}{(\varphi_1+\varphi_2)^2}\geqq\frac{3}{4}$, wenn $\varphi_2\geqq\varphi_1$ ist. Danach fällt der Faktor von Ψ^2 in (75) im Intervalle $0<\tau\leqq 1-\delta$ stets

$$> \frac{27}{7^{\frac{4}{3}}\cdot 64}\,\frac{\sqrt[3]{V_0V_3}}{C_1C_2}\,\delta^{\frac{4}{3}}$$

aus. Auf Grund der auch schon früher verwandten Hülfsformel (51) erhalten wir nunmehr:

$$3\left(\frac{V_1}{\sqrt[3]{V_0{}^2V_3}}-1\right) > \frac{3^3}{7^{\frac{4}{3}}\cdot 2^{14}}\left(4\sqrt[3]{\delta}\right)^4\frac{\left(D(1-4\sqrt[3]{\delta})-1\right)^2}{D}.$$

Das Produkt $(4\sqrt[3]{\delta})^2\,(D-1-4\sqrt[3]{\delta}\,D)$ nimmt seinen größten Wert für $4\sqrt[3]{\delta}=\frac{2(D-1)}{3D}$ an, wobei $\delta<\frac{1}{216}$, also sicher $<\frac{1}{8}$ ist, und wird dann $=\frac{4(D-1)^3}{27D^2}$. Mit diesem Werte für δ folgt endlich

$$(76)\qquad \frac{V_1}{\sqrt[3]{V_0{}^2V_3}}-1\geqq\frac{1}{2^{10}\cdot 3^4\cdot 7^{\frac{4}{3}}}\,\frac{(D-1)^6}{D^5}.$$

In solcher Form überträgt sich diese Ungleichung sofort auf zwei beliebige konvexe Körper $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ und setzt in der Tat in Evidenz, *daß, wenn* $\mathfrak{K}_1$ *und* $\mathfrak{K}_2$ *nicht homothetisch sind, stets*

$$V_1 > \sqrt[3]{V_0{}^2V_3}$$

ausfällt.

32. Vertauschen wir die Rollen von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, so treten, wie aus (61) zu ersehen ist, an Stelle von V_0, V_1, V_2, V_3 diese Größen in um-

gekehrter Folge und geht aus $V_1 \geqq \sqrt[3]{V_0^2 V_3}$ die Ungleichung $V_2 \geqq \sqrt[3]{V_0 V_3^2}$ hervor. Diese zwei Ungleichungen zusammen ergeben für den Ausdruck V in (60) die Abschätzung

$$\sqrt[3]{V} \geqq (1-t)\sqrt[3]{V_0} + t\sqrt[3]{V_3}. \tag{77}$$

Bezeichnen wir das *Minimum* der Funktion (63) auf der Kugelfläche $\mathfrak{E}$ mit d, so ist der Körper $\frac{d}{\sqrt[3]{V_0}}\,\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{L}_1$ ganz im Körper $\frac{1}{\sqrt[3]{V_3}}\,\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{L}_2$ enthalten; infolgedessen gilt:

$$V(\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_2) \geqq V(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2),$$

d. h.

$$1 \geqq \frac{d^2 V_1}{\sqrt[3]{V_0^2 V_3}}, \qquad \frac{1}{d^2} - 1 \geqq \frac{V_1}{\sqrt[3]{V_0^2 V_3}} - 1.$$

Verbinden wir hiermit die Ungleichung (76), so folgt

$$\frac{1}{d^2} - 1 \geqq \frac{1}{2^{10}\cdot 3^4 \cdot 7^{\frac{4}{3}}}\,\frac{(D-1)^6}{D^5}. \tag{78}$$

Vertauschen wir die Rollen von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, so ist D durch $\frac{1}{d}$ und d durch $\frac{1}{D}$ zu ersetzen und dürfen wir mithin in dieser Relation (78) noch D und $\frac{1}{d}$ mit einander vertauschen.

33. Nehmen wir für $\mathfrak{K}_2$ eine Kugel vom Radius 1, so ist $V_3 = \frac{4\pi}{3}$ und $3V_1$ definiert uns die *Oberfläche* von $\mathfrak{K}_1$. Die aus (62) entstehende Ungleichung

$$\sqrt[2]{\frac{3V_1}{4\pi}} \geqq \sqrt[3]{\frac{V_0}{\frac{4\pi}{3}}}$$

besagt:

Jeder konvexe Körper, welcher nicht eine Kugel ist, besitzt immer eine größere Oberfläche als eine Kugel von demselben Volumen).*

Es sei jetzt $\mathfrak{K}_1$ zunächst ein vollkommenes Ovaloid. Wir bezeichnen mit df ein Element der Begrenzung von $\mathfrak{K}_1$, mit α, β, γ die äußere Normale dieses Elements, mit $d\omega^*$ ein Element der Kugelfläche $\mathfrak{E}$, mit $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ die äußere Normale von $d\omega^*$. Alsdann hat die orthogonale Projektion der Begrenzung von $\mathfrak{K}_1$ auf eine zur Richtung $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ senkrechte Ebene einen Flächeninhalt

$$P(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*) = \frac{1}{2}\int |\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \gamma\gamma^*|\, df.$$

*) Von der Literatur über diesen Satz seien erwähnt: Steiner, Ueber Maximum und Minimum bei den Figuren etc., Crelles Journ. Bd. 24, 1842 (auch Werke Bd. II). — H. A. Schwarz, Gött. Nachr. 1884 (auch Ges. Abh. Bd. II). — J. O. Müller, Inauguraldissertation, Göttingen 1903.

Das arithmetische Mittel aller Größen $P(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ in Bezug auf alle möglichen Richtungen $(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ wird nun

$$\frac{\int P(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)\, d\omega^*}{\int d\omega^*} = \frac{1}{8\pi}\int\int |\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \gamma\gamma^*|\, df\, d\omega^* = \frac{1}{4}\int df = \frac{3}{4} V_1,$$

d. i. gleich dem vierten Teile der Oberfläche von $\mathfrak{K}_1$. Dieses Resultat überträgt sich sofort von vollkommenen Ovaloiden auf beliebige konvexe Körper. Verbinden wir damit den vorhin gefundenen Satz, so ergibt sich die Folgerung:

Jeder konvexe Körper, der nicht eine Kugel ist, besitzt stets unter den ihm umbeschriebenen Cylindern solche, welche einen größeren Querschnitt haben als die einer Kugel von demselben Volumen wie der Körper umbeschriebenen Cylinder.

34. Wir nehmen ferner für $\mathfrak{K}_2$ den Würfel von der Kante 1:

$$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leqq y \leqq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leqq z \leqq \frac{1}{2};$$

für diesen Körper ist $H_2(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2}(|\alpha| + |\beta| + |\gamma|)$ und stellt infolgedessen $3V_1 = 3V(\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_1)$ nach (24) und (18) die Summe der Flächeninhalte der drei senkrechten Projektionen des Körpers $\mathfrak{K}_1$ auf die drei Koordinatenebenen dar, während $V_3 = 1$ ist. Aus unserer allgemeinen Ungleichung (62) folgt hier der Satz:

Wird ein konvexer Körper vom Volumen V senkrecht auf drei zu einander orthogonale Ebenen projiziert, so ist die Summe der Flächeninhalte dieser drei Projektionen stets $\geqq 3V^{\frac{2}{3}}$ und nur dann $= 3V^{\frac{2}{3}}$, wenn der Körper ein Würfel mit Seitenflächen parallel den drei Ebenen ist. Unter solchen drei zu einander orthogonalen Projektionen des Körpers befindet sich dann gewiß wenigstens eine von einem Flächeninhalt $\geqq V^{\frac{2}{3}}$.

§ 7.

Weitere Ungleichungen für die gemischten Volumina.

35. Es seien wieder $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zwei beliebige konvexe Körper und es mögen für sie V_0, V_1, V_2, V_3 die bisherige Bedeutung (s. (61)) haben. Das Volumen eines Körpers $s_1\mathfrak{K}_1 + s_2\mathfrak{K}_2$, wobei $s_1 > 0$ und $s_2 > 0$ ist, hat den Ausdruck

$$s_1{}^3 V_0 + 3 s_1{}^2 s_2 V_1 + 3 s_1 s_2{}^2 V_2 + s_2{}^3 V_3.$$

Wenden wir diese Formel auf einen Körper

$$(1 + t)\mathfrak{K}_1 + ts\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1 + t(\mathfrak{K}_1 + s\mathfrak{K}_2)$$

an, wo t und $s > 0$ seien, und ordnen die entstehende Formel nach t, so kommen wir zu folgender Bemerkung:

Wenn $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ durch $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_1 + s\mathfrak{K}_2$ ersetzt werden, so treten an die Stelle von V_0, V_1, V_2, V_3 die Größen

$$V_0,\ V_0 + sV_1,\quad V_0 + 2sV_1 + s^2V_2,\quad V_0 + 3sV_1 + 3s^2V_2 + s^3V_3.$$

Aus der Ungleichung $V_1^3 - V_0^2V_3 \geqq 0$ entsteht nun bei dieser Substitution die Ungleichung

$$\begin{aligned}&(V_0+sV_1)^3 - V_0^2(V_0+3sV_1+3s^2V_2+s^3V_3)\\ &= s^2(3V_0(V_1^2-V_0V_2)+s(V_1^3-V_0^2V_3)) \geqq 0.\end{aligned}$$

Lassen wir hierin die positive Größe s nach Null abnehmen, so gewinnen wir die folgende in den Größen V_i quadratische Ungleichung:

(79) $$V_1^2 \geqq V_0V_2.$$

36. Vertauschen wir die Rollen der Körper $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, so treten an die Stelle von V_0, V_1, V_2, V_3 diese Größen in umgekehrter Folge und aus (79) geht die andere Ungleichung

(80) $$V_2^2 \geqq V_1V_3$$

hervor.

