Über Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke.

Von

M. Dehn in Münster i./W.

Im folgenden soll ein einfaches und doch recht allgemeines Problem der Geometrie eine erste Behandlung erfahren. Zu der Fragestellung leitet uns folgende Überlegung: Jedes ebene Polygon läßt sich, wie leicht ersichtlich, aus rechtwinkligen Dreiecken zusammensetzen, also aus Gliedern einer zweigliedrigen Schar von Polygonen. Es entsteht die Frage: gibt es eine eingliedrige Schar von Figuren, etwa Dreiecken, aus deren Gliedern sich jedes Polygon zusammensetzen läßt? Diese Frage ist höchst wahrscheinlich zu verneinen. Im folgenden soll nun ein besonderer Fall erledigt werden, der uns den Satz liefert: Aus den Gliedern einer eingliedrigen Schar von Rechtecken läßt sich nicht jedes Rechteck zusammensetzen (genauer: läßt sich wieder nur eine eingliedrige Schar von Rechtecken zusammensetzen). Wir werden spezielle Fälle, in denen die Gültigkeit dieses Satzes sich ziemlich leicht ergibt, und die doch andrerseits die Methode zur Erledigung des allgemeineren Falles zugänglicher machen, vorausschicken.

1.

Analytische Formulierung.

Wir gehen von der Bemerkung aus, daß sich jedes Rechteck nur so in Rechtecke zerlegen läßt, daß die Seiten der Teilrechtecke je der einen oder anderen Seite des großen Rechtecks parallel sind. Dies ergibt sich sofort, wenn man mit der Zusammensetzung in einer Ecke des großen Rechtecks beginnt. Durch die „Ausfüllung“ einer Ecke durch ein Rechteck hinterbleibt ein noch auszufüllendes Polygon mit nur solchen Winkeln, deren Schenkel den Seiten des großen Rechtecks parallel sind. Durch Ausfüllung einer Ecke dieser Figur durch ein Rechteck entsteht eine neue Figur von derselben Beschaffenheit usw., so daß die Richtigkeit der Bemerkung einleuchtet.

Sei nun eine Zerlegung des Rechtecks mit den Seiten x_0 und y_0 in Rechtecke mit den Seiten x_1 und y_1, x_2 und $y_2, \cdots, x_n$ und y_n vorgelegt, wobei die Seiten x_i der Seite x_0, die Seiten y_i der Seite y_0 parallel sind. Seien

$$S_x \begin{cases} l_1^x(x_0, x_1 \cdots x_n) = 0 \\ l_2^x(x_0, x_1 \cdots x_n) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases} \quad \text{und} \quad S_y \begin{cases} l_1^y(y_0, y_1 \cdots y_n) = 0 \\ l_2^y(y_0, y_1 \cdots y_n) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

diejenigen homogenen, linearen, ganzzahligen und von einander unabhängigen Beziehungen, die zwischen $x_0, x_1 \cdots x_n$ und zwischen $y_0, y_1 \cdots y_n$ bestehen.

Es befriedigen diese Größen ferner nach Voraussetzung die Gleichung

$$\text{(I)} \qquad x_0 y_0 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Aus der speziellen Eigenschaft aber der Größenpaare $x_1, y_1; \cdots x_n, y_n$, daß die aus ihnen gebildeten Rechtecke das Rechteck x_0, y_0 einfach und lückenlos überdecken können, folgt nun:

Satz 1. Jedes System von Werten $x_0, y_0; x_1, y_1; \cdots : x_n, y_n$, das die Gleichungen S_x und S_y befriedigt, erfüllt auch die Gleichung (I).

Zum Beweise lassen wir zwei Seiten des in die Rechtecke $x_1, y_1; \cdots$ zerlegten Rechtecks x_0, y_0 zusammenfallen mit den positiven Achsen eines Koordinatensystems und zwar die Seite von der Länge y_0 mit der y-Achse. Dann ist jedem der Eckpunkte jedes Rechtecks x_i, y_i ein Koordinatenpaar zugeordnet, das wir je nach der Wahl des Eckpunkts mit $x_{i,0}, y_{i,0}$; $x_{i,1}, y_{i,0}$; $x_{i,0}, y_{i,1}$ und $x_{i,1}, y_{i,1}$ bezeichnen, wo

$$x_{i,1} = x_{i,0} + x_i; \quad y_{i,1} = y_{i,0} + y_{i,1}$$

ist. Jede der Größen $x_{i,0}$ und $x_{i,1}$ kann, wie leicht ersichtlich, auf mannigfache Weise als Summe von Größen $x_k, x_l, \cdots$, jede der Größen $y_{i,0}$ und $y_{i,1}$ ebenso als Summe von Größen $y_i, y_k, \cdots$ dargestellt werden.

Führen wir nun zunächst statt des gegebenen Größensystems $x_0, x_1 \cdots$, $y_0, y_1 \cdots$ ein neues $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \cdots$, $y_0, y_1 \cdots$ ein, in dem wir, wie schon die Bezeichnung andeutet, nur die Größen $x_0 \cdots$ abgeändert haben und zwar so, daß auch die abgeänderten Größen $\bar{x}_0 \cdots$ die Gleichungen S_x befriedigen. Wir wollen ferner diese Veränderung als so klein annehmen, daß wie die Größen $x_0 \cdots$ so auch die Größen $\bar{x}_0 \cdots$ sämtlich positiv sind. Wir ordnen nun den Punkten $x_{i,0}, y_{i,0}$; $x_{i,1}, y_{i,0}$; $x_{i,0}, y_{i,1}$; $x_{i,1}, y_{i,1}$ solche neue Abscissen $\bar{x}_{i,0}, \bar{x}_{i,1}$ zu, wie sie sich durch Einsetzung der neuen Größen $\bar{x}_0, \cdots$ in die Darstellung der alten Abscissen durch die alten Größen $x_0, \cdots$ ergeben. Zunächst ist diese Zuordnung eindeutig. Denn war vorher etwa:

$$x_{i,0} = x_{k_1} + x_{l_1} + \cdots = x_{k_2} + x_{l_2} + \cdots$$

so wird jetzt:

$$\bar{x}_{i,0} = \bar{x}_{k_1} + \bar{x}_{l_1} + \cdots = \bar{x}_{k_2} + \bar{x}_{l_2} + \cdots$$

weil die Größen $\bar{x}_{k_1}, \bar{x}_{l_1}, \cdots, \bar{x}_{k_2}, \bar{x}_{l_2}, \cdots$ nach Voraussetzung die sämtlichen ganzzahligen linearen Beziehungen, die zwischen den $x_{k_1}, x_{l_1}, \cdots, x_{k_2}, x_{l_2}, \cdots$ bestehen, ebenfalls erfüllen. Es ergibt sich ferner, daß

$$\bar{x}_{i,1} = \bar{x}_{i,0} + \bar{x}_i$$

ist. Denn war

$$x_{i,0} = x_k + x_l + \cdots,$$

so ergibt sich für $x_{i,1}$ die Darstellung:

$$x_{i,1} = x_k + x_l + \cdots + x_i.$$

Also für die neuen Werte:

$$\bar{x}_{i,0} = \bar{x}_k + \bar{x}_l + \cdots,$$
$$\bar{x}_{i,1} = \bar{x}_k + \bar{x}_l + \cdots + \bar{x}_i.$$

