Ueber den Cayley'schen Schnittpunktsatz.

Von

I. Bachharach in Erlangen.

Einleitung.

Die zumeist auf Constantenzählung gegründeten Beweise der Schnittpunktsätze lassen noch gerechte Zweifel über deren allgemeine Gültigkeit bestehen, sind desshalb, wie sogleich gezeigt werden soll, zu verwerfen, und die daraus hervorgehenden Sätze selbst bedürfen wesentlicher Modificationen.

Durch Abzählen der in einer Function n^{ten} Grades enthaltenen Constanten beweist man den Satz:

„*Eine Curve n. Ordnung ist durch*

$$\frac{1}{2}n(n+3)$$

Punkte bestimmt."

Bei besonderer Lage dieser Punkte gilt jedoch das ausgesprochene Theorem nicht mehr, und es giebt ganze Schaaren von Curven n. Ordnung, die durch jene Gruppe von $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkten hindurchgehen.

In bekannter Weise wird aus dem angeführten Satze der folgende Schnittpunktsatz abgeleitet:

(I) „*Eine Curve n. Ordnung, welche durch*

$$\frac{1}{2}n(n+3)-1$$

Schnittpunkte zweier anderen Curven n. Ordnung hindurchgeht, enthält auch die

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

weiteren Schnittpunkte der letzteren."

Eine Erweiterung dieses Satzes bildet der folgende von Cayley ebenfalls durch Constantenzählung abgeleitete Satz:*)

*) Vergl. Cambridge, Math. Journal, vol. 3, 1843, p. 211.

(II) *„Jede Curve von der Ordnung r ($r \geqq m$ und $r \geqq n$; $r \leqq m + n - 3$), welche durch alle bis auf*

$$\frac{1}{2}(m + n - r - 1)(m + n - r - 2)$$

von den mn Durchschnittspunkten zweier Curven von den Ordnungen m und n hindurchgeht, enthält auch diese übrigen Schnittpunkte.“

Während man nun weiss, dass Satz (I) zu gelten aufhört, sobald die in Rede stehenden $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ Punkte auf einer Curve $(n - 3)$. Ordnung liegen, sind von dem *allgemeineren* Cayley'schen Satze *noch keine Criterien für Ausnahmefälle* bekannt, wiewohl deren nothwendig bestehen müssen, was auch aus folgender Ueberlegung hervorgeht:

Die Gleichung einer jeden Curve r. Ordnung lässt sich offenbar in die Form bringen:

$$C_r \equiv A_{r-m} C_m + B_{r-n} C_n + \lambda' C_r' + \lambda'' C_r'' + \cdots + \lambda^{(\varrho)} C_r^{(\varrho)} = 0,$$

wo die C, $= 0$ gesetzt, gegebene Curvengleichungen, ihre Indices deren Ordnungen, ferner $A = 0$ und $B = 0$ willkürliche Curven, endlich die ϱ Grössen λ willkürliche Constanten bedeuten, wenn noch

$$\varrho = \frac{1}{2} r(r + 3) - \frac{1}{2}(r - m)(r - m + 3) - \frac{1}{2}(r - n)(r - n + 3) - 1$$

ist (wo $r < m + n$). Denn alsdann enthält die homogen geschriebene linke Seite genau $\frac{1}{2} r(r + 3) + 1$ Constanten, die gerade zur Bestimmung der C_r ausreichen. Wenn nun diese durch ϱ Schnittpunkte der C_m mit der C_n hindurchgeht, so erhält man ϱ lineare und homogene Bedingungsgleichungen für die ϱ Grössen λ; wenn daher die Determinante der C_r', C_r'' ... $C_r^{(\varrho)}$ geschrieben in den Coordinaten jener ϱ Punkte nicht verschwindet, so verschwinden sämmtliche λ, also verschwindet die ganze linke Seite obiger Gleichung auch noch für die Coordinaten der übrigen Schnittpunkte der C_m und C_n, mithin geht die C_r durch dieselben. Nun wird aber auch:

$$\varrho = mn - \frac{1}{2}(m + n - r - 1)(m + n - r - 2),$$

womit wir einen Beweis für den von Cayley ausgesprochenen Satz erbracht hätten.

Aber es darf nicht unbeachtet bleiben, dass in besonderen Fällen jene Determinante der C_r verschwinden kann, alsdann werden alle oder doch einige der Grössen λ von Null verschieden sein, womit die Möglichkeit von Ausnahmefällen des Cayley'schen Satzes erwiesen ist.

Dagegen kann man ohne Bedenken dem Cayley'schen Satze die folgende Fassung geben:

„*Von den mn linearen Bedingungsgleichungen, welchen die Coefficienten der Gleichung einer durch das ganze Schnittpunktsystem zweier Curven von den Ordnungen m und n hindurchgehenden Curve r. Ordnung genügen müssen, sind*

$$\frac{1}{2}(m+n-r-1)(m+n-r-2)$$

eine lineare Folge der übrigen."

Jedoch welche dies sind, das bleibt einer weiteren Untersuchung überlassen.

Besondere Erwähnung verdient noch ein Schnittpunktsatz, der, nach dem unten zu erwähnenden rein algebraischen Beweise, *ohne jede Ausnahme* gilt, obgleich bei Anwendung des üblichen Beweises durch Constantenzählung die *Möglichkeit* von Ausnahmefällen nicht ausgeschlossen bleibt. Es ist der Satz:

„*Wenn von den np Schnittpunkten einer Curve n. Ordnung mit einer Curve p. Ordnung pq auf einer Curve q. Ordnung liegen, so liegen die übrigen $p(n-q)$ Schnittpunkte auf einer Curve $(n-q)^{ter}$ Ordnung.*"

Und das Gleiche gilt sogar, wie sich später herausstellen wird, für den speciellen Fall des Cayley'schen Satzes, in dem $r=m+n-3$ angenommen wird. —

Diese Ausführungen mögen genügen, um die Mangelhaftigkeit der Constantenzählung zum Beweise der Schnittpunktsätze darzuthun, und trotzdem ist vielfach von denselben gerade in der Form, welche nicht ausnahmslos gilt, Anwendung gemacht worden.

Zweck vorliegender Arbeit ist es nun, durch Benützung anderer strengerer Beweismethoden, welche sich auf die algebraischen Theorien von Herrn Noether (Math. Ann. VI) und der Herren Brill und Noether (Math. Ann. VII) stützen, jene Lücke in den Schnittpunktsätzen auszufüllen d. h. die Grenzen der Gültigkeit derselben aufzusuchen und die sich ergebenden Ausnahmefälle besonders zu behandeln. Im wesentlichen ist die Abhandlung nur eine Umarbeitung des ersten Theils meiner Inauguraldissertation*), welche aber insofern eine Erweiterung erfahren hat, als die Mannigfaltigkeit der Curven *r.* Ordnung, welche durch das Schnittpunktsystem einer Curve *m.* mit einer Curve *n.* Ordnung oder nur durch einen Theil desselben hindurchgehen, bestimmt wird. Ferner ist ein zweiter Beweis des Cayley'schen Satzes hinzugefügt und endlich ist gezeigt worden, dass die Grenzen, innerhalb welcher sich die Zahlen *r*, *m* und *n* dieses Satzes bewegen dürfen, einer gewissen Erweiterung fähig sind.

Wenn wir hier unsere Untersuchung auf Curven mit nur ein-

*) Ueber Schnittpunktsysteme algebraischer Curven, Erlangen 1881.

fachen Schnittpunkten beschränken, so geschieht dies lediglich der Einfachheit der Darstellung wegen, und wir bemerken, dass eine Ausdehnung der erhaltenen Sätze auf Curven mit gemeinsamen vielfachen Punkten, wie im II. Theile der Dissertation gezeigt ist, keine wesentliche Schwierigkeit bietet.

§ 1.

Fundamentalsatz.

