Über die Existenz der Grundlösung bei einer linearen partiellen Differentialgleichung der 2. Ordnung von elliptischem Typus.

Von

Erik Holmgren in Upsala.

In der Theorie der Differentialgleichung

$$(1) \qquad D(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a\frac{\partial z}{\partial x} - b\frac{\partial z}{\partial y} - cz = 0$$

spielt die sogenannte Grundlösung eine wichtige Rolle.*)

Diese ist in folgender Weise definiert. Es seien (ξ, η), (x, y) Punkte in dem Gebiete wo die Koeffizienten $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ definiert sind, es sei r der Abstand zwischen (ξ, η) und (x, y). Die Grundlösung von (1) ist von der Form

$$u(x, y, \xi, \eta) \log r + v(x, y, \xi, \eta),$$
$$u(\xi, \eta, \xi, \eta) = 1,$$

wo u und v stetige Funktionen von x, y, ξ, η sind.

Bei der Voraussetzung, daß a, b, c analytische Funktionen sind, hat Prof. Hilbert eine sehr einfache Methode gegeben (Vorlesung S. S. 1901; siehe Hedrick, Diss. Göttingen 1901), die Existenz von solchen Lösungen nachzuweisen. (Die Funktionen u und v sind dann analytische Funktionen von x, y, ξ, η.)

In dem vorliegenden Aufsatze soll eine Methode entwickelt werden um die Existenz der Grundlösung bei (1) unter denselben Voraussetzungen darzulegen**), die sich auch auf den Fall von drei Veränderlichen aus-

*) Siehe Encyklopädie der Math. Wiss. Bd. 2, p. 515. Mehrere Sätze über das Verhalten der Integrale in der Umgebung von isolierten singulären Stellen, die bei der Potentialgleichung gelten, können leicht auf (1) ausgedehnt werden, nachdem die Existenz der Grundlösung nachgewiesen ist (z. B. das Theorem von Laurent).

**) Die Methode ist ganz analog mit der, die Picard angewandt hat um den analytischen Charakter der Lösungen bei (1) nachzuweisen.

In einer nach dem Einreichen dieses Aufsatzes erschienenen Note (Comptes rendus, 2. Juni, 1903) wendet Picard die Hilbertsche Methode an (im Falle $\xi = \eta = 0$), um zu zeigen, daß immer Lösungen der Form $v(x, y) \log r + \dfrac{\alpha x + \beta y + w(x, y)}{r^2}$, wo α, β beliebige Konstanten sind, bei (1) existieren (für $\alpha = \beta = 0$ geht die Grunddehnen läßt*) (d. h. auf die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial z}+du=0).$$

Wir setzen in (1)

$$z=u\log r+v, \tag{2}$$

und bekommen

$$D(u)\log r+\frac{1}{r^2}\Big[2\Big((x-\xi)\frac{\partial u}{\partial x}+(y-\eta)\frac{\partial u}{\partial y}\Big)-\Big(a(x-\xi)+b(y-\eta)u\Big)\Big] \tag{3}$$
$$+D(v)=0.$$

Wir wollen jetzt u als eine Lösung von $D(u)=0$ bestimmen, die so beschaffen ist, daß

$$\frac{1}{r^2}\Big[2\Big((x-\xi)\frac{\partial u}{\partial x}+(y-\eta)\frac{\partial u}{\partial y}\Big)-\Big(a(x-\xi)+b(y-\eta)u\Big)\Big]=f(x,y)$$

eine reguläre analytische Funktion von x, y, ξ, η ist.

Wird dann v aus der Gleichung

$$D(v)+f(x,y)=0$$

bestimmt, so stellt $u\log r+v$ eine Grundlösung dar.