Und daraus:

$$\bar{x}_{i,1} - x_{i,0} = \bar{x}_i.$$

Aus den Rechtecken mit den Seiten x_i und y_i werden demgemäß Rechtecke mit den Seiten $\bar{x}_i$ und y_i, welche gegen die früheren lediglich nach rechts oder links verschoben und in ihrer Breite abgeändert sind. Sie sind aber weder nach unten oder oben verschoben noch in ihrer Höhe verändert. Daraus ergibt sich unmittelbar: Fielen die Basen (zu der Seite x_0 parallelen Seiten) zweier Rechtecke vor der Abänderung in eine Gerade, so liegen sie auch nach dieser in einer Geraden. Aber wir können auch leicht schließen: Fielen die Höhen zweier Rechtecke vor der Abänderung in eine Gerade, so liegen sie auch nachher in einer Geraden. Denn war etwa:

$$x_{i,0} = x_{k,0}$$

und:

$$x_{i,0} = x_{k_1} + x_{l_1} + \cdots,$$
$$x_{h,0} = x_{k_2} + x_{l_2} + \cdots,$$

so folgt:

$$x_{k_1} + x_{l_1} + \cdots = x_{k_2} + x_{l_2} + \cdots.$$

Dann ist auch:

$$\bar{x}_{i,0} = \bar{x}_{k_1} + \bar{x}_{l_1} + \cdots,$$
$$\bar{x}_{h,0} = \bar{x}_{k_2} + \bar{x}_{l_2} + \cdots,$$

$$\bar{x}_{k_1} + \bar{x}_{l_1} + \cdots = \bar{x}_{k_2} + \bar{x}_{l_2} + \cdots.$$

Also auch:

$$\bar{x}_{i,0} = \bar{x}_{h,0}$$

und auch die Höhen mit den neuen Abscissen $x_{i,0}$ und $x_{h,0}$ liegen in einer Geraden.

Damit ist die Lückenlosigkeit der Bedeckung des Rechtecks $\bar{x}_0, y_0$ mit den Rechtecken $\bar{x}_1, y_1; \bar{x}_2, y_2; \cdots$ gewährleistet. Wir haben noch die

„Einfachheit" dieser Bedeckung nachzuweisen. Angenommen nun, zwei Rechtecke mit den Ecken $x_{i,0}\, y_{i,0} \cdots$ und $x_{h,0}\, y_{h,0} \cdots$ gingen durch die Abänderung in die Rechtecke $\bar{x}_{i,0}, y_{i,0} \cdots$ und $\bar{x}_{h,0}, y_{h,0} \cdots$ über, die übereinandergriffen. Da die Abänderung die Rechtecke nicht nach oben oder unten verschiebt, auch ihre Höhen nicht verändert, so müssen diese beiden Rechtecke so liegen, daß sie durch eine Verschiebung parallel zur x-Achse zum Übereinandergreifen gebracht werden können. Ist etwa $x_{i,0} > x_{h,1}$, dann muß, wenn die Abänderung die Rechtecke übereinanderschieben soll, jedenfalls $\bar{x}_{h,1} > \bar{x}_{i,0}$ sein. Es sei nun

$$x_{i,0} = x_{h,1} + x_r + x_s + \cdots,$$

wo $x_r, x_s \cdots$ Grundlinien von Rechtecken zwischen den Rechtecken x_i und x_h bedeuten.

Es folgt:

$$\bar{x}_{i,0} = \bar{x}_{h,1} + \bar{x}_k + \bar{x}_r + \cdots.$$

Also da nach Voraussetzung auch alle abgeänderten Größen positiv sein sollen:

$$\bar{x}_{i,0} > x_{h,1}.$$

Also ist ein Übereinandergreifen der abgeänderten Rechtecke $\bar{x}_0, \bar{x}_1$; $\bar{x}_1, y_1; \cdots; \bar{x}_n, y_n$ unmöglich und wir haben damit nachgewiesen, daß $\bar{x}_0, y_0$ von $\bar{x}_1, y_1, \cdots$ einfach und lückenlos überdeckt wird. Folglich befriedigen $\bar{x}_0, y_0; \bar{x}_1, y_1; \cdots$ auch die Gleichung (I).

Verändern wir jetzt auch die Größen $y_1 \cdots$ und stellen die analogen Betrachtungen an, so ergibt sich: Jedes System von lauter positiven Größen $\bar{x}_0, \bar{y}_0; \bar{x}_1, \bar{y}_1; \cdots$ das in S_x und S_y für $x_0, y_0; x_1, y_1; \cdots$ eingesetzt diese Gleichungssysteme befriedigt, erfüllt auch die Gleichung (I). Weil aber die Gleichungen S_x und S_y linear sind und die Gleichung (I) eine analytische ist, so können wir die Voraussetzung der Positivität (die wir zur Erleichterung der geometrischen Betrachtung eingeführt haben) fallen lassen. Wir lassen jetzt die Striche über den $\bar{x}_0, \bar{y}_0$ weg, indem wir uns die zunächst fest gegebenen Größen x_0, y_0 variabel denken und erhalten den Satz 1.

Man kann diesen Satz auch geometrisch deuten: Die lineare Mannigfaltigkeit, welche im Raume der $x_0, y_0, x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n$ durch die linearen Gleichungssysteme S_x und S_y bestimmt wird, liegt auf der quadratischen Mannigfaltigkeit, die durch (I) gegeben ist.

Soll es also möglich sein, aus den Rechtecken mit den Seiten $x_1, y_1; \cdots; x_n, y_n$ ein Rechteck zusammenzusetzen, so müssen zwischen diesen Größen gewisse lineare ganzzahlige Beziehungen bestehen, welche von der Art sind, wie sie aus S_x und S_y durch Elimination von x_0 und y_0

entstehen. Wir wollen nun im folgenden besondere Klassen von Rechtecken betrachten. Aus ihnen werden durch jene Bedingungen gewisse Unterklassen ausgeschieden, deren Glieder imstande sind mit einander Rechtecke zusammenzusetzen. Diese werden häufig wieder derselben Unterklasse angehören.

