Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen.

Von

M. Noether in Erlangen.

Der folgende Aufsatz*) ist eine Weiterentwicklung von Ideen und Schlüssen, die in dem gemeinsamen Aufsatze von Herrn Brill und mir, Math. Ann. VII, zuerst niedergelegt sind. Es handelt sich jetzt principiell um die Darstellung der algebraischen Functionen einer Variabeln *in invarianter Form*, d. h. in einer Form, welche durch rationale, eindeutig umkehrbare Substitutionen nicht mehr verändert wird. Dieses ist die Form, welche jeder allgemeineren Untersuchung über diese Functionen, insbesondere in der Theorie der Abel'schen Functionen, zu Grunde gelegt werden sollte.

Nun kennt man die Quotienten der „Functionen φ“ als solche mit invariantem Charakter, und durch sie ist jede algebraische Function der betreffenden Classe auszudrücken, einzig den hyperelliptischen Fall ausgenommen, den ich im Folgenden ausschliesse. Um die Dimensionen von Zähler und Nenner dieser Ausdrücke in den φ näher festzulegen, ist vor Allem *die Frage nach der Anzahl der Relationen irgend einer Ordnung zwischen den p linear von einander unabhängigen Functionen φ* zu behandeln. Ich weise diese Anzahl als *eine in allen Fällen gleichbleibende, nur vom Geschlecht p der Classe abhängige* nach.

Dagegen gehe ich auf die Frage nach der *Form* und gegenseitigen Abhängigkeit dieser Relationen, durch welche die *specielle* Classe bestimmt wird, hier nicht ein.

Auf die Frage nach der Anzahl der quadratischen Relationen zwischen den φ hat schon Herr Weber („Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Funct. auftretende Ausnahmefälle“, diese Ann. XIII) hingewiesen; diese Frage wurde dann von Herrn Kraus („Note über aussergewöhnliche Specialgruppen auf algebr. Curven“, diese Ann. XVI), der sich übrigens vorwiegend mit der *Form* dieser Relationen beschäftigt,

---

*) Ein Auszug aus demselben ist in den Ber. der Erlanger physik.-medic. Societät vom 10. Mai 1880 veröffentlicht.

weiter behandelt, aber noch nicht ganz erledigt, da, abgesehen von der nicht in allen Fällen gültig bleibenden Constantenzählung, noch zu zeigen ist, dass die quadratischen Functionen der φ nicht etwa blos einen *Theil* der dort allein behandelten Curven $2(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, mit $2(k-1)$-fachem Punkte in einem k-fachen Punkte der Grundcurve, bilden.

Die §§ 6.—8., in denen ich die Curven behandle, welche die Grundcurve in allen Schnittpunkten in der ersten Ordnung *berühren*, sind nur als *Beispiel* zu der entwickelten principiellen Auffassung anzusehen, durch welche man zu viel allgemeiner gültigen Resultaten in Bezug auf Systeme von Berührungscurven gelangt, als es durch Betrachtung etwa blos adjungirter Curven allein möglich ist. Die hier algebraisch abgeleiteten Sätze liefern erst eine feste Grundlage für die weiteren transcendenten Untersuchungen. Dass man diese algebraischen Entwicklungen übrigens noch fortsetzen und insbesondere auf in höherer Ordnung berührende Curven unmittelbar ausdehnen kann, ist sofort klar, und ich gedenke später hierauf zurückzukommen.

§ 1.

Invariante Form für die algebraischen Functionen.

Im Sinne der „algebraischen Function" wird eine algebraische Curve

$$f(s, z) = 0 \tag{1}$$

mit allen aus ihr durch rationale, eindeutig umkehrbare Substitutionen ableitbaren Curven als zu *einer* Classe gehörig betrachtet. Es stellt sich daher die Aufgabe, alle rationalen Functionen σ von s, z, zwischen welchen Grössen die Gleichung (1) besteht, d. h. alle zur Classe gehörigen algebraischen Functionen σ von z, in einer Darstellungsform auszudrücken, welche von der besonderen, erst aus der Classe ausgewählten Beziehung (1) unabhängig ist.

Für eine Gattung von Functionen ist eine solche Darstellungsform bekannt. Ich bezeichne nämlich als Functionen φ diejenigen ganzen Functionen $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung (wo n die Ordnung von $f(s, z)$) von s, z, welche $= 0$ gesetzt, f adjungirte Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung vorstellen, d. h. solche, welche jeden i-fachen Punkt von f zum $(i-1)$-fachen Punkt haben. Die Quotienten dieser Functionen φ haben den invarianten Charakter.*)

Jede rationale Function dieser Quotienten hat also ebenfalls schon die verlangte invariante Darstellungsform. Umgekehrt kann man leicht zeigen, dass jede rationale Function σ von s, z sich als rationale

*) Vergl. Brill und Noether, Ueber die algebraischen Functionen etc. Math. Ann. VII.

homogene Function 0^{ter} Dimension der φ darstellen lässt, einzig den Fall ausgenommen, dass $f(s, z) = 0$ eine „hyperelliptische" Curve bedeutet, d. h. eine solche Curve, auf welcher eine lineare Schaar von Punktepaaren existirt.

Denn nimmt man aus den Functionen φ die Gesammtheit derjenigen heraus, welche für ein beliebiges Werthsystem $s_0 z_0$, für welches $f(s_0, z_0) = 0$ ist, verschwinden, so werden diese Functionen nicht noch alle für ein und dasselbe weitere Werthsystem von f verschwinden, allein den hyperelliptischen Fall ausgenommen, wo dieses immer eintritt (vergl. d. o. cit. Arb. p. 286). Die Transformation

$$s' = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \qquad z' = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}$$

ist also, wenn $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ aus der Schaar der φ nicht in specieller Weise herausgewählt sind, eine rational umkehrbare. Und jede algebraische Function σ drückt sich somit als rationale Function von s', z', d. h. als rationale Function der Quotienten der φ aus.

Indem wir also im Folgenden überall den Fall des hyperelliptischen Charakters der betrachteten Classen ausschliessen, dagegen keinen weiteren im Uebrigen noch so speciellen Fall, denken wir uns alle algebraischen Functionen σ der Classe rational durch die Quotienten der φ dargestellt. Man hat alsdann nur noch mit Beziehungen zwischen diesen Quotienten der φ zu thun und kann von der speciellen Gleichungsform (1) vollständig absehen.

Stellt man alsdann σ, statt wie oben durch die Quotienten von dreien der φ, durch die Quotienten aller p Functionen φ, die linear von einander unabhängig sind, dar, so fragt es sich zunächst, bis zu welcher Dimension in den φ Zähler und Nenner eines solchen Ausdrucks für eine gegebene Function σ anzusteigen haben. Zur Beantwortung dieser Frage sind die aus den Producten der φ quadratisch, cubisch, etc. zusammensetzbaren Schaaren nach ihrer Mannigfaltigkeit der Reihe nach zu untersuchen. Dabei seien im Folgenden durchaus die p Functionen φ selbst mit $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$ bezeichnet; eine homogene ganze Function der φ von der Dimension μ mit

$$\Phi^{(\mu)}, \quad \Psi^{(\mu)}, \quad \Phi'^{(\mu)}, \; \cdots$$

§ 2.

Die Schaaren $\Phi^{(2)}$ und die quadratischen Relationen zwischen den Functionen φ.

Wir untersuchen zunächst die Mannigfaltigkeit der ganzen Schaar der $\Phi^{(2)}$.

