# Ueber Multiplicatorgleichungen*).

Von Felix Klein in München.

Hier meine Methode zur Aufstellung der Multiplicatorgleichungen. — Betrachtet man $\omega_1, \omega_2$ als homogene Veränderliche, so sind $g_2, g_3, \sqrt[12]{\Delta}$ resp. von den Geraden $-4$, $-6$, $-1$ und reproduciren sich bei jeder linearen ganzzahligen Substitution von der Determinante 1:

$$\begin{cases} \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \\ \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \end{cases}$$

sofern man bei $\sqrt[12]{\Delta}$ von einer zwölften Einheitswurzel absieht. Man kann nun zeigen, dass allgemein jede homogene Function von $\omega_1, \omega_2$ von einem negativen ganzen Grade, welche sich bis auf einen Factor bei den in Rede stehenden linearen Substitutionen reproducirt, eine *ganze* Function von $g_2, g_3, \sqrt[12]{\Delta}$ ist. — Die Sache ist genau so, wie bei den endlichen Systemen linearer Substitutionen, und man hat z. B. auch folgende Sätze: dass $g_2$ die in Bezug auf $\omega_1, \omega_2$ genommene Hesse'sche Form von $\log \Delta$ ist, und $g_3$ die Functionaldeterminante beider (immer abgesehen von einem numerischen Factor).

Sei nun $\Delta'$ die Discriminante, welche bei einer Transformation vom Primzahlgrade $n$ auftritt. So hat $\Delta'$ $(n+1)$ Werthe, also $\sqrt[12]{\Delta'}$ deren $12(n+1)$. Aber es zeigt sich, dass bereits die symmetrischen Functionen von nur $(n+1)$ richtig ausgewählten Werthen von $\sqrt[12]{\Delta'}$ unter die eben erwähnte Kategorie von Functionen fallen, also ganze Functionen von $g_2, g_3, \sqrt[12]{\Delta}$ sind. Setzt man, der Kürze halber, für $\sqrt[12]{\Delta'}$ $z$, so erhält man also eine Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades für $z$. Da $\sqrt[12]{\Delta'}$ von der Dimension $(-1)$ in $\omega_1, \omega_2$ ist, so hat der Coefficient von $z^{n+1-\varkappa}$ die Dimension $\varkappa$ und ist dementsprechend als ganze Function von $g_2, g_3, \sqrt[12]{\Delta}$ aufzubauen.

---

*) Aus einem an Herrn Brioschi gerichteten Briefe, der in den Rendiconti del Istituto Lombardo abgedruckt wurde (Sitzungsbericht vom 2. Januar 1879). — Der Ausdruck „Multiplicator" bezieht sich auf das durch $\sqrt[12]{\Delta}$ normirte Integral, siehe diese Annalen t. XIV, pag. 144, 148.

Jetzt betrachte man insbesondere den Werth:

$$\sqrt[12]{\Delta'}\cdot\left(\frac{\omega_2}{\pi}\right)=n\cdot q^{\frac{n}{6}}\cdot\Pi(1-q^{2n\nu})^2=z\cdot\left(\frac{\omega_2}{\pi}\right).$$

Vermehrt man $\omega=\frac{\omega_1}{\omega_2}$ um 1, so erhält dieses $z$ die Einheitswurzel $e^{\frac{ni\pi}{6}}$ zum Factor, während bei dem ursprünglichen $\sqrt[12]{\Delta}$ die Einheitswurzel $e^{\frac{i\pi}{6}}$ zutritt. Bei dieser Aenderung muss die für $z$ bestehende Gleichung ungeändert richtig bleiben; es muss sich also aus allen Gliedern derselbe Factor herausheben. Hieraus folgt, *dass der Coefficient von $z^{n+1-\varkappa}$ die Form hat: $\sqrt[12]{\Delta^\lambda}\,.\,G$, wo $\lambda$ die kleinste positive ganze Zahl ist, welche in Bezug auf den Modul 12 zu $n\varkappa$ congruent ist, und $G$ eine ganze Function von $g_2$, $g_3$ allein ist.* Insbesondere schliesst man: *So oft $\lambda$ grösser als $\varkappa$ wird, ist der Coefficient von $z^{n+1-\varkappa}$ identisch Null.*

