Zur Theorie der Flächentransformationen.

Von

A. V. Bäcklund in Lund.

Jede Transformation, die eine jede Fläche in eine bestimmte Fläche und umgekehrt die letztere Fläche wiederum nur in die erstere verwandelt, ist eine gewöhnliche (Lie'sche) Berührungstransformation. In meiner Abhandlung im IX. Bande dieser Annalen habe ich dies bewiesen. Eine gewisse Classe von Transformationen, die von einer Fläche zu unendlich vielen Flächenschaaren führen, habe ich in dem XI. und XIII. Bande dieser Annalen besprochen, nämlich die Classe, die aus denjenigen Flächentransformationen besteht, die durch je drei Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned} X &= F(z, x, y, p, q, \cdots), \\ Y &= F_1(\qquad\qquad\qquad), \\ Z &= F_2(\qquad\qquad\qquad) \end{aligned}$$

begründet sind. Jede Transformation, die zu dieser Classe gehört, ist dadurch ausgezeichnet, dass sie eine jede Fläche des Gebietes (xyz) in nur eine Fläche in (XYZ), dagegen eine Fläche des letzteren Gebietes in unendlich viele Flächen des anderen umformt. Später, im XVII. Bande dieser Annalen, habe ich solche Transformationen erörtert, die eine jede Fläche jedes der Gebiete (xyz), (XYZ) in partielle Differentialgleichungen 1. O. umformen. Dieselben sind durch je drei Gleichungen:

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} F_1(z, x, y, p, q, Z, X, Y, P, Q) = 0, \\ F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ F_3(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{cases}$$

gegeben. Unter ihnen sind gewisse von den nächstvorher genannten Transformationen enthalten, die ich besonders umständlich im XI. Bande dieser Annalen behandelt habe (Bd. XVII d. A., p. 308). Transformationen, die durch mehr als drei Gleichungen zwischen z, x, y, p, q, Z, X, Y, P, Q bestimmt werden, werden im Allgemeinen keine Flächentransformationen für die ganzen Gebiete (xyz), (XYZ). Ist die Anzahl der die Transformation bestimmenden Gleichungen vier, so existiren jedoch weit umfassende Flächenschaaren, für welche die Transformation eine Flächentransformation wird (Bd. XVII d. A., p. 313). Eine specielle Transformation dieser Art ist die durch die vier Gleichungen:

$$X = x, \quad Y = y,$$
$$f(Z, z, x, y, p, q, P, Q) = 0, \quad \varphi(Z, z, x, y, p, q, P, Q) = 0$$

ausgedrückte. Die Aufgabe, diejenigen Flächen zu bestimmen, die von dieser Transformation wiederum in Flächen verwandelt werden, ist mit der Aufgabe äquivalent, die Lösungen

$$z = F(x, y), \quad p = F'(x), \quad q = F'(y),$$
$$Z = \Phi(x, y), \quad P = \Phi'(x), \quad Q = \Phi'(y)$$

von $f = 0$, $\varphi = 0$ zu bestimmen. Auf die Erledigung dieser Aufgabe bezogen sich die Erörterungen der 5. und 6. Nr. meiner Abhandlung im XVII. Bande dieser Annalen. Ich gehe hier wieder auf die Charakterisirung dieser Flächenschaaren ein und betrachte so auch einige Specialfälle der Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$.

In dem Bezirke, in dem eine durch vier Gleichungen zwischen $z, x, y, p, q, Z, X, Y, P, Q$ bestimmte Transformation eine Flächentransformation wird, ist sie im Allgemeinen eine eindeutige Flächentransformation. Aber es giebt Fälle, in denen sie unendlich-deutig wird, entweder in der Art, dass sie eine jede Fläche eines der Gebiete (xyz), (XYZ) des fraglichen Bezirkes in eine bestimmte Fläche des anderen, jede Fläche dieses letzteren Gebietes in unendlich viele des ersteren verwandelt, oder in der Art, dass sie jede Fläche jedes der Gebiete in unendlich viele Flächen umformt. Auf eine Transformation dieses letzten Charakters hat Lie in einer Abhandlung über die Flächen von constanter Krümmung (im Archiv für Mathematik und Naturwissenschaft, Bd. 5, Christiania 1880) aufmerksam gemacht. Er war auf dieselbe geführt worden durch das Studium einer neuerdings von Bianchi gegebenen Methode, um aus einer gegebenen Fläche von constanter Krümmung neue derartige Flächen zu erzeugen. Ich habe versucht, im Anschlusse an meine allgemeineren Sätze, am Ende der vorliegenden Abhandlung Einiges dieser von Bianchi und Lie herrührenden Theorie kurz auseinanderzusetzen.

Der dritte Paragraph beschäftigt sich mit einigen speciellen Flächentransformationen von der Gattung (α).

§ 1.

Verschiedenes über die durch zwei Gleichungen zwischen z, z', x, y und den ersten Derivirten von z, z' in Bezug auf x, y analytisch definirte Figur.

1. Zwei Flächenelemente, die z, x, y, p, q bez. z', x, y, p', q' zu Parametern haben, sollen, falls die Parameterwerthe $(z', z, x, y, p, q, p', q')$ die beiden Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} f(z, z', x, y, p, q, p', q') = 0, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{cases}$$

befriedigen, zwei sich entsprechende Elemente dieses Gleichungssystemes heissen. Zu zwei beliebig gewählten, sich entsprechenden Elementen des Systems können unendlich viele Flächenelemente hinzugefügt werden, die jenen unendlich benachbart sind, mit ihnen bez. vereinigt liegen und überdies einander entsprechende Elemente des Systems (1) bilden. Wenn nämlich (z, x, y, p, q), (z', x, y, p', q') die Parameter der zwei ersten Elemente sind, und für $dz, dz', dp, dq, dp', dq'$ irgend welche Werthe, die den Gleichungen:

$$(a) \quad dz = p dx + q dy, \quad dz' = p' dx + q' dy, \quad df = 0, \quad d\varphi = 0$$

genügen, gesetzt werden, so werden $(z + dz, x + dx, \cdots, q + dq)$, $(z' + dz', x + dx, \cdots, q' + dq')$ eben Parameter zweier Elemente der genannten Art. Zu jedem solchen Inbegriffe von zwei sich entsprechenden Paaren von vereinigt liegenden Elementen gehört weiter ein und im Allgemeinen nur *ein* Werthsystem von (r, s, t, r', s', t'), das zu gleicher Zeit einer Lösung: $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$ von (1) als Werthsystem der zweiten Derivirten von F und Φ zugehört. Es ist dieses Werthsystem dasjenige, welches die folgenden sechs Gleichungen befriedigt:

$$(b) \quad \begin{cases} dp = r dx + s dy, & dp' = r' dx + s' dy, & [f\varphi]_{zxp} = 0, \\ dq = s dx + t dy, & dq' = s' dx + t' dy, & [f\varphi]_{z'xp'} = 0, \end{cases}$$

von denen die zwei letzten die Bedingungen dafür liefern, dass jene Werthe von r, s, t, r', s', t' überhaupt einer Lösung von (1) zukommen. Hieraus ist aber zu schliessen, *dass man durch irgend zwei Streifen, deren Flächenelemente einander entsprechende Elemente des Systems* (1) *bilden, immer ein und im Allgemeinen nur ein Flächenpaar:* $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$ *hindurchlegen kann, das eine Lösung von* (1) *darstellt.*

Die Uebereinstimmung dieses Satzes mit dem Satze S. 291 meiner Abhandlung im XVII. Bande dieser Annalen ist offenbar. Es heisst dort, dass durch jeden Streifen von Elementen $(z'xyp'q')$ eine einfach unendliche Schaar von Integralen: $z' = \Phi(x, y)$ geht. Nun giebt es, wie aus (1) und den Gleichungen (a) einleuchtet, einfach unendlich viele Streifen von solchen Elementen $(zxypq)$, die den Elementen $(z'xyp'q')$ eines gegebenen Streifens entsprechen. Nach dem eben Auseinandergesetzten muss ein jeder jener ∞^1 Streifen im Verein mit dem gegebenen ein Flächenpaar: $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$ bestimmen, das eine Lösung von (1) bildet. Also kommt zu dem gegebenen Streifen von Elementen $(z'xyp'q')$ im Ganzen eine einfach unendliche Schaar von durch denselben hindurchgehenden Integralflächen: $z' = \Phi(x, y)$, — wie vormals von mir am citirten Orte angemerkt war.

Wir können das hier Entwickelte auch so formuliren: *Durch irgend ein Curvenpaar, das durch drei Gleichungen $z = f(x)$, $z' = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ darzustellen ist, geht ein ganz bestimmtes Flächenpaar, das eine Lösung von* (1) *bildet.* Die Gleichungen (1) bestimmen nämlich zusammen mit den zwei ersten der Gleichungen (a) die Parameter p, q, p', q' von einander entsprechenden Flächenelementen, welche, sich an die beiden Curven anschliessend, Streifen bilden, die nach dem Vorangehenden die Flächen des fraglichen Paares unzweideutig bestimmen.

Oder, wenn wir z, z', x, y als Coordinaten der Punkte eines Raumes R_4 (von vier Dimensionen) auffassen (d. A. Bd. XVII, p. 289), können wir sagen: *Durch jede M_1^0 geht eine ganz bestimmte Integral-M_2^0 von* (1).

2. Es giebt aber einander entsprechende Paare von vereinigt liegenden Elementen von (1), zu denen unendlich viele Werthsysteme von (r, s, t, r', s', t') im obigen Sinne zugeordnet werden. Die zwei Elemente $(zxypq)$, $(z'xyp'q')$ der beiden Paare sind sogar ganz beliebig aus den Elementen von (1) auszuwählen. Man kann nämlich die Verhältnisse dx, dy, dp, dq so bestimmen, dass der Büschel von (r, s, t), der ausgedrückt ist durch die zwei ersten unter einander stehenden Gleichungen (b), der Gleichung $[f\varphi]_{z'xp'} = 0$ gänzlich zugehört, und dass zu gleicher Zeit der Büschel von (r', s', t'), der die beiden nächsten unter einander stehenden Gleichungen (b) befriedigt, — diese Gleichungen auf das dem Elemente $(z + dz \cdots q + dq)$ entsprechende Element $(z' + dz' \cdots q' + dq')$ angewandt, — in der Gleichung $[f\varphi]_{zxp} = 0$ ganz enthalten ist. Für $\frac{dy}{dx}$ muss zu dem Ende die folgende quadratische Gleichung gelten:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{\partial f}{\partial p'}\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial p'}\right) - \frac{dy}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial p'}\frac{\partial \varphi}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial q'}\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q'} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial p'}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial q'}\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial q'}\right) = 0, \tag{2}$$

und zwischen $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$ muss eine Gleichung bestehen, die aus $[f\varphi]_{z'xp'} = 0$ durch Elimination von r, s, t vermittelst (b) und unter Berücksichtigung der zuletzt aufgeschriebenen Gleichung (2) für $\frac{dy}{dx}$ hervorgeht.

Ein jedes dieser ∞^1 möglichen Werthsysteme von $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$ bestimmt zusammen mit einem Werthe von $\frac{dy}{dx}$ aus (2) ein Flächenelement $(z+dz,\ x+dx, \cdots, q+dq)$, das mit dem Elemente $(zxypq)$ ein Paar bildet, welches in Verein mit seinem entsprechenden Paare auf die in der vorigen Nummer angegebene Weise ∞^1 Werthsysteme von $(r,\ s,\ t,\ r',\ s',\ t')$ bestimmt.

Wir sehen somit, *dass es auf jedem Flächenpaare:* $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$, *das eine Lösung von* (1) *bildet, zwei Schaaren von einander entsprechenden Streifenpaaren giebt, längs derer dieses Flächenpaar unendlich viele andere Flächenpaare berührt, die ebenfalls Lösungen von* (1) *bilden.**)

S. 290, 291, Bd. XVII d. A. habe ich gezeigt, dass die Flächen $z' = \Phi(xy)$ [oder $z = F(x, y)$], welche die einen Theile der Lösungen von (1) bilden, zwei linearen partiellen Differentialgleichungen 3. O., deren erste Derivirte sich auf nur drei Gleichungen reduciren, als Integrale genügen. Die Integralflächen solcher Paare von partiellen Differentialgleichungen 3. O. sind aus je zwei Schaaren von Charakteristiken zusammengesetzt (d. A. Bd. XIII, pag. 91—94). Diejenigen der eben genannten Berührungsstreifen, die auf der Fläche $z' = \Phi(x, y)$ [oder $z = F(x, y)$] liegen, bilden eben die Charakteristiken jenes Paares von Gleichungen 3. O. Die Charakteristiken dieses zu (1) gehörigen Gleichungspaares werden aber überdies Streifen, längs derer für die Integralflächen Berührung schon von der 1. O. möglich ist.

Fassen wir z, z', x, y als Punktcoordinaten in R_4 auf, so haben wir aus dem jetzt Entwickelten zu schliessen, *dass auf jeder Integral-*M_2^0 *von* (1) *zwei Schaaren von* M_1^0 *verlaufen, längs derer jene* M_2^0 *von unendlich vielen anderen Integral-*M_2^0 *desselben Gleichungspaares* (1) *berührt wird.* Diese M_1^0 mit ihren Büscheln von je ∞^1 Tangenten-

*) Wenn $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$; $z = F^{(1)}(x, y)$, $z' = \Phi^{(1)}(x, y)$ zwei solche sich berührende Paare bilden, und überdies die beiden Flächen $z = F(x, y)$, $z = F^{(1)}(x, y)$ sich nach ihrer Berührungscurve osculiren, so müssen auch die zwei Flächen $z = \Phi(x, y)$, $z' = \Phi^{(1)}(x, y)$ nach ihrer Berührungscurve sich osculiren. Denn einem Werthe von (r, s, t), der der Gleichung $[f\varphi]_{z'xp'} = 0$ genügt, entspricht ein einziger Werth von (r', s', t') vermittelst dreier der Gleichungen: die ersten Derivirten von f und φ in (1) in Bezug auf x, y gleich Null.

ebenen nenne ich kurz Charakteristikenstreifen*) oder kürzer sie sowohl als die M_1^0 selbst Charakteristiken von (1). *Durch eine Charakteristik kann man nicht, wie durch jede andere M_1^0, blos eine, sondern ∞^∞ Integral-M_2^0 von* (1) *legen.*

Die Charakteristiken sind die einzigen M_1^0 von dieser Eigenschaft.

