Ueber Flächen dritter Ordnung*).

(Dazu gehören mehrere lithographirte Tafeln.)

Von Felix Klein in Erlangen.

Wenn eine Curve mit Doppelpunkten gezeichnet vorliegt, so kann man aus ihr Curven derselben Ordnung ohne Doppelpunkt oder mit weniger Doppelpunkten schematisch ableiten, indem man die in den Doppelpunkten oder einigen derselben zusammenstossenden Curvenäste durch ähnlich verlaufende, sich nicht treffende ersetzt. Nach diesem ebenso einfachen als fruchtbaren Principe**) erhält man z. B. ohne Weiteres die beiden Grundformen der ebenen Curven dritter Ordnung, wenn man von der Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte ausgeht und letzteren in dem einen oder anderen Sinne auflöst; man erhält Beispiele von Curven beliebiger Ordnung, wenn man als besondere Curve eine solche zeichnet, die in lauter gerade Linien zerfallen ist, und auf deren Doppelpunkte den bewussten Process anwendet.

Ein ähnliches Verfahren ist im Raume anwendbar, wenn es sich darum handelt, von den Flächen höherer Ordnung eine Anschauung zu gewinnen. Man construirt eine besondere Fläche derselben Ordnung, die mit einzelnen Knotenpunkten oder auch mit Doppelcurven behaftet sein mag, und leitet aus ihr eine allgemeinere dadurch ab, dass man die an die singulären Stellen hinantretenden Flächentheile durch ähnlich verlaufende ersetzt***).

*) Vergl. eine vorläufige Mittheilung in den Berichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. Sitzung vom 5. Mai 1873.

**) Wer dieses Princip zuerst verwerthet hat, lässt sich bei dessen grosser Selbstverständlichkeit wohl kaum feststellen. Dem Verf. ist dasselbe, sowie namentlich das Beispiel der Erzeugung einer Curve n^{ter} Ordnung aus n geraden Linien, von Plücker her bekannt: vergl. z. B. dessen Theorie der algebraischen Curven (1839), in welcher fortwährend ähnliche Ueberlegungen angewandt werden.

***) Fast noch interessanter sind die Anwendungen, die man von demselben Principe in dualistischem Sinne auf Curven oder Flächen gegebener *Classe* machen kann, da man von den bei diesen Curven und Flächen auftretenden Gestalten seither nur erst eine sehr unvollkommene Kenntniss hat. Man hat sich an

Indem ich auf diese Art versuchte, mir eine grössere Zahl von Flächen dritter Ordnung zu construiren, bemerkte ich, dass die Methode bei ihnen, wie bei den Curven dritter Ordnung, *fast ohne Weiteres überhaupt alle Gestalten ergiebt.* Ich gehe dabei von der Fläche dritter Ordnung mit vier reellen Knotenpunkten als speciellem Falle aus. Eine solche Fläche ist leicht herzustellen, da sie vollständig bestimmt ist, wenn man das durch die Knotenpunkte gebildete Tetraeder und die Ebene der drei auf der Fläche verlaufenden einfachen Geraden beliebig annimmt (vergl. die Beschreibung eines Modells, das Herr Neesen angefertigt hatte. Gött. Nachrichten. Aug. 1872, sowie § 1. des Folgenden). Ueberdies hat die Fläche für den hier vorliegenden Zweck den Vorzug, dass sie nur in einer Art existirt, indem jede solche Fläche in jede andere durch reelle Collineation übergeführt werden kann, dass ferner ihre Knotenpunkte unter einander gleichwerthig sind, weil die Fläche Collineationen in sich selbst besitzt, vermöge deren sich die Knotenpunkte beliebig vertauschen lassen.

Einen Knotenpunkt mit reellem Tangentenkegel kann man in zwei wesentlich unterschiedenen Weisen auflösen. Entweder man *verbindet* die in demselben zusammenstossenden Flächentheile, so dass in der neuen Fläche an Stelle des Knotenpunktes ein dünner Ast mit hyperbolischer Krümmung sich findet, oder man *trennt* dieselben von einander, so dass in der neuen Fläche zwei verschiedene Flächentheile mit elliptischer Krümmung einander gegenüber stehen. Am deutlichsten sind die beiden Processe vorzustellen, wenn man den reellen Kegel zweiter Ordnung als Uebergangsfall zwischen einem einschaligen und einem zweischaligen Hyperboloide auffasst.