2.

Die einfachsten Beispiele.

a) Rechtecke mit kommensurabelen Seiten.

Sei etwa:

$$y_1 = r_1 x_1,\ y_2 = r_2 x_2, \cdots, y_n = r_n x_n.$$

Setzen wir diese Werte von $y_1 \cdots y_n$ in die Gleichungssysteme S_x und S_y sowie in die Gleichung (I) ein, so ergibt sich:

Soll es möglich sein aus den Rechtecken $y_1, x_1; \cdots; y_n, x_n$ ein Rechteck, etwa mit den Seiten x_0 und y_0, zusammenzusetzen, so muß jedes Wertesystem $x_0, x_1, \cdots, x_n$, welches

$$S \begin{cases} l_1(x_0, y_0, x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ l_2(x_0, y_0, x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

das System aller ganzzahligen Beziehungen zwischen $x_0, y_0, x_1, \cdots, x_n$, befriedigt, auch die Gleichung:

$$(1) \qquad x_0 y_0 = r_1 x_1^2 + r_2 x_2^2 + \cdots + r_n x_n^2$$

erfüllen. Setzen wir in (1) $x_0 = -y_0$, so ergibt sich,

$$x_0 = y_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

als einziges reelles Wertesystem, das diese Gleichung erfüllt. Dieses Wertesystem ist demnach auch das einzige, welches die Gleichungen S und die Gleichung $x_0 = -y_0$ gleichzeitig befriedigt. Daraus folgt aber, daß S aus $n+1$ Gleichungen bestehen muß. Denn aus weniger als $n+2$ linearen Gleichungen zwischen $n+2$ Variabeln kann niemals das identische Verschwinden aller Variabeln gefolgert werden. Da nun der Fall, daß eine der Größen $x_0, y_0, x_1, \cdots, x_n$ verschwindet auszuschließen ist, so folgt, daß diese Größen alle zu einander in rationalen Verhältnissen stehen. Wir haben also den Satz:

Läßt sich aus einer Anzahl von Rechtecken ein Rechteck zusammensetzen und stehen die Seiten jedes einzelnen der Teil-Rechtecke in rationalem Verhältnis zu einander, so stehen die Seiten sämtlicher Teil-Rechtecke untereinander und mit den Seiten des zusammengesetzten Rechtecks in rationalem Verhältnis.

Als Spezialfälle von diesem Satz wollen wir folgende erwähnen:

Ein Quadrat läßt sich nur in Quadrate mit kommensurabeln Seiten zerlegen. Legt man also in eine Ecke eines Quadrates ein Quadrat, dessen Seite nicht kommensurabel ist mit der Seite des großen Quadrates, so läßt sich der übrig bleibende Teil des großen Quadrates auf keine Weise in Quadrate zerlegen.

Ein Rechteck mit nicht kommensurabelen Seiten läßt sich nicht in Quadrate zerlegen.

b) Rechtecke mit Seiten, die in vorgegebenem Verhältnis zu einander stehen.

Sei

$$y_1 = a_1 x_1,\ y_2 = a_2 x_2, \cdots, y_n = a_n x_n,$$

wo $a_1, a_2, \cdots, a_n$ irgend welche positive Zahlen sind. Setzen wir diese Werte von $y_1 \cdots y_n$ in S_x, S_y und (I) ein, so ergibt sich:

Angenommen, es läßt sich aus den Rechtecken mit den Seiten x_1 und y_1, x_2 und $y_2, \cdots, x_n$ und y_n ein Rechteck, etwa mit den Seiten x_0 und y_0, zusammensetzen und sei:

$$S \begin{cases} l_1(x_0, y_0, x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ l_2(x_0, y_0, x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

das System aller solcher linearen homogenen Gleichungen zwischen $x_0, y_0, x_1, \cdots, x_n$, in denen die Koeffizienten von $x_0, y_0, x_1, \cdots, x_n$ beziehungsweise von der Form:

$$r_0, \varrho_0, r_1 + \varrho_1 a_1,\ r_2 + \varrho_2 a_2, \cdots, r_n + a_n \varrho_n$$

sind, wo $r_0, \varrho_0, r_1, \varrho_1, \cdots, r_n, \varrho_n$ rationale Zahlen sind. Dann muß jedes Wertesystem $x_0, y_0, x_1, \cdots, x_n$, das S befriedigt, auch die Gleichung

$$x_0 y_0 = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2$$

befriedigen. Setzen wir jetzt wieder $x_0 = -y_0$, so erhalten wir aus dieser Gleichung

$$x_0 = y_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Folglich muß S wieder aus $n+1$ Gleichungen bestehen und es ergibt sich:

$$y_0 = a_0 x_0;\ x_1 = k_1 x_0,\ x_2 = k_2 x_0, \cdots, x_n = k_n x_0.$$

Zu jedem Werte x_i gehört also nur ein einziges Wertesystem $x_0, x_1, \cdots, x_n$; $y_0, y_1, \cdots, y_n$. Ferner ist bemerkenswert, daß die Größen a_0; $k_1, k_2, \cdots, k_x$ rationale Ausdrücke in $a_1, \cdots, a_n$ mit rationalen Koeffizienten sind. Die so erhaltenen Resultate können wir in folgende Formen bringen:

1) Sei ein Rechteck x_0, y_0 vorgelegt, das in die Rechtecke $x_1, y_1; x_2, y_2; \cdots; x_n, y_n$ geteilt ist. Dann ist:

$$\frac{x_0}{y_0} = R\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots, \frac{x_n}{y_n}\right),$$

wo R eine rationale Funktion der Argumente mit rationalen Koeffizienten bedeutet.

2) Betrachten wir die unendliche Reihe von Scharen von Rechtecken, deren Seitenverhältnisse vorgegebene Werte

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

haben. Dann läßt sich a) aus den Rechtecken dieser Scharen nicht jedes Rechteck zusammensetzen, vielmehr muß das Seitenverhältnis dieses Rechtecks sich rational mit rationalen Koeffizienten durch eine endliche Anzahl von Größen aus der Reihe $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ ausdrücken lassen. Es gibt also wieder nur eine abzählbar unendliche Anzahl von Scharen von Rechtecken, die sich so zusammensetzen lassen. b) Zu einem bestimmten Rechteck einer jener Scharen mit nicht verschwindenden Seiten gehören nur je eine abzählbar unendliche Anzahl von Rechtecken jeder der Scharen, die mit dem vorgegebenen Rechtecke zusamenzusetzen fähig sind.