3. S. 296, Bd. XVII d. A. habe ich bewiesen, dass die allgemeinste Gleichung $x - \chi(y, p, q, p', q') = 0$, die mit (1) ∞^3 Integral-M_2^0 gemein hat, durch eine lineare partielle Differentialgleichung 2. O. definirt ist. Hieraus folgt, dass es eine und im Allgemeinen nur *eine* Gleichung: $x - \chi(y, p, q, p', q') = 0$ giebt, die erstens von allen denjenigen Werthsystemen von (x, y, p, q, p', q'), die durch irgend zwei (zu $f = 0$, $\varphi = 0$ hinzugefügte) Gleichungen zwischen diesen Grössen ausgeschieden werden, befriedigt wird, und zweitens für diese selben Werthsysteme einer beliebigen linearen Relation zwischen den Differentialquotienten von x (oder χ) genügt. Man kann zu diesem Satze auf einem anderen Wege gelangen, den ich hier angeben will. Aus ihm kann man sodann rückwärts schliessen, dass die Gleichung für χ eine partielle Differentialgleichung 2. O. sein muss.

Wir haben erstens, wenn wir die Gleichungen (10) in Bd. XVII d. A. p. 291:

$$[f\varphi]_{zxp} = 0, \quad [\varphi\psi]_{zxp} = 0, \quad [\psi f]_{zxp} = 0$$

für die ∞^4 hier besonders in Frage gestellten Werthsysteme von $(z, z', x, y, p, q, p', q')$ anwenden wollen, für die Verhältnisse der Differentialquotienten von ψ gewisse Werthe einzuführen, die in folgender Weise zu bestimmen sind. ψ ist die Function $x - \chi(y, p, q, p', q')$, frei von z, z', welche Grössen wir uns überall vermittelst der Gleichungen (1) herauseliminirt denken. Schreiben wir die beiden zu (1) beliebig hinzugefügten Gleichungen in x, y, p, q, p', q' unter der Form:

$$x - F(p, q, p', q') = 0, \quad y - \Phi(p, q, p', q') = 0,$$

so haben wir die fraglichen Werthe von

$$-\frac{\partial\psi}{\partial y} : \frac{\partial\psi}{\partial x}, \ldots, -\frac{\partial\psi}{\partial q'} : \frac{\partial\psi}{\partial x},$$

d. i.

$$\frac{\partial x}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial q'}$$

eindeutig bestimmt durch die supponirte lineare Relation zwischen diesen Differentialquotienten und durch die folgenden Gleichungen (d. A. Bd. XIII, p. 413):

$$F'(p) - \frac{\partial x}{\partial y}\Phi'(p) - \frac{\partial x}{\partial p} = 0, \ldots, F'(q') - \frac{\partial x}{\partial y}\Phi'(q') - \frac{\partial x}{\partial q'} = 0.$$

---

*) Zwei unendlich benachbarte M_1^0 begründen einen Streifen auf jeder durch dieselben gelegten M_2^0.

Aus jenen Gleichungen (10) d. A., Bd. XVII, kommen wir nachher für ein jedes der in Rede stehenden Werthsysteme von $(z, z', x, y, p, q, p', q')$ zu einem bestimmten Werthsysteme von (r', s', t'), und hernach aus den ersten Derivirten von $f = 0$, $\varphi = 0$ zu einem ebenfalls ganz bestimmten Werthsysteme von (r, s, t).

Die durch

$$pdx + qdy = dz, \;\cdots,\; rdx + sdy = dp, \;\cdots,\; s'dy + t'dx = dq'$$

dargestellten Werthe der Differentiale von z, z', p, q, p', q' befriedigen von selbst, auf Grund der obigen Gleichungen (10) d. A., Bd. XVII, die Gleichungen $df = 0$, $d\varphi = 0$, $d\psi = 0$. Wegen der durch die Gleichungen $F'(p) - \frac{\partial x}{\partial y}\Phi'(p) - \frac{\partial x}{\partial p} = 0$, etc., gegebenen Ausdrücke für $\frac{\partial x}{\partial p}$ etc., d. i. $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ etc. geben die zwei Gleichungen:

$$d(x - F) = 0, \quad d(y - \Phi) = 0$$

nur eine neue Gleichung ab. Diese Gleichung, die wir bestehen lassen, giebt für $\frac{dy}{dx}$ einen bestimmten Werth in $z, z', x, y, p, q, p', q'$. Entsprechend diesem Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und den daraus folgenden Werthen von $\frac{dp}{dx}\left(= r + s\frac{dy}{dx}\right), \cdots, \frac{dq'}{dx}\left(= s' + t'\frac{dy}{dx}\right)$ werden die ∞^4 Elemente $(zz'xy\,pqp'q')$, welche die Gleichungen erfüllen:

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad x = F, \quad y = \Phi,$$

zu ∞^3 völlig bestimmten M_1^0 zusammengeordnet. Eine jede dieser M_1^0 bestimmt nach der 1. Nr. eine für $f = 0$, $\varphi = 0$ gemeinsame Integral-M_2^0, die auch Integral einer Gleichung $\psi (= x - \chi) = 0$ der oben genannten Eigenschaft wird. So haben wir im Ganzen ∞^3 M_2^0, die den Gleichungen (1) genügen und eine gewisse Gleichung $\psi = x - \chi = 0$ von der oben angezeigten Eigenschaft so bestimmen, dass sie auch ihr als Integrale zugehören. Daher ist, wie kurz vorher gesagt, die Gleichung $\psi = 0$ durch die genannten Bedingungen vollständig bestimmt.

4. Gleichungen $\psi \equiv x - \chi(y, p, q, p', q') = 0$ dieses Charakters bilden eben die Gesammtheit aller Integrale einer partiellen Differentialgleichung 2. O. Im Bd. XVII d. A. habe ich erklärt, wie man diese Gleichung aufzustellen hat, und ausserdem die Existenz von intermediären Integralen, jedes ausgedrückt durch zwei involutorische partielle Differentialgleichungen 1. O., nachgewiesen. In dieser Nr. behandle ich den Fall eines ersten Integrals, ausgedrückt durch eine partielle Differentialgleichung 1. O. $\Omega = 0$, dieser linearen partiellen Differentialgleichung 2. O. für ψ.

Betrachten wir zunächst eine einfach unendliche Schaar von Lösungen $\psi(x, y, p, q, p', q', \lambda) = 0$*) der partiellen Differentialgleichung 1. O. $\Omega = 0$. Ihr Umhüllungsgebilde heisse $\Psi = 0$. Diese Gleichung ist auch eine Lösung von $\Omega = 0$, und hat daher, wie eine jede Lösung dieser Gleichung, ∞^3 Integral-M_2^0 gemeinsam mit (1). Auf irgend einer M_2^0, die (1) und der Gleichung $\psi^0 \equiv \psi(x, y, p, q, p' q', \lambda^0) = 0$ als Integral genügt, wird durch die Gleichung $\psi^{(1)} \equiv \psi^0 + d\lambda\,\psi'(\lambda^0) = 0$ ein Streifen ausgeschieden. Derselbe gehört auch der Gleichung $\Psi = 0$ zu, weil diese die Gleichungen $\psi(\lambda) = 0$ umhüllt. Es sind für die Elemente**) des Streifens

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial \Psi}{\partial q'},$$

bez. proportional

$$\frac{\partial \psi^0}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi^0}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial \psi^0}{\partial q'}.$$

Daher werden durch $\Psi = 0$ in Verein mit (1) bestimmte Werthsysteme von (r, s, t, r', s', t') den Elementen des Streifens zugeordnet, und zwar dieselben wie durch $\psi^0 = 0$ in Verein mit (1). Folglich muss durch den genannten Streifen eine für (1) und für $\Psi = 0$ (d. A. Bd. XVII, Nr. 6., 7.) gemeinsame Integral-M_2^0 sich hindurchlegen lassen. Dies muss eine andere M_2^0 sein als die vorhin betrachtete, weil sonst $\Psi = 0$ dieselben ∞^3 Integral-M_2^0 gemeinsam mit (1) haben würde als $\psi^0 = 0$. Indem wir eine andere Schaar von ∞^1 Lösungen $\psi = 0$, welche die nämlichen zwei Gleichungen $\psi^0 = 0$, $\psi^{(1)} = 0$ enthalten, herausnehmen, finden wir eine andere Lösung $\Psi' = 0$ als Umhüllungsgebilde der Letzteren. So finden wir auch eine neue, eine dritte Integral-M_2^0 von (1), — nämlich eine für (1) und $\Psi' = 0$ gemeinsame Integral-M_2^0, — die durch den betrachteten Streifen hindurchgeht. In dieser Weise erkennen wir, dass durch jenen Streifen ∞^∞ Integral-M_2^0 von (1) hindurchgehen, *und der Streifen ist somit* (*Nr.* 2.) *eine Charakteristik von* (1)***).

---

*) Die Grössen z, z' sollen vermittelst (1) herauseliminirt gedacht werden.

**) Ich bezeichne kurz die M_2^0-Elemente $(zz'xypqp'q')$ (d. A. Bd. XVII, p. 287), die an eine M_1^0 sich anschliessen, als Elemente eines an diese M_1^0 sich schliessenden Streifens.

***) Weiter sehen wir Folgendes. Weil der nun betrachtete Streifen eine Charakteristik von (1) ist, so müssen die ersten Derivirten von (1) befriedigt werden von ∞^1 der Werthsysteme von (r, s, t, r', s', t'), die durch die Gleichungen des Streifens: $dp = r\,dx + s\,dy$, $dq = s\,dx + t\,dy$, $dp' = r'\,dx + s'\,dy$, $dq' = s'\,dx + t'\,dy$ den Elementen desselben zugeordnet werden, nämlich von dem durch die zwei ersten Gleichungen bestimmten Büschel von (r, s, t), vereint mit den, den einzelnen Werthsystemen (r, s, t) dieses Büschels, eindeutig, vermittelst der Derivirten der Gleichungen (1), die auf Grund von $[f\varphi]_{z'xp'} = 0$ auf drei von einander unabhängige Gleichungen sich reduciren, entsprechenden

Eine vollständige Lösung von $\Omega = 0$ hat fünf arbiträre Constanten. Sie ist also von der Form:

$$\psi(x, y, p, q, p', q', \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_5) = 0,$$

und kann insbesondere linear in Bezug auf die λ sein, wenn $\Omega = 0$ eine lineare partielle Differentialgleichung 1. O. ist. Ich betrachte jetzt eine in der hingeschriebenen vollständigen Lösung enthaltene Gleichung: $\psi(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \cdots, \lambda_5^0) = 0$, nebst allen ∞^3 ihr unendlich benachbarten Gleichungen derselben Schaar, die ein und dasselbe Element $(xypqp'q')$ enthalten:

$$\text{(c)} \qquad \psi(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \cdots, \lambda_5^0) + d\lambda_1 \psi'(\lambda_1^0) + d\lambda_2 \psi'(\lambda_2^0) + \cdots + d\lambda_5 \psi'(\lambda_5^0) = 0,$$

und daneben eine Integral-M_2^0 von (1) und von $\psi(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \cdots, \lambda_5^0) = 0$, die ebenfalls dasselbe Element $(xypqp'q')$ besitzt. Nach dem eben Auseinandergesetzten muss ein jeder Schnitt zwischen dieser Integral-M_2^0 und irgend einer Gleichung (c) eine Charakteristik von (1) bilden. Vom Elemente $(zz'xypqp'q')$ gehen nur zwei Streifen aus, die auf der Integral-M_2^0 verlaufen und den Gleichungen (1) als Charakteristiken zugehören. (Nr. 2.) Sämmtliche Gleichungen (c) müssen dieselbe Charakteristik ergeben; denn, wenn zwei dieser Gleichungen, etwa:

$$\begin{aligned} &\psi(\lambda_1^0, \cdots, \lambda_5^0) + d\lambda_1^0 \psi'(\lambda_1^0) + \cdots + d\lambda_5^0 \psi'(\lambda_5^0) = 0, \\ &\psi(\qquad\qquad) + d\lambda_1' \psi'(\quad) + \cdots + d\lambda_5' \psi'(\quad) = 0, \end{aligned}$$

verschiedene Charakteristiken lieferten, so müsste die Gleichung:

$$\psi(\lambda_1^0, \cdots, \lambda_5^0) + \frac{d\lambda_1^0 + \mu d\lambda_1'}{1+\mu} \psi'(\lambda_1^0) + \cdots + \frac{d\lambda_5^0 + \mu d\lambda_5'}{1+\mu} \psi'(\lambda_5^0) = 0$$

einen dritten derartigen Streifen ergeben, und also würden von $(zz'xypqp'q')$, — den ∞^1 Werthen von μ entsprechend, — ∞^1 Streifen

---

Werthsystemen von (r', s', t'). Die Elemente $(zz'xypqp'q')$ des Streifens gehören der Gleichung $\psi^{(1)} = 0$ zu, und es genügt daher, eine der Gleichungen

$$\frac{d\psi^{(1)}}{dx} = 0, \quad \frac{d\psi^{(1)}}{dy} = 0,$$

— in denen für r', s', t' ihre eben erwähnten, durch die ersten Derivirten von (1) gelieferten Werthe in r, s, t eingeführt werden, — anzuwenden, um ein Werthsystem von (r, s, t, r', s', t') zu erhalten, das den Gleichungen (1) und $\psi^{(1)} = 0$ gleichzeitig genügt. Aber dann muss nach Nr. 6., 7. d. A., Bd. XVII eine Integral-M_2^0 von (1) und $\psi^{(1)} = 0$ sich durch jenen Streifen hindurchlegen lassen. Indem wir in gleicher Weise mit den anderen Gleichungen der ersten (beliebig herausgewählten) einfach unendlichen Schaar von Lösungen

$$\psi(x, y, p, q, p', q', \lambda) = 0$$

verfahren, schliessen wir, dass die oben erwähnte Integral-M_2^0 von $\Psi = 0$ ein osculatorisches Umhüllungsgebilde von ∞^1 Integral-M_2^0 der ∞^1 von $\Psi = 0$ umhüllten Lösungen $\psi(\lambda) = 0$ bilden müsste.

ausgehen, die sämmtlich auf derselben Integral-M_2^0 verliefen und Charakteristiken von (1) wären, was für ein beliebiges Element $(zz'xypqp'q')$ von (1) unmöglich ist*). Also schliesslich: durch die Gleichungen:

$$\psi(\lambda_1^0, \cdots, \lambda_5^0) = 0, \quad \psi'(\lambda_1^0)d\lambda_1 + \psi'(\lambda_2^0)d\lambda_2 + \cdots + \psi'(\lambda_5^0)\,d\lambda_5 = 0,$$

wo drei der Verhältnisse $\frac{d\lambda_1}{d\lambda_5}$, $\frac{d\lambda_2}{d\lambda_5}$, $\frac{d\lambda_3}{d\lambda_5}$, $\frac{d\lambda_4}{d\lambda_5}$ arbiträr sind, wird eine und dieselbe Charakteristik von (1) ausgedrückt. Oder, da die genannten Gleichungen eine Charakteristik von $\Omega = 0$ definiren, *die Charakteristiken von $\Omega = 0$ werden jetzt Charakteristiken von* (1).