Zu diesem Zwecke führen wir Polarkoordinaten ein durch die Formeln

$$x-\xi=r\cos\theta,\qquad y-\eta=r\sin\theta.$$

Nach Multiplikation mit r^2 geht dann $D(u)=0$ über in

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=ar\Big(r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big) \tag{4}$$
$$+br\Big(r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big)+cr^2u.$$

Für $f(x,y)$ bekommen wir den Ausdruck

$$f(x,y)=\frac{1}{r}\Big[2\frac{\partial u}{\partial r}-(a\cos\theta+b\sin\theta)u\Big]. \tag{5}$$

Wir benutzen jetzt den folgenden Hülfssatz**):

Eine reelle Potenzreihe $f(x,y)$ von $(x-\xi)$ und $(y-\eta)$, welche konvergiert, wenn $|x-\xi|$, $|y-\eta|<R$ ist, kann in der Form

---

lösung hervor), ein Resultat welches er, wie er bemerkt, in den Comptes rendus, 1891 ausgesprochen hatte. (Diese Lösung kann offenbar linear in der Grundlösung und ihren Ableitungen erster Ordnung nach ξ und η dargestellt werden). Er erwähnt daselbst daß seine frühere nicht mitgeteilte Beweismethode von Entwickelungen in trigonometrischen Reihen Gebrauch machte.

*) Diese Ausdehnung ist im „Arkiv for matematik, astronomi och fysik" Band I, (herausgegeben von der Academie der Wiss. in Stockholm) ausgeführt worden.

**) Siehe z. B. Paraf, Thèse, Paris 1892, p. 73.

$$f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu P_\nu \tag{A}$$

geschrieben werden, wo

$$P_\nu = \left(a_\nu^{(\nu)} \cos \nu\theta + b_\nu^{(\nu)} \sin \nu\theta\right) + \left(a_{\nu-2}^{(\nu)} \cos(\nu-2)\theta + b_{\nu-2}^{(\nu)} \sin(\nu-2)\theta\right) + \cdots.$$

Dabei konvergiert die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu [P_\nu], \tag{A'}$$

wo

$$[P_\nu] = \left|a_\nu^{(\nu)}\right| + \left|b_\nu^{(\nu)}\right| + \left|a_{\nu-2}^{(\nu)}\right| + \left|b_{\nu-2}^{(\nu)}\right| + \cdots \tag{6}$$

wenn $r < R$.

Umgekehrt stellt eine Reihe von der Form (A), wenn die zugehörige Reihe (6) konvergent ist, eine reguläre analytische Funktion von x, y in der Umgebung von $x = \xi$, $y = \eta$ dar, wenigstens wenn

$$|x - \xi| < \frac{R}{2}, \quad |y - \eta| < \frac{R}{2}.$$

Wir werden versuchen die Funktion u in der Form (A) zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke nehmen wir an

$$u = 1 + \alpha_1(\theta) r + \alpha_2(\theta) r^2 + \cdots + \alpha_n(\theta) r^n + \cdots \tag{7}$$

wo

$$\alpha_n(\theta) = \gamma_n^{(n)} \cos n\theta + \delta_n^{(n)} \sin n\theta + \gamma_{n-2}^{(n)} \cos(n-2)\theta + \delta_{n-2}^{(n)} \sin(n-2)\theta + \cdots. \tag{7'}$$

Durch Einsetzung in (4) bekommen wir das folgende System von Differentialgleichungen für $\alpha_n(\theta)$:

$$\text{für } n = 1 \qquad \frac{d^2\alpha_1}{d\theta^2} + \alpha_1 = 0,$$

$$\text{für } n = 2, 3, \cdots$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d^2\alpha_n}{d\theta^2} + n^2\alpha_n = {} & (a)_0\left((n-1)\cos\theta\,\alpha_{n-1} - \sin\theta\,\frac{d\alpha_{n-1}}{d\theta}\right) \\
& + (a)_1\left((n-2)\cos\theta\,\alpha_{n-2} - \sin\theta\,\frac{d\alpha_{n-2}}{d\theta}\right) \\
& + (a)_{n-2}\left(\cos\theta\,\alpha_1 - \sin\theta\,\frac{d\alpha_1}{d\theta}\right) \\
& + (b)_0\left((n-1)\sin\theta\,\alpha_{n-1} + \cos\theta\,\frac{d\alpha_{n-1}}{d\theta}\right) \\
& + (b)_1\left((n-2)\sin\theta\,\alpha_{n-2} + \cos\theta\,\frac{d\alpha_{n-2}}{d\theta}\right) \\
& + (b)_{n-2}\left(\sin\theta\,\alpha_1 + \cos\theta\,\frac{d\alpha_1}{d\theta}\right) \\
& + (c)_0\alpha_{n-2} + (c)_1\alpha_{n-3} + \cdots + (c)_{n-2},
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