Andrerseits führen die zwei quadratischen Ungleichungen (79) und (80) bei Elimination von V_2 zu

$$V_1^3 \geqq \frac{V_0^2V_2^2}{V_1} \geqq V_0^2V_3,$$

mithin zurück zu der kubischen Ungleichung, von der wir ausgegangen sind, sodaß jene kubische Ungleichung und die quadratische (79) einander gegenseitig zur Folge haben.

Doch besteht in der Abhängigkeit dieser Ungleichungen von einander ein wesentlicher Unterschied, insofern als die Grenzfälle der quadratischen Ungleichung sofort auch die Grenzfälle der kubischen ergeben, dagegen nicht umgekehrt aus den Bedingungen, unter welchen in der kubischen Ungleichung das Gleichheitszeichen statthat, vollkommen zu ersehen ist, wann das Gleichheitszeichen in der quadratischen eintritt.

37. Man kann nun die quadratische Ungleichung $V_1^2 \geqq V_0V_2$ auch auf einem direkten Wege durch analoge Überlegungen, wie sie zu der genaueren Ungleichung (76) führten, herleiten und gelangt alsdann auch zur Kenntnis der Grenzfälle dieser quadratischen Ungleichung. Wir begnügen uns hier, das bezügliche Resultat ohne Beweis anzugeben.

Wir bezeichnen eine Stützebene $\varphi \leqq 0$ an einen konvexen Körper $\mathfrak{K}$ als eine *Eckstützebene* an $\mathfrak{K}$, wenn wir $\varphi = t_1\varphi_1 + t_2\varphi_2 + t_3\varphi_3$ setzen können, sodaß t_1, t_2, t_3 sämtlich > 0 und $\varphi_1 \leqq 0$, $\varphi_2 \leqq 0$, $\varphi_3 \leqq 0$ drei solche Stützebenen an $\mathfrak{K}$ sind, deren äußere Normalenrichtungen *unabhängig* sind, d. h. nicht einer einzigen Ebene angehören. Ein konvexer Körper $\mathfrak{K}$ heiße ein *Kappenkörper* eines konvexen Körpers $\mathfrak{K}'$, wenn mit Ausnahme nur von gewissen Eckstützebenen alle anderen Stützebenen an $\mathfrak{K}$ zugleich auch Stützebenen an $\mathfrak{K}'$ bilden. Der allgemeinste *Kappenkörper einer Kugel* wird erhalten, indem man die Kugel als Grundbestandteil nimmt, auf ihrer Oberfläche eine endliche oder unendliche Anzahl von Kalotten bezeichnet, von denen keine die Größe einer halben Kugelfläche erreicht oder überschreitet und die untereinander höchstens in den Randpunkten zusammenstoßen, und sodann die Kugel auf jeder dieser Kalotten mit der Kegelkappe versieht, bei der die Kalotte als Basis dient und die Erzeugenden des Mantels die Kugel in dem Rande der Kalotte berühren.

Es besteht nun der Satz:

In der Ungleichung $V_1^2 \geqq V_0 V_2$ für zwei beliebige konvexe Körper $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ hat dann und nur dann das Gleichheitszeichen statt, wenn $\mathfrak{K}_1$ homothetisch mit $\mathfrak{K}_2$ oder mit einem Kappenkörper von $\mathfrak{K}_2$ ist.

Bei einem vollkommenen Ovaloide kommen keine Eckstützebenen vor und kann ein solches daher niemals Kappenkörper eines anderen konvexen Körpers sein. Wenn also $\mathfrak{K}_1$ ein vollkommenes Ovaloid ist, gilt in $V_1^2 \geqq V_0 V_2$ das Gleichheitszeichen nur dann, wenn $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_1$ selbst homothetisch sind.

Nehmen wir für $\mathfrak{K}_2$ eine Kugel vom Radius 1, so ist V_0 das Volumen, $3V_1$ die Oberfläche, $3V_2$ das Integral der mittleren Krümmung von $\mathfrak{K}_1$ und $V_3 = \frac{4\pi}{3}$. Alsdann gilt $V_1^2 \geqq V_0 V_2$ und hat hier das Gleichheitszeichen dann und nur dann statt, wenn $\mathfrak{K}_1$ eine Kugel oder ein Kappenkörper einer Kugel ist. Zweitens gilt $V_2^2 \geqq V_1 V_3$ und in dieser Ungleichung hat das Gleichheitszeichen dann und nur dann statt, wenn $\mathfrak{K}_1$ selbst eine Kugel ist.

Danach liefern unter allen konvexen Körpern von gleicher Oberfläche die Kugeln und die Kappenkörper von Kugeln das Maximum des Produkts aus Volumen und Integral der mittleren Krümmung und andrerseits allein die Kugeln das Minimum des Integrals der mittleren Krümmung. Aus diesen beiden Tatsachen zusammen folgt, daß unter allen konvexen Körpern von gleicher Oberfläche die Kugeln das größte Volumen darbieten.

38. Es seien jetzt $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ drei beliebige konvexe Körper; das Volumen eines Körpers $\mathfrak{K} = s_1\mathfrak{K}_1 + s_2\mathfrak{K}_2 + s_3\mathfrak{K}_3$, wobei $s_1, s_2, s_3 \geqq 0$, aber nicht durchweg 0 sind, stellt sich durch eine ternäre kubische Form

$$V = \sum V_{jkl}\, s_j s_k s_l$$

dar, wo jeder der Indizes die Werte 1, 2, 3 zu durchlaufen hat. Der Koeffizient V_{jkl} bedeutet das gemischte Volumen $V(\mathfrak{K}_j, \mathfrak{K}_k, \mathfrak{K}_l)$.

Wir wenden nun die für zwei konvexe Körper nachgewiesene Ungleichung $V_1^2 - V_0 V_2 \geqq 0$ derart an, daß wir für den ersten Körper

$p_1\mathfrak{K}_1 + p_2\mathfrak{K}_2 + p_3\mathfrak{K}_3$, für den zweiten $q_1\mathfrak{K}_1 + q_2\mathfrak{K}_2 + q_3\mathfrak{K}_3$ nehmen, wobei $p_1, \cdots q_3$ lauter positive Parameter seien. Setzen wir

$$V_{jk1}p_1 + V_{jk2}p_2 + V_{jk3}p_3 = P_{jk},$$

so wird hier

$$V_0 = \sum P_{jk}p_j p_k, \quad V_1 = \sum P_{jk}p_j q_k, \quad V_2 = \sum P_{jk}q_j q_k.$$

Wir nehmen noch

$$q_1 = tp_1 + r_1, \quad q_2 = tp_2 + r_2, \quad q_3 = tp_3 + r_3$$

an; *dabei können r_1, r_2, r_3 beliebige reelle Werte bedeuten* und bei positiven p_1, p_2, p_3 kann stets t so groß gewählt werden, daß auch q_1, q_2, q_3 sämtlich > 0 sind. Die in Rede stehende Ungleichung verwandelt sich nunmehr in

$$\left(\sum P_{jk}p_j r_k\right)^2 - \left(\sum P_{jk}p_j p_k\right)\left(\sum P_{jk}r_j r_k\right) \geqq 0.$$

Wir nehmen jetzt $p_3 = 1$ an und lassen die positiven Werte p_1, p_2 sich der Grenze Null nähern; es entsteht dann hieraus:

$$(V_{133}r_1 + V_{233}r_2)^2 - V_{333}(V_{113}r_1^2 + 2V_{123}r_1r_2 + V_{223}r_2^2) \geqq 0$$

und dabei muß diese Ungleichung für beliebige Werte r_1, r_2 gelten. Setzen wir nun

$$\Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} V_{113}, & V_{123}, & V_{133} \\ V_{213}, & V_{223}, & V_{233} \\ V_{313}, & V_{323}, & V_{333} \end{vmatrix}$$

und bezeichnen die adjungierte Unterdeterminante zum Element V_{jk3} hier mit $W_{jk}^{(3)}$, so schreibt sich diese Ungleichung

$$(81) \qquad -W_{22}^{(3)}r_1^2 + 2W_{21}^{(3)}r_1r_2 - W_{11}^{(3)}r_2^2 \geqq 0.$$

Die Determinante der binären quadratischen Form rechts hier ist $V_{333}\Delta^{(3)}$ und folgt daher

$$\Delta^{(3)} \geqq 0.$$

Ferner haben wir insbesondere $-W_{22}^{(3)} \geqq 0$, $-W_{11}^{(3)} \geqq 0$. Ist nun etwa $-W_{22}^{(3)} > 0$, so geht vermöge der Beziehung

$$W_{22}^{(3)}W_{33}^{(3)} - (W_{23}^{(3)})^2 = V_{113}\Delta^{(3)}$$

die Ungleichung

$$-W_{33}^{(3)} = V_{123}^2 - V_{113}V_{223} \geqq 0$$

hervor. Analog erschließt man diese Ungleichung, wenn $-W_{11}^{(3)} > 0$ ist.