Von fundamentaler Bedeutung für die ganze Untersuchung ist der bekannte Satz der Algebra:

„*Verschwindet eine ganze, nicht homogene Function f von x und y für alle Werthsysteme x, y, welche zwei ganze Functionen φ und ψ zu 0 machen, so ist f von der Form*

$$f \equiv A\varphi + B\psi,$$

wo A und B ebenfalls ganze Functionen von x und y sind.“ *)

Wenn daher eine Curve $f = 0$ durch sämmtliche Schnittpunkte zweier Curven $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ hindurchgeht, so lässt sich ihre Gleichung in die Form setzen:

$$f \equiv A\varphi + B\psi = 0,$$

wo $A = 0$ und $B = 0$ ebenfalls Curven bedeuten. (Immer vorausgesetzt, dass die gemeinsamen Punkte der Curven $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ keine vielfachen Punkte sind.**)

Seien f, φ und ψ beziehungsweise von den Ordnungen n, p und q ($n \geqq p$ und $n \geqq q$), so sind zufolge obiger Identität die Curven $A = 0$ und $B = 0$ von den resp. Ordnungen $n - p$ und $n - q$. Da nun für die Coordinaten der np Schnittpunkte von f mit φ diese Ausdrücke verschwinden, so muss für ebendieselben auch $B\psi = 0$ identisch erfüllt sein. Nun verschwindet aber ψ nur für die Coordinaten von pq jener np Schnittpunkte, also muss für diejenigen der $p(n - q)$ übrigen $B = 0$ befriedigt werden. Wir können somit den Fundamentalsatz auch folgendermassen aussprechen:

„*Wenn von den np Schnittpunkten einer Curve n. Ordnung mit einer Curve p. Ordnung pq auf einer Curve q. Ordnung liegen, so liegen die übrigen $p(n - q)$ Schnittpunkte auf einer Curve $(n - q)^{ter}$ Ordnung.*“

Dieser Satz gilt *ausnahmslos*, also unabhängig von der Lage jener $p(n - q)$ Punkte und natürlich auch, wenn f zerfällt; sämmtliche

*) Der strenge Beweis dieses Satzes ist von Herrn Noether, Math. Ann. Bd. VI, p. 354 geführt worden.

**) Diese im übrigen unnöthige Beschränkung machen wir, weil im Folgenden nur von dem speciellen Fall einfacher Schnittpunkte die Rede sein soll.

Beweise durch Constantenzählung sind zu verwerfen, da sie die Frage über die allgemeine Gültigkeit jener Sätze unentschieden lassen und weil aus denselben nicht geschlossen werden kann, dass die Curve f sowohl als auch insbesondere die Curve φ zerfallen darf.

Bemerkenswerth ist der specielle Fall $p = n$, der vielfache Anwendung findet.

§ 2.

Der Restsatz*).

Durch Q Punkte einer Curve F von der Ordnung p seien die Curven Φ von der Ordnung q_1 und Ψ von der Ordnung q_2 hindurchgelegt, von denen erstere noch weitere R, letztere noch R' Punkte aus F ausschneiden möge.

Wir bezeichnen die Gruppe der Q Punkte mit G_Q, die der R Punkte auf Φ mit G_R und die der R' Punkte auf Ψ mit $G_{R'}$, nennen ferner zwei Gruppen wie G_Q und G_R oder G_Q und $G_{R'}$, welche zusammen das vollständige Schnittpunktsystem von F mit irgend einer andern Curve bilden, zu einander *residual*, endlich zwei Gruppen, wie G_R und $G_{R'}$, welche zu einer und derselben dritten G_Q residual sind, zu einander *corresidual.* Wenn wir nun noch durch die Gruppe G_R eine Curve A der r. Ordnung legen, welche F in weiteren Q' Punkten schneiden möge, so finden wir, dass von den $(q_2 + r)\,p$ Schnittpunkten einer (zerfallenden) Curve $A\Psi$ der $(q_2 + r)^{\text{ten}}$ Ordnung mit einer Curve F der p. Ordnung pq_1 auf einer Curve Φ der q_1^{ten} Ordnung liegen; der Fundamentalsatz berechtigt daher zu dem Schlusse, dass die übrigen $p(r + q_2 - q_1)$ Schnittpunkte auf einer Curve B der Ordnung $r + q_2 - q_1$ liegen. Es muss daher die von A auf F ausgeschnittene zu G_R residuale Gruppe $G_{Q'}$ von $pr - R$ Punkten mit der Gruppe $G_{R'}$ auf einer Curve B liegen, oder die beiden Punktgruppen G_R und $G_{R'}$ sind corresidual nicht bloss in Bezug auf die Gruppe G_Q, sondern auch in Bezug auf die zu $G_{R'}$ residuale Gruppe $G_{Q'}$.

Auf	Φ	liegen	die	Gruppen	G_Q	und	G_R;
„	Ψ	„	„	„	G_Q	„	$G_{R'}$;
„	A	„	„	„	G_R	„	$G_{Q'}$;
mithin auf	B	„		„	$G_{Q'}$	„	$G_{R'}$.

Wenn wir uns der oben definirten Bezeichnungen bedienen, so können wir den Restsatz in folgender Weise aussprechen:

„*Sind auf einer algebraischen Curve F die Punktgruppen G_R und $G_{R'}$ einander corresidual in Bezug auf eine Punktgruppe G_Q, so sind sie es auch in Bezug auf jede andere $G_{Q'}$, welche zu einer von ihnen (etwa G_R) residual ist*“.

---

*) Wegen des Folgenden vergl. man: Brill und Noether, Math. Ann. Bd. VII, p. 271 ff.

Die Bedeutung des Restsatzes liegt darin, dass man gewisse Punktgruppen definiren kann unabhängig von der durch sie hindurchgehenden Curve. Um dies einzusehen, denken wir uns auf einer Curve F eine ganze Schaar g_Q von Punktgruppen von je Q Punkten, welche zu einander in Bezug auf die Punktgruppe G_R corresidual sind. Legt man jetzt durch eine beliebige Gruppe G_Q der Schaar g_Q eine beliebige Curve, welche auf F noch eine weitere Gruppe $G_{R'}$ von R' Punkten ausschneiden möge, so ist die Schaar g_Q auch corresidual in Bezug auf $G_{R'}$, d. h. sie ist auch durch Curven ausschneidbar, welche alle durch die Gruppe $G_{R'}$ gehen. Die Schaar g_Q ist überhaupt corresidual in Bezug auf jede Gruppe G_ϱ, welche zu irgend einer Gruppe der Schaar residual ist.

Als Beispiel für die Verwendbarkeit des Restsatzes zum Beweis der Schnittpunktsätze möge das Chasles'sche Theorem entwickelt werden. Dasselbe lautet:

„Fallen von einem Curvenbüschel der n. Ordnung die n^2 Basispunkte auf eine Curve $C_{(n+n')}$ der $(n+n')^{\text{ten}}$ Ordnung, so giebt es immer einen zu jenem Curvenbüschel der n. Ordnung projectivischen Curvenbüschel der n'. Ordnung, dessen Basispunkte ebenfalls auf die Curve $C_{(n+n')}$ fallen, und welcher mit jenem durch den Durchschnitt der entsprechenden Elemente die Curve $C_{(n+n')}$ erzeugt."*)

Zum Beweise legen wir durch die n^2 Basispunkte eines Curvenbüschels n. Ordnung eine Curve der $(n+n')^{\text{ten}}$ Ordnung und wählen letztere als Grundcurve F. Der Curvenbüschel schneidet nun auf F eine einfach unendliche corresiduale Schaar $g_{nn'}$ von je nn' Punkten aus, von der zu zeigen ist, dass sie auch durch eine Curvenschaar der n'^{ten} Ordnung ausgeschnitten werden kann, deren n'^2 Basispunkte ebenfalls auf der Curve F liegen. Dies ist aber immer möglich, da wir durch eine beliebige Gruppe $G_{nn'}$ der Schaar $g_{nn'}$ eine Curve der n'. Ordnung legen können, wodurch wir eine weitere zu $G_{nn'}$ residuale Gruppe $G_{n'^2}$ von n'^2 Punkten auf F erhalten. Diese sind zufolge des Restsatzes die Basispunkte des gesuchten Curvenbüschels der n'. Ordnung. Dass man durch die Gruppe $G_{nn'}$ immer eine Curve n'^{ter} Ordnung legen kann, selbst wenn

$$nn' > \frac{n'(n'+3)}{2},$$

ergiebt sich aus dem Umstand, dass von den $(n+n')n$ Schnittpunkten der $C_{(n+n')}$ mit derjenigen Curve n. Ordnung, welche die Gruppe $G_{nn'}$ ausschneidet, n^2 auf einer andern Curve n. Ordnung liegen (sogar

*) Chasles, Deux théorèmes généraux sur les courbes et les surfaces géometriques de tous les ordres. (Comptes rendus, 28. décembre 1857).

auf unendlich vielen); alsdann liegen nämlich die übrigen nn' Schnittpunkte, das sind die Punkte der Gruppe $G_{nn'}$, nach dem Fundamentalsatze, auf einer Curve der n'^{ten} Ordnung.

§ 3.

Der Cayley'sche Satz.