Diese beiden Processe kann man nun an jedem der vier Knotenpunkte der zu Grunde gelegten Fläche beliebig anwenden. Man erhält dadurch eine Reihe von Flächen mit weniger als vier Knotenpunkten, insbesondere von Flächen ohne Knotenpunkt. Und es soll nun im Folgenden gezeigt werden, *dass durch die so erzeugten Flächen die Flächen mit reellen Knotenpunkten, insbesondere diejenigen ohne Knotenpunkt in gewissem Sinne vollständig repräsentirt sind.* Wenn wir bei diesen Erörterungen uns auf solche Flächen beschränken, welche getrennte conische Knotenpunkte oder gelegentlich einfache biplanare Punkte besitzen, und auch bei diesen nur solche Fälle berücksichtigen, in denen die singulären Punkte reell sind, so geschieht es der Uebersichtlichkeit wegen: die Flächen mit höheren biplanaren

der Erkenntniss, dass bei diesen Gebilden Alles in dualistischem Sinne gerade so ist, wie bei den Gebilden der betreffenden Ordnung, seither wohl zu sehr genügen lassen und ist nur zu wenig zu einem concreten Erfassen der damit bezeichneten wirklichen Verhältnisse durchgedrungen.

Punkten oder uniplanaren Punkten, sowie die Flächen mit imaginären Singularitäten lassen sich aus den im Folgenden allein betrachteten ebenfalls durch continuirliche Aenderung der Gestalt in durchaus anschaulicher Weise gewinnen.

Die Eintheilung der Flächen dritter Ordnung nach ihrer Gestalt, wie sie sich aus diesen Betrachtungen ergiebt, fällt für die Flächen ohne Knoten genau mit derjenigen zusammen, welche Schläfli nach der Realität der geraden Linien getroffen hat*), während sie sich für die Flächen mit Knotenpunkten in dieselbe zum mindesten einordnet. Der Grund für diese Uebereinstimmung liegt, ganz allgemein gesagt, darin, dass bei den Flächen dritter Ordnung das Zusammenfallen von Geraden und das Auftreten von Knotenpunkten gegenseitig an einander geknüpft sind. Aus demselben Grunde stimmen die Flächen der von uns unterschiedenen Arten auch noch mit Bezug auf andere Eigenschaften überein. Es genügt dann immer, diese Eigenschaften an einer einzelnen möglichst bequem gewählten Fläche zu verfolgen.

In diesem Sinne sollen in den §§ 10.—14. die Flächen mit 27 reellen Geraden einer näheren Untersuchung unterworfen werden. Unter der grossen Reihe gemeinsamer Eigenschaften gerade dieser Flächen sei vor Allem hervorgehoben, dass dieselben immer ein reelles *Pentaeder* besitzen, dessen Seitenflächen sich näherungsweise angeben lassen, wenn die 27 Geraden als bekannt vorausgesetzt werden. Es sind hierdurch die Gleichung 5^{ten} Grades, von der die Pentaederebenen abhängen, und die Gleichung 27^{sten} Grades, welche die Linien bestimmt, in eine sehr merkwürdige Beziehung gesetzt.

Die Bestimmung der Gestalten aller Flächen dritten Grades mag als Beitrag zu einer allgemeinen Theorie aufgefasst werden, welche von den Gestalten algebraischer Flächen überhaupt handelt. Es sind mit Bezug auf letztere in § 15. einige sich leicht darbietende Sätze aufgestellt worden. Sodann erörtere ich in den letzten Paragraphen gewisse Beziehungen, welche diese Untersuchungen zu der sog. Analysis situs besitzen.

In einer neueren Arbeit**) hat nämlich Hr. Schläfli, ausgehend von der Fläche dritten Grades ohne Knoten, die in zwei getrennte Theile zerfallen ist (nach seiner, wie nach der im Folgenden eingehaltenen Aufzählung, die *fünfte* Art), die übrigen Flächen ohne Knoten nach ihrem *Zusammenhange* im Riemann'schen Sinne untersucht.

---

*) On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species etc. Philosophical Transactions, t. 153 (1863), p. 193.

**) Quand' è che dalla superficie generale di terz' ordine si stacca una parte che non sia realmente segata da ogni piano reale? Annali di Matematica, t. V., p. 289.

Eine Anwendung der Riemann'schen Vorstellungen auf Gebilde der projectivischen Geometrie scheint mir wegen der verschiedenartigen Auffassung des Unendlich-Weiten, die man in den gewöhnlichen Untersuchungen der Analysis situs einerseits, in der projectivischen Geometrie andererseits zu Grunde legt, nicht ohne vorherige Erörterung einer Reihe fundamentaler Punkte gestattet, die ich bei dieser Gelegenheit wenigstens habe bezeichnen wollen, wenn ich auch nicht im Stande war, dieselben zu erledigen.