Indem man zum Zwecke des Beweises irgend eine ebene Curve

(1) $$f(s, z) = 0,$$

welche zur betrachteten Functionsclasse vom Geschlechte p gehört, zu Grunde legt, nehme man auf f $p-2$ Punkte

$$a_1, a_2, \cdots, a_{p-2}$$

in völlig allgemeiner Lage an. Durch solche $p-2$ Punkte a_i wird dann nur eine einfach unendliche Schaar von φ-Curven hindurchgehen, die mit

(2) $$\varphi_1 + \lambda \varphi_2$$

bezeichnet sei; und keine weitere φ-Curve. Ferner wird diese Schaar dann nicht einen weiteren festen (von λ unabhängigen), nur von den a_i abhängigen Punkt auf f besitzen, da wir den hyperelliptischen Fall von f überall ausschliessen. Dies ist dann nur für $p > 3$ zu zeigen. Sei b ein solcher weiterer fester Punkt, und c ein ganz beliebiger weiterer Punkt von f; wenn nun der beliebige Punkt c nicht von selbst einen weiteren festen Punkt mitbestimmen soll (was der hyperelliptische Fall wäre), so müsste die Curve durch die p Punkte

$$a_1, \cdots, a_{p-2}, b, c$$

noch durch $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ von diesen abhängige weitere Punkte hindurchgehen, die auch alle von einander und von den p Punkten verschieden wären, da $p-1$ der p Punkte ganz willkürlich auf f lagen und jede Verbindung von c mit $p-3$ der ersten $p-1$ Punkte einen weiteren festen Punkt liefern soll. Aber da $p + \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ für $p > 4$ grösser wird, als die Anzahl $2p-2$ der Schnittpunkte von f mit einer Curve φ, so ist die Annahme, dass $p-2$ beliebige Punkte von f einen festen Punkt mitbestimmen, nicht zulässig.*)

Hiernach besteht der Restschnitt der Schaar $\varphi_1 + \lambda \varphi_2$ noch aus Gruppen von je p Punkten, die alle von λ abhängig (beweglich) sind, d. h. keine festen Punkte auf f gemein haben. Ferner geht durch *eine* solche Gruppe von p Punkten nach dem sogenannten Riemann'-Roch'schen Satze (Math. Ann. VII, p. 280) nur *eine* Curve φ, da durch die $p-2$ Punkte a_i nur eine einfach-unendliche Schaar von Curven φ geht.

Betrachten wir jetzt die Schaar

(3) $$\varphi_1 \Phi^{(1)} + \varphi_2 \Phi'^{(1)},$$

wo $\Phi^{(1)}$ und $\Phi'^{(1)}$ allgemeine lineare Functionen der φ sind. *In diesem Ausdruck* (3) *sind* $2p-1$ *willkürliche Constanten in linearer homogener Weise enthalten.* Denn zunächst enthält $\Phi^{(1)}$ p Constanten und eben-

*) Diese Ausführung ist auch beim Nachweis der Normalcurve $(p+1)$ter Ordnung (Math. Ann. VII, p. 287) hinzuzufügen.

soviele $\Phi'^{(1)}$, aber *ein* Glied von $\varphi_2\Phi'^{(1)}$, nämlich $\varphi_2\varphi_1$, kommt schon in $\varphi_1\Phi^{(1)}$ vor. Eine weitere lineare Relation zwischen den Gliedern von (3) kann aber nicht bestehen, auch nicht vermöge der Gleichung (1). Denn man hätte dann eine Identität

$$\varphi_1\Psi^{(1)} - \varphi_2\Psi'^{(1)} = A \cdot f,$$

wo $\Psi^{(1)}$ und $\Psi'^{(1)}$ bestimmte Functionen φ wären, verschieden von φ_2, φ_1; d. h. die Schaar (2), $\varphi_1 + \lambda\varphi_2$, hätte mit einer zweiten von dieser verschiedenen Schaar von Curven φ, $\Psi'^{(1)} + \lambda\Psi^{(1)}$, genau denselben beweglichen Schnitt gemein, was nach dem Obigen, wo gezeigt ist, dass durch einen solchen Schnitt nur *eine* Curve φ geht, unmöglich ist.

Sei weiter φ_3 eine beliebige φ-Curve, welche nur die Eigenschaft habe, durch keinen der oben angenommenen Punkte a_i von f hindurchzugehen. Wir betrachten dann die Schaar

$$\varphi_1\Phi^{(1)} + \varphi_2\Phi'^{(1)} + \varphi_3\Phi''^{(1)}, \tag{4}$$

wo auch $\Phi''^{(1)}$ eine lineare Function der φ mit p unbestimmten Parametern vorstellt. Der Theil

$$\varphi_3(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)$$

von $\varphi_3\Phi''^{(1)}$ kommt bereits in den beiden ersten Gliedern von (4) vor; der übrige Theil

$$\varphi_3(\alpha_3\varphi_3 + \alpha_4\varphi_4 + \cdots + \alpha_p\varphi_p)$$

von $\varphi_3\Phi''^{(1)}$ ist dagegen für keinen Werth der α schon in diesen beiden ersten Gliedern, d. h. der Schaar (3), enthalten, weil sonst dieser Theil, für die speciellen Werthe der α, wie (3) in den Punkten a_i von f verschwinden, also auch, da φ_3 in den a_i nicht verschwindet, ein Ausdruck $\alpha_3\varphi_3 + \alpha_4\varphi_4 + \cdots + \alpha_p\varphi_p$ für alle Punkte $a_i = 0$ sein müsste, während nach dem Obigen in diesen Punkten doch nur die Schaar (2), $\varphi_1 + \lambda\varphi_2$, verschwindet.

Hiernach enthält der Ausdruck (4) $3p - 3$ *willkürliche Parameter in linearer homogener Form;* nämlich in den beiden ersten Gliedern $2p - 1$, in dem letzten Gliede alsdann noch $p - 2$ weitere.

Nimmt man nun weiter zu (4) noch andere aus den φ quadratisch zusammengesetzte Glieder hinzu, so erhält man keine Glieder mehr, die nicht schon in dem Ausdruck (4) enthalten wären. Denn die Curvenschaar (4) gehört einer solchen linearen Schaar an, welche f in Gruppen von je $2(2p-2)$ Punkten trifft, und deren Mannigfaltigkeit ist immer (Math. Ann. VII, p. 278) genau eine $\infty^{2(2p-2)-p} = \infty^{3p-4}$-fache. *Die Curven der Schaar* (4), von derselben Mannigfaltigkeit, *stellen also schon die ganze* (4) *corresiduale Schaar dar, und diese sind also jedenfalls von der Form* $\Phi^{(2)}$.

Man kann das Letztere auch so ausdrücken:

Sei $\psi^{(2)}$ eine gegebene quadratische Function der φ; dieselbe verschwindet in $2(2p-2)$ Punkten, und die allgemeinste in diesen Punkten einfach unendlich werdende algebraische Function hat noch $3p-3$ Constanten in linearer homogener Weise. Zu diesen Functionen gehört aber

$$(5)\qquad \frac{\Phi^{(2)}}{\psi^{(2)}},$$

wo $\Phi^{(2)}$ die allgemeinste quadratische Function der φ ist, und insbesondere auch

$$(5')\qquad \frac{\varphi_1\Phi^{(1)}+\varphi_2\Phi'^{(1)}+\varphi_3\Phi''^{(1)}}{\psi^{(2)}};$$

und da die Letztere schon an sich die volle Anzahl der überhaupt auftretenden Parameter besitzt, so ist sie selbst schon die allgemeinste Function von der betrachteten Eigenschaft; um so mehr also auch (5).

Ohne die obigen Beweise war nur klar, dass (5) einen *Theil* der betrachteten Functionen ausmacht.

Will man eine Function darstellen, welche nur in einem *Theil* der $2(2p-2)$ Verschwindungspunkte von $\psi^{(2)}$ unendlich wird, so ist diese Function natürlich ebenfalls unter den (5) oder (5') enthalten.

Da man aus den p Functionen φ

$$\frac{1}{2}p(p+1)$$

Combinationen $\Phi^{(2)}$ bilden kann und unter diesen nur $3p-3$ von einander linear unabhängig sind, so hat man noch:

Die Anzahl der von einander unabhängigen Relationen 2^{ter} Ordnung zwischen den p Functionen φ beträgt genau

$$\frac{1}{2}p(p+1)-(3p-3)=\frac{1}{2}(p-2)(p-3),$$

einzig die hyperelliptischen Classen ausgenommen.

§ 3.

Die Schaaren $\Phi^{(3)}$ und die cubischen Relationen zwischen den φ.

Es werde nun ähnlich die Mannigfaltigkeit der Schaar $\Phi^{(3)}$ untersucht.