In seiner gewöhnlichen Form lautet derselbe:

„*Jede Curve von der Ordnung* r

$$(\textit{für } r \geqq m \textit{ und } r \geqq n, \quad r \leqq m+n-3),$$

welche durch alle bis auf

$$\frac{1}{2}(m+n-r-1)(m+n-r-2)$$

von den Durchschnittspunkten zweier Curven von den Ordnungen m *und* n *hindurchgeht, enthält auch alle diese übrigen Schnittpunkte.*"

Zur Untersuchung desselben führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$m+n-r=\gamma,$$
$$\frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)=\delta;$$

endlich sei $n \geqq m$.

Wir wählen nun die Curve m. Ordnung als Grundcurve F und schneiden dieselbe durch diejenige Curvenschaar r. Ordnung, welche durch die $mn-\delta$ festen Punkte auf F hindurchgeht. Zu dieser Schaar gehört sowohl die gegebene Curve r. Ordnung, als auch die in die gegebene Curve n. Ordnung und eine beliebige Curve $(r-n)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfallende Curve r^{ter} Ordnung. Wir untersuchen jetzt die zu den $mn-\delta$ festen Punkten residualen Punktgruppen von je $m(r-n)+\delta$ Punkten, die von der betrachteten Curvenschaar ausgeschnitten werden. Gelingt es, nachzuweisen, dass δ Punkte fest, d. h. allen Gruppen gemeinsam sind, so ist der Satz bewiesen, denn die gegebene Curve r. Ordnung geht dann in der That durch die δ Punkte, in welchen sich die Curven n. und m. Ordnung (ausser den festen) noch schneiden.

Zu den zu untersuchenden Gruppen gehört nun auch, wie schon erwähnt, diejenige, welche aus den δ zu untersuchenden Punkten und weiteren $m(r-n)$ Punkten besteht, die eine beliebige Curve $C_{(r-n)}$ der $(r-n)^{\text{ten}}$ Ordnung auf F ausschneidet.

Wir wollen eine solche Gruppe, weil sie von einer zerfallenden Curve ausgeschnitten wird, eine zerfallende Gruppe und den von den δ fraglichen Punkten gebildeten Bestandtheil G_δ derselben Restgruppe nennen. Durch unsre zerfallende Punktgruppe legen wir jetzt eine

Curve $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung. Diese muss nach dem Fundamentalsatz zerfallen in die C_{r-n} und eine Curve $C_{\gamma-2}$ der Ordnung:

$$m-2-(r-n)=m+n-r-2=\gamma-2.$$

Wir lassen nun noch die $C_{\gamma-2}$ zerfallen in irgend eine Gerade Q durch einen beliebigen **a** der δ Punkte der Restgruppe und eine Curve $C_{\gamma-3}$ der $(\gamma-3)^{\text{ten}}$ Ordnung durch die $\delta-1$ übrigen, was immer möglich ist, da

$$\delta-1=\frac{1}{2}\gamma(\gamma-3).$$

Von der $C_{\gamma-3}$ nehmen wir zunächst an, dass sie durch **a** nicht hindurchgehe.

In Bezug auf diese zerfallende Curve

$$C_{m-2}\equiv C_{r-n}\cdot C_{\gamma-3}\cdot Q$$

suchen wir jetzt das Residuum der Gruppe der oben erwähnten

$$m(r-n)+\delta$$

Punkte. Da der eine Bestandtheil — nämlich $m(r-n)$ Punkte — dieser Gruppe das vollständige Schnittpunktsystem der Grundcurve F mit der C_{r-n} bildet, so liefert diese Curve keine weiteren Schnittpunkte; das Residuum besteht daher aus $m-1$ Punkten der Geraden Q und aus

$$m(\gamma-3)-(\delta-1)$$

Punkten, welche von der $C_{\gamma-3}$ auf F noch ausgeschnitten werden. Nach dem Restsatz ist die fragliche Schaar von Punktgruppen von je

$$\delta+m(r-n)$$

Punkten auch corresidual in Bezug auf das soeben gefundene Residuum, d. h. sie können auch durch eine Curvenschaar $(m-2)$. Ordnung ausgeschnitten werden, welche durch letzteres hindurchgeht. Nun liegen aber $m-1$ Punkte dieses Residuums in gerader Linie Q; es müssen daher sämmliche Curven $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfallen in die feste Gerade Q und in eine Curvenschaar $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die übrigen Punkte des Residuums hindurchgeht. Würden jene Curven nicht zerfallen, so kämen wir zu dem Widersinn, dass eine Curve $(m-2)$. Ordnung von einer Geraden in mehr als $m-2$ Punkten getroffen wird.

Damit ist gezeigt, dass der Punkt **a** der Restgruppe fest ist, d. h. dass alle Curven r. Ordnung unsrer Schaar, mithin auch die gegebene, denselben enthalten. Da er aber beliebig war, so gilt gleiches auch von den $\delta-1$ übrigen Punkten der Restgruppe, mithin enthalten die Curven r. Ordnung, welche durch $mn-\delta$ Schnittpunkte zweier Curven m. und n. Ordnung hindurchgehen, auch die δ übrigen Schnittpunkte der letzteren. In unserem Beweise war es nöthig, durch

$$\delta - 1 = \frac{1}{2}\gamma(\gamma - 3)$$

Punkte eine Curve $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung zu legen; es verdient hervorgehoben zu werden, dass bei specieller Lage jener Punkte mehr als eine Curve $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung hindurchgelegt werden kann; der Beweis bleibt aber derselbe, da es genügt, wenn wir nur irgend eine dieser überhaupt möglichen Curven, welche **a** nicht enthalten, herausgreifen.

Es bleibt nun noch der Fall zu berücksichtigen, dass die δ Punkte der Restgruppe auf einer Curve $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen.

Alsdann wird die Gerade Q überflüssig, und es genügt letztere Curve $(\gamma - 3)$. Ordnung zusammen mit der $C_{(r-n)}$, um das Residuum von $m(\gamma - 3) - \delta$ Punkten auf F auszuschneiden. Durch dieses Residuum sind jetzt alle möglichen Curven der Ordnung

$$\gamma - 3 + r - n = m - 3$$

an Stelle der früheren Curven $(m - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung zu legen, welche uns wiederum die zu untersuchenden corresidualen Gruppen von $\delta + m(r - n)$ Punkten liefern. Es ist aber jetzt kein Grund vorhanden, weshalb diese Curven $(m - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfallen sollen in eine feste Curve, die etwa die δ Punkte der Restgruppe ausschneiden würde. Die δ Punkte sind daher in diesem Falle nicht nothwendig fest, wir haben somit einen Ausnahmefall des Cayley'schen Satzes nachgewiesen, und letzterer muss daher genauer in folgender Weise ausgesprochen werden:

„*Eine Curve der r. Ordnung, welche durch*

$$mn - \frac{1}{2}(\gamma - 1)(\gamma - 2), \quad [wo \quad \gamma = m + n - r]$$

Schnittpunkte zweier Curven m. und n. Ordnung geht

$$[r \geqq m \ \ und \ \ r \geqq n; \qquad r \leqq m + n - 3],$$

enthält im allgemeinen auch die übrigen

$$\frac{1}{2}(\gamma - 1)(\gamma - 2)$$

Schnittpunkte der letzteren; wenn dagegen diese

$$\delta = \frac{1}{2}(\gamma - 1)(\gamma - 2)$$

Punkte auf einer Curve $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, so braucht eine durch die $mn - \delta$ Punkte gelegte, aber sonst willkürliche Curve r. Ordnung nicht zugleich durch die δ übrigen Schnittpunkte der beiden Curven m. und n. Ordnung zu gehen.“

§ 4.

Besondere Behandlung des Ausnahmefalles.

Wir haben gesehen, dass, wenn die δ Punkte der Restgruppe auf einer Curve $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, dieselbe aufhört fest sein zu müssen. In diesem kritischen Falle ist nun die weitere Frage zu erörtern, ob dann nothwendig *alle* δ Punkte der Restgruppe beweglich sind, d. h. ob die Curven r. Ordnung, die durch $mn - \delta$ Schnittpunkte der Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung hindurchgehen, *keinen* der noch übrigen δ Schnittpunkte enthalten, oder ob sie durch einen Theil der Punkte der Restgruppe hindurchgehen, durch den andern aber nicht, oder endlich, ob sie doch durch *alle* δ Punkte gehen.