Hat man jedoch sowohl $-W_{22}^{(3)} = 0$ wie $-W_{11}^{(3)} = 0$, so muß, da die Ungleichung (81) für beliebige r_1 und r_2 statthaben soll, durchaus auch $W_{12}^{(3)} = 0$ sein, und dann sind in $\Delta^{(3)}$ die erste und dritte und ferner die zweite und dritte Reihe proportional und folgt dadurch

$$\Delta^{(3)} = 0, \quad -W_{33}^{(3)} = 0.$$

In allen Fällen gilt hiernach

$$V_{123}^2 \geqq V_{113} V_{223}. \tag{82}$$

Verbinden wir diese Ungleichung mit den zwei Ungleichungen

$$V_{113}^3 \geqq V_{111}^2 V_{333}, \quad V_{223}^3 \geqq V_{222}^2 V_{333}, \tag{83}$$

welche die Beziehung $V_1^3 \geqq V_0^2 V_3$ für $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_3$ bez. für $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$ vorstellen, so gelangen wir durch Elimination von V_{113} und V_{223} zu

$$V_{123}^3 \geqq V_{111} V_{222} V_{333}. \tag{84}$$

Dabei kann in dieser Ungleichung das Gleichheitszeichen nur statthaben, wenn in *beiden* Ungleichungen (83) das Gleichheitszeichen gilt. Damit kommen wir zu folgendem Satze:

Drei beliebige konvexe Körper vom Volumen 1 $\left(\text{hier } \frac{1}{\sqrt[3]{V_{111}}}\mathfrak{K}_1, \frac{1}{\sqrt[3]{V_{222}}}\mathfrak{K}_2, \frac{1}{\sqrt[3]{V_{333}}}\mathfrak{K}_3\right)$ *ergeben stets ein gemischtes Volumen* $\left(\text{nämlich } \frac{V_{123}}{\sqrt[3]{V_{111}V_{222}V_{333}}}\right)$, *das* $\geqq 1$ *und nur dann* $= 1$ *ist, wenn alle drei Körper einander homothetisch sind.*

Die frühere Ungleichung $V_1^3 \geqq V_0^2 V_3$ geht aus diesem Satze, ebenso die Ungleichung $V_1^2 \geqq V_0 V_2$ aus (82) als spezieller Fall hervor, wenn der zweite und dritte Körper identisch gesetzt werden.

39. Es seien $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots \mathfrak{K}_m$ m beliebige konvexe Körper. Wir wenden die Ungleichung (82) für drei konvexe Körper an, indem wir für den ersten einen Körper $\sum p_i \mathfrak{K}_i$, für den zweiten einen Körper $\sum (tp_i + r_i)\mathfrak{K}_i$, für den dritten einen Körper $\sum s_i \mathfrak{K}_i$ $(i = 1, 2, \cdots m)$ nehmen, wobei die r_i beliebige Größen und die Werte p_i, $tp_i + r_i$, s_i sämtlich positiv sind. Setzen wir

$$V(\mathfrak{K}_j, \mathfrak{K}_k, \mathfrak{K}_l) = V_{jkl}, \quad V_{jk1}s_1 + V_{jk2}s_2 + \cdots + V_{jkm}s_m = S_{jk},$$

so wird die betreffende Ungleichung

$$\left(\sum S_{jk} p_j r_k\right)^2 - \left(\sum S_{jk} p_j p_k\right)\left(\sum S_{jk} r_j r_k\right) \geqq 0;$$

sie bedeutet, daß die quadratische Form $\sum S_{jk} r_j r_k$ bei einer Transformation in ein Aggregat von Quadraten reeller unabhängiger linearer Formen mit positiven oder negativen Vorzeichen *ein einziges Quadrat mit positivem und im übrigen lauter Quadrate mit negativem Vorzeichen* darbieten muß. Im besonderen muß danach die Determinante dieser Form mit $(-1)^{m-1}$ multipliziert, stets $\geqq 0$ sein, d. h. für beliebige positive Werte $s_1, s_2, \cdots s_m$ muß stets die Ungleichung

$$(-1)^{m-1} \left| V_{jk1}s_1 + V_{jk2}s_2 + \cdots + V_{jkm}s_m \right| \geqq 0 \tag{85}$$

bestehen.

§ 8.

Stetig gekrümmte konvexe Körper.

40. Das allgemeine Theorem $V_1^3 \geqq V_0^2 V_3$ für zwei beliebige konvexe Körper ist aufs engste mit gewissen Fragen über die Krümmung konvexer Körper verknüpft.

Sind $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ zwei beliebige konvexe Körper, so wollen wir den Wert $3V(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ die *Relativoberfläche von* $\mathfrak{K}$ *in Bezug auf* $\mathfrak{K}'$ nennen. Es seien H und H' die Stützebenenfunktionen von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$. Wir nehmen $\mathfrak{K}$ zunächst als ein vollkommenes Ovaloid an und verwenden dafür die in § 3 eingeführten Bezeichnungen; alsdann gilt nach (24) und (18) der Ausdruck

$$(86) \qquad 3V(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = \int H'(RT - S^2)\, d\omega = \int H'\, df;$$

darin bedeutet df das Flächenelement der Begrenzung von $\mathfrak{K}$, welches durch parallele Normalen dem Element $d\omega$ der Kugelfläche $\mathfrak{E}$ entspricht, und $RT - S^2$ das Produkt der Hauptkrümmungsradien, die reziproke Gaußsche Krümmung, an der Stelle von df.

Setzen wir $H' = H + \delta H$, so hat der Körper $(1-t)\mathfrak{K} + t\mathfrak{K}'$, wenn $t > 0$ und < 1 ist, die Stützebenenfunktion $H + t\delta H$. Die Differenz aus dem Volumen dieses Körpers und dem Volumen von $\mathfrak{K}$ ist dann bis auf Größen von der Ordnung t^2 gleich

$$t \int \delta H (RT - S^2)\, d\omega = t \int \delta H\, df.$$

41. Diese Beziehungen, die jedenfalls bei einem vollkommenen Ovaloide $\mathfrak{K}$ statthaben, veranlassen uns nun zu folgender Definition:

Ein konvexer Körper $\mathfrak{K}$ soll stetig gekrümmt heißen, wenn für ihn eine auf der Kugeloberfläche $\mathfrak{E}$ stetige und durchweg positive Funktion $F = F(\alpha, \beta, \gamma)$ existiert derart, daß die Relativoberfläche von $\mathfrak{K}$ in Bezug auf einen beliebigen konvexen Körper $\mathfrak{K}'$ mit der Stützebenenfunktion H' immer den Ausdruck hat:

$$(87) \qquad 3V(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = \int H' F\, d\omega.$$

Diese Funktion $F(\alpha, \beta, \gamma)$ (oder $F(\vartheta, \psi)$) wollen wir dann die *Krümmungsfunktion* des Körpers $\mathfrak{K}$ nennen. Zunächst leuchtet ein, daß bei einem stetig gekrümmten Körper $\mathfrak{K}$ diese Funktion jedenfalls eine durchaus bestimmte ist. Denn nehmen wir an, es gäbe für $\mathfrak{K}$ noch eine zweite auf $\mathfrak{E}$ stetige und positive Funktion $F^*(\alpha, \beta, \gamma)$, welche in derselben

Weise wie F in (87) eintreten könnte, so wäre dann für jeden beliebigen konvexen Körper $\mathfrak{K}'$ stets

$$(88)\qquad \int H' F^* d\omega = \int H' F d\omega, \quad \int H'(F^* - F) d\omega = 0.$$

Da $F^* - F$ auf $\mathfrak{E}$ nicht durchweg Null ist, können wir auf $\mathfrak{E}$ einen Punkt finden, wo $F^* - F \neq 0$ ist, und hernach können wir, da $F^* - F$ auf $\mathfrak{E}$ stetig ist, eine ganze Kalotte um diesen Punkt bestimmen, (die wir kleiner als eine Halbkugel wählen), sodaß $F^* - F$ daselbst überall $\neq 0$ und also von konstantem Vorzeichen, etwa stets > 0 ist. Wir setzen auf die Kalotte die Kegelkappe, bei welcher die Kalotte die Basis bildet und die Erzeugenden des Mantels die Kugelfläche $\mathfrak{E}$ im Rande der Kalotte berühren, und nehmen nun in der Gleichung (88) für $\mathfrak{K}'$ einmal den Körper, der aus der Kugel $\mathfrak{G}$ und dieser Kappe besteht, ein andres Mal $\mathfrak{G}$ selbst, so hat das Integral $\int H'(F^* - F) d\omega$ im ersten Falle einen größeren Wert als im zweiten Falle und kann daher nicht in beiden Fällen Null sein.

