Sur le théorème fondamental de la géométrie projective.

par

M. G. Darboux à Paris.

(Extrait d'une lettre à M. Klein).

Dans deux Mémoires insérés aux tomes VI et VII des *Mathematische Annalen* vous vous êtes occupé incidemment de la démonstration que v. Staudt a donnée du théorème fondamental de sa géométrie de position. Cet éminent géomètre prend pour base une définition particulière de la projectivité et il dit que deux séries linéaires d'éléments sont en relation projective lorsque, à quatre éléments de l'une des séries en relation harmonique, correspondent toujours quatre éléments de l'autre série formant aussi, et dans le même ordre, une suite harmonique. Lorsqu'on adopte cette définition, il y a à établir le théorème suivant:

Si deux séries de points pris sur une même droite sont en relation projective, il ne peut pas y avoir plus de deux points de l'une des séries qui coïncident avec leurs homologues, ou, en d'autres termes: *si trois éléments de l'une des séries coïncident avec leurs homologues, il en sera de même de tout autre élément.*

C'est de ce théorème que v. Staudt donne, dans sa *Geometrie der Lage*, une démonstration que tout le monde avec vous s'accorde à regarder comme incomplète. Mais il me semble que si la démonstration laisse à désirer, le théorème lui-même est parfaitement exact et qu'il peut être établi sans le secours d'aucune hypothése complémentaire de la nature de celle que vous avez énoncée au tome VII p. 536 des *Mathematische Annalen.*

Je supposerai d'abord que, laissant de côté la géométrie de v. Staudt et employant les notions métriques, on accepte immédiatement la représentation des points par des abscisses évaluées numériquement. On peut alors établir en toute rigueur le théorème suivant:

Si deux séries d'éléments se correspondent de telle manière qu'à quatre éléments quelconques de l'une des séries, formant une proportion harmonique, correspondent quatre éléments également en rapport harmonique, la correspondance est définie par cette unique propriété; et elle coïncide avec la transformation homographique.

Il suffira évidemment de considérer le cas où les deux séries sont composées de points sur une même droite, et où trois éléments de l'une des séries coïncident avec leurs homologues; car on peut toujours réaliser cette dernière condition en soumettant l'une des séries à une transformation homographique; on peut même supposer que les points qui coïncident avec leurs homologues sont définis par les abscisses $0, 1, \infty$. Il résulte immédiatement de la définition de la correspondance considérée qu'à un point de l'une des séries correspond un seul point de l'autre. Soit x l'abscisse d'un point quelconque de la première série, x' l'abscisse du point homologue. On aura $x' = \varphi(x)$ et la fonction φ devra déjà satisfaire aux trois conditions:

$$(1) \qquad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1, \quad \varphi(\infty) = \infty.$$

Cela posé, considérons trois points, d'abscisses x_1, x_2, x_3, formant avec le point ∞ une proportion harmonique; on aura

$$x_1 + x_3 = 2x_2.$$

Comme les points homologues doivent aussi former une proportion harmonique, on devra avoir en même temps

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_3) = 2\varphi(x_2),$$

ce qui donne une première équation fonctionnelle

$$(2) \qquad \varphi(x_1) + \varphi(x_3) = 2\varphi\left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right)$$

à laquelle devra satisfaire la fonction φ. Si je fais $x_3 = 0$ j'ai

$$\varphi(x_1) = 2\varphi\left(\frac{x_1}{2}\right)$$

et par conséquent l'équation (2) peut s'écrire

$$(3) \qquad \varphi(x_1) + \varphi(x_3) = \varphi(x_1 + x_3).$$

On ne sait pas résoudre d'une manière générale cette équation fonctionelle, *tant qu'on ne suppose rien sur la fonction* φ.*) Mais il est