Man wähle hier zunächst aus der Schaar der φ zwei solche Curven, φ_1 und φ_2, aus, welche einen, und nur einen, gemeinsamen Schnittpunkt a mit f besitzen. Die Schaar

$$(1)\qquad \varphi_1+\lambda\varphi_2$$

trifft dann f in Gruppen G_{2p-3} von je $2p-3$ beweglichen Punkten, durch welche keine weitere φ-Curve geht. Legt man durch eine solche Gruppe

G'_{2p-3} alle Curven $\Psi^{(2)}$, so schneiden dieselben weiter noch in Gruppen Γ_{2p-1} von je $2p-1$ Punkten. Weil nun deren Mannigfaltigkeit $\infty^{(2p-1)-p}=\infty^{p-1}$ ist und weil diese Gruppen corresidual sind der von $\varphi_1\Phi^{(1)}$ ausgeschnittenen Punktgruppe Γ'_{2p-1}, wo φ_1 durch G'_{2p-3} geht und $\Phi^{(1)}$ *irgend* eine Curve φ ist, so folgt, dass die Gruppen Γ_{2p-1} alle selbst von den $\varphi_1\Phi^{(1)}$, welche ebenfalls die Mannigfaltigkeit ∞^{p-1} haben, aus f ausgeschnitten werden, und dass diese Gruppen alle aus dem festen Punkt a, verbunden mit den von den $\Phi^{(1)}$ ausgeschnittenen Gruppen von je $2p-2$ Punkten, bestehen. Man hat somit:

$$\Psi^{(2)}\equiv\varphi_1\Phi^{(1)}. \tag{2}$$

Wir betrachten nun den Ausdruck

$$\varphi_1\Phi^{(2)}+\varphi_2\Phi'^{(2)}, \tag{3}$$

wo $\Phi^{(2)}$ und $\Phi'^{(2)}$ allgemeine quadratische Functionen der φ sind. $\Phi^{(2)}$ enthält nach § 2. noch $3p-3$ Parameter linear und homogen, und ebenso viele $\Phi'^{(2)}$. Aber der Ausdruck (3) enthält höchstens $2(3p-3)-p=5p-6$ Parameter, da das Stück

$$\varphi_2\cdot\varphi_1\Phi^{(1)}$$

des zweiten Gliedes von (3) bei willkürlichem $\Phi^{(1)}$ schon im ersten Gliede von (3) enthalten ist. Man kann nun leicht zeigen, dass (3) auch genau $5p-6$ Constanten enthält. Denn eine Relation zwischen den Gliedern von (3) ist von der Form

$$\varphi_1\Psi'^{(2)}-\varphi_2\Psi^{(2)}=Af,$$

d. h. die Schaar

$$\Psi^{(2)}+\lambda\Psi'^{(2)}=0$$

schneidet aus f genau dieselben Gruppen von beweglichen Punkten aus, wie die Schaar

$$\varphi_1+\lambda\varphi_2=0.$$

Aber nach Formel (2) sind alsdann (vermöge $f=0$) $\Psi^{(2)}$ und $\Psi'^{(2)}$ von der Form:

$$\Psi^{(2)}\equiv\varphi_1\Phi^{(1)},\quad \Psi'^{(2)}\equiv\varphi_2\Phi^{(1)};$$

d. h. die oben bereits angegebene Reduction der Constantenzahl $2(3p-3)$ um p ist auch die einzige, welche stattfindet.

Sei weiter φ_3 eine beliebige φ-Curve, welche nur nicht durch den Punkt a von f hindurchgeht; $\Phi''^{(2)}$ eine solche quadratische Function der φ, welche ebenfalls für a nicht verschwindet. Dann ist

$$\varphi_3\cdot\Phi''^{(2)}$$

nicht im Ausdruck (3), der für a verschwindet, enthalten (auch vermöge $f=0$ nicht); und der Ausdruck

$$\varphi_1\Phi^{(2)}+\varphi_2\Phi'^{(2)}+\varphi_3\Phi''^{(2)} \tag{4}$$

enthält somit, wenn man $\Phi''^{(2)}$ allgemein annimmt, wenigstens

$$(5p-6)+1=5(p-1)$$

Parameter in homogener, linearer Weise; aber auch nicht mehr als $5(p-1)$ Parameter. Denn eine Function, die in $6(p-1)$ Punkten von f verschwindet, enthält überhaupt nicht mehr als $6(p-1)-p+1$ Constanten (homogen). *Die ganze Schaar der* (4) *corresidualen Curven ist also schon durch* (4) *selbst gegeben, also jedenfalls von der Form* $\Phi^{(3)}$.

Hieraus folgt weiter, *dass die Anzahl der von einander unabhängigen cubischen Relationen zwischen den p Functionen φ genau*

$$\frac{1}{6}p(p+1)(p+2)-5(p-1)$$

beträgt.

§ 4.

Die Schaaren $\Phi^{(\mu)}$ und die Relationen μ^{ter} Ordnung zwischen den φ.

Um nun allgemein für $\mu>3$ die Schaaren $\Phi^{(\mu)}$ zu untersuchen, setzen wir die Schaaren $\Phi^{(\mu-1)}$ schon als bekannt voraus. Sei nämlich $\Psi^{(\mu-1)}$ irgend eine solche Function $(\mu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der φ, so sollen *alle* Gruppen von je $2(\mu-1)(p-1)$ Punkten, welche der von $\Psi^{(\mu-1)}$ aus f ausgeschnittenen Gruppe corresidual sind, von der Schaar der $\Phi^{(\mu-1)}$ ausgeschnitten werden, sodass diese Schaar noch

$$2(\mu-1)(p-1)-p+1=(2\mu-3)(p-1)$$

Constanten in linearer homogener Weise enthalte.

Wir wählen hier, für $\mu>3$, zunächst aus der Schaar der φ solche zwei Functionen, φ_1 und φ_2, aus, welche keinen gemeinsamen Nullpunkt auf f besitzen. Die Schaar

$$(1)\qquad \varphi_1+\lambda\varphi_2$$

trifft dann f in Gruppen G_{2p-2} von je $2p-2$ beweglichen Punkten, durch welche keine weitere φ-Curve geht. Legt man durch eine solche Gruppe G'_{2p-2} alle Curven $\Psi^{(\mu-1)}$, so schneiden dieselben weiter noch in Gruppen $\Gamma_{2(\mu-2)(p-1)}$ von je $2(\mu-2)(p-1)$ beweglichen Punkten. Zu diesen Gruppen Γ gehören die von den Curven

$$(2)\qquad \varphi_1\Phi^{(\mu-2)}$$

ausgeschnittenen Gruppen, wo φ_1 durch G'_{2p-2} geht und $\Phi^{(\mu-2)}$ eine ganz beliebige Function $(\mu-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der φ ist; und da diese letzteren selbst schon (wegen $\mu>3$) eine $\infty^{(2\mu-5)(p-1)-1}$-Schaar bilden, wie die Gruppen $\Gamma_{2(\mu-2)(p-1)}$ überhaupt, so werden *alle* Gruppen Γ von den Curven (2) aus f ausgeschnitten. Man hat somit

$$(2')\qquad \Psi^{(\mu-1)}\equiv\varphi_1\Phi^{(\mu-2)}$$

Man bestrachte nun den Ausdruck

$$(3)\qquad \varphi_1\Phi^{(\mu-1)}+\varphi_2\Phi'^{(\mu-1)},$$

wo $\Phi^{(\mu-1)}$, $\Phi'^{(\mu-1)}$ möglichst allgemein genommene Functionen $(\mu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der φ sind In $\Phi^{(\mu-1)}$ sind $(2\mu-3)(p-1)$ Parameter homogen und linear enthalten und ebensoviele in $\Phi'^{(\mu-1)}$. Um sogleich alle linearen Relationen zwischen den Gliedern von (3) zu erhalten, beachte man, dass eine solche Relation durch Specialisirung der Parameter in $\Phi^{(\mu-1)}$ und $\Phi'^{(\mu-1)}$ erhalten wird, also von der Form ist:

$$\varphi_1 \Psi'^{(\mu-1)} - \varphi_2 \Psi^{(\mu-1)} = A \cdot f.$$

Dies sagt aus, dass die Schaar

$$\Psi^{(\mu-1)} + \lambda \Psi'^{(\mu-1)} = 0\,,$$

aus f genau dieselben Gruppen von beweglichen Punkten ausschneidet, wie die Schaar

$$\varphi_1 + \lambda \varphi_2 = 0.$$

Aber nach Formel (2) sind alsdann (vermöge $f=0$) $\Psi^{(\mu-1)}$ und $\Psi'^{(\mu-1)}$ von der Form:

$$\Psi^{(\mu-1)} = \varphi_1 \Phi^{(\mu-2)}\,, \qquad \Psi'^{(\mu-1)} = \varphi_2 \Phi^{(\mu-2)}\,;$$

d. h., die linearen Relationen, welche zwischen den Gliedern von (3) existiren, bestehen *nur* darin, dass im zweiten Gliede das Stück

$$\varphi_2 \cdot \varphi_1 \Phi^{(\mu-2)}$$

bei willkürlichem $\Phi^{(\mu-2)}$ schon im ersten Gliede von (3) enthalten ist. Da $\Phi^{(\mu-2)}$ für $\mu > 3$ dann noch $(2\mu-5)(p-1)$ Constanten homogen und linear enthält, so ergeben sich für den Ausdruck (3) genau:

$$2(2\mu-3)(p-1) - (2\mu-5)(p-1) = (2\mu-1)(p-1)$$

willkürliche Parameter, die homogen und linear eingehen.