§ 1.

Ueber ein Modell einer Fläche dritter Ordnung mit vier reellen Knotenpunkten.

Die Eigenschaften der Flächen dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten sind in neuerer Zeit wiederholt untersucht worden, so dass sie als wesentlich bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Es sei daher nur an die Lage der 27 Geraden der Fläche erinnert. Von denselben fallen 24 in die als Gerade der Fläche vierfach zählenden Kanten des Knotenpunkt-Tetraeders. Die drei übrigen liegen in einer beliebig anzunehmenden Ebene und bilden die Diagonalen des Vierseits, in welchem dieselbe von den Tetraederflächen geschnitten wird.

Es mögen jetzt die vier Knotenpunkte insbesondere reell vorausgesetzt sein. Dann besteht die Fläche, von der durch das Unendlich-Ferne erfolgenden Trennung abgesehen, aus zwei zusammenhängenden Theilen, welche nur in den vier Knotenpunkten zusammenstossen. Von denselben ist der eine nirgends hyperbolisch, der andere nirgends elliptisch gekrümmt. Denn die parabolische Curve der Fläche besteht *doppeltzählend* aus den sechs Tetraederkanten, und es wird also ein Uebergang von elliptischer zu hyperbolischer Krümmung nur beim Durchsetzen eines Knotenpunktes, nicht beim Ueberschreiten der parabolischen Curve stattfinden.

Um eine concrete Anschauung von der Gestalt, welche eine solche Fläche besitzt, zu vermitteln, sei hier die Beschreibung eines Modells derselben gegeben, das Hr. Weiler auf meinen Wunsch anfertigte, und auf welches sich die ebenfalls von Hrn. Weiler entworfene Zeichnung auf Tafel I. bezieht. Die vier Knotenpunkte bilden in demselben ein gleichseitiges Tetraeder, dessen eine Seitenfläche horizontal gestellt und nach oben gekehrt ist. Der elliptische Theil der Fläche fällt nahe mit dem von den vier Knoten begrenzten endlichen Tetraeder zusammen und weicht nur dadurch von demselben ab, dass statt der ebenen Begrenzungen convexe Partieen auftreten. Der hyperbolische Theil setzt sich nach aussen an die vier Knotenpunkte an und breitet sich von diesen ab wesentlich horizontal aus, so dass er die unendlich ferne Ebene in einem symmetrischen Curvenzuge schneidet, der drei auf einer Horizontalen gelegene Wendungen besitzt. Durch diese Symmetrieverhältnisse ist ersichtlich der untere Knotenpunkt, wiewohl nicht in projectivischem Sinne, ausgezeichnet. Weiter unterhalb desselben, um die Höhe des Knotenpunkttetraeders von ihm entfernt, befindet sich in horizontaler Lage die Ebene der einfach zählenden Geraden; die geraden Linien in ihr bilden ein gleichseitiges Dreieck.

Es wurde bereits hervorgehoben, dass die Fläche dritter Ordnung mit vier reellen Knotenpunkten für die projectivische Auffassung nur eine Art darstellt, und in diesem Sinne repräsentirt das geschilderte Modell also alle derartigen Flächen. Die räumliche Anschauung löst sich aber nur schwer von der gewöhnlichen Weise ab, für welche das Unendlich-Weite seine besondere Geltung beansprucht. Insofern ist es nicht gleichgültig, dass in dem Modelle gerade ein Fall dargestellt ist, in welchem die unendlich ferne Ebene nur den hyperbolischen Theil der Fläche und zwar nach einer Curve ohne Oval schneidet. Es werden dadurch gewisse charakteristische Uebergänge, deren Betrachtung im Folgenden nothwendig wird, besonders anschaulich, indem sie ihren Einfluss nur auf ganz im Endlichen gelegene Partieen der Fläche erstrecken. Das in der Einleitung erwähnte Neesen'sche Modell hatte einen anderen Fall zur Anschauung gebracht (das Unendlich-Weite ist bei ihm eine auch ganz auf dem hyperbolischen Theile gelegene Curve, aber mit Oval); bei ihm sind die bezüglichen Verhältnisse nicht so leicht zu verfolgen.

§ 2.

Ableitung neuer Flächen aus der Fläche mit vier reellen Knoten.