wo die Bezeichnung $(\varphi)_n$ für den Koeffizient von r^n in der Entwicklung von einer Funktion φ nach Potenzen von r angewandt wird (diese Bezeichnung wird überall in der Folge gebraucht). Wir machen die Voraussetzung, daß die Koeffizienten a, b, c in dieser Weise entwickelt werden können (vgl. p. 410).

Die Funktionen $\alpha_n(\theta)$ müssen die Bedingung erfüllen, daß $f(x, y)$ regulär wird, d. h. von der Form (A).

Man findet leicht, daß

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{n-2} r^{n-2}, \tag{9}$$

wo

$$Q_{n-2} = 2n\alpha_n(\theta) - \{(a\cos\theta + b\sin\theta)_0 \alpha_{n-1}(\theta) + (a\cos\theta + b\sin\theta)_1 \alpha_{n-2}(\theta) + \cdots + (a\cos\theta + b\sin\theta)_{n-1}\}. \tag{9'}$$

Nehmen wir an — was später gezeigt werden wird — daß

$$\alpha_1(\theta), \cdots, \alpha_n(\theta)$$

von der Form (7′) sind, so finden wir leicht daß Q_{n-2} auch von dieser Form ist d. h.

$$Q_{n-2} = p_n^{(n-2)} \cos n\theta + q_n^{(n-2)} \sin n\theta + p_{n-2}^{(n-2)} \cos(n-2)\theta + q_{n-2}^{(n-2)} \sin(n-2)\theta + \cdots \tag{10}$$

Die rechte Seite in (9′) kann nämlich offenbar als eine Summe von Gliedern der Form

$$A \cdot {\cos \atop \sin}(\theta) {\cos \atop \sin}(i-2r)\theta {\cos \atop \sin}(n-(i+1)-2s)\theta$$

geschrieben werden und ein solches Glied läßt sich in die Gestalt (10) umformen, wie man durch Anwendung der Formel

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

und den analogen für $\cos a \sin b$, $\sin a \sin b$ findet. Man sieht leicht, daß die Koeffizienten von $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ in Q_{n-2} d. h. $p_n^{(n-2)}$, $q_n^{(n-2)}$ nur von den Koeffizienten von sinus und cosinus der höchsten Multipeln von θ in $\alpha_1(\theta), \alpha_2(\theta), \cdots, \alpha_n(\theta)$ abhängen, d. h. von $\gamma_n^{(n)}$, $\delta_\nu^{(n)}$ $(n = 1, 2, \cdots, n)$. Sie sind durch die folgenden Ausdrücke gegeben

$$\begin{aligned} p_n^{(n-2)} = 2n\gamma_n^{(n)} - \frac{1}{4}\Big[2\left(\mu_0 \gamma_{n-1}^{(n-1)} - \bar{\mu}_0 \delta_{n-1}^{(n-1)}\right) &+ \Big(\left(\mu_1^{(1)} - \bar{\nu}_1^{(1)}\right)\gamma_{n-2}^{(n-2)} \\ &- \left(\nu_1^{(1)} + \bar{\mu}_1^{(1)}\right)\delta_{n-2}^{(n-2)}\Big) \\ + \cdots + \Big(\left(\mu_{n-2}^{(n-2)} - \bar{\nu}_{n-2}^{(n-2)}\right)\gamma_1^{(1)} &- \left(\nu_{n-2}^{(n-2)} + \bar{\mu}_{n-2}^{(n-2)}\right)\delta_1^{(1)}\Big) \\ + 2\left(\mu_{n-1}^{(n-1)} - \bar{\nu}_{n-1}^{(n-1)}\right)\Big], \end{aligned}$$