Ein Beispiel möge die Frage noch näher beleuchten. Gegeben sei eine Curve 8. Ordnung C_8, welche durch 36 Schnittpunkte einer Curve 6. Ordnung C_6 mit einer Curve 7. Ordnung C_7 hindurchgeht, während von den 6 übrigen Schnittpunkten der beiden letzten Curven 5 in gerader Linie A liegen, der 6. Punkt a aber ausserhalb A liegen soll. In diesem Falle ist $\gamma = 6 + 7 - 8 = 5$. Die 6 Punkte der Restgruppe liegen auf einem Kegelschnitt, gebildet von der Geraden A zusammen mit einer beliebigen Geraden B durch a. Unser Satz lässt uns daher schliessen, dass die C_8 durch diese 6 Punkte nicht hindurchgehen wird.

Wenn man aber den Beweis genau so wie im allgemeinen Falle wiederholt und jeden der 6 Punkte der Restgruppe einmal dadurch auszeichnet, dass man die Gerade Q (vgl. oben) durch ihn hindurchlegt, so stellt sich heraus, dass zwar die C_8 durch die in Rede stehenden 5 Punkte der Geraden A nicht hindurchgeht, wohl aber durch den Punkt a.

Daraus müssen wir schliessen, dass in dem Ausnahmefalle einige der δ Punkte zwar beweglich, andre aber noch fest sein können, und wir haben uns jetzt die weitere Frage vorzulegen: Wenn eine Curve r. Ordnung durch einen Theil des vollständigen Schnittpunktsystems zweier Curven m. und n. Ordnung, nämlich durch $mn - \delta$ Schnittpunkte, hindurchgeht, auf welche Weise lässt sich alsdann ermitteln, ob sie durch einen aus den δ übrigen Punkten beliebig ausgewählten weiteren Punkt auch noch hindurchgeht? Um diese Frage zu entscheiden, müssen wir uns erinnern, dass die im Beweis des allgemeinen Falles benützte Curvenschaar $(m - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung in eine feste Gerade Q und eine Curvenschaar $(m - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfiel. Dies verhalf uns zum Nachweise des Umstands, dass ein Punkt der Restgruppe, derjenige nämlich, der auf der Geraden Q liegt, fest ist. Wollte man dasselbe für einen anderen der δ Punkte nachweisen, so müsste man ihn dadurch auszeichnen, dass man durch die noch übrigen $\delta - 1$

Punkte eine Curve $(\gamma - 3)^{ter}$ Ordnung und durch ihn selber — falls diese $C_{\gamma-3}$ nicht schon hindurchgeht — eine Gerade Q' legt. So oft nun Q' auf diese Weise einzuführen ist, was z. B. bei allgemeiner Lage der δ Punkte der Restgruppe für alle der Fall ist, dann ist immer der auf ihr liegende Punkt fest. Wenn aber die δ Punkte auf einer Curve $(\gamma - 3)^{ter}$ Ordnung liegen, so kann man freilich diese benützen, womit die Gerade Q überflüssig wird; damit ist aber noch nicht gesagt, dass dann alle δ Punkte beweglich sind. Denn es können dann schon $\delta - 1$ Punkte so speciell liegen, dass man unendlich viele Curven $(\gamma - 3)^{ter}$ Ordnung durch sie hindurchlegen kann, von denen zwar ein Theil durch den letzten Punkt hindurchgeht, der andere aber nicht. Sobald sich nun wenigstens *eine* unter diesen Curven befindet, welche den letzten Punkt nicht enthält, so kann man diese benützen, und die Gerade Q ist dann durch ihn hindurch zu legen, wie im allgemeinen Falle, er ist mithin fest. Also:

> „*Um zu erfahren, ob einer der δ Punkte der Restgruppe fest ist, lege man durch die $\delta - 1$ übrigen alle möglichen, auch zerfallenden Curven $(\gamma - 3)^{ter}$ Ordnung (im allgemeinen giebt es nur eine); wenn sich nun unter diesen eine solche befindet, die den fraglichen Punkt nicht enthält, so ist derselbe fest.*“

In dem von uns gewählten Beispiel (s. oben) ist der Punkt a fest, obgleich er mit den 5 Punkten der Geraden A auf einem Kegelschnitt liegt; denn es giebt nicht nur einen, sondern unendlich viele Kegelschnitte durch diese 5 Punkte, die den Punkt a nicht enthalten. Dagegen sind die 5 Punkte der Geraden A beweglich, denn alle Kegelschnitte, die man durch a und 4 beliebige derselben legen kann, gehen auch durch den fünften, da sie alle in die feste Gerade A und eine weitere durch a gehende Gerade zerfallen. Wir folgern daraus, dass eine C_r durch mehr als $mn - \delta$ Schnittpunkte einer C_m mit einer C_n hindurchgehen kann, ohne dass sie darum nothwendig auch die übrigen Schnittpunkte derselben enthalten muss. Würden in dem von uns gewählten Beispiel 4 von den 6 Punkten der Restgruppe in gerader Linie, die beiden anderen ausserhalb derselben liegen, so wären letztere fest, erstere aber beweglich, und wir hätten eine Curve 8. Ordnung, welche durch 38 Schnittpunkte einer Curve 6. mit einer Curve 7. Ordnung hindurchgeht, ohne zugleich die vier übrigen zu enthalten (weil sie in gerader Linie liegen).

Aus dem Beweis des Cayley'schen Satzes hat sich ergeben, dass, wenn die δ Punkte der Restgruppe auf einer $C_{\gamma-3}$ liegen, dieselben nicht *nothwendig* fest sind; es ist weiter das Kriterium dafür nachgewiesen worden, dass in diesem Ausnahmefalle *einzelne* der δ Punkte noch fest bleiben; es erübrigt noch, zu untersuchen, ob nicht trotz ihrer besonderen Lage (auf einer $C_{\gamma-3}$) doch *alle δ Punkte der Restgruppe fest sein können.* Wir werden beweisen, dass dies unmöglich ist.

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_\delta$ die δ Punkte der Restgruppe, welche auf einer Curve $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung $C=0$ liegen sollen. Wären nun die δ Punkte a_i fest, so gäbe es δ verschiedene Curven $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, von denen jede durch $\delta-1$ Punkte der Restgruppe hindurchgeht, durch den letzten aber nicht. Seien

$$C_1 = 0;\ C_2 = 0;\ \ldots;\ C_\delta = 0$$

die Gleichungen dieser Curven, so dass $C_1 = 0$ durch alle Punkte a_i bis auf a_1, $C_2 = 0$ durch alle bis auf a_2 u. s. w., $C_\delta = 0$ durch alle bis auf a_δ hindurchgeht. Nun lassen sich aber, da die $C_1, C_2, \ldots, C_\delta$ linear von einander unabhängig sind, Parameter

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\delta$$

so bestimmen, dass die Gleichung einer beliebigen Curve $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, mithin auch derjenigen, auf welcher *alle* Punkte a_i liegen $(C=0)$, in die Form

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_\delta C_\delta = 0$$

gebracht werden kann. Dieser Gleichung müssten daher die Coordinaten eines beliebigen der Punkte a genügen; dies ist aber nicht der Fall, da für die Coordinaten eines beliebigen Punktes a_i der Restgruppe alle C *bis auf* C_i verschwinden. Also:

„Wenn $\delta = \frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)$ Punkte auf einer oder unendlich vielen Curven $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, so lassen sich immer $\delta-1$ dieser Punkte so auswählen, dass *alle* durch sie hindurchgelegten Curven $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung auch noch den letzten Punkt enthalten."

Unter Beibehaltung der früher gemachten Annahmen über m, n und r können wir nun den Satz aufstellen:

> „*Wenn eine Curve r. Ordnung durch $mn-\delta$ Schnittpunkte einer Curve m. mit einer Curve n. Ordnung hindurchgeht, so giebt es unter den δ übrigen Schnittpunkten dann und nur dann solche, welche die Curve r. Ordnung nicht enthält, wenn jene δ Punkte auf einer Curve $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen.*"

Wir stellen uns jetzt die Frage, wie viele von den δ Punkten der Restgruppe im Ausnahmefalle, wo also $\gamma > 3$, zum Mindesten beweglich sein müssen.