An jedem der vier Knotenpunkte des Modells mag man nun den Process des *Verbindens* oder des *Trennens*, wie er in der Einleitung geschildert wurde, anbringen. Da die vier Knotenpunkte projectivisch unter einander gleichberechtigt sind, auch keine ihrer Gruppirungen zu zwei, drei ausgezeichnet ist, so wird es nur auf die Zahl der Knotenpunkte ankommen, die von dem einen oder anderen Processe betroffen werden, und wir können die bez. Knotenpunkte in jedem Falle den Symmetrieverhältnissen der Fläche möglichst entsprechend wählen.

Soll insbesondere (und dieser Fall allein wird im Folgenden specieller erörtert, um an ihm das Verhalten der Flächen beim Auftreten biplanarer Punkte allgemein zu charakterisiren) nur ein Knotenpunkt aufgelöst werden, so wählen wir den unteren. Die beiden so hervorgehenden Flächen mit drei Knoten mögen mit I und II bezeichnet sein, je nachdem der Process des Verbindens oder des Trennens angewandt wurde. Oder, wenn die beiden Processe allgemein durch $+$ und $-$ bezeichnet werden, so wird man das Schema haben:

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \cdot + \\ \mathrm{II} \cdot -. \end{array}$$

Von Flächen mit zwei Knoten erhalten wir drei Arten, die bezüglich durch:

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \cdot + + \\ \mathrm{II} \cdot + - \\ \mathrm{III} \cdot - - \end{array}$$

bezeichnet sein sollen.

Flächen mit einem Knoten giebt es vier:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & + + + \\ \mathrm{II} & + + - \\ \mathrm{III} & + - - \\ \mathrm{IV} & - - -; \end{array}$$

endlich von Flächen ohne Knoten fünf:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & + + + + \\ \mathrm{II} & + + + - \\ \mathrm{III} & + + - - \\ \mathrm{IV} & + - - - \\ \mathrm{V} & - - - -. \end{array}$$

Es ist ersichtlich, dass die letzterzeugten fünf Flächen mit Ausnahme der fünften aus einem überall zusammenhängenden Theile bestehen; die Fläche V enthält zwei getrennte Theile.

Aus diesen Flächen sollen nun noch weitere abgeleitet werden, indem man sich einen oder einige der vorhandenen Knotenpunkte durch die *biplanare* Form hindurch ändern lässt, sofern dies möglich ist. Hierzu wird aber die Betrachtung eines biplanaren Knotens an sich und des Uebergangs einer Fläche mit gewöhnlichem Knoten in eine solche mit biplanarem Knoten überhaupt erforderlich.

§ 3.

Ueber Flächen mit biplanarem Knoten *).

Der Kegel zweiter Ordnung, der von den Tangenten in einem biplanaren Knoten einer Fläche gebildet wird, ist in ein Ebenenpaar

*) Vergl. hierzu die Erörterung, die Schläfli giebt: Philosophical Transactions. 1863. p. 207.

ausgeartet. Dieses Ebenenpaar kann reell oder imaginär sein. Jedenfalls ist der Durchschnitt der beiden Ebenen, die *Axe* des biplanaren Punktes, wie er genannt sein mag, reell. Während eine durch den biplanaren Punkt beliebig durchgelegte Ebene die Fläche in einer Curve mit Doppelpunkt trifft, ist die Durchschnittscurve der Fläche mit einer durch die Axe gehenden Ebene eine Curve mit Spitze, deren Tangente eben die Axe ist.

Sind nun die beiden ausgezeichneten Ebenen imaginär, so ist diese Spitze für alle derartigen Ebenen gleich gerichtet. Die Fläche hat in der Nähe des biplanaren Punktes eine Gestalt, wie wenn sie durch Rotation einer Curve mit Spitze um deren Tangente entstanden wäre.