Hieraus folgt weiter, dass vom Elemente $(zz'xypqp'q')$ von (1) nur *eine* für $\Omega = 0$ charakteristische Reihe von Elementen $(zz'xypqp'q')$ ausgeht. Denn, betrachten wir irgend ein Integral $\psi^0 = 0$ von $\Omega = 0$, eine Integral-M_2^0 von (1) und von $\psi^0 = 0$ und irgend einen Streifen dieser Integral-M_2^0, der keine Charakteristik von (1) bildet. Durch diesen Streifen können wir ∞^∞ andere Lösungen $\psi' = 0$ von $\Omega = 0$ legen. Der Schnitt zwischen jener M_2^0 und irgend einer zu $\psi^0 = 0$ unendlich benachbarten der Lösungen $\psi' = 0$ muss, nach dem Vorangehenden, ganz aus Charakteristiken von (1) und von $\Omega = 0$ bestehen. In demselben Schnitte ist auch der genannte Streifen einbegriffen. Er ist aber kein charakteristischer Streifen für das Gleichungssystem (1). Darum müssen alle die durch die Elemente $(zz'xypqp'q')$ des Streifens hindurchgehenden Charakteristiken von $\Omega = 0$, die auf der M_2^0 liegen, der letztgenannten Gleichung $\psi' = 0$ und sonach allen jenen Gleichungen $\psi' = 0$ zu gleicher Zeit zugehören. Wir betrachten weiter irgend ein Element $(zz'xypqp'q')$ des Streifens, und eine Lösung $\psi'' = 0$, die dieses Element, aber keine anderen Elemente des Streifens enthält, und die zu $\psi^0 = 0$ unendlich benachbart ist. Auch $\psi'' = 0$ muss die von $(zz'xypqp'q')$ ausgehende Charakteristik von $\Omega = 0$, die auf der M_2^0 verläuft, enthalten. Durch jene Charakteristik von ($\Omega = 0$ und) (1) geht eine Integral-M_2^0 von (1) und von $\psi'' = 0$**). Indem wir von dieser M_2^0 in derselben Weise räsonniren wie von der vorigen, sehen wir, dass alle Lösungen $\psi = 0$ von $\Omega = 0$, die das nämliche Element $(zz'xypqp'q')$ besitzen, eine und dieselbe Charakteristik von (1) und $\Omega = 0$ gemeinsam enthalten. *Wir finden also zu jedem Elemente $(zz'xypqp'q')$ von (1) nur eine einzige Reihe von Elementen $(zz'xypqp'q')$, die eine für* [(1) *und*] *$\Omega = 0$ charakteristische Reihe wird.*

---

*) Ich sehe nämlich von den Fällen ab, wo in den Gleichungen (1) $f = F(z, z', x, y, \varphi)$ ist, oder wo in den beiden Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ zu gleicher Zeit p, q oder p', q' fehlen.

**) Siehe den Anfang der dritten Note dieser Nummer.

Ich habe von dem Falle absehen können, dass durch das Element $(zz'xypqp'q')$ unendlich viele Integral-$M_2{}^0$ von (1) und von $\psi^0 = 0$ hindurchgehen. Denn dies kann nicht für ein beliebiges Element von (1) und ein beliebiges Integral $\psi^0 = 0$ von $\Omega = 0$ eintreffen. Diejenigen Gleichungen $\psi = 0$ nämlich, die zu einem besonderen Systeme (1) in einer solchen Beziehung stehen würden, dass zu jedem Elemente $(zz'xypqp'q')$ von (1) und von $\psi = 0$ ∞^1 Werthe von r, s, t zugehören, werden *wenigstens zwei* partielle Differentialgleichungen 1. O. befriedigen.

Wenn aber die von irgend einem Elemente $(zz'xypqp'q')$ von (1) ausgehenden charakteristischen Streifen von $\Omega = 0$ an eine und dieselbe einfache Reihe von Elementen $(zz'xypqp'q')$ sich anschliessen, die also bestimmt ist durch fünf Gleichungen zwischen

$$z, z', x, y, p, q, p', q' : \psi = C, \quad \psi' = C', \cdots, \psi^{IV} = C^{IV},$$

so ist jene Gleichung $\Omega = 0$ *eine lineare partielle Differentialgleichung* 1. *O.* Alsdann kann man durch eine beliebige vierfach unendliche Mannigfaltigkeit, dargestellt durch (1) und durch

$$F(z, z', x, y, p, q, p', q') = 0, \quad \Phi(z, z', x, y, p, q, p', q') = 0,$$

ein ganz bestimmtes Integral: Funct. $(\psi, \psi', \cdots, \psi^{IV}) = 0$ von $\Omega = 0$ legen. Gelten nun für die vom Elemente $(zz'xypqp'q')$ ausgehende, für (1) und für $\Omega = 0$ gemeinsame Charakteristik die Gleichungen: $r + ms = \mu$, $s + mt = \nu$, $r' = as + b$, $s' = a's + b'$, $t' = a''s + b''$, so haben wir, indem wir für r, s, t, r', s', t' diese Werthe und für $dz, dz', dp, \cdots, dq'$ die Werthe: $dz = p\,dx + q\,dy$, $dz' = p'\,dx + q'\,dy$, $dp = r\,dx + s\,dy$, $\cdots$, $dq' = s'\,dx + t'\,dy$ in die Gleichungen $dF = 0$, $d\Phi = 0$ einführen, ganz bestimmte Werthe von $r, s, \cdots, t'$, $dy : dx$. Die Differentiale von (1) sind, wegen der obigen Werthe von $r, s, \cdots, t'$, von selbst erfüllt. Mit Anwendung der jetzt erhaltenen Werthe von $r, s, \cdots, t'$, $dy : dx$ bestimmt man zu jedem Elemente $(zz'xypqp'q')$ unserer vierfachen Mannigfaltigkeit: (1) und $F = 0$, $\Phi = 0$, einen gewissen Integralstreifen von (1), dessen sämmtliche Elemente der genannten vierfachen Mannigfaltigkeit zugehören. So dass diese vierfache Mannigfaltigkeit in eine völlig bestimmte Schaar von ∞^3 Integralstreifen von (1) sich zerlegen lässt. Die ∞^3 Integral-$M_2{}^0$ von (1), die nach der 1. Nr. durch diese Streifen hindurchgehen, befriedigen auch die Gleichung: Funct. $(\psi, \psi', \cdots, \psi^{IV}) = 0$, von der vorausgesetzt war, dass sie ein Integral von $\Omega = 0$ ist, und sie sind alle von Charakteristiken von $\Omega = 0$ erzeugt.

Wir erkennen an einem Beispiele die Möglichkeit eines solchen, *durch eine lineare partielle Differentialgleichung* 1. *O. ausgedrückten*, ersten Integrals der partiellen Differentialgleichung 2. O. für ψ. Eine partielle Differentialgleichung 2. O. in R_3 von der Form:

$$F(x, y, p, q, r, s, t) = 0$$

ist ein specieller Fall eines Gleichungssystems (1) (d. A., Bd. XVII, Nr. 32). Wenn sie zu einer Gleichung 3. O. in einer solchen Beziehung steht, dass zu jedem Elemente $(xypqrst)$ der Gleichung 2. O. eine für diese Gleichung und die Gleichung 3. O. gemeinsame Charakteristik existirt, so bilden diese Charakteristiken ein System von genau der Eigenschaft des obigen Systems Charakteristiken von $\Omega = 0$. Diejenigen Gleichungen der 2. und 3. O., die aus einem Gleichungspaare $f_1(x, y, p, q, r, s, t) = 0$, $f_2(x, y, p, q, r, s, t) = 0$ mit gemeinsamen Charakteristiken und ∞^∞ gemeinsamen Integralflächen vermittelst einer Flächentransformation:

$$X = F_1(x, y, p, q, r, s, t), \quad Y = F_2(x, y, p, q, r, s, t),$$
$$P = \Phi_1(x, y, p, q, r, s, t), \quad Q = \Phi_2(x, y, p, q, r, s, t)$$

ıergeleitet werden (siehe d. A., Bd. XIII, p. 76), bilden ein specielles System dieser Art.

5. Wie beschaffen ist das Bild im Raume (xyz) der Gleichung $\Omega = 0$? Durch $\Omega = 0$ soll jedem Elemente $(zz'xypqp'q')$ von (1) ine Charakteristik zugeordnet werden, also auch, wie früher bemerkt, lemselben Elemente eine bestimmte einfach unendliche Schaar (Büschel) on Werthen von (r, s, t, r', s', t'). Durch die Gleichungen (1) werden p', q' bestimmt in Function von z', z, x, y, p, q. Also wird, vermittelst $\Omega = 0$, jedem Flächenelemente $(zxypq)$ eine Schaar von einfach unndlich vielen, den Werthen von z' entsprechenden, einfachen Büscheln on (r, s, t) zugeordnet. Die Gesammtheit aller dieser, auf den ∞^5 lächenelementen des Raumes (xyz) befindlichen Werthschaaren von $r, s, t)$ wird durch eine Gleichung $F(z, x, y, p, q, r, s, t) = 0$ repräentirt. Sie stellt, wenn r, s, t als Punktcoordinaten eines Raumes R' edeutet werden, eine Linienfläche in diesem Raume dar. Sie wird un das Bild von $\Omega = 0$.

Diese partielle Differentialgleichung 2. O. $F = 0$ muss überdies ait den zwei linearen partiellen Differentialgleichungen 3. O., für velche die einen Theile $z = F(x, y)$ der Lösungen von (1) gemeiname Integrale werden, ∞^∞ Integralflächen gemein haben, in der Art, ass von jedem Flächenelemente ∞^1 für alle drei Gleichungen gemeiname Charakteristiken ausgehen. Wenn zwei Elemente $(zxypqrst)$ weier unendlich benachbarter Charakteristiken vereinigt liegen, liegen iese letzteren selbst in ihrer ganzen Ausdehnung vereinigt.

6. Die Theile $z = F(x, y)$ der Lösungen von (1) brauchen nicht nmer ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen 3. O. zu ilden. Wenn z. B. in den beiden Gleichungen (1) die Grösse z' fehlt, stellen die Integrale der partiellen Differentialgleichung 2. O.

$[f\varphi]_{z'xp'} = 0$, aus welcher man sich p', q' vermittelst (1) eliminirt zu denken hat, eben jene Theile von Lösungen von (1) dar. Zu jedem Integrale $z = F(x, y)$ hat man jetzt ∞^1 entsprechende Functionen $z' : \int (p'dx + q'dy) = z'$.

Wenn sowohl z' als z in beiden Gleichungen (1) fehlen, werden sowohl die Theile $z = F(x, y)$ als die Theile $z' = \Phi(x, y)$ der Lösungen von (1) Integrale von partiellen Differentialgleichungen 2. O., nämlich von den Gleichungen: $[f\varphi]_{z'xp'} = 0$, $[f\varphi]_{zxp} = 0$, — aus der ersten p', q', aus der zweiten p, q vermittelst (1) eliminirt. Eine jede Lösung von (1) hat alsdann die Form: $z = F(x, y) +$ eine arb. Const., $z' = \Phi(x, y) +$ eine arb. Const.

§ 2.

Von der durch die zwei Gleichungen (1) begründeten Transformation gewisser Flächenschaaren.

7. Jede der zwei Gleichungen: $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$, die eine Lösung von (1) bilden, wird im Allgemeinen durch zwei lineare partielle Differentialgleichungen 3. O. dargestellt. Die beiden Gleichungen einer Lösung repräsentiren zwei Flächen resp. der Räume (xyz), (xyz'). Zwischen ihnen besteht ein eindeutiges Entsprechen (d. A. Bd. XVII, Nr. 22.), und noch mehr, es besteht zwischen den Elementen $(zxypqrst)$, $(z'xyp'q'r's't')$ der beiden einander entsprechenden Flächen ein eindeutiges Entsprechen, nämlich so, dass jedem Werthsysteme von (z, x, y, p, q, r, s, t) dasjenige Werthsystem von $(z', x, y, p', q', r', s', t')$ entspricht, das durch Elimination aus (1), $[f\varphi]_{z'xp'} = 0$ und irgend drei der Gleichungen: $\frac{df}{dx} = 0$, $\frac{df}{dy} = 0$, $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, $\frac{d\varphi}{dy} = 0$ resultirt. Es existirt folglich jetzt eine Transformation vom Raume (xyz) zum Raume (xyz'), die für alle Integralflächen eines gewissen Paares linearer partieller Differentialgleichungen 3. O. eine Flächentransformation ist, und bei der ausserdem die Berührung 2. O. erhalten bleibt. Dass es keine specielle Berührungstransformation der 2. O. giebt, die für den ganzen Raum (xyz) eine Flächentransformation ist, habe ich im IX. Bd. d. A.*) bewiesen; ich habe auch daselbst angemerkt, dass es keine derartige Transformation giebt, die alle Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung**) wiederum in Flächen überführt, und für den Fall einer partiellen Differentialgleichung 2. O. den Grund hierfür nachgewiesen (a. a. O. p. 312, Nr. 10.). Dass aber für Systeme mehrerer Differentialgleichungen derartige Transformationen

*) Siehe auch d. A., Bd. XI, p. 213.

**) D. A., Bd. IX, p. 306. — (Betreffend die Transformationen der partiellen Differentialgleichungen 1. O. siehe besonders § 5. der citirten Abh.) — Für Räume stattfinden können, haben wir jetzt gesehen. Ich will nun versuchen, diesen Umstand ausführlich zu erklären.