42. Nehmen wir mit dem Körper $\mathfrak{K}'$, für den (87) gebildet ist, die Translation vom Nullpunkte nach einem Punkte a, b, c vor, so ist $H'(\alpha, \beta, \gamma)$ durch

$$H'(\alpha, \beta, \gamma) + a\alpha + b\beta + c\gamma$$

zu ersetzen. Da nun hierbei der Wert $3V(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ sich nicht ändert und die Größen a, b, c völlig beliebig sind, so ersehen wir:

Die Krümmungsfunktion F für einen stetig gekrümmten Körper muß stets die drei Bedingungsgleichungen erfüllen:

$$(89)\qquad \int \alpha F d\omega = 0, \quad \int \beta F d\omega = 0, \quad \int \gamma F d\omega = 0.$$

Andrerseits erhellt, daß, wenn wir mit $\mathfrak{K}$ eine Translation vornehmen, dabei die Krümmungsfunktion invariant ist. Unter den sämtlichen, aus $\mathfrak{K}$ durch Translationen abzuleitenden Körpern können wir einen bestimmten Körper durch die Lage des Schwerpunkts fixieren.

Ist t ein positiver Parameter, so hat $t\mathfrak{K}$ die Krümmungsfunktion $t^2 F$, wenn F die Krümmungsfunktion von $\mathfrak{K}$ ist; dieses folgt unmittelbar aus der Formel

$$3V(\mathfrak{K}', t\mathfrak{K}, t\mathfrak{K}) = 3t^2 V(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{K}).$$

43. Unsere weiteren Entwicklungen nun werden darauf gerichtet sein, den folgenden sehr bemerkenswerten Satz zu beweisen:

Ist $F(\alpha, \beta, \gamma)$ eine auf der Kugelfläche $\mathfrak{E}$ beliebig vorgeschriebene, daselbst stetige und durchweg positive Funktion, welche die drei Bedingungsgleichungen

$$\int \alpha F d\omega = 0, \quad \int \beta F d\omega = 0, \quad \int \gamma F d\omega = 0$$

erfüllt, so gibt es immer einen stetig gekrümmten konvexen Körper $\mathfrak{K}$ *mit* $F(\alpha, \beta, \gamma)$ *als Krümmungsfunktion, und dieser Körper ist bestimmt bis auf eine willkürliche Translation, durch die man ihn noch abändern kann,* also eindeutig festgelegt, wenn noch zusätzlich gefordert wird, daß sein Schwerpunkt im Nullpunkte liegen soll.

Wir beweisen zunächst den Nachsatz, daß den hier gestellten Forderungen, wenn überhaupt, jedenfalls nur durch einen einzigen Körper genügt werden kann. In der Tat, nehmen wir an, es sei ein konvexer Körper $\mathfrak{K}$ gefunden mit F als Krümmungsfunktion und mit dem Schwerpunkte im Nullpunkte, und es sei H die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{K}$. Zunächst ist klar, daß unter den mit $\mathfrak{K}$ homothetischen Körpern kein anderer diese beiden Eigenschaften mit $\mathfrak{K}$ teilt.

Das Volumen von $\mathfrak{K}$ ist durch

$$V = \frac{1}{3}\int HF\,d\omega$$

dargestellt. Ist sodann $\mathfrak{K}'$ mit der Stützebenenfunktion H' und dem Volumen V' ein beliebiger konvexer Körper, der mit $\mathfrak{K}$ nicht homothetisch ist, so ergibt das allgemeine Theorem $\frac{V_1}{\sqrt[3]{V_3}} > \frac{V_0}{\sqrt[3]{V_0}}$ auf die Körper $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ angewandt:

$$(90) \qquad \frac{1}{3}\int \frac{H'}{\sqrt[3]{V'}}\,F\,d\omega > \frac{1}{3}\int \frac{H}{\sqrt[3]{V}}\,F\,d\omega.$$

Darin sind nun $\frac{H}{\sqrt[3]{V}}$ und $\frac{H'}{\sqrt[3]{V'}}$ die Stützebenenfunktionen der Körper

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{\sqrt[3]{V}}\,\mathfrak{K} \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}' = \frac{1}{\sqrt[3]{V'}}\,\mathfrak{K}',$$

und diese zwei mit $\mathfrak{K}$ bez. $\mathfrak{K}'$ homothetischen Körper sind dadurch charakterisiert, daß sie ein Volumen $= 1$ haben.

Damit kommen wir zu folgendem Ergebnisse, welches zeigt, daß der Körper $\mathfrak{K}$ eindeutig bestimmt ist.

Man betrachte für alle möglichen konvexen Körper $\mathfrak{L}$ *vom Volumen* 1 *das Integral*

$$J(\mathfrak{L}) = \frac{1}{3}\int LF\,d\omega,$$

wobei $L = L(\alpha, \beta, \gamma)$ *die Stützebenenfunktion von* $\mathfrak{L}$ *und* $F = F(\alpha, \beta, \gamma)$ *die gegebene Funktion für die Argumente* α, β, γ, *die Normale in* $d\omega$, *bedeute; gibt es einen stetig gekrümmten konvexen Körper* $\mathfrak{K}$ *mit* F *als Krümmungsfunktion, so hat dieses Integral* $J(\mathfrak{L})$ *für einen ganz bestimmten Körper* $\mathfrak{L}$ *mit dem Nullpunkte als Schwerpunkt (und für die aus ihm durch*

Translationen hervorgehenden Körper) einen kleinsten Wert J, und alsdann ist $\mathfrak{K}$ identisch mit $\sqrt{J}\,\mathfrak{L}$ oder geht aus letzterem Körper durch eine Translation hervor.

44. Zugleich werden wir hierdurch auf ein gewisses Variationsproblem hingewiesen, das in nahem Zusammenhange mit der von uns zu behandelnden Aufgabe steht; und in der Tat erkennen wir sofort, daß die Differentialgleichung zu diesem Variationsproblem

$$RT - S^2 = F(\vartheta, \psi)$$

wird, worin F die gegebene, den Gleichungen (89) genügende Funktion ist, und die in R, S, T auftretende Funktion $H(\vartheta, \psi)$ gefunden werden soll. Diese Gleichung ist nach den Ausdrücken von R, S, T in (17) für $H(\vartheta, \psi)$ eine quadratische Differentialgleichung zweiter Ordnung von dem Monge-Ampèreschen Typus; sie transformiert sich, wenn wir auf der Oberfläche des gesuchten Körpers die Koordinate z als Funktion von x, y einführen, in die Gleichung:

$$rt - s^2 = f(p, q)$$

für diese Funktion $z(x, y)$, wobei

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

gesetzt ist und

$$\frac{f(p, q)}{(1 + p^2 + q^2)^2} = F$$

als eine beliebige eindeutige und stetige Funktion in

$$\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \beta = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

vorgeschrieben sein kann, die nur den Gleichungen (89) zu genügen hat.

Wir werden jetzt ein gewisses Problem mit einer nur *endlichen* Anzahl von Parametern, sozusagen eine Art von Differenzengleichung erledigen und hernach von diesem Probleme aus durch einen Grenzübergang zur Lösung der hier gestellten Aufgabe, die von einer kontinuierlichen Funktion F handelt, gelangen.

§ 9.

Bestimmung eines Polyeders durch die Normalen und die Inhalte der Seitenflächen.

45. Es sei $\mathfrak{P}$ ein beliebiges Polyeder mit n Seitenflächen, die in irgend einer Ordnung numeriert seien. Wir wollen annehmen, der Nullpunkt liege in $\mathfrak{P}$ selbst, sei es im Inneren, sei es auf der Begrenzung von $\mathfrak{P}$. Wir bezeichnen für $i = 1, 2, \cdots n$ mit $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ die äußere

Normale, mit F_i den Flächeninhalt der i^{ten} Seitenfläche von $\mathfrak{P}$, mit p_i die Länge des vom Nullpunkt auf die Ebene dieser Fläche gefällten Lotes, endlich mit V das Volumen von $\mathfrak{P}$.

Die Richtungen $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ sind gewiß so beschaffen, daß sie nicht sämtlich *einer* Ebene angehören; die Größen F_i sind sämtlich > 0. Bei einer Translation des Polyeders $\mathfrak{P}$ bleiben alle Größen $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, F_i$ ungeändert.

Indem wir das Polyeder $\mathfrak{P}$ nach der in § 2 entwickelten Methode als Grenze von vollkommenen Ovaloiden darstellen und die Formel (86) heranziehen, gewinnen wir die folgende Regel:

Ist $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger konvexer Körper, Q seine Stützebenenfunktion und setzen wir allgemein $Q(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = q_i$, so wird das gemischte Volumen

$$V(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = \frac{1}{3}(F_1 q_1 + F_2 q_2 + \cdots + F_n q_n). \tag{91}$$

Insbesondere entnehmen wir daraus für das Volumen von $\mathfrak{P}$ den Ausdruck

$$V = \frac{1}{3}(F_1 p_1 + F_2 p_2 + \cdots + F_n p_n). \tag{92}$$

Genau so, wie wir aus (87) die drei Gleichungen (89) folgerten, schließen wir aus (91) durch beliebige Translation des Körpers $\mathfrak{Q}$ auf das notwendige Bestehen der drei Gleichungen:

$$\sum F_i \alpha_i = 0, \quad \sum F_i \beta_i = 0, \quad \sum F_i \gamma_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots n). \tag{93}$$

Bezeichnen wir das Volumen von $\mathfrak{Q}$ mit V_* und bilden wir unsere allgemeine Ungleichung $\frac{3 V_1}{\sqrt[3]{V_3}} \geqq \frac{3 V_0}{\sqrt[3]{V_0}}$ in Bezug auf das Polyeder $\mathfrak{P}$ als ersten und den Körper $\mathfrak{Q}$ als zweiten Körper, so finden wir, daß stets

$$\frac{F_1 q_1 + F_2 q_2 + \cdots + F_n q_n}{V_*^{\frac{1}{3}}} \geqq \frac{F_1 p_1 + F_2 p_2 + \cdots + F_n p_n}{V^{\frac{1}{3}}} \tag{94}$$

ist und hierin das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn $\mathfrak{Q}$ mit $\mathfrak{P}$ homothetisch ist.