Aber eine Curvenschaar, die in Gruppen von je $2\mu(p-1)$ Punkten trifft, kann für $\mu > 1$ überhaupt nur $2\mu(p-1)-(p-1) = (2\mu-1)(p-1)$ Parameter in der genannten Weise enthalten. *Daher besteht die ganze Schaar der (3) corresidualen Curven, die in Gruppen von je $2\mu(p-1)$ Punkten treffen soll, nur aus den Functionen $\Phi^{(\mu)}$ der Schaar (3) selbst; und insbesondere sind alle Functionen $\Phi^{(\mu)}$ unter den Functionen (3) enthalten.*

Anders ausgedrückt:

Sei $\Psi^{(\mu)}$ irgend eine gegebene Function μ^{ter} Ordnung der φ. Dieselbe verschwindet einfach in $2\mu(p-1)$ Punkten, und die allgemeinste algebr. Function, welche in diesen Punkten oder in irgend einem Theil derselben einfach unendlich wird, ist

$$\frac{\Phi^{(\mu)}}{\Psi^{(\mu)}}.$$

Dieselbe kann für $\mu > 3$ *auch schon in die Form gesetzt werden*

$$\frac{\varphi_1 \Phi^{(\mu-1)} + \varphi_2 \Phi'^{(\mu-1)}}{\psi^{(\mu)}},$$

wo φ_1 *und* φ_2 *fest gewählt werden können, wenn sie nur der Bedingung genügen, nicht einen gemeinsamen Nullpunkt zu besitzen.*

Da man die p Functionen φ auf

$$\frac{p(p+1)\cdots(p+\mu-1)}{1\cdot 2\cdots \mu}$$

Weisen zu $\Phi^{(\mu)}$ combiniren kann, von denen nur $(2\mu-1)(p-1)$ linear unabhängige existiren, so folgt noch:

Die Anzahl der von einander linear unabhängigen Relationen μ^{ter} *Ordnung* $(\mu > 1)$ *zwischen den* p *Functionen* φ *beträgt* (immer nur den hyperelliptischen Fall ausgenommen)

$$\frac{p(p+1)\cdots(p+\mu-1)}{1\cdot 2\cdots \mu} - (2\mu-1)(p-1).$$

§ 5.

Die Functionen $\Phi^{(\mu)}$ in einigen speciellen Fällen.

1. Legt man der algebraischen Classe eine solche ebene Curve n^{ter} Ordnung

$$f(s, z) = 0 \tag{1}$$

zu Grunde, bei welcher ein Geradenbüschel

$$A_1 + \lambda A_2 = 0$$

existirt, dessen Scheitel nicht auf f liegt und der in solchen Punktgruppen schneidet, die zugleich durch ein Büschel von Curven φ

$$\varphi_1 + \lambda \varphi_2 = 0$$

aus f ausgeschnitten werden, so hat man

$$A_1 \varphi_2 - A_2 \varphi_1 = 0, \tag{2}$$

wenn zugleich $f = 0$ ist. Aber da die linke Seite von (2) nur von der Ordnung $n-2$, so muss diese Gleichung identisch, ohne Hülfe von $f = 0$, bestehen, und man hat

$$\varphi_1 = A_1 \psi; \quad \varphi_2 = A_2 \psi,$$

wo $\psi = 0$ eine f adjungirte Curve $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung wird. In diesem Falle existiren also eine oder unendlich viele adjungirte Curven $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Transformirt man insbesondere eine Curve f der Classe durch die eindeutige Substitution

$$s' : z' : 1 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3,$$

wo die φ_1, φ_2, φ_3 beliebige Curven φ sind, die keinen Punkt auf f gemein haben, so geht $f = 0$ über in eine Normalcurve

$$(3) \qquad F = 0,$$

von der Ordnung $N = 2p - 2$, für welche alle Geraden der Ebenen in Gruppen treffen, die zugleich von Curven φ ausgeschnitten werden. In diesem Falle existirt also eine F adjungirte Curve $(N-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, Ψ, und zwar nur *eine*, weil sonst jede von ihnen, verbunden mit einer Geraden, *dieselben* $2p - 2$ Punkte aus F ausschneiden würde, was unmöglich. Ψ selbst trifft F ausser den singulären Punkten nicht mehr.

Für diese Curve F bestehen die $\Phi^{(\mu)}$ aus der Schaar der F adjungirten Curven $(N-4+\mu)^{ter}$ Ordnung, verbunden mit der festen Curve $(\Psi)^{\mu-1}$.

Denn diese Curven schneiden in Gruppen von je μN Punkten und zwar in *allen* Gruppen, die einer von ihnen corresidual sind; ein Theil von diesen Curven, nämlich die Curve $(\Psi)^{\mu}$, verbunden mit μ Geraden, gehört aber jedenfalls zu den $\Phi^{(\mu)}$; also vermöge $F = 0$ alle Curven, nach den allgemeinen Sätzen der §§ 2., 3., 4.

2. In Bezug auf die Normalcurve f von der Ordnung

$$\nu = p + 1$$

ordnen sich die adjungirten Curven $(\nu - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung ebenfalls den $\Phi^{(2)}$ unter; sie stellen aber solche $\Phi^{(2)}$ dar, welche noch für $p - 3$ beliebig *ausgezeichnete* Punkte von f verschwinden. Die adjungirten Curven $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind Curven $\Phi^{(3)}$, welche für diese $p - 3$ Punkte doppelt verschwinden; etc.

3. In Bezug auf irgend eine Curve f, von der Ordnung n und dem Geschlecht p, lässt sich nicht allgemein angeben, welchen Curven $\Phi^{(\mu)}$ die adjungirten Curven der Ordnungen $n - 2$, $n - 1$, $\cdots$ unterzuordnen sind. Diese sind immer solche Curven $\Phi^{(\mu)}$, welche durch gewisse specielle Punktsysteme gehen, die eben nur durch diese Eigenschaft der $\Phi^{(\mu)}$, aber nicht an der Curve f selbst, auf invariante Weise zu definiren sind. Bei allgemeinen Untersuchungen, die sich an die durch f definirte algebraische Classe knüpfen, ist es daher nothwendig, von der speciellen Form f abzusehen, und nur die Beziehungen zwischen den φ allein, oder, was im Wesentlichen damit identisch ist, die Normalform (3) oder die Normalform $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, zu betrachten.

4. Nur ein Theil dieser Betrachtungen lässt sich auch noch an f selbst durchführen. Es lässt sich nämlich der bewegliche Schnitt

von f mit denjenigen adjungirten Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, χ, welche durch $n-2$ feste Punkte von f gehen, die zugleich auf einer Geraden A liegen, direct in invarianter Weise auffassen. Dieser Schnitt besteht aus Gruppen von je $2p$ beweglichen Punkten; und darunter befinden sich auch die Gruppen, welche aus den beiden übrigen Schnittpunkten a_1, a_2 der Geraden A mit f und aus dem Schnitt f mit den adjungirten Curven φ bestehen. Transformirt man nun f in f', von der Ordnung n', so gehen diese letzteren Gruppen über in solche, die aus zwei Punkten a_1', a_2', verbunden mit den Schnittpunkten der zu f' gehörigen φ, bestehen; sämmtliche obige Gruppen von je $2p$ Punkten gehen also über in diejenigen, welche diesen letzteren Gruppen corresidual sind, d. h. in den Schnitt von f' mit den f' adjungirten Curven $(n'-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, χ', welche ausserdem durch die $n'-2$ festen Punkte von f' gehen, die noch auf der Geraden A' durch a_1', a_2' liegen.

Transformirt man so f in eine der Normalformen, so sieht man, dass die genannte Schaar der χ übergeht in die Schaar der Functionen $\Phi^{(2)}$, welche noch für $2p-4$ feste Punkte verschwinden, für welche zugleich eine Function φ verschwindet.

Dieses invariante Verhalten der Curven χ ist der Grund ihres Auftretens bei den Integralen dritter Gattung über algebraische Functionen.

5. Wir wollen am Schlusse dieses Paragraphen noch das Verhalten der Functionen $\Phi^{(\mu)}$ in dem bisher ausgeschlossenen Falle, bei den *hyperelliptischen* Functionsclassen, erwähnen. Diese Functionen $\Phi^{(\mu)}$ verschwinden alsdann in Gruppen von je $2\mu(p-1)$ Punkten, von denen aber jede Gruppe aus $\mu(p-1)$ *Punktepaaren* besteht; und dieselben bilden eine $\infty^{\mu(p-1)}$-Schaar. Die Anzahl der Relationen μ^{ter} Ordnung zwischen den p Functionen φ beträgt daher hier

$$\frac{p(p+1)\cdots(p+\mu-1)}{1\cdot 2\cdots\mu}-\mu(p-1)-1,$$

gültig für jedes μ.