Betrachten wir erstens *eine* partielle Differentialgleichung der m. O. $F=0$, und nehmen wir an, dass es eine Transformation giebt, welche die Integralflächen derselben wiederum in Flächen, insbesondere Integralflächen, die in einem Punkte eine Berührung von der m. O. eingehen, wiederum in Flächen mit Berührung von der m. O. überführt, so sehen wir Folgendes: Wenn C eine beliebige Integralfläche und p irgend einen Punkt derselben bedeutet, und man bezeichnet mit p_1, p_2 die Werthe der ersten, mit $p_{k_1k_2}$ diejenigen der zweiten, $\cdots$ mit $p_{k_1k_2\ldots k_n}$ $(k_1, k_2, \cdots, k_n = 1$ oder $2)$ diejenigen der n^{ten} Differentialquotienten von z, die C im Punkte p zugehören, so hat man ein Werthsystem von $p_{k_1k_2\ldots k_{m+1}}$ bestimmt durch die $m+3$ Gleichungen

$$\delta p_{k_1k_2\ldots k_m} = p_{k_1k_2\ldots k_m 1}\, dx + p_{k_1k_2\ldots k_m 2}\, dy, \qquad \frac{dF}{dx}=0, \qquad \frac{dF}{dy}=0,$$

wenn man mit $p_{k_1k_2\ldots k_m} + \delta p_{k_1k_2\ldots k_m}$ die Werthe der m^{ten} Differentialquotienten von z bezeichnet, die im Punkte $(x+dx,\ y+dy)$ einer Integralfläche C' zugehören, die zu C unendlich benachbart ist und mit ihr in dem genannten Punkte $(x+dx,\ y+dy)$ eine Berührung von der $m-1$. O. hat. Dieses Werthsystem von $(m+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von z gehört einer Integralfläche C'' von $F=0$ an, die

---

von zwei Dimensionen gestaltet sich die Sache anders. Betrachten wir zum Beispiel das Gleichungssystem (d. A., Bd. XVII, p. 297):

$$f_0\left(z, z', x, \frac{dz}{dx}, \frac{dz'}{dx}\right)=0, \qquad \varphi_0\left(z, z', x, \frac{dz}{dx}, \frac{dz'}{dx}\right)=0.$$

Indem wir aus diesen Gleichungen und der Gleichung $[f_0\varphi_0]_{zx\frac{dz}{dx}}=0$ die Grössen $z, \frac{dz}{dx}$ eliminiren, bekommen wir eine Gleichung 2. O. für z'. Eine zweite Gleichung 2. O., eine Gleichung für z, erhalten wir aus $[f_0\varphi_0]_{z'x\frac{dz'}{dx}}=0$ durch Elimination von $z', \frac{dz'}{dx}$ vermittelst $f_0=0$, $\varphi_0=0$. Zwischen je zwei Integralcurven derselben Gleichungen: $z'=\Phi(x)$, $z=F(x)$, die zusammen eine Lösung von $f_0=0$, $\varphi_0=0$ bilden, besteht ein eindeutiges Entsprechen, und dies ist besonders mit den Elementen $\left(z'x\frac{dz'}{dx}\right)$, $\left(zx\frac{dz}{dx}\right)$ der beiden Gleichungen 2. O. der Fall. Hier existirt also eine Transformation, die keine Transformation von beliebigen Curven der Ebene (zx) wiederum in Curven ist, die aber alle Integralcurven der einen der genannten Gleichungen 2. O. eindeutig in die Integralcurven der anderen Gleichung 2. O. überführt. (Vgl. d. A., Bd. IX, p. 300.) Sie ist aber eigentlich nicht als Berührungstransformation zu charakterisiren, da sie nur die ∞^2 Integralcurven der Gleichungen 2. O. betrifft, von denen im Allgemeinen keine zwei sich berühren.

mit C im Punkte p und mit C' im Punkte $(x + dx,\ y + dy)$ eine Berührung von der m. O. besitzt. Nun führt die angenommene Transformation unsere drei Flächen C, C', C'' über in drei Flächen Γ, Γ', Γ'', von denen die letzte mit den zwei ersten, einander unendlich benachbarten Flächen Γ, Γ' in zwei unendlich benachbarten Punkten eine Berührung von der m. O. eingeht. Jene zwei unendlich benachbarte Flächen Γ, Γ' müssen aber dann eine Berührung von der $m-1$. O. mit einander eingehen, so dass die angenommene Transformation je zwei unendlich benachbarte Integralflächen C, C' von $F = 0$, die eine Berührung von der $m-1$. O. mit einander haben, in zwei ähnliche Flächen Γ, Γ' umformt.

Nun kann man zwei Integralflächen von $F = 0$ construiren, die einander unendlich benachbart von der 2. O. sind und Berührung von der $m-2$. O. mit einander haben, und sodann eine dritte Integralfläche, die jenen beiden unendlich benachbart von der ersten Ordnung ist und mit ihnen in zwei unendlich benachbarten Punkten eine Berührung von der $m-1$. O. eingeht. Dies liegt darin, dass die Gleichungen: $\delta p_{k_1 k_2 \dots k_{m-1}} = p_{k_1 k_2 \dots k_{m-1} 1}\, dx + p_{k_1 k_2 \dots k_{m-1} 2}\, dy$, $F = 0$ für alle unendlich kleinen Werthe von $\delta p_{k_1 k_2 \dots k_{m-1}}$ durch Werthe von $p_{k_1 k_2 \dots k_m}$ befriedigt werden können. Nach der eben gemachten Bemerkung werden diese drei Flächen in drei neue derartige Flächen verwandelt. Also muss unsere Transformation je zwei Integralflächen, die einander unendlich benachbart von der 2. O. sind und in einem Punkte Berührung von der $m-2$. O. besitzen, in zwei ähnliche Flächen verwandeln. Indem wir dasselbe Räsonnement weiter verfolgen, kommen wir schliesslich zu dem Satze, dass je zwei Integralflächen von $F = 0$, die eine Berührung von der 1. O. besitzen und unendlich benachbart von der $m-1$. O. sind, vermittelst der genannten Transformation in eben derartige Flächen umgeformt werden.

Aber im IX. B. d. A. habe ich bewiesen, dass, wenn von den Flächen eines unendlichen Systems, das den ganzen Raum wenigstens viermal erfüllt, je zwei, die einander unendlich benachbart sind und eine Berührung von der ersten Ordnung eingehen, durch eine Transformation in ähnliche Flächen verwandelt werden, die Transformation eine gewöhnliche (Lie'sche) Berührungstransformation ist, die für den ganzen Raum eine Flächentransformation wird.*) Zwar habe ich nicht

*) Ich nehme die Gelegenheit wahr, eine Lücke in dem p. 311, Bd. IX d. A. geführten Räsonnement auszufüllen. Es wird dort bewiesen, dass die beiden Flächenschaaren $f(z, x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+2}) = 0$, $\varphi(z', x', \dots, x_n', \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+2}) = 0$, die in der Art einander zugeordnet sind, dass je zwei Flächen $f(\lambda) = 0$, $f(\lambda + d\lambda) = 0$, die sich berühren, zwei ebenfalls sich berührende Flächen $\varphi(\lambda) = 0$, $\varphi(\lambda + d\lambda) = 0$ entsprechen, vollständige Lösungen (jetzt z, x, z', x' arbiträre Constanten) einer

besonders hervorgehoben, dass, wenn die sich berührenden Flächen unendlich benachbart von der r. O. sind, man durch meinen Beweis in erster Hand zu Paaren von Flächen gelangt, die unendlich benachbart von der $r - 1$. O. sind und sich berühren, und dass man sodann von den letzteren Paaren Paare von Flächen bekommt, die unendlich benachbart von der $r - 2$. O. sind und sich berühren, u. s. w.; — aber dies erhellt von selbst, wenn man (d. A. Bd. IX, p. 310) statt Flächensysteme, die den ganzen Raum erfüllen, Systeme von Flächen betrachtet, die alle einander unendlich benachbart sind.

Die angenommene Transformation der partiellen Differentialgleichung m. O. $F = 0$ kann deshalb nichts Anderes sein als eine gewöhnliche Berührungstransformation, die alle Flächen des Raumes umfasst und bei der schon Berührung von der 1. O. invariant bleibt.

8. Betrachten wir aber ein System von *zwei* partiellen Differentialgleichungen der m. O. $F = 0$, $\Phi = 0$, deren erste Derivirte auf nur drei von einander unabhängige Gleichungen sich reduciren, und nehmen wir an, dass eine Transformation existirt, die sämmtliche ∞^∞ gemeinsame Integralflächen der beiden Gleichungen in Flächen, insbesondere Integralflächen, die eine Berührung von der m. O. haben, in Flächen mit Berührung wiederum von der m. O. überführt, so finden wir erstens, dass wenn C eine Integralfläche bedeutet, (x, y) einen Punkt derselben, und C' eine Integralfläche, die zu C unendlich benachbart ist und mit ihr im Punkte $(x + dx, y + dy)$ eine Berührung von der $m - 1$. O. eingeht, man immer Werthe von $p_{k_1 k_2 \ldots k_{m+1}}$ bestimmen kann, die die folgenden Gleichungen erfüllen:

---

und derselben partiellen Differentialgleichung 1. O. $\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+2}, \pi_1, \ldots, \pi_{n+1}) = 0$ sind. Daraus wird weiter gefolgert, dass irgend zwei Flächen $f = 0$, die sich berühren, zwei Flächen $\varphi = 0$, die sich berühren, entsprechen müssen. Um aber hieraus den Schluss zu ziehen, dass die Flächen $f = 0$, $\varphi = 0$ in der Weise, wie dies durch eine gewöhnliche Berührungstransformation geschieht, auf einander bezogen sein müssen, ist es vielleicht am einfachsten, folgende Ueberlegung anzustellen. Einer *beliebigen* Gleichung $U(z, x_1, \ldots, x_n) = 0$ entspricht eine gewisse Integral-M_{n+1} von $\Phi = 0$, erzeugt von ∞^n Charakteristiken dieser Gleichung. Dieselbe M_{n+1} ist ein Umhüllungsgebilde von ∞^n Integralen $\varphi = 0$. Die Werthe der für sie geltenden Constanten (z', x') sind bestimmt durch eine Gleichung $V(z', x_1', \ldots, x_n') = 0$. Die Flächenelemente $(z\,x\,p)$, $(z'\,x'\,p')$ von $U = 0$, $V = 0$ entsprechen einander eindeutig, nach dem was vorher bewiesen wurde, und deshalb müssen *je zwei* vereinigt liegenden Flächenelementen $(z\,x\,p)$ zwei ebenfalls vereinigt liegende Flächenelemente $(z'\,x'\,p')$ entsprechen. Deswegen u. s. w.

[Ich hatte früher, statt dieses Räsonnements, ein anderes, das dem auf p. 300 der citirten Abhandlung geführten völlig ähnlich ist, angewandt. Wenn man nämlich eine (beliebige) Fläche in $(z\,x)$ als Umhüllungsgebilde aller derjenigen Schaaren von Flächen $f = 0$ betrachtet, die sie stationär berühren, so ist leicht ersichtlich, dass die entsprechenden Flächen $\varphi = 0$ eine Fläche in $(z'\,x')$ umhüllen, deren Flächenelemente den Flächenelementen der Fläche in $(z\,x)$ entsprechen.]

$$\delta p_{k_1 k_2 \ldots k_m} = p_{k_1 k_2 \ldots k_m 1}\, dx + p_{k_1 k_2 \ldots k_m 2}\, dy,$$

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dx} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dy} = 0,$$

so oft $p_{k_1 k_2 \ldots k_m} + \delta p_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ die der Integralfläche C' im Punkte $(x + dx,\ y + dy)$ zugehörigen Werthe der $m$ten Differentialquotienten von z bedeuten, — denn dann ziehen sich die vier letzten der oben aufgeschriebenen Gleichungen zu einer einzigen neuen Gleichung zusammen. Folglich muss auch in diesem Falle unsere Transformation je zwei unendlich benachbarte sich in der $m - 1$. O. berührende Integralflächen C, C' in neue solche Flächen umformen.

Bezeichnen jetzt C, C' zwei unendlich benachbarte Integralflächen, die im Punkte $(x + dx,\ y + dy)$ eine Berührung von der $m - 2$. O. besitzen, so muss man, wenn eine dritte Integralfläche existiren soll, die C im Punkte (x, y) und C' im Punkte $(x + dx,\ y + dy)$ in der $m - 1$. O. berührt, Werthe von den $m + 1$ Grössen $p_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ bestimmen können, die den $m + 2$ Gleichungen: $\delta p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}} = p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1} 1}\, dx + p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1} 2}\, dy$, $F = 0$, $\Phi = 0$ genügen. Aber für allgemeine Werthe von δp, dx, dy ist das unmöglich. Nun kann es geschehen, wie im Falle einer gemeinsamen *ersten* Integralschaar (mit einer arbiträren Constanten) von $F = 0$, $\Phi = 0$, dass eine vollständige Schaar von Integralflächen in solche ∞^1 Gruppen von Flächen sich spalten lässt, dass die δp, die einer Integralfläche C' zugehören, welche in derselben Gruppe wie C enthalten ist, die durch Elimination von $p_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ aus den oben aufgeschriebenen Gleichungen resultirende Relation befriedigen. Dann führt unsere Transformation je zwei Integralflächen einer und derselben Gruppe, die unendlich benachbart von der 2. O. sind und mit einander eine Berührung von der $m - 2$. O. haben, in zwei Flächen mit Berührung ebenfalls von der $m - 2$. O. über. Aber eine solche Vertheilung der Flächen einer vollständigen Integralschaar findet nicht nothwendig für alle solche Systeme wie das von $F = 0$, $\Phi = 0$ gebildete statt. Demnach braucht unsere Transformation nicht nothwendig die zwei vereinigt liegenden Elemente $(z x y p_1 \ldots p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}})$, $(z + dz_1 \ldots p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}} + \delta p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}})$ von C in (x, y) resp. C' in $(x + dx,\ y + dy)$*) in ebenfalls vereinigt liegende derartige Elemente zu überführen**). Unsere Transformation braucht daher um so weniger eine gewöhnliche (Lie'sche) Berührungstransformation zu sein.

---

*) Diese Elemente liegen vereinigt, weil sie auf einer und derselben Fläche, wenn auch nicht auf einer Integralfläche, construirt werden können.

**) Dass es auch im Allgemeinen keine Integralfläche giebt, die mit C' im Punkte $(x + dx,\ y + dy)$ und mit C in irgend einem Punkte $(x + d'x,\ y + d'y)$

Die Zahl der arbiträren Constanten einer vollständigen Lösung des Systemes $F=0$, $\Phi=0$ muss auf eine Zahl reducirt werden können, die kleiner ist als die Zahl der ersten, zweiten, ... bis $m-1$sten Differentialquotienten von z, vermehrt um 2; denn es gilt folgender Satz: *Wenn von den Flächen zweier k-fach unendlicher Systeme je zwei Flächen des einen Systems, die einander unendlich benachbart sind*

Berührung von der $m-1$. O. besitzt, erläutern wir am besten durch ein Beispiel. Seien zwei lineare partielle Differentialgleichungen 3. O. vorgelegt, deren erste Derivirte zu drei von einander unabhängigen Gleichungen sich zusammenziehen, in welchem Falle die vorgelegten Gleichungen sich nothwendig auf die folgende Form bringen lassen müssen:

$$u+Bv+Cw+E=0,$$
$$v+Bw+C\varpi+E'=0,$$

(wo B, C, E, E' Functionen von z, x, y, p, q, r, s, t sind)

so ist die Bedingung dafür, dass die folgenden Gleichungen:

$$\delta r = u\,dx + v\,dy,$$
$$\delta s = v\,dx + w\,dy,$$
$$\delta t = w\,dx + \varpi\,dy,$$
$$u+Bv+Cw+E=0,$$
$$v+Bw+C\varpi+E'=0$$

zusammen bestehen, ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \delta r - dr & dx & dy & 0 & 0 \\ \delta s - ds & 0 & dx & dy & 0 \\ \delta t - dt & 0 & 0 & dx & dy \\ 0 & 1 & B & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 & B & C \end{vmatrix} = 0,$$

wenn dr, ds, dt irgend welche für das Stattfinden jener Gleichungen mögliche Werthe von δr, δs, δt bedeuten. Nach Wegschaffung eines gemeinsamen Factors $C\,dx^2 - B\,dx\,dy + dy^2$ nimmt aber jene Bedingungsgleichung die einfache Gestalt an:

$$\delta r - dr + B(\delta s - ds) + C(\delta t - dt) = 0,$$

welche Gleichung unabhängig ist von dx, dy.