Wir werden nunmehr den folgenden Satz beweisen*):

Es seien n beliebige Richtungen $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ für $i = 1, 2, \cdots n$ gegeben, die nicht sämtlich einer Ebene angehören, und dazu n beliebige positive Größen F_i, sodaß die drei Gleichungen bestehen

$$\sum F_i \alpha_i = 0, \quad \sum F_i \beta_i = 0, \quad \sum F_i \gamma_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots n);$$

*) Diesen Satz habe ich zuerst in dem Aufsatze: *Allgemeine Lehrsätze über die konvexen Polyeder*, Gött. Nachr. 1897 publiziert.

alsdann gibt es stets ein Polyeder $\mathfrak{P}$ *mit* n *Seitenflächen, wofür die Richtungen* $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ *die äußeren Normalen und die Größen* F_i *die Flächeninhalte dieser Seitenflächen bilden, und dieses Polyeder* $\mathfrak{P}$ *ist vollkommen bestimmt bis auf eine beliebige Translation, durch die man dasselbe noch variieren kann,* also eindeutig festgelegt, wenn ferner noch die Lage seines Schwerpunktes beliebig vorgeschrieben wird.

46. Um zu einem Beweise dieses Satzes zu gelangen, fassen wir jetzt die Gesamtheit aller möglichen Polyeder mit n oder weniger Seitenflächen ins Auge, welche die äußeren Normalen der Seitenflächen nur unter den n Richtungen $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ besitzen und welche ferner den Nullpunkt in sich schließen.

Sind $q_1, q_2, \cdots q_n$ irgend welche n Größen, sämtlich $\geqq 0$ und derart, daß die n Ungleichungen

$$\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z \leqq q_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{95}$$

ein wirkliches Polyeder definieren, so bezeichnen wir dieses Polyeder mit $\mathfrak{K}(q_1, q_2, \cdots q_n)$ oder $\mathfrak{K}(q_i)$, sein Volumen mit $V(q_1, q_2, \cdots q_n)$ oder $V(q_i)$. Dabei kann auch ein Teil dieser Ungleichungen eine Folge der übrigen sein, das Polyeder also weniger als n wirkliche Seitenflächen besitzen. Wir bezeichnen ferner mit q_i^* den größten Wert von $\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z$ in $\mathfrak{K}(q_i)$; für diejenigen Indizes i, wobei $\mathfrak{K}$ eine wirkliche Seitenfläche mit der Normale $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ besitzt, ist immer $q_i^* = q_i$, während wir bei den anderen Indizes nur $q_i \geqq q_i^*$ behaupten können. Wir nennen $q_1^*, q_2^*, \cdots q_n^*$ die *tangentialen Parameter* von $\mathfrak{K}(q_1, q_2, \cdots q_n)$; offenbar ist

$$\mathfrak{K}(q_1, q_2, \cdots q_n) = \mathfrak{K}(q_1^*, q_2^*, \cdots q_n^*).$$

Existiert nun ein Polyeder $\mathfrak{P} = \mathfrak{K}(p_1, p_2, \cdots p_n)$ gemäß den Forderungen unseres Satzes, so zeigt die Ungleichung (94), daß unter allen vorhandenen Körpern $\mathfrak{K}(q_1, q_2, \cdots q_n)$ eben dieses Polyeder $\mathfrak{P}$ und die ihm homothetischen Körper den kleinsten Wert des Ausdrucks

$$\frac{F_1 q_1 + F_2 q_2 + \cdots + F_n q_n}{\left(V(q_1, q_2, \cdots q_n)\right)^{\frac{1}{3}}}$$

liefern. Daraus erhellt zunächst der letzte Teil jenes Satzes, daß nämlich das gesuchte Polyeder $\mathfrak{P}$ gewiß nur auf eine Art, abgesehen von einer Translation, bestimmt werden kann.

Nunmehr wollen wir die wirkliche Existenz jenes Polyeders $\mathfrak{P}$ dartun.

47. Wir zeigen vor allem, daß, wie die n Richtungen $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ vorausgesetzt sind, gewiß irgend welche Polyeder $\mathfrak{K}(q_1, q_2, \cdots q_n)$ vorhanden sind. In der Tat, der durch die n Ungleichungen

$$\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z \leqq 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{96}$$

definierte Bereich $\mathfrak{K}(1, 1, \cdots 1) = \mathfrak{K}(1)$ stellt ein solches Polyeder, und zwar wirklich mit n Seitenflächen vor. Denn diese Ungleichungen sind die Bedingungen von n *verschiedenen* Tangentialebenen an die Kugel $\mathfrak{G}$; der Bereich enthält daher die Kugel $\mathfrak{G}$ in sich und besitzt jene n Ebenen als extreme Stützebenen. Andrerseits kann dieser Bereich $\mathfrak{K}(1)$ sich nicht ins Unendliche erstrecken; denn der Abstand eines beliebigen Punktes x, y, z in ihm von der i^{ten} jener Stützebenen wird

$$t_i = 1 - \alpha_i x - \beta_i y - \gamma_i z \geqq 0$$

und entnehmen wir aus den Gleichungen (93) dann

$$\sum F_i t_i = \sum F_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n).$$

Da die Werte F_i sämtlich > 0 sind, besteht hiernach für eine jede Größe t_i eine obere Grenze. Nun können wir unter den Stützebenen (96) gewiß drei solche herausgreifen, die sich in einem Punkte schneiden; durch die oberen Grenzen der drei zugehörigen Größen t_i werden dann drei zu ihnen parallele Ebenen angewiesen, welche mit den ersteren zusammen ein Parallelepipedum bestimmen, in dem der Bereich $\mathfrak{K}(1)$ ganz enthalten sein muß. Danach liegt dieser Bereich ganz im Endlichen. Das Volumen von $\mathfrak{K}(1)$ setzen wir $= \frac{1}{l^3}$, alsdann hat $\mathfrak{K}(l, l, \cdots l)$ das Volumen 1. Weiter wird überhaupt für beliebige endliche Werte $q_1, q_2, \cdots q_n$ der durch die Ungleichungen (95) bestimmte Bereich ganz im Endlichen liegen und bei lauter positiven Werten q_i stets ein wirkliches Polyeder, wenn auch nicht immer mit n Seitenflächen, vorstellen.

48. Wir betrachten jetzt in der n-fachen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ von n beliebig veränderlichen reellen Größen $q_1, q_2, \cdots q_n$ den Bereich $\mathfrak{B}$ aller solchen Systeme $q_1, q_2, \cdots q_n$, „Punkte" (q_i), *wobei* $q_1 \geqq 0, q_2 \geqq 0, \cdots q_n \geqq 0$ *ist und den Größen* $q_1, q_2, \cdots q_n$ *ein Polyeder* $\mathfrak{K}(q_1, q_2, \cdots q_n)$ *von einem Volumen*

$$V(q_1, q_2, \cdots q_n) \geqq 1$$

entspricht.

Sind (r_i) und (s_i) $(i = 1, 2, \cdots n)$ zwei beliebige Punkte dieses Bereichs $\mathfrak{B}$ und (r_i^*) bez. (s_i^*) die tangentialen Parameter von $\mathfrak{K}(r_i)$ und $\mathfrak{K}(s_i)$ und ist t ein Werth > 0 und < 1, so besitzt der aus diesen zwei Polyedern abzuleitende Bereich $(1-t)\,\mathfrak{K}(r_i) + t\,\mathfrak{K}(s_i)$ nach (77) ein Volumen

$$\geqq \left((1-t)\sqrt[3]{V(r_i)} + t\sqrt[3]{V(s_i)}\right)^3 \geqq \left((1-t) + t\right)^3 = 1.$$

Die Stützebenenfunktion des letzteren Bereichs hat für die Argumente $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ den Wert $(1-t)r_i^* + ts_i^*$, und danach ist dieser Bereich entweder identisch, oder, wenn nicht identisch, so doch jedenfalls ganz enthalten in dem Bereich

$$\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z \leqq (1-t)r_i^* + ts_i^* \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

der dadurch gewiß auch ein Polyeder vorstellt, und um so mehr dann enthalten im Polyeder $\mathfrak{K}((1-t)r_i+ts_i)$. Mithin ist für das letztere Polyeder notwendig ebenfalls das Volumen $\geqq 1$, also

$$V((1-t)r_i+ts_i)\geqq 1.$$

Der Bereich $\mathfrak{B}$ hat danach die Eigenschaft, mit irgend zwei Punkten (r_i), (s_i) stets die ganze sie verbindende „Strecke" von Punkten $((1-t)r_i+ts_i)$ zu enthalten, und ist deshalb als ein *„konvexes Gebilde"* in der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ anzusprechen. Da $V(q_1, q_2, \cdots q_n)$ eine stetige Function der Argumente ist, wird ferner der Bereich $\mathfrak{B}$ *abgeschlossen* sein und wird seine Begrenzung von denjenigen Punkten (q_i) gebildet werden, für welche

$$V(q_1, q_2, \cdots q_n)=1$$

ist. Wir haben jetzt nach dem kleinsten Werte des mit den gegebenen positiven Größen F_i zu bildenden linearen Ausdrucks

$$F_1q_1+F_2q_2+\cdots+F_nq_n \tag{97}$$

im ganzen Bereiche $\mathfrak{B}$ zu fragen. Der Bereich $\mathfrak{B}$ erstreckt sich ins Unendliche. Insbesondere ist $q_1=q_2=\cdots=q_n=l$ ein Punkt aus $\mathfrak{B}$. Nun wird durch die Ungleichung

$$F_1q_1+F_2q_2+\cdots+F_nq_n\leqq l(F_1+F_2+\cdots+F_n)$$

ein Teil von $\mathfrak{B}$ bestimmt, der ganz im Endlichen liegt und zum mindesten jenen speziellen Punkt enthält. In diesem Teile hat der Ausdruck (97) sicher einen bestimmten kleinsten Wert, welcher nun zugleich das Minimum dieses Ausdrucks (97) im ganzen Bereiche $\mathfrak{B}$ sein wird.