§ 6.

Die in erster Ordnung berührenden Curven $X^{(\mu)}$.

Ich bezeichne im Folgenden mit

$$X^{(\mu)}$$

eine solche Function $\Phi^{(\mu)}$, also Function μ^{ter} Ordnung der φ, welche in $\mu(p-1)$ Punkten je in der zweiten Ordnung verschwindet, d. h. eine Curve $\Phi^{(\mu)}$, die f überall, wo sie f trifft, in der ersten Ordnung *berührt*, also in $\mu(p-1)$ Punkten. Ferner sage ich, dass zwei solche Berührungscurven, $X^{(\mu)}$ und $X^{(\nu)}$, *zum selben System gehören*, wenn eine Curve $\Phi^{\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}$ existirt, deren $(\mu+\nu)(p-1)$ Nullpunkte aus den $\mu(p-1)$ Berührungspunkten von $X^{(\mu)}$ und den $\nu(p-1)$ Berührungspunkten $X^{(\nu)}$ bestehen.

Schon diese Definition zeigt, *dass für zwei Berührungscurven* $X^{(\mu)}$ *und* $X^{(\nu)}$, *die zum selben System gehören,* $\frac{\mu+\nu}{2}$ *gerade, also beide Zahlen* μ *und* ν *gerade oder beide ungerade sein müssen.*

Um nun alle Berührungscurven zu erhalten, und nur diese, welche mit einer gegebenen solchen Curve $X^{(\mu)}$ zum selben System gehören, dient der folgende Satz:

I. *Legt man durch die Berührungspunkte einer* $X^{(\mu)}$ *irgend eine Curve* $\Phi^{(\varrho)}$, *so berührt in den übrigen Verschwindungspunkten der* $\Phi^{(\varrho)}$ *eine Berührungscurve* $X^{(2\varrho-\mu)}$, *welche also mit* $X^{(\mu)}$ *zum selben System gehört.*

Zum Beweise betrachte man die ganze Schaar der Curven $\Phi^{(2\varrho)}$, welche die $\mu(p-1)$ Berührungspunkte von $X^{(\mu)}$ ebenfalls zu Berührungspunkten haben. Diese Curven schneiden noch in beweglichen Gruppen von je $2(2\varrho-\mu)(p-1)$ Punkten, welche Gruppen aber auch von Curven $\Phi^{(2\varrho-\mu)}$ ausgeschnitten werden können. Denn unter diesen beweglichen Gruppen sind jedenfalls die von den Curven $\Phi^{(2\varrho-\mu)}$ ausgeschnittenen enthalten, welche also nach dem Satze des § 4. *alle* Gruppen bilden müssen. Insbesondere existirt unter diesen Gruppen die von der Curve $\Phi^{(\varrho)}\cdot\Phi^{(\varrho)}$ ausgeschnittene Gruppe; diese Gruppe besteht aber aus den weiteren $(2\varrho-\mu)(p-1)$ Verschwindungspunkten von $\Phi^{(\varrho)}$, für welche nicht $X^{(\mu)}=0$ wird, und zwar diese doppelt gerechnet; daher sind diese Punkte, doppeltgerechnet, auch die Verschwindungspunkte einer $\Phi^{(2\varrho-\mu)}$, d. h. die Berührungspunkte einer $X^{(2\varrho-\mu)}$, wie es der Satz aussagt.

Algebraisch ist dieser Beweis dasselbe, wie der Nachweis der Identität:

$$(\Phi^{(\varrho)})^2 = A\cdot f + B\cdot X^{(\mu)},$$

wenn man eine ebene Curve f der Classe zu Grunde legt; dabei wird dann B die gesuchte Function $X^{(2\varrho-\mu)}$; und die Identität wird für $f=0$:

$$(\Phi^{(\varrho)})^2 - X^{(\mu)}X^{(2\varrho-\mu)} = 0.$$

Insbesondere können wir die ganze Schaar der Berührungscurven $X^{(\nu)}$ betrachten, welche *gleiches* ν haben und zum selben System gehören. Da deren Berührungspunkte aus denen einer und derselben Curve $X^{(\mu)}$ dadurch abgeleitet werden, dass man durch die letzteren die ganze lineare Schaar der $\Phi^{\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}$ legt, so bilden jene, einfach genommen, eine *lineare* Schaar. Die Mannigfaltigkeit dieser Schaar ist

(Ann. VII, p. 278), da die Gruppen aus je $\nu(p-1)$ Punkten bestehen, im Allgemeinen eine $\infty^{\nu(p-1)-p}$-fache und wird *nur* und *immer* dann erhöht, wenn diese Gruppen zugleich von Curven φ ausgeschnitten werden. Dieser letztere Fall kann für $\nu > 2$ nicht eintreten. Für $\nu = 2$ können die Gruppen gerade aus sämmtlichen Verschwindungspunkten der φ bestehen, und dann hat man eine ∞^{p-1}-Schaar; die Schaar der $X^{(2)}$ lässt sich aber hier unmittelbar angeben: es ist die bei jeder Curve existirende Schaar $(\Phi^{(1)})^2$, d. h. die Schaar der Curven φ, jede doppelt gerechnet. Wir wollen dieses System $(\Phi^{(1)})^2$ als das *uneigentliche System* $X^{(2)}$ bezeichnen. Die aus diesem uneigentlichen System $(\Phi^{(1)})^2$ abgeleiteten Berührungscurven $X^{(2\varrho)}$ bestehen immer nur aus den doppelt zählenden Curven $\Phi^{(\varrho)}$, aber die Mannigfaltigkeit derselben erhöht sich nach dem Obigen für $\varrho > 1$ nicht. — Für $\nu = 1$ endlich berührt in der Gruppe von $p-1$ Punkten eine Curve φ, und zwar geht durch eine solche Gruppe im Allgemeinen nur eine einzige Curve φ, so dass diese Gruppe einer linearen Schaar von der Mannigfaltigkeit 0 angehört und mit keiner weiteren Gruppe von $p-1$ Punkten zum selben System gehört; im Speciellen aber kann durch eine solche Gruppe auch eine ganze Schaar von Curven φ gehen und dann gehört sie einer linearen ∞^{σ}-Schaar von je $p-1$ Punkten an, in denen je eine Curve $X^{(1)}$ desselben Systems berührt. Dabei kann aber σ höchstens $= \frac{p-2}{2}$, bez. $\frac{p-1}{2}$ sein; denn nimmt man irgend eine Gruppe von $p-1$ Punkten der ∞^{σ}-Schaar mit irgend einer zweiten zusammen, so erhält man $\infty^{2\sigma}$ verschiedene Gruppen von je $2p-2$ Punkten, durch welche auch $\infty^{2\sigma}$ von *einander verschiedene* Curven φ gehen müssen, und da es von diesen letzteren nur ∞^{p-1} giebt, kann 2σ höchstens $= p-1$ sein. Die obere Grenze von σ tritt übrigens ausser den einfachsten Fällen ($p = 4, 6$) nur im hyperelliptischen Falle auf.

Zusammenfassend haben wir so den Satz:

II. *Die Berührungspunkte aller $X^{(\nu)}$, welche gleiches ν haben und zum selben System gehören, bilden eine lineare Schaar von Gruppen von je $\nu(p-1)$ Punkten. Die Mannigfaltigkeit einer solchen Schaar ist für $\nu > 2$ immer $= \nu(p-1) - p$; für $\nu = 2$ bei einem System, dem uneigentlichen $(\Phi^{(1)})^2$, $= p-1$, bei den übrigen Systemen $= p-2$; für $\nu = 1$ im Allgemeinen $= 0$, in besonderen Fällen aber $= 1, 2, \cdots$, und höchstens $= \frac{p-1}{2}$, bez. $\frac{p-2}{2}$.*

Im Vorhergehenden sind alle zu *einem* System gehörigen Berührungscurven aus *einer* Curve des Systems, $X^{(\mu)}$, abgeleitet worden. Um nun diesen Systemsbegriff als in sich widerspruchsfrei zu erkennen, ist noch zu zeigen, dass man nur zu denselben Curven gelangt, wenn man sie aus irgend einer andern Curve des Systems ableitet.