3) Vorgelegt sei ein Rechteck x_0, y_0. irgendwie zusammengesetzt aus den Rechtecken $x_1, y_1; x_2, y_2; \cdots; x_n, y_n$. Wir denken uns nun die Teil-Rechtecke und das große Rechteck veränderlich und zwar mit folgenden Beschränkungen:

a) Jedes einzelne Teil-Rechteck für sich ist nur so zu bewegen, daß es ein Rechteck bleibt und daß, wenn man einen Winkel festhält, die gegenüberliegende Ecke auf der zugehörigen Diagonale fortschreitet. Also jedes Rechteck darf nur in ihm ähnliche übergeführt werden.

b) Rechtecke, die je mit einer Seite aneinander liegen, dürfen nicht übereinander geschoben werden, sondern können nur aneinander hingleiten. — Diese Beschränkung, die sich nach früher Entwickeltem analytisch ausdrücken läßt, als ständige Erfüllung gewisser linearer ganzzahliger Relationen zwischen den Rechtecksseiten, bewirkt, daß die veränderten Teilrechtecke wieder das große (ebenfalls veränderte) Rechteck einfach und lückenlos bedecken.

Halten wir endlich c) um bloße Bewegungen des Systems auszuschließen, einen Winkel des großen Rechtecks fest, so ergibt sich:

Das durch a), b), c) definierte kinematische System hat nur einen Freiheitsgrad: Durch die Lage einer Ecke irgend eines Rechtecks (natürlich mit Ausnahme der von vorneherein festgehaltenen Ecke) des großen Rechtecks ist die Lage jeder Ecke jedes Rechtecks bestimmt, und es schreitet auch die dem festen Winkel gegenüberliegende Ecke des großen Rechtecks auf einer Geraden fort, die durch den festen Scheitel hindurchgeht. Die Figur des in Rechtecke eingeteilten Rechtecks kann nur in ihr ähnliche Figuren übergehen. — *Rechtecke die aus resp. ähnlichen Rechtecken homolog zusammengesetzt sind, sind ähnlich.*

Wir wollen bei dieser Gelegenheit bemerken, daß die Resultate dieses Paragraphen im wesentlichen von der Form sind, daß sie zeigen, daß nur die gleichsam trivialen Arten der Zerlegung möglich sind. Denn wie es beispielsweise trivial ist, daß sich ein Quadrat aus kommensurablen Quadraten zusammensetzen läßt, so ist es ebenfalls selbstverständlich, daß wir, bei gegebener Zerlegung eines Rechtecks in Rechtecke, mit „proportional" abgeänderten Teilrechtecken wieder ein Rechteck und zwar mit ebenfalls proportional abgeänderten Seiten zusammensetzen können.

3.

Ein Satz über lineare Mannigfaltigkeiten, die auf quadratischen liegen, und neue Beispiele.

Es ist bemerkenswert, daß sich mit den bisherigen Methoden eine Reihe von sehr einfachen und an das früher Behandelte sich eng anschließenden Problemen nicht erledigen läßt. Wir wollen nur das folgende nennen: Aus einem Rechteck mit den Seiten x_1 und y_1 und einer Anzahl von Quadraten läßt sich ein Quadrat zusammensetzen: müssen x_1 und y_1 irgend welche Bedingungen erfüllen? Die Gleichung (I) lautet für diesen Fall:

$$x_0^2 = x_1 y_1 + x_2^2 + x_n^2 + \cdots + x_n^2.$$

Wenn wir die in dem vorangehenden Paragraphen angewandten Methoden benutzen und $x_0 = 0$, $x_1 = y_1$ setzen, so folgt: Es müssen zwischen den $n + 2$ Variabeln $x_0, x_1, y_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ n lineare Gleichungen bestehen. Da wir aber die Natur dieser Gleichungen gar nicht kennen, so können wir nicht schließen, daß aus diesen Gleichungen eine Beziehung zwischen x_1 und y_1 folgt, weil wir ja nur n Gleichungen zwischen $n + 2$ Größen haben. Es wird sich aber im folgenden ergeben, daß, wie man wohl schon vermuten dürfte, x_1 und y_1 kommensurabel sein müssen, daß also auch hier nur der triviale Fall möglich ist.

Daß unsere bisherigen Methoden hier versagen, liegt nun daran, daß wir, was auch in den vorangehenden Fällen nicht nötig war, unsern Satz 1 nicht vollständig ausgenutzt haben. Diesen haben wir nämlich bisher immer nur in der Form angewandt, daß aus den linearen ganzzahligen Relationen zwischen $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$ die Gleichung (I):

$$x_0 y_0 = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

folge. Wir haben aber viel mehr bewiesen; nämlich, daß diese Beziehung (I) allein aus den linearen Beziehungen zwischen den $x_0, x_1, \cdots, x_n$ und denjenigen zwischen den $y_0, y_1, \cdots, y_n$ folgt. Wir wollen jetzt folgenden allgemeinen Satz beweisen:

Satz 2: Sei

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} l_1^x(x_0, x_1, \cdots, x_n) = 0, \\ l_2^x(x_0, x_1, \cdots, x_n) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases} \qquad \text{(B)} \quad \begin{cases} l_1^y(y_0, y_1, \cdots, y_n) = 0, \\ l_2^y(y_0, y_1, \cdots, y_n) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

eine lineare Mannigfaltigkeit des $(x_0, y_0; x_1, y_1; \cdots; x_n, y_n)$-Raumes, die auf der quadratischen Mannigfaltigkeit:

$$\text{(1)} \qquad \alpha_0 x_0 y_0 + \alpha_1 x_1 y_1 + \cdots + \alpha_n x_n y_n = 0$$

liegt. Dann folgt aus (A) und (B) und irgend welchen n Beziehungen unter den $n+1$ Beziehungen:

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} a_0 x_0 + b_0 y_0 + c_0 = 0, \\ a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n x_n + b_n y_n + c_n = 0 \end{cases}$$

die $n+1^{\text{te}}$ Beziehung.

Dabei sind die Koeffizienten in den Gleichungen (A), (B), (C) und (1) sonst beliebige reelle oder komplexe Größen und nur den (selbstverständlichen) Bedingungen unterworfen, daß keine Größe α_i gleich Null ist und nicht die Größen a_i, b_i, gleichzeitig verschwinden, also eine der Gleichungen (C) identisch erfüllt ist. Von den Gleichungen (A) und (B) wird nicht vorausgesetzt, daß sie homogen sind.