Dieser kleinste Wert von (97) in $\mathfrak{B}$ sei $3V^{\frac{2}{3}}$, und es sei $r_1, r_2, \cdots r_n$ ein Punkt in $\mathfrak{B}$, für den dieser Wert eintritt. Der Punkt (r_i) liegt dann jedenfalls auf der Begrenzung von $\mathfrak{B}$, es stellt also $\mathfrak{K}(r_i)$ ein Polyeder vom Volumen 1 vor. Nehmen wir mit diesem Polyeder diejenige Translation vor, wodurch sein Schwerpunkt in den Nullpunkt fällt, so treten an Stelle der Parameter r_i gewisse Werte $r_i+a\alpha_i+b\beta_i+c\gamma_i$; für diese hat dann aber der Ausdruck (97) genau denselben Wert, da wir für die Größen F_i die Gleichungen (93) als bestehend angenommen haben. Danach können wir auch von vornherein uns die Parameter r_i so beschaffen denken, daß der Schwerpunkt von $\mathfrak{K}(r_i)$ sich im Nullpunkte befindet. Alsdann sind notwendig die Größen $r_1, r_2, \cdots r_n$ sämtlich >0. Für alle Punkte (q_i) in $\mathfrak{B}$ gilt nun die Ungleichung

$$F_1q_1+F_2q_2+\cdots+F_nq_n\geqq 3V^{\frac{2}{3}} \tag{98}$$

und haben wir hierin also die Bedingung einer „Stützebene" an $\mathfrak{B}$ durch den Punkt (r_i), d. h. einer solchen Ebene, welche auf einer Seite von sich gar keinen Punkt von $\mathfrak{B}$ liegen hat.

Für das Polyeder $\mathfrak{K}(r_1, r_2, \cdots r_n)$ bedeute allgemein Φ_i den Flächeninhalt der Seitenfläche mit der äußeren Normale $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, wobei wir $\Phi_i = 0$ zu setzen hätten, falls eine solche Seitenfläche im Polyeder nicht wirklich vorkäme. Alsdann können wir zeigen, daß die Ebene

$$\frac{1}{3}(\Phi_1 q_1 + \Phi_2 q_2 + \cdots + \Phi_n q_n) = 1,$$

die jedenfalls durch den Punkt (r_i) geht, die *einzige* Stützebene an $\mathfrak{B}$ durch diesen Punkt vorstellt, daß mithin die n Gleichungen

$$\Phi_i = \frac{F_i}{V^{\frac{2}{3}}} \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{99}$$

gelten müssen. Denn hätten nicht diese n Gleichungen sämtlich statt, so könnten wir in der durch (98) dargestellten Stützebene an $\mathfrak{B}$ einen Punkt $(r_i + s_i)$ finden, für den

$$\frac{1}{3}(\Phi_1 s_1 + \Phi_2 s_2 + \cdots + \Phi_n s_n) > 0$$

ausfällt und noch alle Werte $r_i + s_i > 0$ sind. Nun ist $V(r_i) = 1$ und nach (91) das gemischte Volumen

$$V(\mathfrak{K}(r_i + s_i), \mathfrak{K}(r_i), \mathfrak{K}(r_i)) = 1 + \frac{1}{3}\sum \Phi_i s_i > 1;$$

infolgedessen wird das Volumen von $(1-t)\,\mathfrak{K}(r_i) + t\,\mathfrak{K}(r_i + s_i)$ dem Ausdrucke (60) zufolge bei hinreichend kleinen positiven Werten t sicher > 1 und umsomehr nach den oben gemachten Bemerkungen dann

$$V((1-t)r_i + t(r_i + s_i)) = V(r_i + ts_i) > 1.$$

Dieses könnte aber nicht der Fall sein, weil der Punkt $(r_i + ts_i)$ in einer Stützebene an $\mathfrak{B}$ liegt, somit gewiß nicht ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}$ sein kann.

Damit ist in der Tat bewiesen, daß die n Gleichungen (99) gelten müssen. Setzen wir $V^{\frac{1}{3}} r_i = p_i$, so besitzt alsdann das Polyeder $\mathfrak{K}(p_i)$ zu den Normalen $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ die Inhalte F_i der Seitenflächen, entspricht mithin genau den Forderungen unseres Satzes in 45.

§ 10.

Bestimmung eines konvexen Körpers zu einer gegebenen Krümmungsfunktion.

49. Auf den soeben gewonnenen Satz über Polyeder gründen wir nun den Beweis des Satzes in 43. über die Existenz eines stetig gekrümmten konvexen Körpers zu einer gegebenen Krümmungsfunktion. Dabei wird

uns namentlich die in (76) abgeleitete untere Grenze für die Differenz $V_1 - \sqrt[3]{V_0^2 V_3}$ von Nutzen sein.

Zunächst haben wir eine Bemerkung über gewisse Einteilungen auf der Kugelfläche $\mathfrak{E}$ $(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$ vorauszuschicken. Unter der *Winkeldistanz* zweier Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ auf $\mathfrak{E}$ wollen wir den Winkel $\mathfrak{x}\mathfrak{o}\mathfrak{x}^*$ der Radien vom Nullpunkte $\mathfrak{o}$ nach diesen Punkten verstehen. Es sei θ ein beliebiger positiver Wert, den wir $< \frac{\pi}{4}$ annehmen. Wir bestimmen auf $\mathfrak{E}$ successive Punkte $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots$ derart, daß die Winkeldistanz jedes folgenden Punktes von allen vorhergehenden $> \theta$ ist. Da die Oberfläche von $\mathfrak{E}$ eine endliche Größe hat, können wir eine solche Reihe von Punkten nicht unbegrenzt bilden, sondern *wir gelangen* schließlich *zu einer endlichen Reihe* $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots \mathfrak{x}_n$ *derart, daß* nun *für jeden beliebigen Punkt* $\mathfrak{x}$ *auf* $\mathfrak{E}$ *unter den* n *Winkeldistanzen von* $\mathfrak{x}$ *nach* $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots \mathfrak{x}_n$ *immer wenigstens eine* $\leqq \theta$ *ausfällt.*

Es seien ξ_i, η_i, ζ_i die Koordinaten von $\mathfrak{x}_i$ $(i = 1, 2, \cdots n)$. Die n Ungleichungen

$$\xi_i x + \eta_i y + \zeta_i z \leqq 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

bestimmen alsdann ein Polyeder mit n Seitenflächen $\mathfrak{R}_i$, das ganz in der Kugel mit $\mathfrak{o}$ als Mittelpunkt vom Radius $\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$ enthalten ist. Die Pyramide $\mathfrak{o}\mathfrak{R}_i$ mit $\mathfrak{o}$ als Spitze und $\mathfrak{R}_i$ als Basis schneidet aus der Kugelfläche $\mathfrak{E}$ eine Partie $\mathfrak{E}_i$ heraus, den Bereich aller der Punkte $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{E}$, für welche die Winkeldistanz von dem betreffenden Punkte $\mathfrak{x}_i$ nicht größer als von irgend einem der anderen $n-1$ Punkte $\mathfrak{x}_j$ $(j \gtrless i)$ ist. Es sei E_i der Flächeninhalt von $\mathfrak{E}_i$; das Gebiet $\mathfrak{E}_i$ enthält gewiß alle Punkte auf $\mathfrak{E}$ mit einer Winkeldistanz $\leqq \frac{\theta}{2}$ von $\mathfrak{x}_i$ und ist selbst ganz enthalten im Gebiet aller Punkte auf $\mathfrak{E}$ mit einer Winkeldistanz $\leqq \theta$ von $\mathfrak{x}_i$; daraus folgt

$$2\pi\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) < E_i < 2\pi(1 - \cos\theta).$$

Da überdies

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_n = 4\pi$$

ist, so haben wir

$$\frac{1}{2} n\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) < 1 < \frac{1}{2} n(1 - \cos\theta).$$

50. Es sei nun $F(\alpha, \beta, \gamma)$ die gegebene auf $\mathfrak{E}$ durchweg stetige und positive Funktion, welche die drei Gleichungen

$$(100) \qquad \int \alpha F d\omega = 0, \quad \int \beta F d\omega = 0, \quad \int \gamma F d\omega = 0$$

erfüllt und als Krümmungsfunktion eines gewissen konvexen Körpers erkannt werden soll.