Bei dem biplanaren Punkte hingegen, der reelle Ebenen besitzt, ist die Spitze der ausgeschnittenen Curve verschieden gerichtet, je nachdem die gewählte Ebene dem einen oder anderen Winkelraume angehört, der durch die beiden ausgezeichneten Ebenen begrenzt wird. Der Uebergang von der einen zur anderen Lage findet in den ausgezeichneten Ebenen statt, welche ihrerseits die Fläche nach einer Curve mit dreifachem Punkte schneiden. Es sind hierbei wiederum zwei Fälle zu unterscheiden, die freilich den Zusammenhang der Fläche in der Nähe des singulären Punktes nicht wesentlich beeinflussen. Der dreifache Punkt der Schnittcurve hat nämlich entweder nur einen reellen Ast oder er hat drei reelle Aeste. Die beiden Fälle (eigentlich sind drei Fälle biplanarer Punkte mit reellen Ebenen zu unterscheiden, da die einzelne Ebene unabhängig von der anderen beide Arten des Uebergangs zeigen kann) sind auf Taf. II., III. zur Anschauung gebracht. In dem ersten Falle (Taf. II.) wird die Spitze der Durchschnittscurve, welche eine durch die Axe gelegte Ebene mit der Fläche gemein hat, immer flacher, sowie man die Ebene der ausgezeichneten Lage nähert, d. h. die in der Spitze zusammenstossenden Aeste der Curve biegen sich immer rascher von einander weg. An der Grenze sind die beiden Aeste der eine in die Verlängerung des anderen übergegangen, die Spitze selbst ist verschwunden. Bewegt man die schneidende Ebene über die Grenzlage hinaus, so erscheint die Spitze wieder, aber nun nach der anderen Seite gerichtet. In dem zweiten Falle (Tafel III.) ist der Uebergang ganz anders. Wenn sich die schneidende Ebene der Grenzlage nähert, so treten an die Spitze zwei weitere Aeste der Durchschnittscurve hinan. An der Grenze entsteht aus der Verschmelzung derselben mit der Spitze der dreifache Punkt in der Weise, dass die Spitze die Hälften zweier Aeste des dreifachen Punktes geliefert hat. Hernach löst sich der dreifache Punkt in entsprechender Weise aber in umgekehrtem Sinne wieder auf.

Unabhängig von diesem Unterschiede hat der biplanare Punkt mit reellen Ebenen ersichtlich die Eigenschaft, *dass man auf der Fläche* *von jedem Punkte in der Nähe des biplanaren zu jedem anderen benachbarten gelangen kann, ohne den biplanaren Punkt zu durchsetzen*; wir werden sogleich auf diesen Unterschied zurückkommen.

§ 4.

Ableitung des biplanaren Knoten aus dem conischen.

Betrachten wir jetzt, wie eine Fläche mit biplanarem Knoten aus einer mit gewöhnlichem Knoten hervorgehen kann.

Beim biplanaren Punkte mit imaginären Ebenen ist das leicht ersichtlich. Eine ebene Curve mit Spitze ist der Uebergang zwischen einem isolirten Knoten, an den sich ein Curvenzug mit zwei Wendungen heranzieht, und einem nicht isolirten Knoten, der eine kleine geschlossene Schleife besitzt (vergl. Fig. 1. Tafel IV.). Die mit dem biplanaren Punkte versehene Fläche bildet den Uebergang zwischen einer Fläche mit isolirtem und einer Fläche mit nicht isolirtem Knoten, wie sie aus den bez. Curven durch Rotation um die Symmetrie-Axe hervorgehen.

Beim biplanaren Punkte mit reellen Ebenen ist der Uebergang der folgende. *Die Fläche mit Knoten muss hier die eben hervorgehobene Eigenschaft des Zusammenhangs um den singulären Punkt herum ebenfalls besitzen.* Sie ist daher folgendermassen gestaltet (vergl. Fig. 2. Tafel IV.). Durch die Axe des späteren biplanaren Punktes lege man schneidende Ebenen. Dieselben schneiden zum Theil in einer Curve mit isolirtem Punkte, zum anderen Theil in einer Curve mit nicht isolirtem Knotenpunkte, aber *kleiner* Schleife. Stellt man die Fläche so, wie in der Zeichnung geschehen ist, dass sich die Curven der ersten Art wesentlich nach unten erstrecken, so erstrecken sich die Curven der zweiten Art (abgesehen von der kleinen Schleife) wesentlich nach oben. Unterhalb des Knotens befindet sich daher, wie in der beigegebenen Figur zu sehen, eine Art kleiner Oeffnung der Fläche. Zieht sich dieselbe vollends zusammen, so hat man den biplanaren Punkt. Aendert sich die Fläche weiter, so tritt diese Oeffnung wieder auf, aber nun oberhalb des Punktes und um einen rechten Winkel gedreht. *Beim Durchgange durch den biplanaren Punkt reproduciren sich also die an die singuläre Stelle angrenzenden Flächentheile nur in anderer Anordnung; sie scheinen um 90° um die Axe des biplanaren Punktes gedreht und dann an der gegen die Axe senkrechten Ebene gespiegelt.*

Auf die Knotenpunkte der beiden Flächen, welche sonach den Flächen, die einen biplanaren Punkt mit reellen Ebenen besitzen, benachbart erscheinen, wende man jetzt die zur Verfügung stehenden Aenderungsprocesse des Verbindens oder Trennens an. Man erhält dann ersichtlich bei beiden Flächen die nämlichen Resultate, wie sie in Figur 1, 2 der Tafel V. dargestellt sind.