Dies beweist, dass, wenn C, C' zwei unendlich benachbarte Integralflächen sind, die sich im Punkte $(x+dx,\ y+dy)$ berühren, und $(r+dr,\ s+ds,\ t+dt)$ die der Fläche C zugehörigen zweiten Differentialquotienten von z in jenem Punkte, $(r+\delta r,\ s+\delta s,\ t+\delta t)$ die der Fläche C' zugehörigen in demselben Punkte bedeuten, nur für specielle Flächen C' der fraglichen Relation genügt werden kann. Hieraus folgt weiter, dass es im Allgemeinen keine Integralfläche giebt, die mit C' im Punkte $(x+dx,\ y+dy)$ und mit C in irgend einem unendlich benachbarten Punkte eine Berührung von der 2. O. hat. Irgend zwei unendlich benachbarte Integralflächen C, C', die sich berühren, werden daher von einer Berührungstransformation 2. O., welche die Integralflächen der partiellen Gleichungen 3. O. betrifft, im Allgemeinen nicht wiederum in sich berührende Flächen verwandelt.

und eine Berührung der r. O. mit einander eingehen ($k = 2 +$ der Anzahl der ersten, zweiten, ... bis r-ten Differentialquotienten von z), durch irgend eine Transformation in zwei Flächen von eben derselben Beschaffenheit des anderen Systems umgeformt werden, so ist sicher die Transformation eine gewöhnliche (Lie'sche) Berührungstransformation. — Der Beweis dieses Satzes ist ganz analog dem Beweise des oben citirten Satzes im IX. B. d. A. p. 311 zu führen.

Ziehen wir besonders den Fall der zwei Gleichungen 3. O.:

$$\Big[f[f\varphi]\Big]_{zxp} = 0, \qquad \Big[\varphi[f\varphi]\Big]_{zxp} = 0$$

[d. A. B. XVII, p. 290] in Betracht. Wir haben, wie oben angemerkt, eine Transformation, bei der Berührung 2. O. erhalten bleibt, und welche die Integralflächen der Gleichungen wiederum in Flächen überführt. Nun ist diese Transformation durch die Gleichungen: $x' = x$, $y' = y$ zusammen mit den Gleichungen: $z = F(x, y, \lambda, \mu, \nu, \varrho)$, $z' = \Phi(x, y, \lambda, \mu, \nu, \varrho)$ einer Lösung von (1) vollständig bestimmt. Aber jene zwei vierfach unendlichen Flächenschaaren sind allgemeiner Art, und zwei sich berührende Flächen der Schaar: $z = F(x, y, \lambda, \mu, \nu, \varrho)$ entsprechen demnach nicht zwei sich berührenden Flächen der anderen Schaar, wie es sein müsste, wenn die Transformation eine Berührungstransformation wäre.

9. Nunmehr erledigt sich leicht die Frage, ob es möglich ist, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen der 3. O.

$$\Big[f[f\varphi]\Big]_{zxp} = 0, \qquad \Big[\varphi[f\varphi]\Big]_{zxp} = 0$$

ein gemeinsames erstes Integral mit einer arbiträren Constanten zulassen. Sollte dies eintreffen, so müsste die vorhandene Transformation zwischen jenen Gleichungen und den zwei:

$$\Big[f[f\varphi]\Big]_{z'xp'} = 0, \qquad \Big[\varphi[f\varphi]\Big]_{z'xp'} = 0,$$

nach dem eben Auseinandergesetzten, eine solche sein, die je zwei unendlich benachbarte sich berührende gemeinsame Integralflächen eines der ersten Integrale der zwei ersten Gleichungen in zwei einander berührende gemeinsame Integralflächen der zwei letzten verwandelte. Oder es müssten auch die letzteren Gleichungen ein gemeinsames erstes Integral mit einer arbiträren Constanten, entsprechend dem vorher für die zwei ersteren Gleichungen angenommenen derartigen Integrale, besitzen, also müsste die in Frage stehende Transformation eine gewöhnliche Berührungstransformation sein. Nun lauten zwei der für diese Transformation geltenden Gleichungen so: $x' = x$, $y' = y$, und es muss demnach eine dritte Gleichung der Transformation von der

Form sein: $z' = F(z, x, y)$. Dies zeigt an, dass die beiden Gleichungen (1) sich jetzt in die Form:

$$f(z', z, x, y) = 0, \quad \varphi(z', z, x, y, p, q, p', q') = 0$$

bringen lassen müssten. Aber dann ist $[f\varphi]_{z'xp'} = \frac{df}{dx}\varphi'(p') + \frac{df}{dy}\varphi'(q')$, und in der Gleichung $[f\varphi]_{z'xp'} = 0$ fehlen also die Grössen r, s, t. Die Gleichungen $\Big[f[f\varphi]\Big]_{z'xp'} = 0$, $\Big[\varphi[f\varphi]\Big]_{z'xp'} = 0$ können also jetzt zu keinen Gleichungen 3. O. Anlass geben. *Niemals können daher die in Frage gestellten zwei partiellen Differentialgleichungen der 3. O. ein erstes Integral mit einer willkürlichen Constanten gemein haben.*

10. Eine eindeutige Transformation zwischen den beiden Räumen (xyz), (xyz') wird nur dann durch die Gleichungen (1) bestimmt, wenn diese auf zwei Paare partieller Differentialgleichungen 3. O. in (xyz) resp. (xyz') führen. Wenn eines der in Nr. 6. betrachteten Systeme (1) vorliegt, gestaltet sich die Transformation anders. Sie kann keine eindeutige Transformation werden, denn entweder führt sie eine jede Integralfläche einer gewissen partiellen Differentialgleichung 2. O. ($[f\varphi]_{z'xp'} = 0$) in eine einfach unendliche Schaar von Integralflächen eines Systems zweier partieller Differentialgleichungen 3. O. $\left(\Big[f[f\varphi]\Big]_{zxp} = 0, \ \Big[\varphi[f\varphi]\Big]_{zxp} = 0\right)$, eine jede der letzteren Flächen in eine bestimmte Fläche der ersteren über, oder sie ergiebt zu jeder Integralfläche einer gewissen partiellen Differentialgleichung der 2. O. ($[f\varphi]_{z'xp'} = 0$) ∞^1 entsprechende Integralflächen einer anderen partiellen Differentialgleichung 2. O. ($[f\varphi]_{zxp} = 0$), und vice versa. Man hat nun auch, im Falle dass in den Gleichungen (1) die Variable z' fehlt, für jedes Element $(z\ x\ y\ p\ q\ r\ s\ t)$, das der Gleichung $[f\varphi]_{z'xp'} = 0$ genügt, ∞^1 entsprechende Elemente $(z'\ x\ y\ p'\ q')$, jedes mit einem bestimmten Werthsysteme von (r', s', t'); jedem Elemente $(z'xyp'q'r's't')$ entspricht dagegen ein einziges Werthsystem von (z, x, y, p, q, r, s, t) (oder einige Werthsysteme derselben). Im Falle dass in (1) sowohl z' als z fehlen, entsprechen jedem Elemente $(z\ x\ y\ p\ q\ r\ s\ t)$ einer partiellen Differentialgleichung 2. O. $[f\varphi]_{z'xp'} = 0$ ∞^1 Elemente $(z'xyp'q'r's't')$ einer anderen partiellen Differentialgleichung der 2. O. $[f\varphi]_{zxp} = 0$, und umgekehrt, jedem Elemente $(z'\ x\ y\ p'\ q'\ r'\ s'\ t')$ der letzteren Gleichung ∞^1 Elemente $(z\ x\ y\ p\ q\ r\ s\ t)$ der ersteren.

Die jetzt von den Gleichungen (1) begründete Transformation ist in dem Bezirke, in dem sie eine Flächentransformation ist, eine mehrdeutige (unendlich-deutige) Flächentransformation. Von einer Verallgemeinerung derselben soll in Nr. 15. gehandelt werden.

§ 3.

Herleitung einiger specieller Systeme von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

11. In der 23. Nr. meiner Abhandlung im XVII. B. d. A. ist die durch drei allgemeine Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} F_1(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') = 0, \\ F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ F_3(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \end{cases}$$

definirte Flächentransformation besprochen worden, und in der 24. Nr. besonders der Fall behandelt, wo die Transformation jeden Streifen einer vorgelegten vierfach unendlichen Schaar in eine einfach unendliche Flächenschaar verwandelt. Es kann aber auch die Transformation so eingerichtet werden, dass sie jeden Integralstreifen des Paares von Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{cases} f(z, x, y, p, q) = C, \\ \varphi(\qquad\qquad) = C', - \end{cases}$$

wo C, C' arbiträre Constanten bezeichnen, — in eine Flächenschaar umformt. Die Integralstreifen von (4) sind dargestellt durch die Gleichungen:

$$(5)\qquad dz - p\,dx - q\,dy = 0,\quad \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0,\quad \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy = 0.$$

Ein beliebiges Flächenelement $(z\,x\,y\,p\,q)$ bestimmt erstens gewisse Werthe von C, C' in (4) und weiter ∞^1 Richtungen $(dy : dx)$, deren jede in Verein mit dem genannten Elemente, auf Grund von (5), einen Büschel von (r, s, t) liefert. Die Gleichungen desselben haben die Form: $r\,dx + s\,dy = \mu\,dx$, $s\,dx + t\,dy = \nu\,dx$, wo $\mu\,dx$, $\nu\,dx$, selbst von dx, dy abhängen. Dieser Büschel giebt zu einem Flächenelemente $(z + p\,dx + q\,dy,\ x + dx, \ldots,\ p + \mu\,dx,\ q + \nu\,dx)$ Anlass, welches einem von $(z x y p q)$ ausgehenden Integralstreifen von (4) zugehört. Führt man jetzt in die Bedingungsgleichung für die Involution der zwei dem Streifen entsprechenden partiellen Differentialgleichungen 1. O. [d. A. Bd. XVII, p. 307, Gl. (19)]:

$$\frac{dF_1}{dx}[F_2F_3]_{z'x'p'} + \frac{dF_2}{dx}[F_3F_1]_{z'x'p'} + \frac{dF_3}{dx}[F_1F_2]_{z'x'p'} = 0$$

für $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$ die Werthe μ, ν, die in Bezug auf $dy : dx$ von der Form sind: $\alpha + \beta\,\frac{dy}{dx}$, ein, und verlangt, dass dieselbe unabhängig von den besonderen Werthen von $dy : dx$ bestehen soll, so müssen F_1, F_2, F_3 zwei Gleichungen erfüllen. F_1 darf beliebig genommen werden, F_2, F_3

sind dann durch jene zwei Gleichungen zu bestimmen, damit die Transformation (3) alle Integralstreifen des Systems (4), (5) in Flächenschaaren umformt.

Fragen wir, wie die Figur in r' beschaffen ist, die aus jenen Flächenschaaren besteht, so brauchen wir uns nur Folgendes aus Nr. 24. d. A., B. XVII zu vergegenwärtigen. Jedem Elemente $(zxypq)$ entspricht eine Schaar von ∞^1 Streifen in r', die kurz mit S' bezeichnet sein mögen. Ebenso wie von jedem Flächenelemente in r ∞^∞ Integralstreifen von (4) ausgehen, so gehen durch jeden Streifen S' ∞^∞ Flächen unserer Flächenschaaren in r'. Zu jedem Flächenelemente in r gehören ∞^1 Büschel (5) von (r, s, t), die auf ebenso vielen mit dem Elemente vereinigt liegenden Flächenelementen von Integralstreifen von (4) führen. Dementsprechend liegt jeder Streifen S' vereinigt mit ∞^1 anderen solchen Streifen. Bemerken wir weiter, dass jedem Flächenelemente in r' ∞^2 Flächenelemente in r entsprechen, unter denen nur einige gewisse die Gleichungen $f = C_0$, $\varphi = C_0'$, — wenn C_0, C_0' (irgend welche) bestimmte Werthe der willkürlichen Parameter C, C' in (4) bezeichnen, — befriedigen, so sehen wir ein, dass ∞^2 Streifen S', entsprechend den verschiedenen Werthen von C, C', durch ein beliebiges Element $(z' x' y' p' q')$ hindurchgehen. Die Figur, die aus denjenigen Büscheln von $(r' s' t')$, die diesen S' zugehören, zusammengesetzt ist, wird daher durch zwei Gleichungen:

$$(6) \qquad \begin{cases} F(z', x', y', p', q', r', s', t') = C, \\ \Phi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = C' \end{cases}$$

ausgedrückt. C, C' sind hier dieselben wie in (4). Weil, wie schon bemerkt, durch jeden Streifen S', der einem Elemente von $f = C_0$, $\varphi = C_0'$ entspricht, ∞^∞ Flächen hindurchgehen, die den Integralstreifen dieser Gleichungen $f = C_0$, $\varphi = C_0'$ entsprechen, und die also Integralflächen unserer Figur (6) sind, so werden jene Streifen S' gemeinsame Charakteristiken der beiden Gleichungen 2. O. in (6).

Wir gewinnen diese Gleichungen (6) einfach so: Durch Differentiirung von (3), z, x, y, p, q dabei als Constanten betrachtet, und durch nachherige Elimination von dx', dy' werden zwei Gleichungen in $z, x, y, p, q, z', x', y', p', q', r', s', t'$ gewonnen. Indem wir aus diesen zwei Gleichungen, den Gleichungen (3) und (4), z, x, y, p, q eliminiren, bekommen wir die fraglichen Gleichungen (6). *Diese zwei partiellen Differentialgleichungen der 2. O. sind, nach dem eben Auseinandergesetzten, so mit einander verbunden, dass von jedem Elemente $(z' x' y' p' q' r' s' t')$ ein Streifen ausgeht, der zur selben Zeit eine Charakteristik einer Gleichung $F = C_0$ und einer Gleichung $\Phi = C_0'$ bildet. Diese Streifen ordnen sich zu ∞^∞ gemeinsamen Integralflächen von $F = C_0$, $\Phi = C_0'$ zusammen. Von den ersten Derivirten von F und Φ in Bezug auf*

x', y' ist daher die eine eine algebraische Folge der drei anderen. Noch mehr, jene Charakteristiken, die eben die obigen Streifen S' sind, werden Berührungsstreifen von der 1. O., so dass es ∞^{∞} gemeinsame Integral-Flächen zweier Gleichungen $F = C$, $\Phi = C'$ giebt, — wo C, C' ganz beliebige Constanten bedeuten, — die längs eines Streifens S' eine Berührung von der 1. O. besitzen. Die gemeinsamen Integralflächen von $F = C_0$, $\Phi = C_0'$ ordnen sich zu Schaaren von je ∞^1 Flächen zusammen, jede Schaar einem Integralsteifen von $f(z, x, y, p, q) = C_0$, $\varphi(z, x, y, p, q) = C_0'$ entsprechend.