Beweis: 1) Spezialfall: (A) besteht aus (mindestens) n Gleichungen. Sei die in (C) weggelassene Gleichung etwa:

$$a_0 x_0 + b_0 y_0 + c_0 = 0.$$

Folgt dann aus den Gleichungen (A):

$$x_0 = j_0,$$

so ist unmittelbar die im zu beweisenden Satze geforderte Beziehung zwischen x_0 und y_0 vorhanden ($b_0 = 0$; $a_0 = 1$; $c_0 = j_0$). Folgt aus den Gleichungen (A) aber nicht, daß x_0 konstant ist, so können wir alle Größen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ durch x_0 ausdrücken; es sei etwa:

$$x_1 = \lambda_{0,1} x_0 + j_1; \; x_2 = \lambda_{0,2} x_0 + j_2; \cdots; x_n = \lambda_{0,n} x_0 + j_n.$$

Setzen wir diese Werte für $x_1, x_2, \cdots, x_n$ in (1) ein, so ergibt sich:

$$x_0(\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \lambda_{0,1} y_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_{0,n} y_n) + \alpha_1 j_1 y_1 + \alpha_2 j_2 y_2 + \cdots + \alpha_n j_n y_n = 0.$$

Diese Gleichung ist für alle Werte von x_0 erfüllt. Setzen wir $x_0 = 0$ so ergibt sich:

$$\alpha_1 j_1 y_1 + \cdots = 0$$

und folglich auch:

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \lambda_{0,1} y_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_{0,n} y_n = 0. \tag{2}$$

Es sei ferner:

$$(\mathrm{C}') \quad \begin{cases} a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n x_n + b_n y_n + c_n = 0. \end{cases}$$

Wir können also y_i durch x_i linear ausdrücken, wenn nicht

$$b_i = 0; \quad x_i = \frac{-c_i}{a_i}$$

ist. Ist in diesem Falle in der Gleichung

$$x_i = \lambda_{0,i} x_0 + j_i$$

$\lambda_{0,i}$ nicht gleich Null, so folgt vermöge einer der Gleichungen (C′).

$$x_0 = \frac{\frac{-c_i}{a_i} - j_i}{\lambda_{0,i}} = c_0,$$

was wieder der Behauptung entspräche. Verschwindet aber für keinen Index i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ b_i, ohne daß $\lambda_{0,i}$ verschwindet, so kann ich durch Einsetzung der Werte von x_i, ausgedrückt durch x_0, in (C′) alle diejenigen y_i, deren Koeffizient in (2): $\alpha_i \lambda_{0,i}$ nicht verschwindet, durch x_0 ausdrücken und erhalte so statt (2) die Gleichung:

$$\alpha_0 y_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i \lambda_{0,i}}{b_i} (a_i \lambda_{0,i} x_0 + a_i j_i + c_i) = 0$$

oder:

$$\alpha_0 y_0 - x_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i \lambda_{0,i}^{2} a_i}{b_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i \lambda_{0,i}}{b_i} (a_i j_i + c_i) = 0.$$

Damit haben wir aber, da nach Voraussetzung der Koeffizient α_0 von y_0 nicht gleich Null ist, die in (C) weggelassene Beziehung zwischen x_0 und y_0 wieder erhalten und unsere Behauptung für diesen speziellen Fall erwiesen.

2) Allgemeiner Fall: (A) besteht aus $n-m$ Beziehungen zwischen $x_0, x_1, \cdots, x_n$. Sei wieder:

$$a_0 x_0 + b_0 y_0 + c_0 = 0$$

die Beziehung, die nach der Behauptung aus (A), (B) und den übrigen Gleichungen (C) folgen soll. Wieder können wir den Fall, daß aus den Gleichungen (A) folgt, daß x_0 konstant ist, ausschließen, da dann unsere Behauptung unmittelbar folgen würde.

Wir können also durch x_0 und m weitere Größen x_i, etwa $x_1, x_2, \cdots, x_m$, die übrigen Größen $x_{m+1}, \cdots, x_n$ linear ausdrücken. Es sei etwa:

$$(\mathrm{D}) \quad \begin{cases} x_{m+1} = \lambda_{0,m+1} x_0 + \lambda_{1,m+1} x_1 + \cdots + \lambda_{m,m+1} x_m + j_{m+1}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_n = \lambda_{0,n} x_0 + \lambda_{1,n} x_1 + \cdots + \lambda_{m,n} x_m + j_n. \end{cases}$$

Setzen wir diese Werte in (1) ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} x_0 \left(\alpha_0 y_0 + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \lambda_{0,i} y_i\right) + x_1 \left(\alpha_1 y_1 + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \lambda_{1,i} y_i\right) + \cdots \\ + x_m \left(\alpha_m y_m + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \lambda_{m,i} y_i\right) + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i j_i y_i \end{aligned}\right\} = 0.$$

Da nun diese Gleichung für jeden Wert von $x_1 \cdots x_m$ erfüllt sein soll, so folgt zunächst:

$$\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i j_i y_i = 0$$

und darauf:

$$(\mathrm{E}) \quad \begin{cases} \alpha_0 y_0 + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \lambda_{0,i} y_i = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \alpha_m y_m + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \lambda_{m,i} y_i = 0. \end{cases}$$

Nun ist ferner:

$$(\mathrm{C}') \quad \begin{cases} a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_n x_n + b_n y_n + c_n = 0. \end{cases}$$

Wir können y_i durch x_i linear ausdrücken, wenn nicht b_i gleich Null ist.

In diesem Falle folgt aber, wenn $i < m+1$ ist, daß zu den Gleichungen (D) (oder (A)) eine neue Beziehung, nämlich:

$$x_i = \frac{c_i}{a_i}$$

hinzukommt. Ist $i > m$, so folgt aus (D):

$$\frac{c_i}{a_i} = \lambda_{0,i}\, x_0 + \lambda_{1,i}\, x_1 + \cdots + \lambda_{m,i}\, x_i + j_i,$$

also ebenfalls eine neue Beziehung zwischen den Größen $x_0, x_1, \cdots, x_n$, (da ja nach Voraussetzung aus (A) keine Beziehung zwischen $x_0, x_1, \cdots, x_m$ folgt) wenn nicht:

$$\lambda_{0,i} = \lambda_{1,i} = \cdots = \lambda_{m,i} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{c_i}{\alpha_i} = j_i$$

ist. Entweder also ist der Fall von $n-m$ Beziehungen zwischen den Größen $x_0 \cdots x_n$ auf den Fall von $n-m+1$ Beziehungen reduziert, oder wir können durch Einsetzung der Werte von x_i $(i > m)$, ausgedrückt durch die Größen $x_0 \cdots x_m$, in (C′) alle diejenigen y_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$, deren Koeffizienten in (E) nicht verschwinden, durch $x_0 \cdots x_m$ ausdrücken. Nehmen wir den letzteren Fall als vorliegend an, so erhalten wir:

$$y_i = -\frac{a_i \sum\limits_{k=0}^{m} (\lambda_{k,i}\, x_k + j_i) + c_i}{b_i}, \qquad i > m$$

$$y_i = -\frac{a_i x_i + c_i}{b_i}, \qquad 0 < i < m+1.$$

Setzen wir diese Werthe in (E) ein, so erhalten wir:

$$(\mathrm{F}) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0\, y_0 = \alpha_{0,0}\, x_0 + \alpha_{0,1}\, x_1 + \cdots + \alpha_{0,m}\, x_m + \beta_0, \\ \dfrac{-\alpha_1 x_1}{b_1} = \alpha_{1,0}\, x_0 + \alpha_{1,1}\, x_1 + \cdots + \alpha_{1,m}\, x_m + \beta_1 + \dfrac{c_1}{b_1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{-\alpha_m x_m}{b_m} = \alpha_{m,0} x_0 + \alpha_{m,1} x_1 + \cdots + \alpha_{m,m} x_m + \beta_m + \dfrac{c_m}{b_m}. \end{array} \right.$$