Verstehen wir unter $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ ebenfalls einen beliebigen Punkt auf $\mathfrak{E}$, so stellt

$$(101) \qquad S(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*) = \frac{1}{2}\int |\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \gamma\gamma^*| F(\alpha, \beta, \gamma)\, d\omega$$

eine Funktion der Argumente $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ dar, welche gleichfalls auf $\mathfrak{E}$ durchweg stetig und positiv sein wird, und besitzt diese Funktion dann auf $\mathfrak{E}$ ein bestimmtes *Minimum*, das wir S_0 nennen und das auch noch > 0 sein wird.

51. Wir denken uns jetzt eine Massenbelegung der Kugelfläche $\mathfrak{E}$ vorgenommen, wobei die Flächendichtigkeit an einem Punkte α, β, γ durch $F(\alpha, \beta, \gamma)$ dargestellt ist. Der Schwerpunkt der Belegung des Gebiets $\mathfrak{E}_i$ wird alsdann, da der Sektor $\mathfrak{o}\mathfrak{E}_i$ mit $\mathfrak{o}$ als Spitze und $\mathfrak{E}_i$ als Basis ein konvexer Körper ist und die Punkte auf $\mathfrak{E}_i$ eine Winkeldistanz $\leqq \theta$ von $\mathfrak{r}_i$ haben, ein Punkt $\mathfrak{q}_i$ sein, der eine Entfernung $\varrho_i > \cos\theta$ und < 1 von $\mathfrak{o}$ besitzt und so gelegen ist, daß der Strahl $\mathfrak{o}\mathfrak{q}_i$ in seiner Verlängerung einen Punkt $\mathfrak{p}_i$ innerhalb $\mathfrak{E}_i$ trifft. Wir bezeichnen mit $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ die Koordinaten von $\mathfrak{p}_i$, sodaß $\varrho_i\alpha_i, \varrho_i\beta_i, \varrho_i\gamma_i$ die von $\mathfrak{q}_i$ sind. Setzen wir noch

$$(102) \qquad \int\limits_{(\mathfrak{E}_i)} F\, d\omega = \frac{F_i}{\varrho_i},$$

so wird

$$(103) \qquad \int\limits_{(\mathfrak{E}_i)} \alpha F\, d\omega = \alpha_i F_i, \quad \int\limits_{(\mathfrak{E}_i)} \beta F\, d\omega = \beta_i F_i, \quad \int\limits_{(\mathfrak{E}_i)} \gamma F\, d\omega = \gamma_i F_i;$$

darin sind die vier Integrale über den Bereich $\mathfrak{E}_i$ zu erstrecken. Für die damit eingeführten n Richtungen $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ und n positiven Größen F_i werden nunmehr auf Grund der Gleichungen (100) die Beziehungen

$$(104) \qquad \sum \alpha_i F_i = 0, \quad \sum \beta_i F_i = 0, \quad \sum \gamma_i F_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

statthaben.

Jeder Punkt auf $\mathfrak{E}$ besitzt von wenigstens einem der Punkte $\mathfrak{r}_i$ eine Winkeldistanz $\leqq \theta$, und sodann von dem zugehörigen Punkte $\mathfrak{p}_i$ gewiß eine Winkeldistanz $< 2\theta$, weil immer $\mathfrak{r}_i$ von $\mathfrak{p}_i$ eine Winkeldistanz $< \theta$ hat. Da wir nun $2\theta < \frac{\pi}{2}$ vorausgesetzt haben, können hiernach die n Richtungen $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ gewiß nicht sämtlich in einer Ebene liegen.

Nach dem Satze in 45. wird es nunmehr ein ganz bestimmtes Polyeder $\mathfrak{P}$ geben mit n Seitenflächen, den Richtungen $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ als äußeren Normalen und den Größen F_i als Flächeninhalten dieser Seitenflächen, und zudem noch mit dem Schwerpunkte im Nullpunkte.

52. Wir haben jetzt noch einige allgemeinere Abschätzungen zur Sprache zu bringen.

Ist $\mathfrak{K}$ ein beliebiger konvexer Körper mit dem Schwerpunkte im Nullpunkte, H die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{K}$, so wollen wir das Integral

$$\frac{1}{3}\int H(\alpha,\beta,\gamma)\,F(\alpha,\beta,\gamma)\,d\omega = J(\mathfrak{K}) \tag{105}$$

schreiben. Es sei G das Maximum unter den Werten $H(\alpha,\beta,\gamma)$ auf $\mathfrak{E}$, also der Radius der kleinsten, den Körper $\mathfrak{K}$ ganz in sich enthaltenden Kugel mit dem Nullpunkte als Mittelpunkt, und etwa $G\alpha^*$, $G\beta^*$, $G\gamma^*$ ein solcher Punkt der Begrenzung von $\mathfrak{K}$, der vom Nullpunkte die Entfernung G hat. Nach der Definition der Stützebenenfunktion ist dann sicherlich immer

$$G(\alpha\alpha^*+\beta\beta^*+\gamma\gamma^*) \leqq H(\alpha,\beta,\gamma). \tag{106}$$

Andrerseits haben wir, weil der Schwerpunkt von $\mathfrak{K}$ sich im Nullpunkte befindet, mit Rücksicht auf die Ungleichung (59) stets

$$H(\alpha,\beta,\gamma) \leqq 3H(-\alpha,-\beta,-\gamma). \tag{107}$$

Wir wenden nun auf das Integral (105) die Ungleichung (106) für alle diejenigen Richtungen α,β,γ an, wobei $\alpha\alpha^*+\beta\beta^*+\gamma\gamma^*\geqq 0$ ist, und machen für die anderen Richtungen von (107) Gebrauch; beachten wir noch, daß zufolge der Gleichungen (100) das Integral

$$\frac{1}{2}\int |\alpha\alpha^*+\beta\beta^*+\gamma\gamma^*|\,F(\alpha,\beta,\gamma)\,d\omega,$$

erstreckt über die halben Kugelflächen von $\mathfrak{E}$, wo $\alpha\alpha^*+\beta\beta^*+\gamma\gamma^*\geqq 0$ bez. $\leqq 0$ gilt, beide Male denselben Wert hat, mithin, nach der in 50. erklärten Bedeutung der Größe S_0, jedesmal $\geqq \frac{1}{2}S_0$ sein muß, so folgt

$$J(\mathfrak{K}) \geqq \frac{1}{3}\left(S_0+\frac{1}{3}S_0\right)G = \frac{4}{9}S_0 G. \tag{108}$$

Setzen wir

$$\int F(\alpha,\beta,\gamma)\,d\omega = O_0, \tag{109}$$

so wird andrerseits

$$\frac{1}{3}O_0 G \geqq J(\mathfrak{K}). \tag{110}$$

Bei der Annahme $F(\alpha,\beta,\gamma)=1$, wobei die Relationen (100) jedenfalls erfüllt sind, geht auf diese Weise insbesondere

$$\frac{4\pi}{3}G \geqq \frac{1}{3}\int H\,d\omega \geqq \frac{4\pi}{9}G \tag{111}$$

hervor.

Setzen wir $H(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)=q_i$, so ist nach (91) das gemischte Volumen

$$V(\mathfrak{K},\mathfrak{P},\mathfrak{P}) = \frac{1}{3}(F_1q_1+F_2q_2+\cdots+F_nq_n). \tag{112}$$

Jeder Punkt α, β, γ auf $\mathfrak{S}$ besitzt von wenigstens einem Punkte $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ eine Winkeldistanz $< 2\theta$, also eine geradlinige Distanz $< 2 \sin\theta$ und gilt alsdann nach der Ungleichung (6) in § 1 immer:

$$|H(\alpha, \beta, \gamma) - H(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)| < 2 \sin\theta \cdot G.$$

Mit Hülfe dieser Beziehung und der Formeln (102) gewinnen wir aus (105) und (112) einerseits:

$$J(\mathfrak{K}) > V(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}) - 2 \sin\theta \cdot O_0 G, \tag{113}$$

andrerseits:

$$\frac{1}{\cos\theta} V(\mathfrak{K}, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}) > J(\mathfrak{K}) - 2 \sin\theta \cdot O_0 G. \tag{114}$$

53. Die abgeleiteten Ungleichungen benutzen wir zunächst, um in Betreff der Ausdehnung des in 51. konstruierten Polyeders $\mathfrak{P}$ gewisse Grenzen nachzuweisen. Es sei $P(u, v, w)$ die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{P}$, N das Maximum unter den Werten $P(\alpha, \beta, \gamma)$, ferner V das Volumen von $\mathfrak{P}$. Aus (111) entnehmen wir

$$\frac{4\pi}{3} N \geqq \frac{1}{3} \int P(\alpha, \beta, \gamma)\, d\omega \geqq \frac{4\pi}{9} N. \tag{115}$$

Die Oberfläche von $\mathfrak{P}$ ist

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n < O_0 \quad \text{und} \quad > \cos\theta \cdot O_0. \tag{116}$$