Zu dem Zwecke bemerke man, dass die Gruppe $\Gamma_{(2\varrho-\mu)(p-1)}$ von $(2\varrho-\mu)(p-1)$ Punkten, in welchen eine $X^{(2\varrho-\mu)}$ berührt, zu der Gruppe $G_{\mu(p-1)}$ von $\mu(p-1)$ Punkten, aus welchen die erstere nach I. abgeleitet ist, *sowohl residual als corresidual* ist. Denn die beiden Gruppen sind einander residual, insofern, als sie zusammen die Verschwindungspunkte einer $\Phi^{(\varrho)}$ sind*); und corresidual, weil die Gruppe $G_{\mu(p-1)}$ zu sich selbst residual ist, indem sie, doppelt gerechnet, die Verschwindungspunkte der $X^{(\mu)}$ liefern. Ebenso ist irgend eine weitere Gruppe $\Gamma_{(2\sigma-\mu)(p-1)}$, die aus der $G_{\mu(p-1)}$ durch eine $\Phi^{(\sigma)}$ abgeleitet ist, dieser Ableitung nach zur Gruppe $\Gamma_{(2\varrho-\mu)(p-1)}$ corresidual, und ferner, da sie zu sich selbst residual ist, auch zur $\Gamma_{(2\varrho-\mu)(p-1)}$ residual; d. h. es existirt auch eine $\Phi^{\left(\sigma+\varrho-\frac{\mu+\nu}{2}\right)}$, welche durch diese beiden Gruppen hindurchgeht, w. z. b. w.

§ 7.

Beziehungen zwischen den Systemen der $X^{(\mu)}$.

Aus dem am Schlusse des § 6. entwickelten Begriffe ergiebt sich sogleich eine Reihe von Sätzen über den Zusammenhang der verschiedenen Systeme, von denen ich nur die wichtigsten hervorheben will:

III. *Gehören $X^{(\mu)}$ und $X^{(\nu)}$ demselben Systeme, $X^{(\lambda)}$ aber irgend einem weiteren System an, so gehören die beiden Berührungscurven $X^{(\lambda)}X^{(\mu)}$, $X^{(\lambda)}X^{(\nu)}$ ebenfalls einem und demselben Systeme an.*

Denn damit zwei Berührungscurven einem und demselben Systeme angehören, ist nur nöthig, dass die beiden Gruppen ihrer Berührungspunkte einander corresidual sind. Da dieses nun bei den beiden Gruppen, in welchen $X^{(\mu)}$ und $X^{(\nu)}$ berühren, der Fall sein soll, so findet dasselbe auch bei den Gruppen statt, in welchen $X^{(\lambda)}X^{(\mu)}$ und $X^{(\lambda)}X^{(\nu)}$ berühren; denn diese Gruppen unterscheiden sich von den früheren nur um eine *feste* Gruppe, in welcher $X^{(\lambda)}$ berührt.

Man sieht hieraus, dass, wenn man die Curven eines Systems

$$X^{(\mu)},\ X^{(\nu)},\ \ldots$$

mit den Curven eines zweiten Systems

$$X'^{(\mu)},\ X'^{(\nu)},\ \ldots$$

zu neuen Berührungscurven

---

*) Dieser Begriff des „Residualen" ist nicht genau derjenige, welcher in den Math. Ann. VII gegeben ist und welcher sich auf die Schnittpunkte blos „adjungirter" Curven bezieht. Aber die vorhergehenden Paragraphen haben gezeigt, dass der Restsatz auch für die Curven $\Phi^{(\varrho)}$ genau in derselben Form gilt, wie für die rein adjungirten Curven.

$$X^{(\mu)}X'^{(\mu)}, \quad X^{(\nu)}X'^{(\nu)}, \ldots$$

zusammensetzen will, man immer *dasselbe* System erhält, gleichgültig welche Curve des ersten Systems man an Stelle von $X^{(\mu)}$ nimmt, etc. Bildet man aus zwei Curven des ersten Systems allein die Curve

$$X^{(\mu)}X^{(\nu)},$$

so gehört dieselbe mit $(X^{\mu})^2$ zum selben System, also zum „uneigentlichen" System.

Man erhält indess schon alle überhaupt existirenden Systeme nach folgendem Satze:

IV. *Es giebt keine weiteren Systeme, als eine endliche Anzahl von Systemen der $X^{(3)}$ und eine endliche Anzahl von Systemen der $X^{(2)}$. Alle Berührungscurven $X^{(2\mu+1)}$ gehören mit Curven $X^{(3)}$, alle $X^{(2\mu)}$ mit Curven $X^{(2)}$ zu Systemen zusammen.*

Sei nämlich eine $X^{(2\mu+1)}$ gegeben. Diese Curve berührt in $(2\mu+1)(p-1)$ Punkten; aber durch diese Gruppe kann man immer eine $\Phi^{(\mu+2)}$ legen, da es eine $\infty^{2(\mu+2)(p-1)-p}$-Schaar dieser Curven giebt, durch die Gruppe also jedenfalls noch ∞^{2p-3} der $\Phi^{(\mu+2)}$ gehen. Eine solche Curve $\Phi^{(\mu+2)}$ verschwindet dann noch für $3(p-1)$ Punkte, in welchen eine $X^{(3)}$ berührt, die mit $X^{(2\mu+1)}$ zum selben System gehört.

Sei ferner eine $X^{(2\mu)}$ gegeben, die in einer Gruppe von $2\mu(p-1)$ Punkten berührt. Da es von den Curven $\Phi^{(\mu+1)}$ eine $\infty^{2(\mu+1)(p-1)-p}$-Schaar giebt, kann man durch diese Gruppe noch wenigstens ∞^{p-2} der $\Phi^{(\mu+1)}$ legen, und eine solche Curve verschwindet dann noch in $2(p-1)$ Punkten, in welchen eine $X^{(2)}$ berührt, die mit der $X^{(2\mu)}$ zum selben System gehört.

Nimmt man nun von den $3(p-1)$ Berührungspunkten einer $X^{(3)}$ $3(p-1)-p=2p-3$ derselben willkürlich, aber nicht speciell gelegen, an, so ist die $X^{(3)}$ auf eine *endliche* Anzahl von Weisen bestimmt, da es, wie wir in II. gesehen haben, genau ∞^{2p-3} solcher Gruppen von $3p-3$ Punkten giebt. Diese verschiedenen $X^{(3)}$, mit denselben $2p-3$ Berührungspunkten, gehören ebenso vielen verschiedenen Systemen an, da es nicht möglich ist, durch die Berührungspunkte zweier solcher $X^{(3)}$ eine $\Phi^{(3)}$ zu legen; und die sich so ergebenden Systeme von $X^{(3)}$ sind alle existirenden.

Diese Systeme der $X^{(3)}$ zerfallen nun weiter in zwei Hauptarten: je nachdem durch die $3(p-1)$ Berührungspunkte einer solcher $X^{(3)}$ eine $\Phi^{(2)}$ nicht geht, oder eine $\Phi^{(2)}$ hindurchgeht. Ich unterscheide dementsprechend die Systeme als solche *erster Art* und solche *zweiter Art.* Im zweiten Falle gehört die $X^{(3)}$ mit einer in $p-1$ Punkten berührenden $X^{(1)}$ zum selben System, und umgekehrt gehören nach IV. alle $X^{(1)}$ zu Systemen $X^{(3)}$. Da die Mannigfaltigkeit der Schaar der $X^{(1)}$, die zu *einem* Systeme gehören, auch eine unendliche sein kann, so kann man die Systeme der zweiten Art auch noch in *Unterarten* theilen, je nachdem die zugehörige Schaar der $X^{(1)}$ die Mannigfaltigkeit ∞^0, ∞^1, ∞^2, etc. hat. Die Anzahlen der verschiedenen Systeme in diesen Unterarten seien bez. mit $R^{(0)}$, $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, $\cdots$ bezeichnet; ebenso die Anzahl der Systeme erster Art mit R.

Wir bemerken dabei, dass nach der Theorie der Abel'schen Functionen die R, $R^{(1)}$, $R^{(3)}$, $\cdots$ Systeme zu *einer* Art zusammengegefasst werden, und die $R^{(0)}$, $R^{(2)}$, $R^{(4)}$, $\cdots$ Systeme zu einer zweiten Art (vgl. Weber, Math Ann. XIII).