Zu diesem Zwecke beweisen wir unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen zuerst den folgenden Hilfssatz:

> „*Wenn eine Curve r. Ordnung durch $mn-(\gamma-1)$ Schnittpunkte einer C_m mit einer C_n hindurchgeht, durch die übrigen $\gamma-1$ Punkte aber nicht, so liegen letztere in gerader Linie.*"

Wählt man die C_m als Grundcurve und denkt sich durch die Gruppe der

$$mn - (\gamma - 1)$$

Punkte alle möglichen C_r hindurchgelegt, so schneiden diese die C_m noch in einer Schaar von Gruppen von je

$$\gamma - 1 + m(r - n)$$

weiteren Punkten. Zu dieser Schaar gehört auch die Gruppe von Punkten, welche die C_n ausser den festen Punkten, ferner eine willkürliche C_{r-n} auf C_m noch ausschneiden. Durch diese Gruppe lege man eine C_{m-1}, welche nach dem Fundamentalsatze in die C_{r-n} und eine $C_{\gamma-1}$ durch die fraglichen $\gamma - 1$ Punkte zerfallen muss.

Letztere Curve schneidet C_m noch in einer Gruppe G_x von

$$(m - 1)(\gamma - 1)$$

Punkten. Obige Punktgruppen von je

$$(\gamma - 1) + m(r - n)$$

Punkten müssen daher nach dem Restsatze ausschneidbar sein durch Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die Punkte der Gruppe G_x hindurchgehen. Wenn aber von den $m(\gamma - 1)$ Schnittpunkten einer C_m mit einer $C_{\gamma-1}$

$$(\gamma - 1)(m - 1)$$

auf einer Curve der Ordnung $m - 1$ liegen, so liegen die übrigen $\gamma - 1$ Schnittpunkte in gerader Linie (nach dem ausnahmslos geltenden Fundamentalsatz). Das sind gerade die $\gamma - 1$ Schnittpunkte von C_m mit C_n, durch welche die C_r nicht hindurchgeht und unser Hilfssatz ist bewiesen.

Aus dem Hilfssatze folgt sofort, dass im Ausnahmefalle wenigstens $\gamma - 1$ Punkte beweglich sein müssen. Denn wäre noch einer derselben fest, so würden die $\gamma - 2$ beweglichen Punkte mit jedem beliebigen der festen in gerader Linie liegen, was unmöglich.

Dass das gefundene Minimum für die Zahl der im Ausnahmefalle noch beweglichen Punkte sich nicht weiter begrenzen lässt, zeigen wir, indem wir beweisen, dass von den δ Punkten der Restgruppe noch

$$\frac{1}{2}(\gamma - 1)(\gamma - 4)$$

fest sein können.

Man braucht bloss anzunehmen, dass letztere beliebig und die weiteren $\gamma - 1$ Punkte der Restgruppe in gerader Linie liegen. Wendet man jetzt, um zu erfahren, welche der δ Punkte fest und welche beweglich sind, auf alle δ Punkte das oben erörterte Verfahren an, so stellt sich heraus, dass die

$$\frac{1}{2}(\gamma - 1)(\gamma - 4)$$

Punkte fest, die $\gamma - 1$ Punkte jedoch beweglich sind.

Wir kommen daher zu dem Schlusse:

„*Eine Curve r. Ordnung, welche durch $mn - \delta$ Schnittpunkte einer Curve m. mit einer Curve n. Ordnung hindurchgeht, kann, wenn die noch übrigen δ Schnittpunkte auf einer Curve $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, höchstens noch weitere*

$$\frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-4)$$

der letzteren δ Punkte enthalten, und wenn dies der Fall ist, so liegen die noch übrigen

$$\gamma - 1$$

Punkte in gerader Linie.“

§ 5.

2. Beweis des Cayley'schen Satzes.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen sei

$$r = m + n - 3.$$

Dann ist $\gamma = 3$ und $\delta = 1$.

Es handelt sich in diesem Falle um die Untersuchung der Curven $(m+n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch alle bis auf einen der mn Durchschnittspunkte einer Curve m. mit einer Curve n. Ordnung hindurchgehen. Wählen wir wieder die C_m als Grundcurve und verfahren wie beim ersten Beweis, so ergiebt sich mit Hilfe der Geraden Q durch den fraglichen Punkt, dass *alle Curven r. Ordnung, welche durch $mn - 1$ Schnittpunkte einer C_m mit einer C_n hindurchgehen, auch noch den letzten Schnittpunkt dieser Curven enthalten.*

Es muss hier betont werden, dass sich für diesen besonderen Fall

$$r = m + n - 3$$

keine Ausnahme des Cayley'schen Satzes ergiebt.

Für die Coefficienten der Gleichung einer Curve r. Ordnung, welche durch das vollständige Schnittpunktsystem einer Curve m. Ordnung mit einer Curve n. Ordnung hindurchgeht, hat man mn lineare Bedingungsgleichungen, und der Cayley'sche Satz sagt gewissermassen aus, dass, wenn $r \leq m + n - 3$, δ bestimmte, aber nicht beliebige der Gleichungen eine Folge der übrigen sind; ist aber $r = m + n - 3$, also $\delta = 1$, so folgt, dass *jede* eine Folge der $mn - 1$ übrigen Gleichungen ist.

Es sei jetzt

$$r = m + n - \gamma; \quad \gamma > 3.$$

Wir fragen: Enthält eine Curve r. Ordnung, welche durch $mn - \delta$ Schnittpunkte einer Curve m. Ordnung mit einer Curve n. Ordnung hindurchgeht, auch die δ übrigen Schnittpunkte dieser Curven?

Durch

$$\delta - 1 = \frac{1}{2}\gamma(\gamma - 3)$$

dieser letzteren δ Punkte legen wir eine Curve $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung. Diese ergänzt die Curve r. Ordnung zu einer Curve der Ordnung

$$m + n - 3,$$

welche, wie schon bewiesen, unbedingt durch den letzten der δ Punkte hindurchgehen muss. Dieser liegt somit entweder auf der Curve r. Ordnung, ist also fest, oder auf der Curve $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung, womit wieder das Verhalten der Curve r. Ordnung im Ausnahmefall des Cayley'schen Satzes charakterisirt ist.

Dieses Beweisverfahren giebt zum Unterschied vom ersten Beweis unmittelbar zu erkennen, wann einzelne der auf einer Curve $(\gamma - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegenden δ Punkte der Restgruppe noch zu den festen Punkten gehören.

§ 6.

Specielle Fälle und Anwendungen.

Der Cayley'sche Satz gilt, wie sich aus unserem Beweise ergiebt, auch noch, wenn $r = n$ ist. In diesem Falle ist $\gamma = m$, und wir haben dann den bekannten Satz:*)

(A) „*Alle Curven n. Ordnung, welche durch*

$$nm - \frac{1}{2}(m-1)\cdot(m-2)$$

Schnittpunkte einer Curve n. mit einer Curve m. Ordnung $(n \geqq m)$ *hindurchgehen, gehen auch durch die* $\frac{1}{2}(m-1)\cdot(m-2)$ *übrigen Schnittpunkte der letzteren, vorausgesetzt, dass diese nicht auf einer Curve* $(m-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung liegen.*" Oder:

„*Von den Schnittpunkten einer gegebenen Curve m. Ordnung mit einer Curve n. Ordnung sind, wenn* $m \leqq n$, *im allgemeinen* $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ *durch die übrigen bestimmt; wenn aber letztere auf einer Curve* $(m-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung liegen, so sind weniger Punkte durch die übrigen bestimmt.*"

Für $r = m = n$ erhält man den Satz:

(B) „*Eine Curve n. Ordnung, welche durch*

$$n^2 - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Schnittpunkte zweier anderen Curven n. Ordnung hindurch-

*) Vergl. Brill und Nöther, Ueber die algebraischen Functionen etc. Math. Ann. Bd. VII, p. 277.

geht, enthält auch die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *weiteren Schnittpunkte der letzteren, vorausgesetzt, dass sie nicht auf einer Curve* $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung liegen.*"

Bisher lagen als Grenzen der Gültigkeit des Cayley'schen Satzes stets die Bedingungen zu Grunde

$$r \geqq m \quad \text{und} \quad r \geqq n.$$

Wir wollen jetzt annehmen, r liege zwischen m und n, und zwar so, dass

$$n > r \geqq m.$$

Die Zahl der von einander unabhängigen Bedingungen, welchen in diesem Falle eine durch sämmtliche Schnittpunkte der C_m mit der C_n hindurchgehende C_r zu genügen hat, ist, da die C_r von der Form AC_m wird, wo A eine willkürliche Curve der $(r-m)^{\text{ten}}$ Ordnung ist:

$$\frac{r(r+3)}{2} - \frac{(r-m)(r-m+3)}{2}.$$

Diese Zahl stimmt für $r = n-1$ und für $r = n-2$ noch mit der anderen

$$mn - \frac{1}{2}(m+n-r-1)(m+n-r-2)$$

überein, so dass der Cayley'sche Satz auch noch für $r = n-1$ und für $r = n-2$ anwendbar ist. Auch kann der Beweis für diese speciellen Fälle ganz ebenso geführt werden wie früher. Freilich wird eine Curve r. Ordnung, welche durch $mn - \delta$ Schnittpunkte einer C_m mit einer C_n und mithin *im allgemeinen* auch durch die δ übrigen Schnittpunkte derselben hindurchgeht, für

$$n > r \geqq m$$

in die C_m und eine beliebige Curve $(r-m)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfallen, aber im Ausnahmefalle existiren eigentliche Curven r. Ordnung (für $r = n-1$ und $r = n-2$), welche durch $mn - \delta$ Schnittpunkte einer C_m mit einer C_n hindurchgehen, obgleich $r < n$ ist.