Wenden wir nun die allgemeinen Ungleichungen $V_1^3 \geqq V_0^2 V_3$, $V_2^3 \geqq V_0 V_3^2$ für zwei beliebige konvexe Körper auf das Polyeder $\mathfrak{P}$ und die Kugel $\mathfrak{S}$ an, so erhalten wir mit Rücksicht hierauf:

$$\frac{1}{27} O_0^3 > \frac{4\pi}{3} V^2, \qquad \frac{4\pi}{3} N^3 > V. \tag{117}$$

Aus (113) gewinnen wir

$$J(\mathfrak{P}) > V - 2 \sin\theta \cdot O_0 N \tag{118}$$

und aus (114) und (108):

$$\frac{V}{\cos\theta} > J(\mathfrak{P}) - 2 \sin\theta \cdot O_0 N \geqq \left(\frac{4}{9} S_0 - 2 \sin\theta \cdot O_0\right) N. \tag{119}$$

Mit Hülfe der zweiten Ungleichung in (117) folgt hieraus

$$V^{\frac{2}{3}} > \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \cos\theta \left(\frac{4}{9} S_0 - 2 \sin\theta \cdot O_0\right). \tag{120}$$

Wir nehmen nun einen Winkel θ_0 so klein an, daß jedenfalls

$$\sin\theta_0 < \frac{2}{9} \frac{S_0}{O_0}$$

ist, und gewinnen dann aus (120) eine von θ unabhängige positive Größe V_0

und hernach aus der zweiten Ungleichung in (117) eine von θ unabhängige Größe N_0 derart, daß immer

$$V \geqq V_0, \quad N_0 \geqq N \tag{121}$$

statthat, wenn $\theta \leqq \theta_0$ ist, was wir von nun an voraussetzen.

Das Polyeder $\frac{1}{V^{\frac{1}{3}}}\mathfrak{P}$ hat das Volumen 1. Aus (119) entnehmen wir

$$J\left(\frac{\mathfrak{P}}{V^{\frac{1}{3}}}\right) = \frac{1}{V^{\frac{1}{3}}} J(\mathfrak{P}) < \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\cos\theta_0} N_0^2 + 2\sin\theta_0 \cdot \frac{O_0 N_0}{V_0^{\frac{1}{3}}}; \tag{122}$$

die hier rechts stehende Größe setzen wir $= \frac{4}{9} S_0 M_0$, dann ist also

$$J\left(\frac{\mathfrak{P}}{V^{\frac{1}{3}}}\right) < \frac{4}{9} S_0 M_0. \tag{123}$$

54. Es sei jetzt $\mathfrak{L}$ ein beliebiger konvexer Körper vom Volumen 1 und mit dem Nullpunkte als Schwerpunkt, $L(u, v, w)$ die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{L}$. Wir fragen, unter welchen Umständen sich

$$J(\mathfrak{L}) \leqq J\left(\frac{\mathfrak{P}}{V^{\frac{1}{3}}}\right) \tag{124}$$

herausstellen kann. Nach der Formel (108) und infolge der Ungleichung (123) wird hierzu jedenfalls nötig sein, daß $\mathfrak{L}$ ganz im Inneren der Kugel vom Radius M_0 mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt enthalten ist, daß also stets $L(\alpha, \beta, \gamma) < M_0$ gilt. Nach (113) ist sodann

$$J(\mathfrak{L}) > V(\mathfrak{L}, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}) - 2\sin\theta \cdot O_0 M_0. \tag{125}$$

Jetzt ziehen wir die Resultate des § 6 heran. Bezeichnen wir mit D das Maximum unter den Quotienten

$$\frac{V^{\frac{1}{3}} L(\alpha, \beta, \gamma)}{P(\alpha, \beta, \gamma)}, \tag{126}$$

so gilt nach (76) die Ungleichung

$$\frac{V(\mathfrak{L}, \mathfrak{P}, \mathfrak{P})}{V^{\frac{2}{3}}} - 1 \geqq \varkappa \frac{(D-1)^6}{D^5}, \tag{127}$$

worin $\varkappa$ die numerische Konstante $\frac{1}{2^{10} \cdot 3^4 \cdot 7^{\frac{4}{3}}}$ bedeutet. Aus (125), (124), (119) und (121) schließen wir nun

$$\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right) + 2\sin\theta \cdot O_0 \left(\frac{M_0}{V_0^{\frac{2}{3}}} + \frac{N_0}{V_0}\right) > \varkappa \frac{(D-1)^6}{D^5}. \tag{128}$$

Aus dieser Ungleichung entnehmen wir für $D - 1$ eine obere Grenze, die nach Null konvergiert, wenn θ nach Null abnimmt.

Andrerseits haben wir, wenn d das Minimum der Funktion (126) bedeutet, nach (78) und der an diese Ungleichung angeschlossenen Bemerkung:

$$D^2 - 1 \geqq \varkappa \frac{(1-d)^6}{d}, \tag{129}$$

und hieraus ergibt sich weiter für $1-d$ eine obere Grenze, die mit θ zugleich nach Null konvergiert. Wir werden somit auch eine Größe ε, die zugleich mit θ nach Null konvergiert, angeben können, sodaß

$$1+\varepsilon \geqq D, \quad d \geqq \frac{1}{1+\varepsilon}$$

gilt, und wir haben damit das Resultat erlangt:

Soll

$$J(\mathfrak{L}) \leqq J\left(\frac{\mathfrak{P}}{V^{\frac{1}{3}}}\right)$$

ausfallen, so muß jedenfalls $\mathfrak{L}$ *ganz in* $(1+\varepsilon)\,\dfrac{\mathfrak{P}}{V^{\frac{1}{3}}}$ *enthalten sein und selbst das Polyeder* $\dfrac{1}{1+\varepsilon}\,\dfrac{\mathfrak{P}}{V^{\frac{1}{3}}}$ *in sich enthalten, wobei* ε *eine gewisse vom Winkel* θ *abhängende Größe bedeutet, die mit nach Null abnehmendem* θ *ebenfalls nach Null konvergiert.*

55. Dieses Resultat zeigt uns sofort (s. 9.), daß, wenn wir den Winkel θ nach Null abnehmen lassen, das Polyeder $\dfrac{\mathfrak{P}}{V^{\frac{1}{3}}}$ nach einem bestimmten konvexen Körper $\mathfrak{L}$ als Grenze konvergieren muß, welchem die Eigenschaft zukommen wird, daß für ihn unter allen konvexen Körpern vom Volumen 1 und dem Nullpunkt als Schwerpunkt das Integral

$$J(\mathfrak{L}) = \frac{1}{3}\int L(\alpha,\beta,\gamma)\,F(\alpha,\beta,\gamma)\,d\omega,$$

unter L die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{L}$ verstanden, den kleinsten Wert hat. Bezeichnen wir das betreffende Minimum dieses Integrals mit J, so konvergiert gleichzeitig $V^{\frac{2}{3}}$ nach J (s. (118) und (119)) und das Polyeder $\mathfrak{P}$ nach dem Körper $\mathfrak{K} = J^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{L}$.

Ist jetzt $\mathfrak{K}'$ ein beliebiger konvexer Körper, H' seine Stützebenenfunktion, G' das Maximum der Werte $H'(\alpha,\beta,\gamma)$, so folgt aus (113), (114) und (110):

$$|J(\mathfrak{K}') - V(\mathfrak{K}',\mathfrak{P},\mathfrak{P})| < \left(\frac{1}{3}(1-\cos\theta) + 2\sin\theta\right) O_0\,G'.$$

Da nun für ein nach Null abnehmendes θ die Größe $V(\mathfrak{K}',\mathfrak{P},\mathfrak{P})$ nach

$V(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ konvergiert, so ersehen wir hieraus, daß allgemein die Darstellung

$$V(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = J(\mathfrak{K}'), \quad \text{d. i.} \quad = \frac{1}{3}\int H' F \, d\omega$$

gilt. Danach ist in der Tat der gefundene konvexe Körper $\mathfrak{K}$ ein stetig gekrümmter mit $F(\alpha, \beta, \gamma)$ als Krümmungsfunktion, mithin der Beweis für den Satz in 43. vollständig erbracht.

56. Wir können diesen Satz über die Bestimmung eines konvexen Körpers zu einer gegebenen Krümmungsfunktion F auch auf Fälle ausdehnen, wo diese vorgelegte Funktion F nicht durchweg stetig ist. Insbesondere lassen sich alle konvexen Körper, welche in der Regel *konstante* positive Krümmung und nur an singulären Stellen unendliche Krümmung besitzen, durch folgende Aussage charakterisieren:

Es seien auf der Kugelfläche $\mathfrak{E}$ beliebige Partien $\mathfrak{N}$ abgegrenzt, denen ein bestimmter und von Null verschiedener Flächeninhalt zukommt und so, daß der Schwerpunkt dieser Partien $\mathfrak{N}$ für sich, wie der der ganzen Kugelfläche $\mathfrak{E}$, im Nullpunkte liegt. Alsdann gibt es stets einen und nur einen konvexen Körper $\mathfrak{K}$ mit dem Nullpunkte als Schwerpunkt, derart daß für jeden beliebigen konvexen Körper $\mathfrak{K}'$ die Darstellung

$$V(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = \frac{1}{3}\int\limits_{(\mathfrak{N})} H' \, d\omega$$

gilt, wo H' die Stützebenenfunktion von $\mathfrak{K}'$ bedeutet und das Integral nur über die Partien $\mathfrak{N}$ der Kugelfläche $\mathfrak{E}$ zu erstrecken ist.