Hierbei ist:

$$\alpha_{l,k} = \alpha_{k,l} = \sum \frac{\alpha_i\, \lambda_{l,i}\, \lambda_{k,i}\, a_i}{b_i},$$

$$\beta_l = \sum \frac{\alpha_i\, \lambda_{li} (\alpha_i j_i + c_i)}{b_i}$$

gesetzt, wo die Summen zu erstrecken sind über alle diejenigen Indices $i > m$, für die b_i von Null verschieden ist.

Verschwinden nicht alle Koeffizienten der Variabeln $x_0 \cdots x_m$ in den m letzten Gleichungen von (F), so haben wir wieder nicht mehr bloß $n - m$ Beziehungen zwischen $x_0 \cdots x_n$, sondern $n - m + 1$ und unser Fall ist wiederum auf diesen Fall reduziert. Verschwinden dagegen alle Koeffizienten in den m letzten Gleichungen von (F), so erhalten wir:

$$\alpha_0 y_0 = \alpha_{0,0} x_0 + \beta_0,$$

also die gewünschte Beziehung zwischen x_0 und y_0, die jedenfalls nicht identisch erfüllt ist, da ja α_0 nach Voraussetzung von Null verschieden ist. Indem wir die Betrachtung für den Fall von $n - m$ Gleichungen zwischen $x_0 \cdots x_m$ zusammenfassen, erkennen wir: Entweder läßt sich die Behauptung direkt erweisen oder aber der Beweis ist für den Fall von $n - m + 1$ Gleichungen zu erbringen. Schließen wir nun für diesen Fall in der obigen Weise und fahren so fort, so folgt entweder direkt, daß die Behauptung richtig ist, oder daß wir unsere Behauptung für den Fall von n Gleichungen zwischen $x_0 \cdots x_n$ zu prüfen haben. Diesen Fall aber haben wir direkt erledigt, so daß der Satz 2) bewiesen ist.

Beispiele.

Mittels dieses allgemeinen Satzes läßt sich leicht eine ganze Reihe von Beispielen erledigen. Wir wollen nur zwei kurz behandeln:

a) Als erstes Beispiel wählen wir das im Eingang dieses Paragraphen erwähnte und beweisen den Satz:

Ein Rechteck läßt sich durch Hinzufügen von Quadraten nur dann zu einem Quadrate ergänzen, wenn seine Seiten kommensurabel sind.

Angenommen, ein Rechteck x_1, y_1 würde durch Hinzufügen anderer Rechtecke $x_2, y_2; \cdots; x_n, y_n$ zu einem Rechteck x_0, y_0 ergänzt. Sind die Rechtecke $x_0, y_0; x_1, y_1; \cdots; x_n, y_n$ Quadrate, so lautet das Gleichungssystem (C′):

$$(C') \quad \begin{cases} x_0 = y_0, \\ x_2 = y_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = x_n. \end{cases}$$

Gemäß Satz 2 folgt daraus vermöge der Systeme S_x und S_y (siehe § 1), die an Stelle von (A) und (B) treten:

$$a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 = 0.$$

Da aber die sämtlichen Gleichungen S_x und S_y sowie (C′) homogen sind und ganzzahlige Koeffizienten haben, so muss diese Gleichung von der Form:

$$n x_1 = m y_1$$

sein, wo n und m ganze positive oder negative Zahlen und eine von beiden auch gleich Null sein kann. Also ist der Satz bewiesen. Wir wollen noch hinzufügen, daß wir diese Gleichung auch geometrisch interpretieren, wenn m oder n negativ ist. Dies bedeutet natürlich, daß das Rechteck mit den Seiten x_1 und y_1 wegzunehmen (herauszuschneiden) ist aus dem Gefüge der Rechtecke $x_2, y_2; \cdots; x_n, y_n$.

b) Welche Bedingung besteht für die Seiten x_0, y_0 eines Rechtecks, damit es aus Rechtecken mit einer vorgegebenen Seite g zusammengesetzt werden kann? Dabei soll von einem Rechteck x_i, y_i entweder x_i oder y_i gleich g sein. Nehmen wir an, es sei

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_m = y_{m+1} = y_{m+2} = \cdots = y_n = g.$$

Dann lautet das Gleichungssystem (C):

$$(C') \quad \begin{cases} x_1 & = g, \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ x_m & = g, \\ y_{m+1} & = g, \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ y_n & = g. \end{cases}$$

Nach Satz 2 folgt aus diesen Gleichungen und den Gleichungen der Systeme S_x und S_y:

$$a_0 x_0 + b_0 y_0 + c_0 = 0.$$

Aber da die Gleichungen (C′), wie die Gleichungen von S_x und S_y nur Beziehungen zwischen den Größen x_i allein und zwischen Größen y_i allein enthalten, so folgt, daß entweder a_0 oder b_0 gleich Null zu setzen ist. Da nun ferner S_x und S_y ganzzahlige Koeffizienten haben, so muß mindestens eine von den beiden Gleichungen:

$$l x_0 = m g; \quad n y_0 = p g$$

bestehen, wo l, m, n, p ganze Zahlen und m und p auch gleich Null sein können. Wir haben deswegen den Satz:

Ist ein Rechteck x_0, y_0 aus Rechtecken mit einer vorgegebenen Seite g zusammensetzbar, so ist mindestens eine von den Größen x_0, y_0 mit g kommensurabel.