Nimmt man ebenso von den $2(p-1)$ Berührungspunkten einer eigentlichen (nicht aus einer doppelt zählenden $\Phi^{(1)}$ bestehenden) $X^{(2)}$ $p-2$ derselben willkürlich und allgemein an, so ist auch die $X^{(2)}$ auf eine *endliche* Zahl von Weisen bestimmt, da es nach II. genau ∞^{p-2} solcher Gruppen von $2(p-1)$ Punkten giebt. Die verschiedenen $X^{(2)}$, mit denselben $p-2$ Berührungspunkten, gehören dann ebensovielen *verschiedenen* eigentlichen Systemen an, da eine $\Phi^{(2)}$, sobald sie durch die $p-2$ Punkte doppelt und durch die übrigen Berührungspunkte einer $X^{(2)}$ gehen soll, schon mit dieser $X^{(2)}$ identisch wird. Man erhält auf diese Weise *alle* eigentlichen Systeme von $X^{(2)}$.

Die Anzahl der sich so ergebenden eigentlichen Systeme von $X^{(2)}$ sei N.

Offenbar erhält man jedes dieser N Systeme auch durch Combinationen zu 2 von Systemen der $X^{(3)}$. Denn verbindet man eine $X^{(2)}$ z. B. mit irgend einer $X^{(1)}$, so bildet $X^{(2)} \cdot X^{(1)}$ eine $X^{(3)}$, und $X^{(2)}$ gehört zum selben System, wie die $X^{(1)} X^{(3)}$. Es genügt daher jedenfalls, die Systeme der $X^{(3)}$ zu kennen, um hieraus alle Systeme abzuleiten. — Da ferner ein Theil der N Systeme der $X^{(2)}$ schon durch Combination der $R^{(0)}$ Systeme der $X^{(3)}$, ein Theil durch Combination der $R^{(1)}$ Systeme der $X^{(3)}$, etc., sich ergeben wird, so zerfallen auch die N Systeme in *Unterarten.* Ebenso zerfallen auch die R Systeme *erster* Art der $X^{(3)}$ in Unterarten, je nachdem man ein solches System aus drei der $R^{(0)}$, bezüglich drei der $R^{(1)}$ etc. Systeme der $X^{(3)}$ combiniren kann.

Diese Betrachtungen seien nochmals in dem Satze zusammengefasst:

V. *Die Systeme $X^{(3)}$ zerfallen in zwei Arten: ein System der ersten Art besteht nur aus solchen Curven $X^{(3)}$, durch deren Berührungspunkte kein $\Phi^{(3)}$ geht; ein System der zweiten Art aus solchen, durch deren Berührungspunkte eine $\Phi^{(2)}$ gelegt werden kann. Zu einem System der zweiten Art gehört immer eine Berührungscurve $X^{(1)}$ oder eine Schaar solcher; und je nach der Mannigfaltigkeit dieser Schaar hat man wieder Unterarten der zweiten Art.*

Die Systeme der $X^{(2)}$ zerfallen ebenfalls in zwei Arten: die eine

Art enthält nur das eine uneigentliche System $(\Phi^{(1)})^2$ — *und die entsprechenden* $X^{(2\mu)}$ *sind identisch mit den Curven* $(X^{\mu})^2$ —; *die andere Art enthält alle übrigen, eigentlichen Systeme* $X^{(2)}$. *Alle Systeme lassen sich durch Combinationen von Systemen der* $X^{(3)}$ *ableiten.*

§ 8.

Specielle Fälle für die Berührungscurven $X^{(\mu)}$.

1. An Stelle der in der Theorie der Abel'schen Functionen von Clebsch und Gordan auftretenden Berührungscurven, bei denen ein Punkt der Grundcurve ausgezeichnet ist, sind nach der hier angenommenen Auffassung folgende Curven zu setzen:

Sei a_0 ein Punkt der Grundcurve und φ_0 eine Curve φ, die in a_0 berührt; diese Curve φ verschwindet dann noch für $2p-4$ weitere Punkte $a_1, a_2, \cdots, a_{2p-4}$. Man betrachte nun alle Berührungscurven $X^{(3)}$, welche in den Punkten $a_0, a_1, \cdots, a_{2p-4}$, sowie in p weiteren Punkten berühren. Dieselben bestehen aus der Curve φ_0, verbunden mit den $\Psi^{(2)}$, welche durch $a_1, a_2, \cdots, a_{2p-4}$ gehen und noch in p weiteren Punkten berühren:

$$X^{(3)} \equiv \varphi_0 \cdot \Psi^{(2)}.$$

Die beiden Arten von Systemen von $X^{(3)}$ drücken sich nun hier so aus: bei der *ersten* Art giebt es keine $\Phi^{(2)}$, welche durch die Punkte $a_0, a_1, \cdots, a_{2p-4}$, sowie die p Berührungspunkte der $\Psi^{(2)}$, hindurchgeht; d. h., da nach dem ersten Beweise im § 3. eine $\Phi^{(2)}$, die durch die Punkte $a_0, a_1, \cdots, a_{2p-4}$ der φ_0 hindurchgelegt ist, zugleich noch durch den letzten Verschwindungspunkt der φ_0, nämlich wiederum a_0, hindurchgehen müsste, während dann durch die übrigen $p-1$ Punkte immer eine φ ginge: bei der *ersten* Art fällt keiner der p Berührungspunkte der $\Psi^{(2)}$ in den Punkt a_0.

Bei der *zweiten* Art muss dagegen nothwendig einer der p Berührungspunkte der $\Psi^{(2)}$ in den Punkt a_0 fallen und diese Curve selbst besteht aus φ_0, verbunden mit irgend einer der in $p-1$ Punkten berührenden $X^{(1)}$:

$$X^{(3)} \equiv \varphi_0^2 \cdot X^{(1)}.$$

2. Eine Curve $\Psi^{(\mu)}$, welche in einer Anzahl von Punkten *einfach* verschwindet, in einer weiteren Anzahl von Punkten aber doppelt, d. h. in der ersten Ordnung berührt, lässt sich *für sich* auf keine Weise in eines der angegebenen Systeme von Berührungscurven einreihen; und man kann die Curven dieser Art nicht einmal nach analogen Systemen anordnen, so dass diese Anordnung einen invarianten Charakter erhält. Sobald man aber zwei Curven $\Psi^{(\mu)}$, $\Psi^{(\nu)}$ zusammennimmt, welche *in denselben einfachen Punkten verschwinden*, deren weitere *Berührungspunkte* aber verschieden sein können, erhält man

eine völlig bestimmte Zuordnung zu einem der in § 6., 7. angegebenen Systeme von $X^{(3)}$ oder der Systeme von $X^{(2)}$. In der That stellt eine solche Curve

$$\psi^{(\mu)} \cdot \psi^{(\nu)}$$

eine Berührungscurve $X^{(\mu+\nu)}$ vor, die eine bestimmte Zuordnung hat. Ist insbesondere $\nu = \mu$, so hat man in

$$\psi^{(\mu)}\,\psi'^{(\mu)},$$

wo $\psi^{(\mu)}$ und $\psi'^{(\mu)}$ die einfachen Verschwindungspunkte gemein haben, eine Curve $X^{(2\mu)}$, welche entweder einem der N Systeme von $X^{(2)}$ zugeordnet ist, oder speciell dem uneigentlichen Systeme, wenn sie sich in die Form setzen lässt

$$(\varphi^{(\mu)})^2.$$

In dasselbe System, wie $\psi^{(\mu)} \cdot \psi^{(\nu)}$ gehört auch die algebraische Function

$$\frac{\psi^{(\nu)}}{\psi^{(\mu)}},$$

die sich von der vorhergehenden nur um den Factor $(\psi^{(\mu)})^2$, welcher dem uneigentlichen System angehört, unterscheidet.