$$q_n^{(n-2)} = 2n\,\delta_n^{(n)} - \frac{1}{4}\Big[2\left(\mu_0\delta_{n-1}^{(n-1)} + \bar{\mu}_0\gamma_{n-1}^{(n-1)}\right) + \Big((\nu_1^{(1)} + \bar{\mu}_1^{(1)})\,\gamma_{n-2}^{(n-2)} + (\mu_1^{(1)} - \bar{\nu}_1^{(1)})\,\delta_{n-2}^{(n-2)}\Big) + \cdots + \Big((\nu_{n-2}^{(n-2)} + \bar{\mu}_{n-2}^{(n-2)})\,\gamma_1^{(1)} + (\mu_{n-2}^{(n-2)} - \bar{\nu}_{n-2}^{(n-2)})\,\delta_1^{(1)}\Big) + 2\,(\nu_{n-1}^{(n-1)} + \bar{\mu}_{n-1}^{(n-1)})\Big], \quad \left(\delta_0^{(0)} = \nu_0 = \bar{\nu}_0 = 0,\ \gamma_0^{(0)} = 1\right),$$

wo die μ und ν durch die Entwicklungen

$$a(x,y) = \mu_0 + (\mu_1^{(1)}\cos\theta + \nu_1^{(1)}\sin\theta)r + (\mu_2^{(2)}\cos 2\theta + \nu_2^{(2)}\sin 2\theta + \mu_3^{(2)})r^2 + \cdots,$$
$$b(x,y) = \bar{\mu}_0 + (\bar{\mu}_1^{(1)}\cos\theta + \bar{\nu}_1^{(1)}\sin\theta)r + (\bar{\mu}_2^{(2)}\cos 2\theta + \bar{\nu}_2^{(2)}\sin 2\theta + \bar{\mu}_3^{(2)})r^2 + \cdots$$

definiert sind.

Die Bedingung dafür daß $f(x,y)$ regulär ist, d. h. die Form (A) hat, ist nach dem Hülfssatze die, daß

$$p_n^{(n-2)} = q_n^{(n-2)} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Also müssen wir haben

$$(11)\quad \begin{cases} \gamma_1^{(1)} = \dfrac{\mu_0}{2}, \quad \delta_1^{(1)} = \dfrac{\bar{\mu}_0}{2}, \\ \gamma_n^{(n)} = \dfrac{1}{8n}\Big\{2\left(\mu_0\gamma_{n-1}^{(n-1)} - \bar{\mu}_0\delta_{n-1}^{(n-1)}\right) + \Big((\mu_1^{(1)} - \bar{\nu}_1^{(1)})\,\gamma_{n-2}^{(n-2)} - (\nu_1^{(1)} + \bar{\mu}_1^{(1)})\,\delta_{n-2}^{(n-2)}\Big) + \cdots \\ \quad \cdots + \Big((\mu_{n-2}^{(n-2)} - \bar{\nu}_{n-2}^{(n-2)})\,\gamma_1^{(1)} - (\nu_{n-2}^{(n-2)} + \bar{\mu}_{n-2}^{(n-2)})\,\delta_1^{(1)}\Big) \\ \quad + 2\left(\mu_{n-1}^{(n-1)} - \bar{\nu}_{n-1}^{(n-1)}\right)\Big\}, \\ \delta_n^{(n)} = \dfrac{1}{8n}\Big\{2\left(\mu_0\delta_{n-1}^{(n-1)} + \bar{\mu}_0\gamma_{n-1}^{(n-1)}\right) + \Big((\nu_1^{(1)} + \bar{\mu}_1^{(1)})\,\gamma_{n-2}^{(n-2)} + (\mu_1^{(1)} - \bar{\nu}_1^{(1)})\,\delta_{n-2}^{(n-2)}\Big) + \cdots \\ \quad \cdots + \Big((\nu_{n-2}^{(n-2)} + \bar{\mu}_{n-1}^{(n-2)})\,\gamma_1^{(1)} + (\mu_{n-2}^{(n-2)} - \bar{\nu}_{n-2}^{(n-2)})\,\delta_1^{(1)}\Big) \\ \quad + 2\left(\nu_{n-1}^{(n-1)} + \bar{\mu}_{n-1}^{(n-1)}\right)\Big\} \\ \qquad\qquad n = 2, 3, \cdots. \end{cases}$$

Durch (11) werden somit die Koeffizienten $\gamma_n^{(n)}$, $\delta_n^{(n)}$ für sinus und cosinus der höchsten Multipeln von θ in $\alpha_n(\theta)$ eindeutig bestimmt.