Etwas ganz Aehnliches findet in dem Falle statt, dass man es mit einem biplanaren Punkte mit imaginären Ebenen zu thun hat. Wendet man auf die Fläche mit nicht isolirtem Knoten, die der Fläche mit biplanarem Knoten benachbart ist, die Processe des Verbindens oder Trennens an, so erhält man dasselbe Resultat, als wenn man bei der Fläche mit isolirtem Knoten diesen Knoten die Aenderungen eingehen lässt, deren er fähig ist, d. h. wenn man ihn entweder ganz verschwinden oder in eine kleine Kugel übergehen lässt.

Als Resultat dieser Ueberlegungen mögen wir also Folgendes hinstellen:

Eine Fläche mit biplanarem Knoten bildet freilich den Uebergang zwischen zweierlei Flächen mit gewöhnlichem Knoten; wendet man aber auf diese Knoten die beiden in jedem Falle zulässigen Auflöseprocesse an, so sind die Resultate bei beiden Flächen dieselben.

§ 5.

Ableitung weiterer Flächen dritter Ordnung.

Aus den in § 2. aufgestellten Flächen sollen jetzt weitere abgeleitet werden, indem man die einzelnen Knotenpunkte, sofern es möglich ist, sich durch die biplanare Form hindurch ändern lässt. Betrachten wir zu dem Zwecke die einzelnen Flächen genauer.

Ein Durchgang durch einen biplanaren Knoten mit imaginären Ebenen kann ersichtlich so lange nicht stattfinden, als noch ein anderer Knoten vorhanden ist. Denn die Verbindungslinie beider Knoten würde der Fläche ganz angehören, während doch durch einen biplanaren Punkt mit imaginären Ebenen niemals eine reelle Gerade hindurchgehen kann. Aber unter den Flächen mit einem Knoten hat nur IV eine solche Gestalt, wie sie behufs des gedachten Ueberganges nothwendig ist. Diese Fläche IV kann wirklich einen biplanaren Knotenpunkt der gemeinten Art erhalten; ändert sie sich durch diesen hindurch, so giebt's eine Fläche IV' mit isolirtem Knoten, die als neue Fläche den vier mit einem reellen Knoten hinzugefügt werden mag.

Ein Durchgang durch einen biplanaren Knoten mit reellen Ebenen setzt ebenfalls, nach § 4., eine gewisse Art des Zusammenhangs bei der ursprünglichen Fläche voraus. Betrachten wir, statt aller anderen, die beiden Flächen I und II mit drei Knoten. Bei II ist ein solcher Uebergang ersichtlich nicht möglich, weil die in einem Knoten zusammenstossenden Flächentheile weiter keinen Zusammenhang zeigen. Anders bei I. Hier können sich sämmtliche drei Knoten durch die biplanare Form hindurch ändern und das giebt, je nachdem es bei 1, 2, 3 Knoten geschieht, drei neue Arten mit drei Knoten:

$$I', I'', I'''.$$

Bei den Flächen mit zwei Knoten stellen sich die Verhältnisse so: Im Falle *III* ist keinerlei Uebergang durch eine biplanare Form möglich. Bei *II* und *I* finden Uebergänge statt. Ebenso ergeben die Fälle *I*, *II*, *III* der Flächen mit einem Knoten eine Reihe neuer Formen; der Fall *IV*, der eben schon die Fläche mit isolirtem Punkte ergeben hat, liefert hier keinen Beitrag.

Wenn man an den Knotenpunkten der so erhaltenen neuen Flächen nunmehr die beiden gestatteten Aenderungsprocesse anbringt, so erhält man nach dem Schlusssatze des § 4. nichts Neues. Auf die Flächen ohne Knotenpunkt insbesondere ist also die Aenderung der vorangehenden Flächen durch die Formen mit biplanaren Knoten hindurch ohne Einfluss.

§ 6.

Die abgeleiteten Flächen erschöpfen alle Flächen dritten Grades mit reellen conischen Knotenpunkten.