---

*) L'équation fonctionnelle

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y)$$

se rencontre dans un grand nombre de recherches de mécanique et de physique. Cauchy l'a résolue, avec plusieurs autres équations analogues, dans son *analyse Algébrique, mais en supposant la fonction φ continue.* Dans un article sur la composition des forces en statique (*Bulletin des Sciences Mathématiques* t. IX. p 281) j'ai fait la remarque, à peu près évidente, que la méthode de Cauchy s'applique encore et conduit au même résultat si l'on suppose seulement que la fonction conserve son signe ou soit croissante dans un intervalle quelconque. Mais on peut aller plus loin et montrer que l'on aura $\varphi(x) = Ax$, A étant une constante, toutes les fois que la fonction $\varphi(x)$ sera assujettie à l'unique condition de prendre dans un intervalle quelconque des valeurs positives et négatives qui, les unes ou les autres, soient inférieures en grandeur absolue à une limite fixe. Ainsi il suffira, clair que nous n'avons fait usage que d'une partie de la définition générale et nous allons en effet obtenir des propriétés nouvelles de la fonction φ.

Considérons les quatre points en proportion harmonique, ayant pour abscisses x_1, x_2, x_3, $-x_3$. On aura

(4) $$x_1 x_2 = x_3^2.$$

Les abscisses des points correspondants seront $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, $\varphi(x_3)$, $\varphi(-x_3)$ ou, en vertu de l'équation (3)

$$\varphi(x_1), \quad \varphi(x_2), \quad \varphi(x_3), \quad -\varphi(x_3)$$

et l'on devra avoir

$$\varphi(x_1)\,\varphi(x_2) = [\varphi(x_3)]^2$$

ou

---

par exemple, qu' il y ait un seul intervalle dans lequel les valeurs positives de la fonction demeurent inférieures à un nombre fixe, pour que l'on ait $\varphi(x) = Ax$.

En effet, de l'équation

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y)$$

on déduit aisément que la fonction

$$\psi(x) = \varphi(x) - x\varphi(1)$$

1° s'annule pour toutes les valeurs commensurables de x, 2° satisfait aussi à l'équation

$$\psi(x) + \psi(y) = \psi(x+y)$$

et par conséquent *reprend la même valeur pour deux valeurs de x qui diffèrent d'une quantité commensurable quelconque.* Elle prend donc dans un intervalle déterminé toutes les valeurs qu'elle peut acquérir dans les autres intervalles. Par suite si elle n'est pas constamment nulle, si l'on a, par exemple,

$$\psi(x_0) \gtrless 0$$

on en déduira

$$\psi(mx_0) = m\psi(x_0) \gtrless 0,$$

m étant un nombre commensurable, aussi grand qu'on le veut, positif ou négatif. Ainsi la fonction prendra des valeurs positives ou négatives aussi grandes qu'on le voudra, et il y aura dans tout intervalle une infinité de valeurs de x qui feront acquérir ces valeurs à la fonction.

Par suite si les valeurs positives ou négatives de la fonction dans un intervalle quelconque doivent demeurer finies, il faudra nécessairement que l'on ait

$$\psi(x) = 0$$

ou

$$\varphi(x) = x\varphi(1)$$

pour toute valeur de x

Au point de vue de la question qui nous occupe, la remarque précédente aurait pour conséquence le théorème suivant:

Si la correspondance est définie par la condition qu'à trois points quelconques M, M′, M″ formant avec le point déterminé A une proportion harmonique, correspondent trois points N, N′, N″ formant avec le point déterminé B une proportion harmonique, cette correspondance est la transformation homographique, pourvu qu'il existe au moins un intervalle, ne comprenant pas de point de la première série dont l'homologue soit aussi rapproché de B qu'on le voudra.

$$(5) \qquad \varphi(x_1)\,\varphi(x_2) = [\varphi\,(\sqrt{x_1 x_2})]^2.$$

Remarquons qu'en vertu de la relation (4), x_1 et x_2 sont de même signe. Si donc l'on fait $x_2 = 1$, on supposera simplicitement x_1 positive et l'on aura

$$(6) \qquad \varphi(x_1) = [\varphi\,(\sqrt{x_1})]^2.$$

Cette équation nous montre que $\varphi(x)$ sera positive toutes les fois que x le sera.