Wir werden jetzt sehen daß das System (8), die Funktionen $\alpha_n(\theta)$ vollständig und eindeutig bestimmt, wenn wir $\gamma_n^{(n)}$ und $\delta_n^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ die durch (11) bestimmten Werte geben.

Wir bemerken zuerst daß die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^2\alpha}{d\theta^2} + n^2\alpha = \sum_{p=0}^{n-1} (C_p \cos p\theta + D_p \sin p\theta)$$

durch die Formel

$$\text{(C)} \qquad \alpha = E\cos n\theta + F\sin n\theta + \sum_{p=0}^{n-1}\left(C_p \frac{\cos p\theta}{n^2-p^2} + D_p \frac{\sin p\theta}{n^2-p^2}\right),$$

wo E und F beliebige Konstanten sind, gegeben ist.

Mit dieser Formel bestimmen wir mit Bezugnahme von (11) jetzt successive die Funktionen

$$\alpha_1(\theta),\ \alpha_2(\theta), \cdots, a_n(\theta).$$

Wir finden

$$\alpha_1(\theta) = \frac{1}{2}(\mu_0 \cos\theta + \bar{\mu}_0 \sin\theta).$$

$\alpha_2(\theta)$ ist durch die Gleichung

$$\frac{d^2\alpha_2}{d\theta^2} + 2^2\alpha_2 = (a)_0\left(\cos\theta\,\alpha_1 - \sin\theta\frac{d\alpha_1}{d\theta}\right) + (b)_0\left(\sin\theta\,\alpha_1 + \cos\theta\frac{d\alpha_1}{d\theta}\right) + (c)_0$$

bestimmt. Wie man leicht sieht, reduziert sich die rechte Seite auf eine Konstante. Nach (C) bekommen wir dann, da $E = \gamma_2^{(2)}$, $F = \delta_2^{(2)}$

$$\alpha_2(\theta) = \gamma_2^{(2)}\cos 2\theta + \delta_2^{(2)}\sin 2\theta + \gamma_1^{(2)}.$$

Wir bestimmen jetzt $\alpha_3(\theta)$ usw. Allgemein bekommen wir

$$\alpha_n(\theta) = \gamma_n^{(n)}\cos n\theta + \delta_n^{(n)}\sin n\theta + \gamma_{n-2}^{(n)}\cos(n-2)\theta + \delta_{n-2}^{(n)}\sin(n-2)\theta + \cdots.$$

Nehmen wir in der Tat an, daß $\alpha_1(\theta), \alpha_2(\theta), \cdots, \alpha_{n-1}(\theta)$ von dieser Form sind, so zeigt man analog wie S. 407, daß die rechte Seite in der Differentialgleichung für $\alpha_n(\theta)$ von der Form ist

$$\Gamma_{n-2}^{(n)}\cos(n-2)\theta + \Delta_{n-2}^{(n)}\sin(n-2)\theta + \Gamma_{n-4}^{(n)}\cos(n-4)\theta + \Delta_{n-4}^{(n)}\sin(n-4)\theta + \cdots.$$

Die endlichen Fourierentwicklungen der verschiedenen Glieder,

$$(a)_{i-1}\left[(n-i)\cos\theta\,\alpha_{n-i} - \sin\theta\frac{d\alpha_{n-i}}{d\theta}\right],$$

$$(b)_{i-1}\left[(n-i)\sin\theta\,\alpha_{n-i} + \cos\theta\frac{d\alpha_{n-i}}{d\theta}\right]$$

sind nämlich von dieser Form (weil die Koeffizienten von $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ gleich Null sind).

Nach (C) finden wir also den angegebenen Ausdruck für $\alpha_n(\theta)$ da $E = \gamma_n^{(n)}$, $F = \delta_n^{(n)}$ sein müssen.

Die formelle Bestimmung der Reihe (7) ist also ausgeführt. Wir gehen jetzt zu der Konvergenzuntersuchung über.