Mittels ganz analoger Betrachtungen erhalten wir ferner den Satz:

Ist das Rechteck x_0, y_0 aus den Rechtecken $x_1, y_1; \cdots; x_n, y_n$ zusammensetzbar und teilen wir die Teilrechtecke in zwei Gruppen, etwa: $x_1, y_1; \cdots; x_m y_m$ und $x_{m+1}, y_{m+1}; \cdots; x_n, y_n$ so besteht von jedem der beiden Paare von homogenen linearen ganzzahligen Gleichungen

$$l_1^x(x_0, x_1 \quad, \cdots, x_m) = 0,$$
$$l_1^y(y_0, y_{m+1}, \cdots, y_n) = 0$$

und

$$l_2^x(x_0, x_{m+1}, \cdots, x_n) = 0,$$
$$l_2^y(y_0, y_1 \quad, \cdots, y_n) = 0$$

mindestens eine Gleichung.

4.

Das allgemeine Problem.

Wir wollen eine Kurve in der (x, y)-Ebene eine gewöhnliche Kurve nennen, wenn sie aus einer abzählbaren Anzahl von Punkten und ganz im Endlichen gelegenen Kurvenstücken

$$y = \varphi(x) \quad \text{oder} \quad x = \psi(y)$$

zusammengesetzt werden kann, wo φ und ψ stetige Funktionen sind, die einen stetigen monotonen ersten Differentialquotienten besitzen.

Satz 3: Sei

$$(A) \quad \begin{cases} l_1^x(x_0, x_1, \cdots, x_n) = 0, \\ l_2^x(x_0, x_1, \cdots, x_n) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases} \qquad (B) \quad \begin{cases} l_1^y(y_0, y_1, \cdots, y_n) = 0, \\ l_2^y(y_0, y_1, \cdots, y_n) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

eine lineare Mannigfaltigkeit auf der quadratischen:

$$(1) \qquad \alpha_0 x_0 y_0 + \alpha_1 x_1 y_1 + \cdots + \alpha_n x_n y_n = 0.$$

Beschränkt man dann n Punktepaare unter den $n+1$ Punktepaaren $x_0, y_0; x_1, y_1; \cdots; x_n, y_n$, etwa $x_1, y_1; \cdots; x_n, y_n$, auf gewöhnliche Kurven der (x_1, y_1)-, $\cdots$, (x_n, y_n)-Ebene, so ist bei Erfüllung von (A) und (B) auch das $n+1^{\text{te}}$ Punktepaar x_0, y_0 auf eine gewöhnliche Kurve der (x_0, y_0)-Ebene beschränkt.

Hierbei sind die Koeffizienten in den Gleichungen (A), (B) und (1) als reell vorausgesetzt; $\alpha_0 \cdots \alpha_n$ müssen sämtlich von Null verschieden sein.

Seien nun $x_0, y_0; x_1, y_1; \cdots; x_n, y_n$ ein System von Wertepaaren, welche die Gleichungen (A) und (B) befriedigen, indem gleichzeitig $x_1, y_1; \cdots; x_n, y_n$ auf den ihnen zugeordneten Kurven der (x_1, y_1)-, $\cdots$, (x_n, y_n)-Ebene liegen. Und zwar mögen die betreffenden „Stücke“ dieser Kurve durch die Gleichungen gegeben sein:

$$
\text{(D)}\quad \begin{cases} y_1 \quad = \varphi_1(x_1), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_m \quad = \varphi_m(x_m), \\ x_{m+1} = \psi_{m+1}(y_{m+1}), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_n \quad = \psi_n(y_n), \end{cases}
$$

wo $\varphi_1 \cdots \varphi_m$, $\psi_{m+1} \cdots \psi_n$ nach Voraussetzung einen stetigen ersten Differentialquotienten besitzen. Dann bilden wir für die Funktionaldeterminanten die Matrix:

$$
\text{(E)}\quad \left|\begin{array}{cccccccc}
\frac{\partial l_1^x}{\partial x_0} & \cdots\cdots & \frac{\partial l_1^x}{\partial x_n} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
\frac{\partial l_2^x}{\partial x_0} & \cdots\cdots & \frac{\partial l_2^x}{\partial x_n} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \cdots\cdots & 0 & \frac{\partial l_1^y}{\partial y_0} & \cdots\cdots & \frac{\partial l_1^y}{\partial y_n} \\
0 & \cdots\cdots & 0 & \frac{\partial l_2^y}{\partial y_0} & \cdots\cdots & \frac{\partial l_2^y}{\partial y_n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots & 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right|
$$

und die entsprechenden linearen Gleichungen:

$$
\text{(F)}\quad \begin{cases}
\frac{\partial l_1^x}{\partial x_0}(X_0 - x_0) + \cdots\cdots = 0, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\frac{\partial l_1^y}{\partial y_0}(Y_0 - y_0) + \cdots\cdots = 0, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\frac{d\varphi_1}{dx_1}(X_1 - x_1) - (Y_1 - y_1) = 0. \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{cases}
$$

Da nach Voraussetzung $x_0, y_0; \cdots; x_n, y_n$ die Gleichungen (A) und (B) befriedigen, so können die ersten Gleichungen in (F) auch geschrieben werden:

$$(A') \begin{cases} l_1^x(X_0, X_1, \cdots, X_n) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases} \qquad (B') \begin{cases} l_1^y(Y_0, Y_1, \cdots, Y_n) = 0. \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Die übrigen Gleichungen (F) sind von der Form der Gleichungen (C') in Satz 2. Es ergibt sich deshalb durch Anwendung dieses Satzes, daß die Gleichungen (F) die Gleichung

$$a_0 X_0 + b_0 Y_0 + c_0 = 0$$

zur Folge haben, wo a_0 und b_0 nicht beide gleich Null sind. Damit nun im System (F) alle Größen $X_1, \cdots, X_n$; $Y_1, \cdots, Y_n$ eliminiert werden können, müssen gewisse Unterdeterminanten der Matrix (E) von Null verschieden, andere gleich Null sein. Es gibt eine endliche Anzahl verschiedener Kombinationen von verschwindenden und von Null verschiedenen Unterdeterminanten der Matrix (E), die diese Elimination ermöglichen. Lassen wir nun x_0, y_0; x_1, y_1; $\cdots$ so variieren, daß sie nicht aufhören die Gleichungen (A), (B) und (D) zu befriedigen, so wird zu jedem Wertesystem eine solche Kombination von Unterdeterminanten gehören. Da diese aber nach Voraussetzung stetige Funktionen sind, so wird in einem ganzen Intervall der Variation dieselbe Kombination von verschwindenden und nichtverschwindenden Unterdeterminanten bestehen bleiben. Dann folgt aber gemäß des Fundamentaltheorems der Elimination*), demzufolge die Möglichkeit der Elimination der Größen $x_i, x_k, \cdots, y_i, y_k, \cdots$ aus den Gleichungen (A), (B) und (D) identisch ist mit der Möglichkeit, aus den Gleichungen (F) in einem ganzen Intervalle die Variabelen $X_i, X_k, \cdots,$ $Y_i, Y_k, \cdots$ zu eliminieren, daß in einem ganzen Intervalle der Variation zwischen x_0 und y_0 eine Beziehung von der Form