Ich behaupte nun, dass die abgeleiteten Flächen alle Flächen mit drei, zwei, einem reellen conischen Knoten bez. ohne Knoten repräsentiren. Der Sinn dieser Behauptung muss durch nähere Umgrenzung des Art-Begriffs zunächst präcisirt werden. Unbedingt als zu derselben Art gehörig betrachte ich diejenigen Flächen dritten Grades, welche durch reelle Collineation in einander übergehen. Ich rechne ferner aber zu derselben Art solche Flächen, welche durch allmähliche Aenderung ihrer Constanten so in einander übergeleitet werden können, dass während des ganzen Aenderungsprocesses kein neuer oder kein höherer singulärer Punkt auftritt.

Die folgende Anschauungsweise scheint geeignet, diesen *Artbegriff* noch deutlicher zu machen. Eine Fläche dritter Ordnung hängt von 19 Constanten ab. Die Gesammtheit aller Flächen dritter Ordnung (wobei nur an Flächen mit reellen Coefficienten gedacht sein soll) bilden also eine Mannigfaltigkeit von 19 Dimensionen. In dieser Mannigfaltigkeit füllen die Flächen mit Knotenpunkt einen Raum von nur 18 Dimensionen aus, welcher die ganze Mannigfaltigkeit in eine Reihe getrennter Gebiete zerlegt, so dass man aus einem Gebiete in ein anderes nur dadurch treten kann, dass man diesen Raum von 18 Dimensionen durchsetzt. *Jedes dieser Gebiete repräsentirt nun eine Art von Flächen ohne Knotenpunkt.*

Mit Bezug auf diese Definition der Art könnte man einen Einwand machen. Nach dem Vorhergehenden sollen zu derselben Art in erster Linie alle Flächen gehören, die aus einer Fläche durch reelle Collineation hervorgehen. Aber nicht alle reellen Collineationen haben die Eigenschaft, durch Wiederholung unendlich kleiner reeller Collineationen ableitbar zu sein. So ist es z. B. mit denjenigen Collineationen, welche aus rechtsgewundenen Curven linksgewundene machen. Es ist darum nicht von vornherein ersichtlich, dass alle zu einer Art gehörige Flächen ein einziges zusammenhängendes Gebiet in der Mannigfaltigkeit aller Flächen constituiren. Aber dieses Bedenken erweist sich als unbegründet. Man beachte, dass diejenigen Collineationen, die sich nicht durch Wiederholung unendlich kleiner Collineationen zusammensetzen lassen, von den anderen nur durch Collineationen mit verschwindender Determinante — die dann allerdings als unzulässig auszuscheiden sind — getrennt sein können. Collineationen der letzteren Art ziehen aber alle Flächen und also auch alle Flächen dritter Ordnung in (mehrfach zählende) Ebenen, die Gesammtheit aller Flächen also in ein Gebiet von drei Dimensionen zusammen, und Gebiete von drei Dimensionen sind nicht hinreichend, um Gebiete von 19 Dimensionen in verschiedene Theile zu zerlegen. *Jede Fläche derselben Art lässt sich also aus jeder anderen durch continuirliche Aenderung der Coefficienten ableiten**).

Entsprechend, wie wir jetzt bei den Flächen ohne Knoten Arten unterschieden haben, ist bei den Flächen mit Knoten zu verfahren. Die Mannigfaltigkeit von 18 Dimensionen z. B., wie sie durch die Flächen mit einem Knoten vorgestellt wird, ist durch Mannigfaltigkeiten von 17 Ausdehnungen, die sich auf die Flächen mit zwei Knoten oder mit biplanarem Knoten beziehen, in Gebiete zerlegt u. s. f. Der Sinn unserer Behauptung ist nun der, *dass die von uns abgeleiteten Flächen die überhaupt vorhandenen Gebiete, sofern sich dieselben nicht auf Flächen mit höheren oder mit imaginären singulären Punkten beziehen, vollständig und jedes nur einmal repräsentiren.*

§ 7.

Beweis des aufgestellten Satzes.

Der Beweis des aufgestellten Satzes ergiebt sich nun fast unmittelbar. Man hat sich nur zu überzeugen, dass die niederen Mannigfaltigkeiten, welche in jedem einzelnen Falle die Trennung der gerade betrachteten Mannigfaltigkeit in Gebiete bewirken, keine anderen sein

*) Die ganze Vorstellungsweise von der durch die Flächen repräsentirten Mannigfaltigkeit, sowie insbesondere dieser Satz, haben nicht nur bei Flächen dritten Grades, sondern überhaupt bei Flächen höheren Grades ihre Geltung.