Der Kürze wegen nehmen wir dabei an daß $a(x, y) = b(x, y) = 0$. Der Koeffizient $c(x, y)$ sei in der Umgebung von Origo in einer gewöhnlichen Potenzreihe entwickelbar, welche konvergiert, wenn $|x| < a$, $|y| < a$. Nach dem Hülfssatze S. 405 können wir dann diese Funktion in der Umgebung eines Punktes ξ, η in der Form entwickeln

$$(12) \qquad \begin{aligned} c(x, y) &= (c)_0 + (c)_1 r + (c)_2 r^2 + \cdots \\ &= \sigma_0 + (\sigma_1^{(1)} \cos\theta + \varrho_1^{(1)} \sin\theta) r \\ &\quad + (\sigma_2^{(2)} \cos 2\theta + \varrho_2^{(2)} \sin 2\theta + \sigma_1^{(2)}) r^2 \cdots, \end{aligned}$$

wo die Koeffizienten gewönliche Potenzreihen von ξ, η sind. Diese Reihe konvergiert unabhängig von ξ, η wenn $|\xi|$, $|\eta| < \varrho$, $r < R$, vorausgesetzt, daß $\varrho + R < a$. Nach dem Hülfssatze S. 405 ist dann die Reihe

$$(13) \qquad [(c)_0] + [(c)_1] R' + [(c)_2] R'^2 + \cdots$$

konvergent, wenn $R' < R$ und dies, wie man leicht sieht — wenn man sich erinnert wie der Übergang von der Potenzreihe für $c(x, y)$ in der Entwickelung (12) ausgeführt wird — nach elementaren Eigenschaften der Potenzreihen, unabhängig von der Lage von ξ, η (reell oder komplex) in dem Gebiete $|\xi|$, $|\eta| < \varrho$. Es sei die obere Grenze von (13), wenn ξ, η in diesem Gebiete variiert, M.

Die Koeffizienten $\alpha_n(\theta)$ in (7) werden nach (8) successive aus den Gleichungen

$$(14) \qquad \begin{aligned} &\frac{d^2\alpha_1}{d\theta^2} + \alpha_1 = 0, \\ &\frac{d^2\alpha_n}{d\theta^2} + n^2\alpha_n = (c)_0\,\alpha_{n-2} + (c)_1\,\alpha_{n-3} + \cdots + (c)_{n-2} \\ &\qquad\qquad (n = 2, 3, 4, \cdots) \end{aligned}$$

bestimmt. Nach (11) ist $\gamma_n^{(n)} = \delta_n^{(n)} = 0$ (und also $\alpha_1 = 0$).

Um die Koeffizienten $\alpha_n(\theta)$ zu schätzen, machen wir zuerst einige vorbereitende Bemerkungen.

Wenn $C_p^{(n)}$ $D_p^{(n)}$ die Koeffizienten von $\sin p\theta$, $\cos p\theta$ in der Fourierentwickelung der rechten Seite von (14) bezeichnen, so haben wir nach (C)

$$(15) \qquad [\alpha_n] < \frac{1}{4(n-1)} \sum_{p=0}^{n-2} (|C_p^{(n)}| + |D_p^{(n)}|).$$

Weiter ist

$$[(c)_i \alpha_{n-i}] < [(c)_i][\alpha_{n-i}]^{*)} < \frac{M}{R'^i}[\alpha_{n-i}]$$

Durch Anwendung dieser Formeln bekommen wir successive nach (13)

$$[\alpha_2] < \frac{M}{2^2}, \quad [\alpha_3] < \frac{1}{4\cdot 2}\frac{M}{R'} < \frac{MR'}{4\cdot 2}\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right),$$

$$[\alpha_4] < \frac{M}{4\cdot 3}\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right) < \frac{MR'}{4\cdot 3}\left(\frac{MR'}{4\cdot 2} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right),$$

$$[(c)_1\alpha_2 + (c)_2\alpha_3 + (c)_3] < \frac{M}{R'}\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right),$$