On peut considérer maintenant la recherche comme achevée, car l'égalité

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \varphi(h)$$

nous montre que la fonction sera croissante; et comme pour toutes les valeurs commensurables de x on a

$$\varphi(x) = x\varphi(1) = x$$

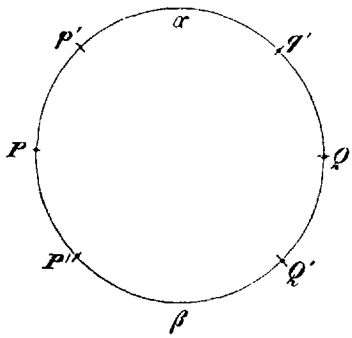
on peut conclure que la même expression a lieu pour les valeurs incommensurables de x.

Voilà donc la proposition entièrement démontrée; il est vrai que nous avons employé la géométrie métrique; mais vous n'aurez aucune peine à admettre à priori que les raisonnements qui précèdent peuvent en quelque sorte être traduits dans la géométrie de position. C'est ce que je vais faire voir en peu de mots.

Je commencerai par établir un lemme préliminaire. Considérons deux segments PQ, $P'Q'$ divisant harmoniquement un autre segment AB. On sait que ces deux segments PQ, $P'Q'$ sont compris l'un dans l'autre ou n'ont aucune partie commune. Donc *si deux segments empiètent l'un sur l'autre, il n'existe pas de segment les divisant tous les deux harmoniquement.*

Je vais démontrer au contraire que *si deux segments PQ, $P'Q'$ n'empiètent pas l'un sur l'autre, il existe toujours au moins un segment les divisant harmoniquement.*

Supposons, pour éviter toute difficulté relative à l'infini, que les deux segments aient été rapportés sur une conique ou, si l'on veut, considérons la droite comme une courbe fermée et soient p', q' les conjugués harmoniques de P', Q' par rapport au segment PQ; p', q' seront dans l'arc $P\alpha Q$ qui ne contient pas le segment $P'Q'$. Supposons qu'un point M se meuve de P' en Q'; son conjugué harmonique μ par rapport au segment PQ parcourra l'arc $p'\alpha q'$, tandis que le conjugué harmonique μ' du même point par rapport au segment $P'Q'$ parcourra l'arc



$P'P\alpha QQ'$. Il y aura donc au moins une position de M pour laquelle μ et μ' coïncideront.

Nous admettons, on le voit, que si deux mobiles se meuvent sur une droite d'une manière continue, c'est-à-dire de manière à occuper toutes les positions, et que l'un, après être demeuré en arrière, finisse par dépasser l'autre, il y aura au moins une position dans laquelle ils coïncideront. Mais vous verrez facilement qu'il n'y a pas là de désavantage pour la démonstration nouvelle. La proposition précédente ou des propositions auxquelles il est aisé de la ramener doivent être admises quand on a à représenter par un nombre une grandeur incommensurable et en particulier à définir la racine carrée, qui est employée dans l'équation (6) de la première démonstration.

Il résulte de ce qui précède un moyen précis de reconnaitre si deux segments empiètent ou n'empiètent pas l'un sur l'autre; il suffira de chercher s'il y a un troisième segment qui les divise harmoniquement.

Cela posé, considérons sur une même droite deux séries projectives de points et supposons que les trois points A, B, C de l'une des séries coïncident avec leurs homologues. Il resulte des belles recherches de MM. Lüroth et Zeuthen que vous avez exposées au tome VII des *Mathematische Annalen* (p. 531) que, dans tout intervalle, il y aura des points qui coïncideront avec leurs homologues (ce sont les points qui, dans notre première démonstration, ont leurs abscisses rationnelles). Je dis que tout autre point x coïncidera avec son homologue x'. En effet, s'il en était autrement, nous pourrions prendre entre x et x' deux points A et B, dans l'ordre $(xABx')$, que coïncideraient avec leurs homologues. Alors les deux segments xA, Bx', n'empiètant pas l'un sur l'autre seraient divisés harmoniquement par un troisième segment et par conséquent les segments $x'A$, Bx formés par les quatre points homologues de x, A, B, x' devraient être divisés harmoniquement par le segment $m'n'$, homologue de mn. Or cela est impossible, puisque les deux segments $x'A$, Bx, empiètant l'un sur l'autre, ne peuvent admettre aucun segment qui les divise tous les deux harmoniquement. Il est donc impossible que x' ne coïncide pas avec x et la proposition de v. Staudt se trouve établie dans toute sa généralité.