Für $r = n-1$ ergiebt sich $\gamma = m+1$;

$$\delta = \frac{1}{2}m(m-1)$$

und wir können somit den Satz aussprechen:

(C) „*Liegen von den mn Schnittpunkten einer* C_m *mit einer* C_n

$$mn - \frac{1}{2}m(m-1)$$

auf einer, nicht in C_m *und eine weitere Curve zerfallenden, Curve* $(n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung, so liegen die übrigen*

$$\frac{1}{2}m(m-1)$$

Punkte auf einer Curve $(m-2)^{\text{ter}}$ *Ordnung.*"

Dieser Satz lässt sich auch direct mittelst des Restsatzes beweisen.

Der Cayley'sche Satz gilt ausnahmslos, wenn $\delta = 1$ ist. In diesem Falle würde $m = 2$ sein müssen und vorstehender Satz noch nichts aussagen, da es keine nicht zerfallende Curve $(n-1)^{ter}$ Ordnung giebt, die durch alle bis auf einen der Schnittpunkte eines Kegelschnitts mit einer Curve n. Ordnung hindurchgeht.

Für $r = n - 2$ erhalten wir den Satz:

(D) *„Liegen von den mn Schnittpunkten einer C_m mit einer C_n*

$$mn - \frac{1}{2} m(m+1)$$

auf einer, nicht in C_m und eine weitere Curve zerfallenden, Curve $(n-2)^{ter}$ Ordnung, so liegen die übrigen

$$\frac{1}{2} m(m+1)$$

Punkte auf einer Curve $(m-1)^{ter}$ Ordnung.“

Der Restsatz ergiebt auch noch die Richtigkeit vorstehender Sätze für $m = n$, in welchem Falle sie übrigens identisch werden, weil

$$n^2 - \frac{1}{2} n(n-1) = \frac{1}{2} n(n+1).$$

Es gilt daher der Satz:

(E) *„Wenn von den n^2 Basispunkten eines Curvenbüschels n. Ordnung*

$$\frac{1}{2} n(n+1)$$

auf einer Curve $(n-1)^{ter}$ Ordnung liegen, so liegen die übrigen

$$\frac{1}{2} n(n-1)$$

auf einer Curve der $(n-2)^{ten}$ Ordnung.“

Endlich gelten die Zahlen des Cayley'schen Satzes noch für den Fall

$$m = n - 1; \quad r = n - 2.$$

Daraus erhalten wir:

(F) *„Wenn von den Schnittpunkten einer C_n mit einer C_{n-1} die eine Hälfte auf einer C_{n-2} liegt, so liegt auch die andere Hälfte auf einer C_{n-2}.“*

Beispiel zu Satz (C).

$$r = 6, \quad n = 7, \quad m = 4.$$

Dann ist:

$$\gamma = 5; \quad \delta = 6.$$

Alle Curven 6. Ordnung, welche durch 22 Schnittpunkte einer Curve 7. Ordnung mit einer Curve 4. Ordnung hindurchgehen, enthalten im allgemeinen auch die 6 weiteren Schnittpunkte der letzteren, müssen also zerfallen. Liegen aber diese 6 Punkte auf einem Kegelschnitt, so giebt es thatsächlich nicht zerfallende Curven 6. Ordnung, die durch jene 22 Schnittpunkte der C_7 mit der C_4 hindurchgehen, ohne die übrigen Schnittpunkte dieser Curven zu enthalten. Liegen insbesondere von den 6 Punkten der Restgruppe 4 in gerader Linie, die beiden anderen ausserhalb derselben, so sind letztere fest, und wir schliessen daraus, dass es Curven 6. Ordnung giebt, welche durch 24 Schnittpunkte einer C_4 mit einer C_7 hindurchgehen, ohne die 4 übrigen Schnittpunkte zu enthalten, *wenn diese in gerader Linie liegen.* Die Curve 7. Ordnung geht dann durch das vollständige Schnittpunktsystem der gegebenen C_4 mit einer beliebigen der Curven 6. Ordnung, und es erhellt überdies auch aus dem Fundamentalsatze (§ 1), dass diese C_4 von der C_7 noch in 4 Punkten einer geraden Linie geschnitten werden muss.

Bevor wir nun zu Anwendungen der bisher entwickelten Sätze übergehen, müssen wir noch die wichtige Bemerkung vorausschicken, dass, ebenso wie der Restsatz, auch der Cayley'sche noch gilt, wenn die betrachteten Curven zerfallen, da an keiner Stelle des Beweises Irreducibilität verlangt war; nur müssen die Schnittpunkte der Bestandtheile einer zerfallenden Curve als Doppelpunkte derselben gelten, *was aber so lange die Sätze nicht beeinflusst, als keine andere der Curven durch einen solchen Doppelpunkt hindurchgeht.* Dies wollen wir aber hier voraussetzen.

Herr Olivier hat folgenden Satz aufgestellt:*)

„Schneiden sich drei Curven S_1, S_2 und S_3 der n. Ordnung in denselben

$$p = \frac{1}{2} n(n-1) + 1$$

Punkten, so schneiden sie sich paarweise noch in weiteren

$$q = \frac{1}{2} (n-1)(n+2)$$

Punkten und bestimmen dadurch drei Curven E_1, E_2 und E_3 der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Diese gehen durch dieselben

$$\mu = \frac{1}{2} n(n-1)$$

Punkte der Ebene, während ihre übrigen

$$\lambda = \frac{1}{2} (n-1)(n-2)$$

Schnittpunkte, paarweise genommen, bezüglich auf die drei Curven S_1, S_2 und S_3 zu liegen kommen."

Um diesen Satz zu beweisen, fassen wir die 6 Curven zu drei Paaren, nämlich $(S_1 E_1)$, $(S_2 E_2)$ und $(S_3 E_3)$ zusammen und haben so drei zerfallende Curven der $(2n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, von denen jede, z. B. $S_1 E_1$, durch

*) Borchardt's Journal Bd. 70, p. 159.

$$p+3q=(2n-1)^2-\frac{1}{2}(2n-2)(2n-3)$$

einfache Schnittpunkte der beiden anderen hindurchgeht.

Nach dem sich aus dem Cayley'schen Satz ergebenden und unter den obigen Specialfällen unter (B) aufgeführten Satze geht nun die Curve S_1E_1 im allgemeinen auch durch die noch übrigen $\frac{1}{2}(2n-2)(2n-3)$ Schnittpunkte der Curve S_2E_2 mit S_3E_3. Von diesen Schnittpunkten müssen nun je λ auf jede der 3 Curven S fallen. Denn nimmt man z. B. S_1 als Grundcurve an und schneidet sie mit S_2 und S_3 in der festen Gruppe der p Punkte, so erhält man 2 corresiduale Gruppen von je q Punkten, welche nach dem Restsatze auch durch die beiden Curven E_2 und E_3 ausgeschnitten werden können, die durch dieselben λ Punkte der S_1 gehen. Ebenso zeigt man, dass sich E_1 und E_3 in λ Punkten auf S_2, ferner E_1 und E_2 in λ Punkten auf S_3 schneiden müssen. Da nun auf den Curven S keine weiteren Schnittpunkte liegen können, so müssen durch die noch übrigen μ Punkte alle drei Curven E hindurchgehen, wo