12. Die drei Gleichungen:

$$(7)\quad \begin{cases} F_1(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, z', x_1', x_2', x_3', p_1', p_2', p_3') = 0, \\ F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ F_3(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{cases}$$

einer Mannigfaltigkeitstransformation eines Raumes von vier Dimensionen können in einer solchen Beziehung zu einander stehen, dass sie eine Transformation begründen, die einen jeden Integralstreifen (Integral-M_1) des Systems:

$$(8)\quad \begin{cases} f(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = C, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = C', \\ \psi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = C'', \\ \chi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = C''' \end{cases}$$

in eine für zwei involutorische partielle Differentialgleichungen 1. O. gemeinsame zweifach unendliche Integralschaar verwandelt. Denn hierzu hat man nur zwei partiellen Differentialgleichungen für F_1, F_2, F_3 zu genügen. — Diese Gleichungen gewinnt man so: Diè Bedingung dafür, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen 1. O., die einem Streifen entsprechen, involutorisch sind, hat eine mit der Gleichung (19) in d. A. B. XVII, p. 307 ähnliche Form. Nun führt man blos für dx_3, dp_1, dp_2, dp_3 ihre aus (8) herzuleitenden Werthe in dx_1, dx_2 [$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3$ gesetzt] ein, und setzt sodann die Coefficienten für dx_1, dx_2 einzeln gleich Null. Damit hat man die beiden gesuchten Gleichungen für F_1, F_2, F_3. — Die Figur in r', d. i. in dem Raume $(x_1' \, x_2' \, x_3' \, z')$, die aus jenen Flächenschaaren besteht, die also dem Systeme (8) entspricht, lässt sich folgendermassen charakterisiren. Jedem Flächenelemente $(z \, x \, p)$ entspricht eine Schaar von ∞^2 M_2*) und deren Enveloppen, alle diese M_2 erzeugt von gewissen (charakteristischen) M_1. (Siehe d. A. B. XI, p. 430.) Weil einem beliebigen Flächenelemente $(z' \, x' \, p')$ ein gewisses Flächenelement

*) Diese M_2 Mannigfaltigkeiten von je ∞^2 vereinigt liegenden Flächenelementen $(z' \, x' \, p')$ bildend.

$(z\,x\,p)$ der vier Gleichungen: $f = C_0$, $\varphi = C_0'$, $\psi = C_0''$, $\chi = C_0'''$ entspricht, und in diesem Elemente sich ∞^1 Richtungen (dx_1, dx_2, dx_3) für Integralstreifen derselben Gleichungen: $f = C_0$, etc. finden, so muss eine jede dem Elemente $(z\,x\,p)$ entsprechende M_2, die das Element $(z'\,x'\,p')$ enthält, mit jeder von ∞^1 unendlichen benachbarten M_2 auf je einer M_3 liegen. Nun wird jedem Elemente $(z'\,x'\,p')$ durch diejenigen M_2, die dem Elemente $(z\,x\,p)$ entsprechen, eine Schaar von ∞^2 Werthsystemen von p'_{ik} zugeordnet, und weil, wie eben bemerkt, irgend eine M_2 zusammen mit ∞^1 unendlich benachbarten auf je einer M_3 liegt, müssen alle diese ∞^2 Werthe von p'_{ik}, aber nur diese, derjenigen Figur in r', die dem Systeme $f = C_0$, $\varphi = C_0'$, $\psi = C_0''$, $\chi = C_0'''$ entspricht, zugehören. Deshalb muss diese Figur durch vier partielle Differentialgleichungen der 2. O. algebraisch definirt sein. Wir haben durch die folgenden Gleichungen diejenigen Werthe von p'_{ik} gegeben, die eine der dem Elemente $(z\,x\,p)$ entsprechende M_2 einem ihrer Flächenelemente zuordnet:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_2'} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1'} + p_1'\frac{\partial F_i}{\partial z'}\right)\frac{\partial x_1'}{\partial x_2'} + p_2'\frac{\partial F_i}{\partial z'} + \frac{\partial F_i}{\partial p_1'}\left(p_{12}' + p_{11}'\frac{\partial x_1'}{\partial x_2'}\right) +$$
$$+ \frac{\partial F_i}{\partial p_2'}\left(p_{22}' + p_{21}'\frac{\partial x_1'}{\partial x_2'}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial p_3'}\left(p_{32}' + p_{31}'\frac{\partial x_1'}{\partial x_2'}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial F_i}{\partial x_3'} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1'} + p_1'\frac{\partial F_i}{\partial z'}\right)\frac{\partial x_1'}{\partial x_3'} + p_3'\frac{\partial F_i}{\partial z'} + \frac{\partial F_i}{\partial p_1'}\left(p_{13}' + p_{11}'\frac{\partial x_1'}{\partial x_3'}\right) +$$
$$+ \frac{\partial F_i}{\partial p_2'}\left(p_{23}' + p_{21}'\frac{\partial x_1'}{\partial x_3'}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial p_3'}\left(p_{33}' + p_{31}'\frac{\partial x_1'}{\partial x_3'}\right) = 0.$$
$$(i = 1, 2, 3).$$

Indem wir $\frac{\partial x_1'}{\partial x_2'}$, $\frac{\partial x_1'}{\partial x_3'}$ eliminiren, erhalten wir vier Gleichungen, die für diejenigen Werthe der p'_{ik} gelten, die vermittelst der M_2, die dem Elemente $(z\,x\,p)$ entsprechen und ein und dasselbe Element $(z'x'p')$ enthalten, dem letzteren Elemente zugeordnet werden. Folglich bestimmt man einfach durch Elimination von z, x, p aus diesen vier Gleichungen in $z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, z', x_1', \cdots, p_{11}', p_{12}', \cdots, p_{33}'$, den Gleichungen (7) und (8) diejenigen Gleichungen, welche die dem Systeme (8) entsprechende Figur in r' definiren. Diese Gleichungen werden vier partielle Differentialgleichungen der 2. O. für z':

$$\begin{aligned} F(z', x_1', \cdots, p_i', \cdots, p_{ik}', \cdots) &= C, \\ \Phi(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= C', \\ \Psi(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= C'', \\ X(\qquad\qquad\qquad\qquad) &= C''', \end{aligned}$$

unter C, C', C'', C''' die früher in (8) eingehenden arbiträren Constanten verstanden.

Je vier Gleichungen: $F = C_0$, $\Phi = C_0'$, $\Psi = C_0''$, $X = C_0'''$ *besitzen* ∞^∞ *gemeinsame charakteristische* M_2 *und unbegrenzt unendlich viele gemeinsame intermediäre Integrale, jedes durch zwei involutorische partielle Differentialgleichungen* 1. *O. ausgedrückt.* Diese intermediären Integrale entsprechen den Integralstreifen von je vier Gleichungen (8): $f = C_0$, $\varphi = C_0'$, $\psi = C_0''$, $\chi = C_0'''$.

13. Wir betrachten schliesslich eine solche durch vier Gleichungen:

$$
(9)\qquad \begin{cases} F_1(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, z', x_1', x_2', x_3', p_1', p_2', p_3') = 0, \\ F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ F_3(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ F_4(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{cases}
$$

bestimmte Transformation, die eine jede Integral-M_2 des Gleichungssystems:

$$
(10)\qquad \begin{cases} f(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = C, \\ \varphi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = C', \\ \psi(\qquad\qquad\qquad\qquad) = C'' \end{cases}
$$

in ein involutorisches Paar von partiellen Differentialgleichungen 1. O. in r' überführt. Die Bedingung hierfür drückt sich durch drei Gleichungen für F_1, F_2, F_3, F_4 aus. — Diese Gleichungen gewinnt man so: Man stellt die Bedingung auf dafür, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen 1. O., die einer M_2 entsprechen, in Involution liegen. Diese Bedingung hat eine mit der Gleichung (26) in d. A., Bd. XVII, p. 312 ähnliche Form. Man setzt für die in den Symbolen (12) etc. eingehenden $\frac{\partial p_1}{\partial x_2}$, etc., ihre Werthe in $\frac{\partial x_1}{\partial x_2}$, $\frac{\partial x_1}{\partial x_3}$ aus (10) ein, und drückt alsdann aus, dass die fragliche Gleichung unabhängig von $\frac{\partial x_1}{\partial x_2}$, $\frac{\partial x_1}{\partial x_3}$ stattfinden soll. — Die Figur in r', die dem Systeme (10) entspricht, ist aus denjenigen M_3 zusammengesetzt, die nach (9) den Integral-M_2 von (10) entsprechen. Zu einem beliebigen Flächenelemente $(z'x'p')$ werden durch diese M_3 $\infty^3 \cdot \infty^2$ Werthsysteme von p'_{ik} zugeordnet. Also umfasst unsere Figur nur ∞^5 der ∞^6 einem beliebigen $(z'x'p')$ zugehörenden Werthsysteme $(z'x'p'p'_{ik})$ des Raumes R'. *Man findet sie näher bestimmt durch vier partielle Differentialgleichungen der* 2. *O.:* $F = 0$, $\Phi = C$, $\Psi = C'$, $X = C''$, *die jene* ∞^∞ *involutorischen Gleichungspaare, die den Integral-*M_2 *von* (10) *entsprechen, zu gemeinsamen intermediären Integralen besitzen.*

§ 4.

Von der durch vier Gleichungen zwischen $z, x, y, p, q, z', x', y', p', q'$ zu begründenden Transformation.

14. Die Transformation, die durch vier Gleichungen:

$$(11)\quad \begin{cases} F_1(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') = 0, \\ F_2(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ F_3(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0, \\ F_4(\qquad\qquad\qquad\qquad) = 0 \end{cases}$$

definirt ist, ist im Allgemeinen nur für ein von gewissen zwei partiellen Differentialgleichungen 3. O. bestimmtes Gebiet eine Flächentransformation. Dies habe ich an p. 313 d. A., Bd. XVII bewiesen. Unter Umständen kann jedoch dieses Gebiet enger werden. Aber, ehe ich hierauf eingehe, will ich meinen früheren Beweis des erwähnten Satzes in einer etwas umgestalteten Form kurz reproduciren.

Wir denken uns zunächst die Transformation (11) durch Auflösung nach x', y', p', q' auf die Form gebracht:

$$(12)\quad \begin{cases} x' = f_1(z', z, x, y, p, q), \\ y' = f_2(\qquad\qquad), \\ p' = \varphi_1(\qquad\qquad), \\ q' = \varphi_2(\qquad\qquad), \end{cases}$$

und nachher jedes Paar von einander entsprechenden Flächen, $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x', y')$ durch z, z', x, y dargestellt, etwa so: $z = F(x, y)$, $z' = \overline{\Phi}(x, y)$. Die Differentialquotienten $\overline{\Phi}'(x)$, $\overline{\Phi}'(y)$ bezeichne ich mit π, $\varkappa$. Man hat dann:

$$(13)\qquad \pi = p' \frac{dx'}{dx} + q' \frac{dy'}{dx}, \qquad \varkappa = p' \frac{dx'}{dy} + q' \frac{dy'}{dy},$$

wo:

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{df_1}{dx} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + p \frac{\partial f_1}{\partial z} + r \frac{\partial f_1}{\partial p} + s \frac{\partial f_1}{\partial q} + \pi \frac{\partial f_1}{\partial z'} = \frac{d' f_1}{dx} + \pi \frac{\partial f_1}{\partial z'},$$

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{df_2}{dx} = \frac{\partial f_2}{\partial x} + p \frac{\partial f_2}{\partial z} + r \frac{\partial f_2}{\partial p} + s \frac{\partial f_2}{\partial q} + \pi \frac{\partial f_2}{\partial z'} = \frac{d' f_2}{dx} + \pi \frac{\partial f_2}{\partial z'},$$

$$\frac{dx'}{dy} = \frac{df_1}{dy} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + q \frac{\partial f_1}{\partial z} + s \frac{\partial f_1}{\partial p} + t \frac{\partial f_1}{\partial q} + \varkappa \frac{\partial f_1}{\partial z'} = \frac{d' f_1}{dy} + \varkappa \frac{\partial f_1}{\partial z'},$$

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{df_2}{dy} = \frac{\partial f_2}{\partial y} + q \frac{\partial f_2}{\partial z} + s \frac{\partial f_2}{\partial p} + t \frac{\partial f_2}{\partial q} + \varkappa \frac{\partial f_2}{\partial z'} = \frac{d' f_2}{dy} + \varkappa \frac{\partial f_2}{\partial z'}.$$

Die Gleichungen (13) gehen dann in die folgenden über:

$$(14)\quad \begin{cases} f = \pi\left(1 - \varphi_1 \frac{\partial f_1}{\partial z'} - \varphi_2 \frac{\partial f_2}{\partial z'}\right) - \varphi_1 \frac{d' f_1}{dx} - \varphi_2 \frac{d' f_2}{dx} = 0, \\ \varphi = \varkappa\left(1 - \varphi_1 \frac{\partial f_1}{\partial z'} - \varphi_2 \frac{\partial f_2}{\partial z'}\right) - \varphi_1 \frac{d' f_1}{dy} - \varphi_2 \frac{d' f_2}{dy} = 0, \end{cases}$$

und die Bestimmung der Flächenpaare: $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x', y')$ wird äquivalent mit der Bestimmung von Lösungen: $z = F(x, y)$, $z' = \overline{\Phi}(x, y)$ dieses Gleichungssystems $f = 0$, $\varphi = 0$.