Une fois le théorème fondamental établi, on peut en déduire de nombreuses conséquences. Il est aisé par exemple de reconnaitre avec v. Staudt (Geometrie der Lage § 121—122) que l'on peut définir la correspondance projective ou homographique dans le plan ou dans l'espace par l'unique condition qu'à des points en ligne droite de l'une des figures correspondent dans l'autre des points en ligne droite. On déduit en effet facilement de cette définition et du principe fondamental 1° qu'à un point correspond un seul point, 2° qu'à une droite ponctuée correspond une droite ponctuée projectivement, 3° que si quatre points d'un plan dont trois ne sont pas en ligne droite coïncident avec leurs homologues, il en sera de même de tout autre point du plan, etc.

Mais il y a une autre conséquence du theorème fondamental sur laquelle je désirerais, en terminant, appeler votre attention. Möbius dans son beau Mèmoire *Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung* (Abh. der K. S. Ges. d. Wissensch. IV.) se propose d'étudier la transformation la plus générale dans laquelle à un cercle corresponde un cercle et il arrive au fond à cette conclusion qu'une telle transformation équivant à l'inversion (transformation par rayons vecteurs réciproques) accompagnée de déplacements. Mais pour établir cette intéressante proposition il suppose, et il le dit expressivement (p. 535), que la correspondance des deux figures soit assujettie aux conditions de continuité. Je me propose de montrer, en m'appuyant sur ce qui précède, que ces conditions ne sont pas nécessaires.

Supposons en effet que l'on veuille rechercher la transformation la plus générale dans laquelle à un cercle correspond un cercle. Il est clair d'abord qu'à un point devra correspondre un seul point. A tous les cercles passant par un point A de la première figure (C) devront correspondre tous les cercles passant par le point correspondant A' de la seconde figure (C'): soumettons la première figure (C) à une inversion ayant pour pole A, ce qui donnera une figure (D), et de même la figure (C') à une inversion ayant pour pole A', ce qui donnera une figure (D'). Les deux figures (D), (D') étant telles qu'à une droite de l'une corresponde une droite de l'autre seront en correspondance homographique. Mais cette correspondance doit être telle qu'à un cercle corresponde un cercle et il est aisé de reconnaitre que cela ne peut avoir lieu que si les deux figures sont semblables.

En effet les points à l'infini de (D) ne peuvent avoir leurs homologues de (D') qu'à l'infini. Car soit m un point à l'infini de (D); si ce point avait pour homologue un point m' à distance finie, à tout cercle de (D') passant par m' devrait correspondre une courbe allant à l'infini, ce qui est impossible puisque l'homologue de ce cercle est un cercle. Donc les droites de l'infini se correspondent dans les deux figures. A un parallélogramme de la première figure correspond un parallélogramme de la seconde. Donc, comme le remarque *Möbius*, à un rectangle (parallélogramme inscrit dans un cercle) correspond un rectangle; à un angle droit, un angle droit; à un carré (rectangle à diagonales rectangulaires) correspond un carré.

D'après cela soit $ABCD$ un carré de (D) ayant pour homologue le carré $A'B'C'D'$ de (D'). On peut toujours amener ces deux carrés à la coïncidence en soumettant la figure (D') à une transformation homothétique et à un déplacement. Alors les deux figures homographiques ayant quatre points coïncidents seront superposables dans toute leur étendue.

Ainsi la transformation cyclique de *Möbius* peut toujours se réaliser au moyen d'une inversion [passage de (C') en (D')] suivie d'une transformation homothétique et d'un déplacement [passage de (D') en (D)] et enfin d'une autre inversion [passage de (D) en (C)]. On sait que toutes ces opérations peuvent toujours se ramener soit à une seule inversion, soit à une transformation homothétique, précédées ou suivies d'un déplacement.

Paris.