$$3\lambda+\mu=\frac{1}{2}(2n-2)(2n-3).$$

Damit hätten wir einen neuen Beweis des Olivier'schen Satzes geliefert; nun verliert aber dieser Satz nach dem allgemeinen Theorem seine Gültigkeit, sobald die $3\lambda+\mu$ Punkte der Restgruppe auf einer Curve der $(2n-4)^{\text{ten}}$ Ordnung liegen. Es fragt sich nun, unter welchen Umständen dieser Ausnahmefall eintreten kann. Um dies zu ermitteln, müssen wir aufs neue unsere Schnittpunktsätze verwerthen. Bei der erwähnten besonderen Lage der $3\lambda+\mu$ Punkte, die sich schon aus dem Schnitt der Curve S_1E_1 mit S_2E_2 ergeben, würden von den Schnittpunkten einer C_{2n-4} mit der Curve E_1 der Ordnung $n-1$

$$\lambda+\mu=(n-1)^2$$

Punkte auf einer weiteren Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, nämlich E_2, liegen; dann müssen aber nach dem Fundamentalsatze die noch übrigen Schnittpunkte jener Curven C_{2n-4} und $C_{n-1}(E_1)$ nothwendig auf einer Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen. Zu diesen gehört nun noch die Gruppe der λ Punkte, in welchen sich E_1, E_3 und S_2 schneiden. Es müssen demnach von allen Gruppen der λ Punkte jede für sich auf einer Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, wenn der Ausnahmefall stattfinden soll. Liegen aber von den Schnittpunkten einer C_n mit einer C_{n-1}

$$\lambda=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

auf einer C_{n-3}, so bilden (nach Satz (C) der spec. Fälle für $r=m=n-1$) die übrigen

$$q = \frac{1}{2}(n-1)(n+2)$$

Schnittpunkte die Basispunkte einer einfach unendlichen Schaar, und man kann daher durch solche q Punkte unendlich viele Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung hindurchlegen. Der Olivier'sche Satz verliert daher seine Gültigkeit, sobald die 3 Gruppen von je q Punkten, in welchen sich die Curven S paarweise schneiden, die jedesmaligen Basispunkte eines Büschels von Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bilden. Für $n=2$ und $n=3$ sagt diese Ausnahme noch nichts aus.

Olivier hat dann analog dem früheren noch den folgenden weiteren Satz abgeleitet:

„Schneiden sich drei Curven n. Ordnung S_1, S_2, S_3 in denselben

$$p = \frac{1}{2}n(n+1)+1$$

Punkten, so schneiden sie sich paarweise in noch weiteren

$$q = \frac{1}{2}(n-2)(n+1)$$

Punkten und bestimmen dadurch drei Curven E_1, E_2, E_3 der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung. Diese drei Curven E_1, E_2, E_3 gehen durch dieselben

$$\mu = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

Punkte der Ebene; ihre übrigen

$$\lambda = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Schnittpunkte, paarweise genommen, fallen bezüglich auf die Curven S_1, S_2, S_3."

Auch dieser Satz erleidet in dem Falle eine Ausnahme, wenn die

$$3\lambda + \mu = \frac{1}{2}(2n-3)(2n-4) = \frac{1}{2}(2n-5)(2n-2)+1$$

Punkte der Restgruppe auf einer Curve der $(2n-5)^{\text{ten}}$ Ordnung liegen, oder, wie sich auf eine der obigen ganz analoge Weise herausstellt, wenn die drei Gruppen von je q Punkten die Basispunkte eines Büschels von Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung bilden. Die Ausnahme *dieses* Satzes sagt übrigens für $n=3$ und $n=4$ noch nichts aus.

Die soeben behandelten zwei Sätze sind von Herrn Lindemann zu folgendem allgemeinen Satze zu erweitern versucht worden:*)

„Schneiden sich 3 Curven C_1, C_2, C_3 der n. Ordnung in denselben

$$p = \frac{1}{2}n(n+2r-3) - \frac{1}{2}r(r-3)$$

Punkten, so schneiden sie sich paarweise in noch weiteren

*) Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, I, p. 763.

$$q = \frac{1}{2}(n-r)(n-r+3)$$

Punkten und bestimmen dadurch 3 Curven K_1, K_2, K_3 der $(n-r)^{\text{ten}}$ Ordnung. Diese letzteren gehen alsdann durch dieselben

$$\mu = (n-r)^2 - (p-rn)$$

Punkte der Ebene, während ihre übrigen

$$\lambda = p - rn$$

Schnittpunkte, paarweise genommen, bezüglich auf den Curven C_1, C_2, C_3 liegen."

Diese Verallgemeinerung lässt sich aber nicht aufrecht erhalten. Für $r=3$ müssten sich z. B. drei Curven 4. Ordnung ($n=4$) durch dieselben 14 Punkte noch paarweise in je zwei Punkten schneiden, während doch solche drei Curven jederzeit einem Büschel angehören. Für $n=5$ und $r=3$ würde sich ergeben, dass 3 Curven 5. Ordnung durch dieselben 20 Punkte *paarweise* noch je 5 Punkte gemein hätten, während doch im allgemeinen 3 Curven 5. Ordnung durch dieselben 19 Punkte schon einem Büschel angehören; im besonderen könnten die fraglichen 5 Punkte, wie sich aus § 4 ergiebt, beweglich sein, dann müssten sie aber in gerader Linie liegen und die Lindemann'sche Verallgemeinerung wird wieder illusorisch.

Der von Lindemann ausgesprochene Satz gilt also nur für $r=1$ und $r=2$, wofür er schon von Olivier gegeben ist.

Analoge Bemerkungen lassen sich zu den beiden Sätzen machen, zu welchen Herr Olivier in seinem Aufsatze: „Zur Theorie der Erzeugung geometrischer Curven" gelangt*).

Der erste jener Sätze lautet:

„Schneiden sich drei Curven K_1, K_2, K_3 der n. Ordnung in demselben Punkte P, ausserdem paarweise in noch n^2-1 Punkten und nimmt man auf jeder der 3 Curven noch beliebige $p=\frac{1}{2}n(n-1)$ Punkte, so treffen sich die 3 Curven Σ_1, Σ_2, Σ_3 der $(2n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche bezüglich durch (n^2-1) Schnittpunkte zweier Curven K und die auf diesen gewählten $2p$ Punkte bestimmt sind, paarweise noch in

$$s = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

weiteren Punkten, die beziehungsweise auf die drei Curven K zu liegen kommen; zugleich gehen aber auch alle drei Curven Σ durch dieselben

$$r = 3(n-1)^2$$

Punkte der Ebene."

*) Borchardt's Journal Bd. 71, p. 1.

Zur genaueren Untersuchung dieses Satzes kann man wieder wie früher je eine Curve K mit einer Curve Σ zusammennehmen, so dass man drei Curven $(3n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $K_1\,\Sigma_1$, $K_2\,\Sigma_2$, $K_3\,\Sigma_3$ erhält, von denen jede durch

$$(3n-2)^2 - \frac{1}{2}(3n-3)(3n-4)$$

einfache Schnittpunkte der beiden anderen hindurchgeht; nach dem allgemeinen Schnittpunktstheorem geht sie dann auch durch die übrigen

$$3s + r = \frac{1}{2}(3n-5)(3n-2) + 1$$

Schnittpunkte, welche sich, wie man durch leichte Rechnung findet, in der angegebenen Weise auf die einzelnen Curven vertheilen. Nur in dem Falle erleidet der Satz wieder eine Ausnahme, wenn die $3s+r$ Punkte, die sich schon durch die Wahl zweier Curven z. B. $K_1\,\Sigma_1$ und $K_2\,\Sigma_2$ ergeben, auf einer Curve $(3n-5)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen. Nun zeigt sich aber, dass dieser Ausnahmefall nur dann eintreten kann, wenn die 3 Curven Σ zusammenfallen (d. i. wenn die 3 Curven K einem Büschel angehören). In dem Ausnahmefalle ginge nämlich eine C_{3n-5} durch

$$r + s = (2n-2)^2 - \frac{1}{2}n(n-1)$$

Schnittpunkte zweier C_{2n-2}; nach dem Cayley'schen Satze geht sie daher auch durch die übrigen

$$p = \frac{1}{2}n(n-1)$$

Schnittpunkte. Hieraus ergiebt sich, dass, wenn die $3s+r$ Punkte auf einer C_{3n-5} liegen, auf dieser auch die $3p$ willkürlich auf den Curven K gewählten Punkte liegen müssen. Dann würden aber von den Schnittpunkten einer C_{3n-5} mit einer C_{2n-2}

$$r + s + p = 4(n-1)^2 = (2n-2)^2$$

auf einer anderen C_{2n-2} liegen, also die übrigen auf einer C_{n-3}. Dazu gehören aber auch die

$$p + s = (n-1)^2$$

Punkte, die auf einer und derselben Curve K der n. Ordnung liegen, was nur möglich ist, wenn letztere zerfällt; natürlich müssten dann die beiden anderen K auch zerfallen.