Ersetzt man nämlich die beiden Curven $\psi^{(\mu)}$ und $\psi^{(\nu)}$, welche die Verschwindungspunkte α gemein haben sollen, während $\psi^{(\mu)}$ ausserdem in den Punkten γ, $\psi^{(\nu)}$ in den Punkten δ berühre, nach dem Restsatze (diese Ann. VII, p. 271) durch die beiden Curven $\psi^{(\varrho)}$ und $\psi^{(\varrho+\nu-\mu)}$, welche die Verschwindungspunkte β gemein haben sollen, während $\psi^{(\varrho)}$ ausserdem noch in den Punkten γ, $\psi^{(\varrho+\nu-\mu)}$ in den Punkten δ berühre, so hat man

$$\psi^{(\nu)}\,\psi^{(\varrho)} - \psi^{(\mu)}\,\psi^{(\varrho+\nu-\mu)} = 0,$$

und die beiden Functionen

$$\frac{\psi^{(\nu)}}{\psi^{(\mu)}} \quad \text{und} \quad \frac{\psi^{(\varrho+\nu-\mu)}}{\psi^{(\varrho)}}$$

sind ganz identisch. Aber die beiden Berührungscurven

$$\psi^{(\mu)} \cdot \psi^{(\nu)} \quad \text{und} \quad \psi^{(\varrho)} \cdot \psi^{(\varrho+\nu-\mu)}$$

gehören zum selben System, weil durch ihre Berührungspunkte eine $\varphi^{(\nu+\varrho)}$ geht, nämlich die Curve $\psi^{(\nu)} \cdot \psi^{(\varrho)}$, d. h. weil

$$[\psi^{(\mu)} \cdot \psi^{(\nu)}] \cdot [\psi^{(\varrho)} \cdot \psi^{(\varrho+\nu-\mu)}] - [\psi^{(\nu)} \cdot \psi^{(\varrho)}]^2 = 0.$$

3. Die in § 6. zur Definition von Systemen von Berührungscurven $X^{(\mu)}$ angegebenen Operationen lassen sich auch direct auf blos *adjungirte* Curven (Math. Ann. VII) anwenden. Man erhält dann ebenfalls Beziehungen zwischen Schaaren von solchen berührenden adjungirten Curven. Aber einmal wird der Ausdruck dieser Be-

ziehungen dann von einem nicht invarianten Elemente, der Ordnung der Grundcurve, abhängig; sodann kann man auch nicht allgemein angeben, ob sich diese Curven zu reinen Berührungscurven $X^{(\mu)}$ ergänzen lassen und somit ihre Zuordnung zu den Systemen der §§ 6., 7. gegeben ist, oder ob dieselben nur zu den Curven $\Psi^{(\mu)}$ in (2) § 8. gehören. Das Erstere wird nur für die adj. Curven der Ordnung $n-3+2\sigma$ immer stattfinden, wie nachher gezeigt wird, sowie in speciellen Fällen, z. B. wenn die Grundcurve von der Form (3), § 5.

Sei hier f die Grundcurve n^{ter} Ordnung, $\Psi_{(r)}\,X_{(r)}$ etc. adjungirte Curven r^{ter} Ordnung.

Die Curve $X_{(r)}$ möge nun $f=0$ in allen Punkten α, wo sie f trifft, in der ersten Ordnung berühren, die singulären Punkte von f ausgenommen, wo $X_{(r)}$ blos adjungirt ist. Damit dieses überhaupt möglich ist, muss $n\cdot r$ gerade sein. Legt man durch die Punkte α eine adjungirte Curve $\Psi_{(s)}$, so hat man nach dem Restsatze, vermöge $f=0$:

$$\Psi_{(s)}^2 - X_{(r)}\,X_{(2s-r)} = 0, \tag{1}$$

wo auch $X_{(2s-r)}$ eine adjungirte Curve wird. Ferner zeigt diese Relation, dass $X_{(2s-r)}$ in den weiteren Schnittpunkten β von $\Psi_{(s)}$ mit f die Grundcurve f berührt. *Wenn* man also $X_{(r)}$ einem bestimmten System von Berührungscurven zugeordnet hatte, so wird man auch $X_{(2s-r)}$ demselben System zuzuordnen haben, und man hat, dem Satze I., § 6. analog:

Legt man durch die Berührungspunkte einer adjungirten $X_{(r)}$ irgend eine adjungirte $X_{(s)}$, so berührt in den übrigen Verschwindungspunkten der $X_{(s)}$ eine adj. $X_{(2s-r)}$, vom selben System, dem $X_{(r)}$ eventuell zugeordnet war. Für zwei solche Curven ist also jedenfalls die Summe der Ordnungen gerade. Die Gruppen von Berührungspunkten derjenigen Curven $X_{(r)}$, welche gleiches r haben und zum selben System gehören, bilden die ganze corresiduale lineare Schaar, die zugleich irgend einer Gruppe dieser Schaar residual ist.

Ich betrachte nun speciell eine adjungirte Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, $X_{(n-1)}$; welche f in $n+p-1$ Punkten α berühre. Sei F eine Curve der Ordnung $\mu(n-3)-1$, welche jeden i-fachen Punkt der Grundcurve f zum $\mu(i-1)$-fachen Punkt besitze; Curven, die immer existiren, wenn man nur μ genügend gross nimmt. Dann stellt die Curve

$$(F)^2\cdot X_{(n-1)} \tag{2}$$

eine Curve $X^{(2\mu+1)}$ (§ 6.) vor, welche in den Punkten α und in den Schnittpunkten von F mit f berührt. Diese Curve (2) hat eine ganz bestimmte Zuordnung zu einem der Systeme der §§ 6., 7., welche auch dadurch nicht geändert wird, dass man die Curve F beliebig variirt; denn setzt man

(3) $$(F'^2) \cdot X_{(n-1)}$$

an Stelle von (2), so geht durch die Berührungspunkte von (2) und (3) die $\Phi^{(\mu)}$-Curve $F \cdot F' \cdot X_{\nu-1}$.

Gehören nun nach Formel (1) dieser Nummer, für $r = n - 1$, $s = n + \sigma - 1$

$$X_{(n-1)} \text{ und } X_{(n-1+2\sigma)}$$

zum selben System, so gehören auch

$$(F)^2 \cdot X_{(n-1)} \text{ und } (G)^2 \cdot X_{(n-1+2\sigma)}$$

nach § 6. zum selben System, wo G eine adj. Curve der Ordnung $\nu(n-3) - (\sigma + 1)$, welche jeden i-fachen Punkt von f zum $\nu(i-1)$-fachen Punkt hat; denn aus (1) folgt sogleich auch:

$$[F \cdot G \cdot \Psi_{(n+\sigma-1)}]^2 - [(F)^2 \cdot X_{(n-1)}] \cdot [(G)^2 \cdot X_{(n-1+2\sigma)}] = 0.$$

Daher hat man die adjungirten Berührungscurven $X_{(n-1)}$, allgemeiner die adjungirten Berührungscurven $X_{(n-1+2\sigma)}$, ganz bestimmten, in § 6. und § 7. bezeichneten Systemen von Berührungscurven $X^{(2\mu+1)}$ oder $X^{(3)}$, zuzuordnen, nämlich $X_{(n-1+2\sigma)}$ demselben System, welchem die oben bezeichnete Curve $(G)^2 \cdot X_{(n-1+2\sigma)}$ angehört.

Den Systemen $X^{(2)}$ ist das Product oder der Quotient aus zweien solchen adjungirten $X_{(n-1+2\sigma)}$, $X_{(n-1+2\tau}$ zuzuordnen.

4. Der letzte Theil des vorigen Satzes führt dazu, noch weitere specielle Curvenschaaren anzugeben, welche den Systemen $X^{(2)}$ der §§ 6., 7. zuzuordnen sind. Sei

$$K_{2(n-3)+2\sigma}$$

eine Curve der Ordnung $2(n-3) + 2\sigma$, welche jeden i-fachen Punkt a der Grundcurve f (n^{ter} Ordnung) zum i-fachen Punkte besitzt, jeden der i Zweige von f in a noch in $i - 2$ *weiteren* Punkten trifft (also z. B. in a einen $2(i-1)$-fachen Punkt hat), und f in allen weiteren Schnittpunkten in der ersten Ordnung *berührt.* Für diese Curven kann man dann eine der Formel (1) von Nr. 3. dieses Paragraphen analoge Formel und folglich einen analogen Satz, wie den ersten dieser Nr. 3., ableiten. — Wenn dann H eine Curve der Ordnung $(\mu - 1)(n-3) - \sigma$ bedeutet, welche jeden i-fachen Punkt a von f zum $(\mu - 1)(i-1)$-fachen Punkt hat, so erhält man in

$$(H)^2 \cdot K_{2(n-3+\sigma)}$$

eine Curve $X^{(2\mu)}$, welche einem bestimmten System der $X^{(2)}$ angehört, und diesem selben System kann man schon die Curve $K_{2(n-3+\sigma)}$ allein zuordnen.

Das am Schlusse der Nr. 3. angegebene Product $X_{(n-1+2\sigma)} \cdot X_{(n-1+2\tau)}$ ist ein specieller Fall der Curve K. Sobald überhaupt K in das Product zweier adjungirter Curven $L \cdot M$ zerlegbar ist, welche ihre *einfachen* Schnittpunkte mit f gemeinsam haben müssen, die Berührungspunkte dagegen verschieden haben können, gehört auch $\frac{M}{L}$ in dasselbe System, wie K selbst.

Unter die in 3. und 4. dieses Paragraphen angegebenen speciellen Fälle der $X^{(\mu)}$ sind alle bisher behandelten Schaaren von in erster Ordnung berührenden Curven zu subsumiren, und dieselben sind daher nach den hier gegebenen Principien in die Systeme einzuordnen.

Mannheim, im August 1880.