$$f_0(x_0, y_0) = 0$$

besteht, welche sich für das ganze Intervall auf eine von den beiden Formen:

$$y_0 = \varphi_0(x_0), \qquad x_0 = \psi_0(y_0)$$

bringen läßt. Wegen der Voraussetzungen über die Funktionen $\varphi_1 \cdots \psi_1 \cdots \psi_n$ muß ferner der ganze durch die Gleichungen (A), (B) und (D) definierte Variationsbereich der Variabelen $x_1, y_1; \cdots; x_n, y_n$ auf den Kurvenstücken der betreffenden Ebenen sich in eine endliche Anzahl von Bereichen zerlegen lassen, derart, daß in jedem von ihnen dieselbe Kombination von verschwindenden und nichtverschwindenden Unterdeterminanten von (E) existiert, welche die Elimination von $x_1, \cdots, y_1, \cdots, y_n$ aus (A), (B) und (D) ermöglicht. Der Beweis hierfür kann ohne erhebliche Schwierig-

*) Siehe z. Bsp. C. Jordan, Cours d'Analyse, II$^{\text{ième}}$ éd. Nr. 92—95.

keiten mit den Methoden, die in der Theorie reeller Funktionen üblich sind, geführt werden.

Für diesen ganzen Variationsbereich ist also das Variabelnpaar x_0, y_0 abgesehen von isolierten Punkten auf eine endliche Anzahl von Kurvenstücken beschränkt, die entweder von der Form

$$y_0 = \varphi_0(x_0)$$

oder von der Form

$$x_0 = \psi_0(y_0)$$

sind, wo φ_0 und ψ_0 wieder stetige monotone erste Differentialquotienten besitzen. Nun gibt es aber nur eine abzählbar-unendliche Anzahl Kombinationen, bestehend aus je einem der Kurvenstücke, welche die vorgegebenen (gewöhnlichen) Kurven respektive in der (x_1, y_1)-, $\cdots$, (x_n, y_n)-Ebene zusammensetzen. So ist also auch der Punkt, der durch das Wertepaar x_0, y_0 in der (x_0, y_0)-Ebene dargestellt wird, wie zu beweisen war, gezwungen auf einer gewöhnlichen Kurve zu verbleiben. Es liegt darin natürlich eine Beschränkung des möglichen Wertevorrates von Größenpaaren x_0, y_0, weil eine gewöhnliche Kurve die Ebene nirgendwo vollständig überdecken kann.

Es folgt nun weiter leicht der Satz:

Liegen die Punkte $x_1, y_1; \cdots; x_n, y_n$ auf je einer gewöhnlichen Kurve der (x_1, y_1)-, $\cdots$, (x_n, y_n)-Ebene so kann man aus Rechtecken mit den Seiten $x_1, y_1; \cdots; x_n, y_n$ nur dann das Rechteck mit den Seiten x_0, y_0 zusammensetzen, wenn der Punkt x_0, y_0 in der (x_0, y_0)-Ebene auf einer bestimmten gewöhnlichen Kurve liegt.

Zunächst müssen die Größen $x_0, y_0; \cdots, x_n, y_n$ nach Satz 1 auf einer solchen linearen Mannigfaltigkeit der quadratischen Mannigfaltigkeit

$$x_0 y_0 = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

liegen, die dargestellt werden kann durch eine Anzahl linearer homogener ganzzahliger Gleichungen zwischen $x_0, \cdots, x_n; y_0, \cdots, y_n$. Solcher Gleichungen aber gibt es nur eine abzählbar-unendliche Anzahl, etwa $L_1, L_2, \cdots$ Liegen nun $x_0, y_0; \cdots; x_n, y_n$ auf einer bestimmten solchen linearen Mannigfaltigkeit, etwa L_1, so folgt nach Satz 4, daß der Punkt x_0, y_0 in der (x_0, y_0)-Ebene auf einer gewöhnlichen Kurve liegen muß, ebenso, wenn $x_0, y_0; \cdots; x_n, y_n$ auf $L_2, \cdots$ liegen. Also muß der Punkt x_0, y_0 in der (x_0, y_0)-Ebene auf einer abzählbaren Anzahl von gewöhnlichen Kurven, d. h. wieder auf einer gewöhnlichen Kurve liegen.

Lassen wir jetzt n unendlich werden, so erhalten wir den

Satz 4. Liegen die Punkte $x_1, y_1; \cdots; x_m, y_m; \cdots$ auf je einer gewöhnlichen Kurve der (x_1, y_1)-, $\cdots$, (x_m, y_m)-, $\cdots$, -Ebene, so kann man aus einer endlichen Anzahl von Rechtecken mit den Seiten $x_1, y_1; \cdots, x_m, y_m; \cdots$ nur dann das Rechteck mit den Seiten x_0, y_0

zusammensetzen, wenn der Punkt x_0, y_0 in der (x_0, y_0)-Ebene auf einer bestimmten gewöhnlichen Kurve liegt.

Denn es gibt nur eine abzählbar-unendliche Anzahl von Gruppen mit einer endlichen Anzahl von Gliedern, von denen jedes eines der Variabelnpaare $x_0, y_0; \cdots; x_m, y_m; \cdots$ ist.

Für jede solche Gruppe gilt der eben bewiesene Satz, also ist auch der Satz 4 bewiesen.

Wir wollen nun kurz eine solche Schar von Rechtecken, deren Seiten x, y einen Punkt in der (x, y)-Ebene repräsentieren, der stets auf einer bestimmten gewöhnlichen Kurve liegt, eine eingliedrige Schar nennen. Dann ergibt sich endlich als Spezialfall von Satz 4, wenn wir die Rechtecke $x_1, y_1; \cdots; x_m, y_m; \cdots$ alle derselben Schar angehören lassen, der am Anfang dieser Arbeit aufgestellte

Satz 5. Aus einer endlichen Anzahl Repräsentanten einer eingliedrigen Schar von Rechtecken, läßt sich nur eine eingliedrige Schar von Rechtecken zusammensetzen.

Indem wir bedenken, daß wir, nicht nur wie in den bisherigen Anwendungen von Satz 3 α_0 gleich -1, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1$, sondern beliebig $\alpha_i = +1$ oder $= -1$ setzen können, ergibt sich, daß wir dem Satz 5 hinzusetzen können: Die „Zusammensetzung“ darf nicht nur mittels bloßem „Hinzufügen zu dem Vorhandenen“ sondern auch mittels „Wegnehmen von dem Vorhandenen“ geschehen.