Wenn also ein Zerfallen der ursprünglichen Curven derart, dass alle 3 einen gemeinsamen Bestandtheil haben, sowie auch der Umstand, dass sie einem Büschel angehören, ausgeschlossen wird, so ist der Satz allgemein gültig. Auf das gleiche Resultat würde die Discussion des weiter von Olivier behandelten Falles führen, in welchem sich die 3 Curven K in denselben 4 Punkten schneiden. Eine Erweiterung des Theorems auf drei Curven, die durch dieselben ϱ^2 Punkte gehen, zu geben, liegt auch hier wieder nahe, führt aber wiederum zu keinem Resultat, und zwar aus folgendem Grunde:

3 Curven n. Ordnung, welche durch dieselben ϱ^2 Punkte gehen, schneiden sich paarweise noch in $n^2 - \varrho^2$ Punkten, und wenn durch eine dieser 3 Gruppen von je $n^2 - \varrho^2$ Punkten eine Curve der $(2n-2\varrho)^{\text{ten}}$ Ordnung (diese Ordnung würde nämlich im allgemeinen Falle der Ordnung $2n - 2$ im speciellen, $\varrho = 1$, entsprechen) hindurchgehen soll, die nicht gleichzeitig die übrigen ϱ^2 Schnittpunkte der drei gegebenen Curven enthält, so muss nach dem Cayley'schen Satze sein:

$$n^2 - \varrho^2 < n^2 - \frac{1}{2}(2\varrho-1)(2\varrho-2).$$

Dies ist aber nur der Fall für $\varrho = 1$ und $\varrho = 2$, wofür der Satz von Olivier gegeben ist.

Wollte man aber selbst den Fall, dass die $C_{2n-2\varrho}$ jene ϱ^2 Punkte enthielte, noch gelten lassen, so würde sich zeigen, dass die $n^2 - \varrho^2$ Punkte zusammen mit den beiden auf zwei Curven K beliebig gewählten Gruppen von je

$$p = \frac{1}{2}(n-\varrho)(n-3\varrho+3)$$

Punkten, die $C_{2n-2\varrho}$ nicht mehr bestimmen würden, sobald $\varrho > 2$ wird.

Weitere Anwendungen der Schnittpunktsätze sind von Herrn Cremona in seiner „Theorie der ebenen Curven" gemacht worden; die daselbst (§ 9, Anwendungen) abgeleiteten Sätze gelten alle *ohne Ausnahme*, weil sie auf den ausnahmslos geltenden Fundamentalsatz zurückführbar sind.

§ 7.

Mannigfaltigkeit der Curven r. Ordnung.

Die Frage, wie viele Curven r. Ordnung durch $mn - \delta$ Schnittpunkte einer C_m mit einer C_n hindurchgehn, lässt sich nun sowohl für den allgemeinen Fall als auch für alle möglichen Ausnahmefälle mit Leichtigkeit beantworten.

Im allgemeinen Falle, wo die δ Punkte der Restgruppe keine specielle Lage haben, ist C_r von der Form:

$$C_r = AC_m + BC_n.$$

Mithin ist die Mannigfaltigkeit t der Curvenschaar r^{ter} Ordnung:

$$t = \frac{1}{2}(r-m)(r-m+3) + \frac{1}{2}(r-n)(r-n+3) + 1.$$

Es ist natürlich auch:

$$t = \frac{1}{2}r(r+3) - (mn-\delta).$$

Liegen aber die δ Punkte der Restgruppe G_δ auf einer Curve $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, so bilden die corresidualen Punktgruppen von je

$$\delta + m(r-n)$$

Punkten, welche die Curvenschaar r. Ordnung auf der C_m ausschneidet, eine Specialschaar, die durch Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausschneidbar ist. (Ein ähnliches Verhalten findet auf der C_n statt). Daher lässt sich zufolge des Riemann-Roch'schen Satzes auch in den Ausnahmefällen die Mannigfaltigkeit der Curvenschaar r^{ter} Ordnung bestimmen. Nach diesem Satze erhöht sich die Mannigfaltigkeit t um so viele Einheiten als die Zahl der linear von einander unabhängigen Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung beträgt, welche sich durch die Gruppe der

$$\delta + m(r-n)$$

Punkte, nämlich der δ Punkte von G_δ und $m(r-n)$ Schnittpunkten einer beliebigen $C_{(r-n)}$ mit der C_m, hindurchlegen lassen. Da aber diese Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung alle in die $C_{(r-n)}$ und in Curven $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung durch G_δ zerfallen, so brauchen wir nur zu bestimmen, wie viele linear von einander unabhängige Curven $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung durch diese δ Punkte gehen. Ist diese Zahl $=i$, so beträgt die Mannigfaltigkeit der Curvenschaar r. Ordnung, welche durch die übrigen $mn-\delta$ Schnittpunkte der C_m mit der C_n hindurchgeht,

$$t' = t + i,$$

wenn t deren Mannigfaltigkeit im allgemeinen Falle bedeutet.

Die Zahl t' hängt also (ausser von t) lediglich von der Mannigfaltigkeit $i-1$ der Curvenschaar $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ab, die man durch die δ Punkte der Restgruppe hindurchlegen kann, dagegen wird sie durch die Zahl derjenigen Punkte der Restgruppe, welche möglicherweise noch fest sein können, nicht weiter beeinflusst.

Die *Maximalzahl* der Mannigfaltigkeit der Curvenschaar r. Ordnung durch $mn-\delta$ Schnittpunkte einer C_m mit einer C_n wird nun offenbar erreicht, wenn die Mannigfaltigkeit $i-1$ der Curvenschaar $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung durch die δ Punkte der Restgruppe ihr Maximum erreicht. Die Aufgabe, auf der Curve m. Ordnung die Gruppen von je δ Punkten anzugeben, durch welche sich eine Curvenschaar $(\gamma-3)^{\text{ter}}$ Ordnung von grösstmöglicher Mannigfaltigkeit legen lässt, ist nun gleichbedeutend mit der Bestimmung der Punktgruppen von je

$$\delta + m(r-n)$$

Punkten auf C_m, durch welche sich möglichst viele Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung legen lassen. Dieses Problem ist von Herrn Nöther in seiner Abhandlung: „Zur Theorie der algebraischen Raumcurven“ Borch. Journ. Bd. 93, p. 287 gelöst worden. Setzt man nämlich

$$\delta + m(r-n) = \alpha m - \beta, \qquad [0 \leq \beta < m]$$

so ist nach dem l. c. bewiesenen Satze die Schaar g_Q von je

$$\delta + m(r-n)$$

Punkten immer dann von möglichst grosser Mannigfaltigkeit, wenn, für $\alpha \geqq \beta - 1$, die

$$\delta + m(r-n)$$

Punkte auf einer Curve α^{ter} Ordnung liegen und, für $\alpha \leqq \beta - 1$, wenn $(\alpha - 1)m$ dieser Punkte auf einer Curve $(\alpha - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die übrigen $m - \beta$ beliebig liegen, wobei letztere feste Punkte der Schaar werden. Nun liegen aber $m(r-n)$ Punkte der betrachteten Gruppe auf einer Curve $(r-n)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche einen festen Bestandtheil der durch die $\delta + m(r-n)$ zu legenden Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung bildet. Unser Kriterium für die Maximalzahl der Mannigfaltigkeit der Curvenschaar r^{ter} Ordnung, lässt sich daher folgendermassen aussprechen:

„*Es lassen sich durch* $mn - \delta$ *Schnittpunkte einer* C_m *mit einer* C_n *möglichst viele Curven r. Ordnung hindurchlegen, wenn, sofern*

$$\delta = \alpha' m - \beta \qquad [0 \leqq \beta < m]$$

gesetzt wird, für $\alpha' + r - n \geqq \beta - 1$ *die* δ *Punkte der Restgruppe auf einer Curve der Ordnung* α' *liegen, und wenn für* $\alpha' + r - n \leqq \beta - 1$ *von den* δ *Punkten der Restgruppe* $(\alpha' - 1)m$ *auf einer Curve der* $(\alpha' - 1)^{\text{ten}}$ *Ordnung, die übrigen* $m - \beta$ *beliebig liegen, wobei letztere zu den festen Punkten von* G_δ *gehören.*"

Die Bestimmung der Mannigfaltigkeit der Curvenschaar r. Ordnung in jedem gegebenen Falle sowie der Maximalzahl derselben bietet somit keine Schwierigkeit mehr.

Erlangen, im Mai 1885.