Auf Grund dieser Sätze kann man die Multiplicatorgleichung für ein beliebiges primzahliges $n$ ohne Weiteres der Art nach anschreiben. Man findet, dass bei $n=12\mu+1$ nur $g_2{}^3$ und $g_3{}^2$ auftritt; bei $n=12\mu+5$ stellt sich das $g_2$ ein, bei $n=12\mu+7$ das $g_3$; bei $n=12\mu+11$ treten beide, $g_2$ und $g_3$, auf. Für $n=5, 7, 13$ stimmt dies Resultat mit meinen früheren Formeln überein*); für $n=11$ erhält man in Uebereinstimmung mit Ihren Angaben**):

$$z^{12}+a\cdot\Delta^{\frac{6}{12}}\cdot z^6+b\cdot\Delta^{\frac{4}{12}}g_2\cdot z^4+c\cdot\Delta^{\frac{3}{12}}g_3\cdot z^3+d\cdot\Delta^{\frac{2}{12}}g_2{}^2\cdot z^2$$
$$+e\cdot\Delta^{\frac{1}{12}}g_2g_3\cdot z+f=0,$$

wo $a, b, \cdots$ numerische Coefficienten sind.

Was nun diese numerischen Coefficienten angeht, so beweist man ohne Weiteres, dass der letzte den Werth $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot n$ hat, und dass alle anderen, bis auf den vorletzten, durch $n$ theilbar sind. Man hat ausserdem folgende Regeln, welche freilich gerade den Fall $n\equiv 11$ (mod. 12) nicht betreffen:

1) *Für $n=12\mu+1$ oder $=12\mu+5$.*

*Setzt man $g_3=0$, so verwandelt sich die linke Seite der Multiplicatorgleichung, nach Abtrennung eines quadratischen Factors, in ein vollständiges Quadrat.*

---

*) Annalen XIV, pag. 143, 148.

**) Brioschi in den Annali die Matematica, (Ser. II) t. IX, pag. 167: Sopra una classe di equazioni modulari. (Nov. 1878).

2) *Für* $n = 12\mu + 1$ *oder* $12\mu + 7$.

*Setzt man* $g_2 = 0$, *so verwandelt sich die linke Seite der Multiplicatorgleichung nach Unterdrückung eines quadratischen Factors in einen vollen Cubus.*

Man kann überdies die numerischen Coefficienten der Gleichungen, welche für $g_2 = 0$ oder $g_3 = 0$ entstehen, allemal als rationale Functionen von Einheitswurzeln a priori angeben; doch habe ich diesen Gegenstand noch nicht hinlänglich untersucht. Um die bei $n = 11$ auftretenden Zahlencoefficienten zu bestimmen, habe ich mich daher einstweilen der Reihenentwickelungen nach aufsteigenden Potenzen von $q$ bedient, und so das Resultat erhalten, welches ich Ihnen bereits in meinem vorigen Briefe*) mittheilte:

$$z^{12} - 90 \cdot 11 \cdot \sqrt[2]{\Delta} \cdot z^6 + 40 \cdot 11 \cdot 12 g_2 \cdot \sqrt[3]{\Delta} \cdot z^4 - 15 \cdot 11 \cdot 216\, g_3 \cdot \sqrt[4]{\Delta} \cdot z^3$$
$$+ 2 \cdot 11 \cdot (12 g_2)^2 \cdot \sqrt[6]{\Delta} \cdot z^2 - 12 g_2 \cdot 216 g_3 \cdot \sqrt[12]{\Delta} \cdot z - 11 = 0^{**)}.$$

*) Vom 25. December 1878.

**) Untersuchungen derselben Art, wie die im Texte besprochenen, hat mit mir ungefähr gleichzeitig Hr. Kiepert aufgenommen und in neuerer Zeit weitergeführt. Seine Resultate, auf welche ich hiermit verweisen will, sollen demnächst im Borchardt'schen Journale veröffentlicht werden [März 1879.]

München, den 30. December 1878.