Für die Herstellung dieser Lösungen verfahren wir ganz, wie wir in der 5. Nr. der Abh. im XVII. Bd. d. A., p. 285, in Betreff der Herstellung der Lösungen eines Systems von zwei Gleichungen zwischen z, x, y, p, q, z', p'; q' verfahren haben. Wir müssen durch die fraglichen Lösungen die Gleichung $[f\varphi]_{z'x\pi} = 0$ befriedigen. Diese Gleichung wird, wegen der speciellen Form der vorliegenden Gleichungen (14) in Bezug auf r, s, t, frei von den dritten Differentialquotienten u, v, w, ϖ von z. Desshalb werden die zwei Gleichungen:

$$\Big[f[f\varphi]\Big]_{z'x\pi} = 0, \qquad \Big[\varphi[f\varphi]\Big]_{z'x\pi} = 0$$

partielle Differentialgleichungen nur von der 3. O. in Bezug auf z, und eine Elimination von $z', \pi, \varkappa$ zwischen den Gleichungen (14), der Gleichung $[f(\varphi)]_{z'x\pi} = 0$ und den zuletzt aufgeschriebenen Gleichungen führt also auf zwei partielle Differentialgleichungen 3. O. zur Bestimmung der Gleichungen $z = F(x, y)$. Diese Gleichungen 3. O. sind so beschaffen, dass ihre ersten Derivirten in Bezug auf x, y sich auf nur drei von einander unabhängige Gleichungen reduciren. [Dies geht in derselben Weise hervor wie der ähnliche Satz in Bezug auf die Gleichungen (7) auf p. 290 d. A., Bd. XVII.] Aber darum gestatten jene Gleichungen 3. O. ∞^{∞} gemeinsame Integralflächen. Alle diese Integrale gehören unserem Gleichungssysteme (14) als die einen Theile $z = F(x, y)$ der Lösungen $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x, y)$ desselben an. Jedes der Integrale: $z = F(x, y)$ ergiebt durch Elimination von $z', \pi, \varkappa$ aus den drei Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$, $[f\varphi]_{z'x\pi} = 0$ diejenige Gleichung: $z' = \overline{\Phi}(x, y)$, die zusammen mit $z = F(x, y)$ eine Lösung von (14) bildet. Vermittelst (12) verwandelt man sie leicht in eine Gleichung $z' = \Phi(x', y')$. Alle solche Gleichungspaare wie $z = F(x, y)$, $z' = \Phi(x', y')$ repräsentiren zwei Flächen, die von der Transformation (12) in einander verwandelt werden. Jene Flächen entsprechen einander eindeutig. Es existirt auch eine eindeutige Beziehung zwischen den Elementen $(zxypqrst)$, $(z'x'y'p'q'r's't')$ derselben. Desshalb müssen nicht nur, wie gezeigt, die Flächen $z = F(x, y)$ zwei partiellen Differentialgleichungen 3. O. genügen, sondern auch die entsprechenden Flächen $z' = \Phi(x', y')$ müssen zwei partiellen Differentialgleichungen ebenfalls von der 3. O. als Integrale zugehören. Die erwähnte Beziehung von Elementen $(zxypqrst)$, $(z'x'y'p'q'r's't')$ ist als gegeben aufzufassen durch eine Berührungstransformation der 2. O., die jene zwei Paare von Gleichungen 3. O. in einander überführt. Sie ist aber keine Berührungstransformation der

1. O., keine gewöhnliche (Lie'sche) Berührungstransformation (nach Nr. 8.).

Sie würde aber eine Berührungstransformation 1. O. werden, falls eines der Paare von Gleichungen 3. O. ein erstes Integral mit einer arbiträren Constanten gestattete (vgl. Nr. 8.). Aber in solchem Falle würde die Transformation (12), — die jetzt eben die Berührungstransformation wäre, eine jede Fläche in eine Fläche überführen, und von einem Systeme von partiellen Differentialgleichungen, das die Flächen definirte, die sich wieder in Flächen transformiren lassen, könnte nun keine Rede sein (vgl. Nr. 9.).

15. Wenn z' in den Gleichungen (12) fehlt, so fehlt z' auch in den Gleichungen (14) und in der Gleichung $[f\varphi]_{z'x\pi} = 0$. Die Bestimmung der Gleichungen $z = F(x, y)$ wird alsdann durch eine partielle Differentialgleichung der 2. O. bewirkt, die sich durch Elimination von π, $\varkappa$ zwischen den genannten Gleichungen (14) und der Gleichung $[f\varphi]_{z'x\pi} = 0$ ergiebt. Jeder der Integralflächen dieser partiellen Differentialgleichung 2. O. entspricht vermöge (12) ein involutorisches Paar von partiellen Differentialgleichungen der 1. O. in r', oder deren Integralflächen: $z' = \Phi(x', y', C)$. Jedem Elemente $(zxypqrst)$ jener partiellen Differentialgleichung 2. O. entspricht nunmehr eine Schaar von ∞^1 Elementen $(z'x'y'p'q'r's't')$. Dagegen brauchen nicht einem der letzteren Elemente ∞^1 der ersteren zu entsprechen. Einer Fläche $z' = \Phi(x', y')$ entspricht im Allgemeinen nur eine Fläche $z = F(x, y)$. Die Flächen $z' = \Phi(x', y')$ befriedigen im Allgemeinen ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen der 3. O. Wenn aber in den Gleichungen (12) nicht nur z' sondern auch z fehlt, so hat man nicht nur für die Flächen $z = F(x,y)$ eine partielle Differentialgleichung von der 2. O., sondern auch für die Flächen $z' = \Phi(x', y')$ eine partielle Differentialgleichung derselben 2. O. Jedem Elemente $(zxypqrst)$ bez. $(z'x'y'p'q'r's't')$ einer dieser Gleichungen 2. O. entspricht eine ganze Schaar von ∞^1 derartigen Elementen der anderen Gleichung. Jeder Integralfläche $z = F(x, y)$ entsprechen ∞^1 Integralflächen $z' = \Phi(x', y')$, und jeder der letzteren Flächen ∞^1 der ersteren.

16. Wenn in unseren Transformationsgleichungen z' fehlt, so erhält man die Flächen in r', die einer Integralfläche $z = F(x, y)$ der bezüglichen Gleichung 2. O. entsprechen, durch blosse Quadraturen. Man führe nämlich in die Gleichungen (12) für z, p, q die Werthe $F(x, y)$, $F'(x)$, $F'(y)$ resp. ein, und erhält alsdann zuerst nach Elimination von x, y : $p' = \psi_1(x', y')$, $q' = \psi_2(x', y')$, und hierauf die Gleichung der entsprechenden Flächenschaar durch Ausführung der Quadratur:

$$z' = \int (\psi_1(x', y')\, dx' + \psi_2(x', y')\, dy').$$

17. Aber, im Allgemeinen, wenn die Transformation (11) irgend eine Fläche $z = f(x, y)$ des Gebietes r in ∞^1 Flächen des Gebietes r' verwandelt, so werden die letzteren Flächen *nicht* durch blosse Quadraturen erhalten. Man hat nämlich in erster Hand, wenn man in (11) $z = f(x, y)$, $p = f'(x)$, $q = f'(y)$ substituirt und x, y eliminirt, zwei partielle Differentialgleichungen der 1. O.:

$$(15) \qquad A(z', x', y', p', q') = 0, \quad B(z', x', y', p', q') = 0,$$

die der Fläche $z = f(x, y)$ entsprechen und nach der für die Transformation gemachten Voraussetzung involutorisch sind. Ihre gemeinsamen Integralflächen mögen für den Augenblick mit $C, C', C'', \ldots$ bezeichnet werden. Einem jeden Elemente $(z\, x\, y\, p\, q)$ der Fläche $z = f(x, y)$ entsprechen ∞^1 Elemente $(z'\, x'\, y'\, p'\, q')$, von denen eines auf C, eines auf C', u. s. w. liegt. Diese letzteren Elemente können nun als einander entsprechende Elemente der Flächen C, C', C'' u. s. w. aufgefasst werden. Zwei unendlich benachbarten Elementen der Fläche $z = f(x, y)$ entsprechen ∞^1 Paare von vereinigt liegenden Elementen $(z'\, x'\, y'\, p'\, q')$, von denen eines zu C, eines zu C', u. s. w. gehört. Desshalb müssen je zwei vereinigt liegenden Elementen von (15) ∞^1 Paare von vereinigt liegenden Elementen derselben Gleichungen (15) entsprechen. Eine infinitesimale Berührungstransformation des Gleichungssystems (15) in sich selbst, die eben als Punkttransformation betrachtet werden kann, muss sich also folgenderweise ergeben: Indem man die Gleichungen (11) differentiirt, und dabei die Grössen z, x, y, p, q als Constanten betrachtet, erhält man $\delta x', \delta y', \delta z', \delta p', \delta q'$ proportional gewissen determinirten Functionen von $z', x', y', p', q', z, x, y, p, q$. Es werden z, x, y, p, q, p', q' vermöge (11) und der Gleichungen: $z = f(x,y)$, $p = f'(x)$, $q = f'(y)$ eliminirt. So bekommt man die fragliche Transformation ausgedrückt durch Gleichungen der Form:

$$\delta x' = \varepsilon\psi A', \quad \delta y' = \varepsilon\psi B', \quad \delta z' = \varepsilon\psi C', \quad \delta p' = \varepsilon\psi D', \quad \delta q' = \varepsilon\psi E',$$

wo $A', B', \ldots, E'$ die eben aus (11) und $z = f(x, y)$ hergeleiteten ganz bestimmten Functionen von x', y', z'; ψ eine noch unbekannte Function derselben Grössen und ε eine unendlich kleine Constante bedeuten. ψ hat man aber folgenderweise zu bestimmen. Die fragliche Transformation soll (d. A., Bd. XV, p. 51) durch eine Function Φ:

$$(16) \qquad \Phi = \psi(A'p' + B'q' - C')$$

bestimmt sein, und man muss

$$\delta p' = -\varepsilon\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x'} + p'\frac{\partial\Phi}{\partial z'}\right), \qquad \delta q' = -\varepsilon\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'} + q'\frac{\partial\Phi}{\partial\,'}\right)$$

haben. Die zwei Gleichungen:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x'} + p'\frac{\partial\Phi}{\partial z'} = -\psi D', \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y'} + q'\frac{\partial\Phi}{\partial z'} = -\psi E',$$

in die man sich für p', q' ihre Werthe aus (15) oder (11) eingeführt zu denken hat, werden zwei partielle Differentialgleichungen 1. O. für ψ. Wird ϖ statt $\log\psi$ gesetzt, so nehmen diese Gleichungen die Form an:

$$(17)\quad \begin{cases} u\dfrac{\partial\varpi}{\partial x'}+v\dfrac{\partial\varpi}{\partial y'}+w\dfrac{\partial\varpi}{\partial z'}=1,\\ u'\dfrac{\partial\varpi}{\partial x'}+v'\dfrac{\partial\varpi}{\partial y'}+w'\dfrac{\partial\varpi}{\partial z'}=1,\end{cases}$$

wo u, v, w, u', v', w' ganz bestimmte Functionen von x', y', z' sind. Diese zwei Gleichungen müssen eine Lösung ϖ gemein haben, denn es muss nach dem nächstvorher Erörterten eine durch (16) charakterisirte infinitesimale Punkttransformation der Gleichungen (15) existiren. Und eine solche Transformation giebt ϖ stets in der Form: $\varpi=\varpi(x',y',z')$ $+$ eine arb. Funct. von φ, wenn $\varphi=C$ die Gleichung der Schaar von Integralflächen von (15) bedeutet.

Desshalb, wenn die erste der Gleichungen (17) durch $A(\varpi)=1$, die zweite durch $B(\varpi)=1$ kurz bezeichnet wird, muss von den drei Gleichungen

$$A(\varpi)=1,\quad B(\varpi)=1,\quad A(B(\varpi))-B(A(\varpi))=0$$

die letzte mit den zwei ersteren stets zugleich erfüllt sein.

Demnach erhält man einen Werth von ϖ und hierauf von ψ, vermittelst der Formel $\varpi=\log\psi$, erst durch Integration einer Differentialgleichung (mit einem arbiträren Parameter)

$$\alpha(x,y)dx+\beta(x,y)\,dy=0.$$

Die Bestimmung einer infinitesimalen Berührungstransformation, welche die Integralschaar unserer involutorischen partiellen Differentialgleichungen 1. O. in sich überführt, ist somit im Allgemeinen mit denselben Schwierigkeiten behaftet wie die Bestimmung jener Integralschaar selbst. Auch ist unsere Frage in keiner wesentlichen Weise verschieden von der von der Bestimmung der Lösungen von irgendwelchen zwei involutorischen partiellen Differentialgleichungen 1. O., da man ja immer zwei Gleichungen:

$$F_1(z,x,y,z',x',y',p',q')=0,\quad F_2(z,x,y,p,q,z',x',y',p',q')=0$$

beliebig hinschreiben kann, die mit den vorgelegten partiellen Differentialgleichungen eben ein System (11) ausmachen.

18. Die Involutionsbedingung für die beiden einer Fläche $z=f(x,y)$ vermittelst (11) entsprechenden partiellen Differentialgleichungen 1. O. lautet nach d. A. Bd. XVII, p. 312, Gleichung (26), so:

$$(34)\,[F_1F_2]_{z'x'p'}+(42)\,[F_1F_3]_{z'x'p'}+(23)\,[F_1F_4]_{z'x'p'}$$
$$+(12)\,[F_3F_4]_{z'x'p'}+(13)\,[F_4F_2]_{z'x'p'}+(14)\,[F_2F_3]_{z'x'p'}=0,$$

wo $[F_mF_n]_{z'x'p'}$ das gewöhnliche Involutionszeichen, (mn) der Kürze wegen statt

$$\frac{dF_m}{dx}\frac{dF_n}{dy} - \frac{dF_m}{dy}\frac{dF_n}{dx}$$

$(m, n = 1, 2, 3, 4)$ geschrieben ist. Ist die Transformation (11) von der Form:

$$(18) \qquad \begin{cases} x' = f_1(z, x, y, p, q), \\ y' = f_2(\qquad\qquad), \\ p' = f_3(\qquad\qquad), \\ q' = f_4(\qquad\qquad), \end{cases}$$

so nimmt jene Bedingungsgleichung die einfachere Gestalt an:

$$(13) + (24) = 0.$$

Sie wird eine partielle Differentialgleichung der 2. O.:

$$(19) \qquad Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E = 0,$$

wo $A, B, \cdots, E$ Functionen von x, y, z, p, q sind. *Sie ist die allgemeinste Gleichung* 2. *O. jener Form*, denn wenn $A, B, \cdots, E$ gegeben sind, so hat man, was für Functionen von x, y, z, p, q sie auch sein mögen, nur vier Gleichungen, deren bekannte Glieder $\frac{A}{E}$, $\frac{B}{E}$, $\frac{C}{E}$, $\frac{D}{E}$ sind, zur Bestimmung der vier Functionen f_1, f_2, f_3, f_4. Das Flächensystem in r', das den Integralflächen jener partiellen Gleichung 2. O. entspricht, wird durch zwei partielle Differentialgleichungen der 3. O., von deren ersten Derivirten in Bezug auf x', y' die eine eine algebraische Folge der drei andern ist, gegeben. *Das Integralsystem dieses Gleichungspaares wird folglich, nach der* 16. *Nummer, durch Lösung einer partiellen Differentialgleichung* 2. *O.* (19) *und Ausführung von Quadraturen erhalten.*

19. *Fehlt z in den Functionen f der Gleichungen* (18) *so fehlt z auch in den Functionen $A, B, \cdots, E$ der Gleichung* (19), und statt des erwähnten Paares von Gleichungen 3. O. hat man, wie in Nr. 15. bemerkt wurde, eine partielle Differentialgleichung von der nämlichen Form wie (19). Sie wird insbesondere mit der Gleichung (19) selbst identisch ausfallen, wenn das Gleichungssystem (18) bei Vertauschung der accentuirten und unaccentuirten Buchstaben mit einander unverändert bleibt. Dann ist jene Gleichung (19) in der Weise ausgezeichnet, dass durch die genannte Transformation (18) jede Integralfläche derselben in ∞^1 andere Integralflächen umgeformt wird. Die Integralflächen der Gleichung ordnen sich in Folge dessen zu Paaren von je ∞^1 Flächen zusammen, wo die beiden Schaaren eines Paares so auf einander bezogen sind, dass sie durch die vorliegende Transformation in einander übergehen. Die Transformation ist, in so weit sie eine Flächentransformation bildet, eine eindeutige Transformation

zwischen Werthsystemen $(x\,y\,p\,q)$, $(x'\,y'\,p'\,q')$, ebenso wie zwischen $(x\,y\,p\,q\,r\,s\,t)$, $(x'\,y'\,p'\,q'\,r'\,s'\,t')$, u. s. w.