$$[\alpha_5] < \frac{1}{4\cdot 4}\left(\frac{M^2R'}{4\cdot 2}\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right) + \frac{M}{R'}\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right)\right) = \frac{M}{4\cdot 4}\left(\frac{MR'}{4\cdot 2} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'}\right)$$

$$< \frac{MR'}{4\cdot 4}\left(\frac{MR'}{4\cdot 3} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{MR'}{4\cdot 2} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right),$$

$$[(c)_1\alpha_3 + (c)_2\alpha_2 + (c)_3\alpha_1 + (c)_4] < \frac{M}{R'}\left(\frac{MR'}{4\cdot 2} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right),$$

$$[\alpha_6] < \frac{1}{4\cdot 5}\left\{\frac{M^2R'}{4\cdot 3}\left(\frac{MR'}{4\cdot 2} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right) + \frac{M}{R'}\left(\frac{MR'}{4\cdot 2} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{M}{4\cdot 5}\left(\frac{MR'}{4\cdot 3} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{MR'}{4\cdot 2} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right)$$

und allgemein

$$[\alpha_n] < \frac{M}{4(n-1)}\left(\frac{MR'}{4(n-3)} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{MR'}{4(n-4)} + \frac{1}{R'}\right)\cdots\left(\frac{MR'}{4\cdot 2} + \frac{1}{R'}\right)\left(\frac{M}{2^2} + \frac{1}{R'^2}\right).$$

Man findet jetzt leicht, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\alpha_n]r^n$$

konvergiert, wenn $r < R'$.

Die Reihe $u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\theta)r^n$ konvergiert also (unabhängig von ξ, η, welche reelle oder komplexe Werte, deren absoluten Beträge kleiner als ϱ sind, annehmen dürfen) wenn $r < R$, also in demselben Gebiete wie die Reihe (12)**). Wenn man die Variabeln x, y statt r, θ einführt, so sieht

---

*) Diese erste Ungleichung folgt leicht, wenn man sich der Formel

$$\cos m\theta \cos n\theta = \frac{1}{2}[\cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta]$$

und der analogen für $\cos m\theta \sin m\theta$ und $\sin m\theta \sin n\theta$ bedient.

**) Wenn man auf das Erhalten des größtmöglichen Konvergenzgebiets verzichtet, so kann der Konvergenzbeweis offenbar einfacher geführt werden. Ohne eine Beschränkung zu machen, kann man annehmen daß $R > 1$; denn durch die Transformation $x - \xi = (x' - \xi)\alpha$, $y - \eta = (y' - \eta)\alpha$, wo α eine genügend klein zu nehmende Konstante ist, kann dieses immer erreicht werden. Ist G die größte der man (nach dem Hülfssatze S. 405 und dem Weierstraßschen Doppelreihensatz) daß $u(x, y)$ eine eindeutige analytische Funktion von x, y, ξ, η ist, wenn $|\xi|, |\eta| < \varrho$, $|x-\xi| < \frac{R}{2}$, $|y-\eta| < \frac{R}{2}$. Ist z. B. $c(x, y)$ eine ganze transcendente Funktion, so wird $u(x, y, \xi, \eta)$ eine ganze transcendente Funktion von x, y, ξ, η.

Nachdem so $u(x, y)$ bestimmt ist, geschieht die Bestimmung von $v(x, y)$ aus der Gleichung $D(v) + f(x, y) = 0$ nach derselben Methode. Die Konstanten $\gamma_n^{(n)}$, $\delta_n^{(n)}$ sind beliebig zu nehmen, nur muß die Reihe $\sum_n (|\gamma_n^{(n)}| + |\delta_n^{(n)}|) R^n$ konvergieren. Ist $c(x, y)$ eine ganze transcendente Funktion so kann $v(x, y, \xi, \eta)$ als eine solche (von x, y, ξ, η) bestimmt werden.

Zahlen M, die zu den Funktionen a, b, c gehören (wir betrachten den allgemeinen Fall) so bekommt man $[\alpha_n] < \frac{1}{n} 7^{n-1} M^n$, $\left[\frac{d\alpha_n}{d\theta}\right] < 7^{n-1} M^n$, woraus die Konvergenz von (7) in dem Gebiete $r < \frac{1}{7M}$ sich ergibt.