20. Einen anderen Fall, in dem die Flächen, für welche eine Transformation (11) eine Flächentransformation wird, eine partielle Differentialgleichung 2. O. erfüllen, muss ich auch erwähnen. Er bezieht sich auf die Theorie der Flächen von constanter Krümmung, wie diese neuerdings von Bianchi und Lie*) entwickelt worden ist. Bianchi's und Lie's Theorien verdanken ihren Ursprung dem Satze, dass die Fläche der Krümmungscentra (die Centrafläche) irgend einer Fläche, deren Hauptkrümmungsradien in einem Punkte eine von der Lage des Punktes unabhängige constante Differenz besitzen, eine Fläche von constanter Krümmung ist, oder richtiger, aus zwei Flächen von derselben constanten Krümmung besteht. Nun wird durch die Gleichungen:

$$(20)\qquad \begin{cases} (x'-x)\,p+(y'-y)\,q-(z'-z)=0, \\ (x'-x)\,p'+(y'-y)\,q'-(z'-z)=0, \\ \qquad\qquad 1+pp'+qq'=0 \end{cases}$$

der Zusammenhang zwischen einer Fläche $z=f(x,y)$, $p=f'(x)$, $q=f'(y)$ und der allgemeinsten anderen Fläche $z'=\varphi(x',y')$, $p'=\varphi'(x')$, $q'=\varphi'(y')$ ausgedrückt, die zusammen mit der vorigen eine Centrafläche (irgend einer Fläche) bilden kann. Denn jene Gleichungen sagen nur aus, dass die Punkte der beiden Flächen $z=f(x,y)$, $z'=\varphi(x',y')$ so zusammengeordnet werden können, dass sie Berührungspunkte einer gemeinsamen Tangente der beiden Flächen werden, und dass die Tangentenebenen der beiden Flächen in jenen Punkten auf einander senkrecht stehen. Je zwei zusammengehörige Punkte werden die beiden Hauptkrümmungscentra eines Punktes einer Fläche, welche die beiden Flächen $z=f(x,y)$, $z'=\varphi(x',y')$ zur Centrafläche hat.

Jene Gleichungen (20) repräsentiren eine Flächentransformation (3)**). Fügen wir die Gleichung:

$$(21)\qquad (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=\frac{1}{a^2}$$

hinzu, so haben wir durch (20), (21) die Bedingung dafür ausgedrückt, dass das Flächenpaar $z=f(x,y)$, $z'=\varphi(x',y')$ die Centrafläche einer

---

*) Lie: Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung. Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bdd. 4, 5 (Hefte 3). Kristiania, 1879, 1880. Bianchi's Untersuchungen kenne ich meistens nur aus den Arbeiten von Lie. — Die folgende Transformation (20), (21) ist von Lie als der analytische Ausdruck von Bianchi's Transformation der Flächen von constanter Krümmung angeführt.

**) Die Gleichungen, die den Zusammenhang zwischen einer Fläche und ihrer Centrafläche ausdrücken, bestimmen eine Flächentransformation von der von mir im XI. Bde. d. A. p. 199, § 3. besprochenen Art.

Fläche bildet, für welche die Differenz der Hauptkrümmungsradien in einem Punkte constant $= \frac{1}{a}$ ist $\left[\varrho - \varrho' = \frac{1}{a}\right]$. Die vier Gleichungen (20), (21) sind von der Form (11). Um zu erkennen, für welche Flächen in $r(xyz)$ sie eine Flächentransformation begründen, haben wir erst die für den vorliegenden Fall geltende Form der am Anfange der 18. Nr. hingeschriebenen Involutionsgleichung aufzustellen. Man hat zu setzen:

$$[F_2 F_2]_{z'x'p'} = 0, \quad [F_1 F_3]_{z'x'p'} = 1 + p^2 + q^2, \quad [F_1 F_4]_{z'x'p'} = 0,$$
$$[F_1 F_3]_{z'x'p'} = 0, \quad [F_2 F_4]_{z'x'p'} = -\frac{2}{a^2}, \quad [F_3 F_4]_{z'x'p'} = 0,$$
$$(24) = 2(1 + p^2 + q^2)(1 + p'^2 + q'^2)\frac{y' - y}{p' - p},$$
$$(13) = -(rt - s^2)(1 + p'^2 + q'^2)\frac{y' - y}{p' - p},$$

und die fragliche Bedingungsgleichung nimmt dann folgende Form an:

$$rt - s^2 + a^2(1 + p^2 + q^2)^2 = 0. \tag{22}$$

Sie ist unabhängig von z', x', y', p', q'. Alle Integralflächen derselben werden daher durch die Transformation (20), (21) in Schaaren von je ∞^1 Flächen verwandelt. Und weil das System der Transformationsgleichungen symmetrisch in Bezug auf die accentuirten und nicht-accentuirten Buchstaben ist, so müssen die transformirten Flächen, die in r', dieselbe Gleichung (22) erfüllen. Sie stellt aber die allgemeinste Fläche von der constanten Krümmung $\frac{1}{R'R} = -a^2$ dar. Deshalb werden die Flächen von dieser constanten Krümmung durch die Transformation (20), (21) in einander übergeführt; — wie gleich aus dem anfangs citirten Satze zu schliessen war.

Somit folgt (Nr. 17.), *dass man durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit zwei Variablen (und einem arbiträren Parameter) die ∞^1 Flächen zu bestimmen hat, die einer gegebenen Fläche von der constanten Krümmung $-a^2$ in der Art entsprechen, dass jede derselben mit der gegebenen Fläche eine Centrafläche einer Fläche $\varrho - \varrho' = \frac{1}{a}$ bildet.* Aus jeder dieser ∞^1 Flächen gewinnt man in derselben Weise neue Flächen von constanter Krümmung, u. s. w. *So dass man durch fortgesetzte Integrationen von Differentialgleichungen mit zwei Variablen aus einer Fläche von constanter Krümmung unendlich viele andere als die ∞^1 erstgenannten Flächen von derselben constanten Krümmung muss herleiten können.**)

*) Nach Lie (siehe die oben citirten Arbeiten) erhält man in dieser Weise aus einer gegebenen Fläche ∞^∞ Flächen von constanter Krümmung. — Sind die geodätischen Curven der gegebenen Fläche bekannt, so erhält man, nach Bianchi und Lie, die neuen Flächen durch blosse Quadraturen.

Durch eine jede Transformation (11) wird ein Streifen in r in ∞^1 Streifen in r' umgeformt, welche die gemeinsamen Integrale derjenigen drei partiellen Differentialgleichungen 1. O. sind, die durch Elimination von x, y, z, p, q aus (11) und den Gleichungen des gegebenen Streifens entspringen. Ein Streifen einer Fläche der constanten Krümmung $-a^2$ wird also vermittelst der Transformation (20), (21) zu ∞^1 Streifen führen, die auf je einer der ∞^1, der vorgelegten Fläche entsprechenden Flächen verlaufen. Demzufolge wird jede *Charakteristik* von (22) in ∞^1 andere *Charakteristiken* derselben Gleichung verwandelt. Diese anderen sind aus der ersteren durch blosse Eliminationen zu gewinnen, falls die ∞^1 Flächen bekannt sind, die einer durch jene erste Charakteristik zu legenden Fläche von der constanten Krümmung $-a^2$ entsprechen.

Nun sind die Charakteristiken von (22) die Haupttangentencurven der Integralflächen der Gleichung. Folglich: *Aus einer Fläche von constanter Krümmung, deren Haupttangentencurven bekannt sind, leitet man durch die oben erwähnten Operationen ∞ andere Flächen derselben Krümmung mit ihren Haupttangentencurven her.*

21. Eine Consequenz des Vorangehenden, welche die Bestimmung der geodätischen Curven einer Fläche von constanter Krümmung anbetrifft, möchte ich nicht unberührt lassen. Aus einer Fläche von constanter Krümmung leitet man, wir oben gezeigt, ∞^1 andere Flächen von derselben constanten Krümmung ab. Ich wähle eine von ihnen beliebig aus. Sie bildet mit der ersten Fläche die Centrafläche einer Schaar von Parallelflächen. Dieselben werden durch zwei involutorische partielle Differentialgleichungen 1. O. bestimmt. Aber für die Integrale dieser Gleichungen ist eine infinitesimale Berührungstransformation bekannt, nämlich die Paralleltransformation. Deshalb werden jene Integralflächen durch blosse Quadraturen erhalten. Entsprechend den ∞^1 Flächen, die durch die Transformation (20), (21) aus der ersten Fläche von constanter Krümmung abgeleitet werden, erhält man in dieser Weise ∞^2 Flächen $\left(\varrho - \varrho' = \frac{1}{a}\right)$, welche die erstere Fläche zur einen Schale ihrer Centraflächen besitzen. Sie bilden eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung 1. O., welche die allgemeinste Fläche definirt, für welche jene Fläche von constanter Krümmung einen Theil der Centrafläche bildet. Nun gilt aber stets folgender Satz: Wenn die Normalen einer zweifach unendlichen Schaar von Flächen einen Liniencomplex bilden, und wenn $f(x, y, z, \lambda) = 0$ ∞^1 von diesen Flächen darstellt, und dieselben keine Parallelflächen sind, so werden die auf diesen Flächen verlaufenden Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung 1. O., welche die supponirte zweifach unendliche Flächenschaar zu Integralen hat, durch die Gleichungen bestimmt:

$$f(x, y, z, \lambda) = 0, \quad [f'(x)]^2 + [f'(y)]^2 + [f'(z)]^2 = C[f'(\lambda)]^2,$$

wo C eine arbiträre Constante ist*).

Und weiter wissen wir, dass die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung 1. O., deren Integralflächen eine gegebene Fläche zum einen Theil ihrer Centraflächen haben, so dass die Normalen jener

---

*) Ich habe diesen Satz aus meiner Abhandlung über Kugelcomplexe in der Jahresschrift der Universität Lund T. IX. entlehnt. Da er aber dort nur beiläufig, ohne Beweis angegeben worden ist, so schreibe ich hier den Beweis hin. Sei $f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$ die Gleichung einer Schaar von ∞^2 Flächen, deren Normalen einem gegebenen Liniencomplex zugehören, und seien λ, μ so gewählt, dass bei constantem λ jene Gleichung eine Schaar von Parallelflächen repräsentirt. Die einer Fläche $f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$ unendlich nahe liegende Parallelfläche wird durch Elimination von x, y, z zwischen $f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$ und den Gleichungen:

$$x' = x + \varepsilon \frac{f'(x)}{\sqrt{[f'(x)]^2 + [f'(y)]^2 + [f'(z)]^2}},$$

$$y' = y + \varepsilon \frac{f'(y)}{\sqrt{[f'(x)]^2 + [f'(y)]^2 + [f'(z)]^2}},$$

$$z' = z + \varepsilon \frac{f'(z)}{\sqrt{[f'(x)]^2 + [f'(y)]^2 + [f'(z)]^2}}$$

oder

$$x = x' - \varepsilon \frac{f'(x')}{\sqrt{[f'(x')]^2 + [f'(y')]^2 + [f'(z')]^2}},$$

$$y = y' - \varepsilon \frac{f'(y')}{\sqrt{[f'(x')]^2 + [f'(y')]^2 + [f'(z')]^2}},$$

$$z = z' - \varepsilon \frac{f'(z')}{\sqrt{[f'(x')]^2 + [f'(y')]^2 + [f'(z')]^2}}$$

(ε eine unendlich kleine Constante)

erhalten. Demnach hat man jene Parallelfläche ausgedrückt durch die Gleichung

$$f - \varepsilon \sqrt{[f'(x)]^2 + [f'(y)]^2 + [f'(z)]^2} = 0,$$

wenn die Accente der Buchstaben x, y, z weggelassen werden. Andererseits ist die Gleichung dieser Parallelfläche von der Form:

$$f + d\mu f'(\mu) = 0.$$

Daher:

$$d\mu\, f'(\mu) = -\varepsilon \sqrt{[f'(x)]^2 + [f'(y)]^2 + [f'(z)]^2}.$$

Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung 1. O., die unsere zweifach unendliche Flächenschaar zum vollständigen Integralsysteme hat, werden durch die Gleichung:

$$f'(\lambda) + c f'(\mu) = 0$$

bestimmt. Hier ist c eine arbiträre Constante. Wird nun für $f'(\mu)$ sein obiger Werth gesetzt, so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$\sqrt{[f'(x)]^2 + [f'(y)]^2 + [f'(z)]^2} = C f'(\lambda),$$

womit der fragliche Satz bewiesen ist.

Flächen sämmtlich die gegebene Fläche berühren, also einen speciellen Liniencomplex bilden, Krümmungscurven auf den Integralflächen sind. Diese werden also in der genannten Weise aus den Integralflächen der partiellen Differentialgleichung 1. O. durch Differentiationen und Eliminationen erhalten.

Folglich leitet man aus den anfangs gewonnenen ∞^1 Flächenschaaren $\varrho - \varrho' = \frac{1}{a}$ durch rein algebraische Operationen die eine Schaar der Krümmungscurven derselben ab. Hierauf erhält man weiter durch ebenfalls rein algebraische Operationen die ihnen entsprechenden ∞^2 geodätischen Curven der zuerst gewählten Fläche von constanter Krümmung. *Die geodätischen Curven einer Fläche von constanter negativer Krümmung lassen sich also durch Integration einer Differentialgleichung* $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) =$ *einer arb. Constante (und nachherige Quadraturen) finden.*

[Ich verdanke es einer zufälligen Bemerkung von Lie über die geodätischen Curven der Flächen von constanter Krümmung, dass ich eine im Manuscripte eingeflossene darauf bezügliche Irrung hier habe beseitigen können.]