können, als die ohnehin schon in Betracht gezogenen. Der Beweis dafür ruht darin, dass alle anderen Mannigfaltigkeiten, an die man würde denken können, nicht die Zahl von Dimensionen haben, die ausreicht, um eine Trennung in Gebiete zu begründen. So wird z. B. die Mannigfaltigkeit von 19 Dimensionen, die durch die Flächen ohne Knoten repräsentirt ist, nur durch die Flächen mit einem Knoten in Gebiete zerlegt werden können, nicht aber z. B. durch die Flächen mit zwei imaginären Knotenpunkten, da letztere nur von 17 Constanten abhängen. Der eigentliche tiefere Grund, warum die Derivation aller Gestalten bei den Flächen dritter Ordnung so einfach gelingt, während sie z. B. bei den Flächen vierter Ordnung viel complicirter sein dürfte, liegt eben darin, dass bei den Flächen höherer Ordnung auch Fälle mit Doppelcurven etc. vorhanden sind, die von hinlänglich vielen Constanten abhängen, um Unterabtheilungen zu begründen. Die Fläche dritter Ordnung mit dem Maximum der Doppelpunkte, 4, hängt noch von 15 Constanten ab, während die Fläche mit Doppelgerade nur 12, die Fläche, welche in eine Ebene und eine Fläche zweiten Grades zerfallen ist, auch nur 12 Constanten hat. Bei Flächen vierter Ordnung hat die Fläche mit dem Maximum der Knotenpunkte (die Kummer'sche Fläche mit 16 Knoten) 18 Constante; eine Fläche dagegen, die in eine F_3 und eine Ebene zerfallen ist, 22.

Auch dass die Unterscheidung, welche bei den Flächen mit r Knoten stattzufinden hat, je nachdem ein Knoten sich durch die biplanare Form geändert hat oder nicht, für die Flächen mit $r-1$ Knoten ohne Einfluss ist, wird man jetzt ohne Weiteres einsehen. Es sei z. B. $r=1$: Wir fassen das Gebiet der Flächen ohne Knoten mit 19, das Gebiet der Flächen mit einem Knoten von 18 und endlich die trennenden Gebiete auf letzterem mit ihren 17 Dimensionen in's Auge. Um die Zusammenhangsverhältnisse zwischen diesen verschiedenen Räumen deutlicher zu übersehen, mögen wir zwischen den Constanten der Flächen 16 willkürliche Relationen annehmen, wodurch die Gebiete der Flächen ohne Knoten, mit einem Knoten, mit mehr oder höheren Singularitäten bez. auf 3, 2, 1 Dimensionen herabgedrückt werden. Als Bilder der Mannigfaltigkeiten mag man dann den Punktraum, eine ihn durchsetzende Fläche und auf der letzteren verlaufende Curven betrachten. Es fragt sich, in wie viele Kammern der Raum durch die Fläche zerlegt wird. Die auf der Fläche gezogenen Curven entsprechen der Annahme zweier Knotenpunkte oder eines biplanaren Punktes. Ersichtlich sind die ersteren Doppelcurven der Fläche, die letzteren Rückkehrcurven. Die Rückkehrcurven können aber niemals dazu beitragen, den Raum in getrennte Gebiete zu zerlegen; während eine solche Zerlegung bei jeder nicht isolirten Doppelcurve wirklich zu Stande kommt. Dies ist, nur anders ausgesprochen, der Satz von der Einflusslosigkeit der biplanaren

Punkte, wie er in § 5. in Anlehnung an die unmittelbare Anschauung gewonnen wurde.

Noch in der folgenden, mehr anschaulichen Weise, mag man sich von der Vollständigkeit überzeugen, mit der die von uns abgeleiteten Flächen die Flächen dritten Grades repräsentiren.

Betrachten wir zunächst Flächen dritten Grades mit drei reellen Knotenpunkten. Es sei $f = 0$ eine irgendwie gegebene Fläche der Art, so construire man eine Fläche f' mit vier Knoten, welche drei Knoten mit f gemein hat, und betrachte das Bündel $f + \lambda f' = 0$. In demselben werden (möglicherweise) eine grössere Zahl von Flächen mit vier Knoten auftreten; diejenige unter ihnen, welche dem kleinsten positiven oder negativen Werthe von λ entspricht, heisse φ. *Aus der Fläche φ geht f dann hervor, indem der vierte Knotenpunkt einem der bewussten beiden Processe unterworfen wird, indem ferner eine beliebige Zahl der drei bleibenden Knotenpunkte durch die biplanare Form hindurch sich ändert.* Aber andere Unstetigkeiten können nicht eintreten, weil dazu besondere Bedingungen zu erfüllen wären, die man immer als nicht erfüllt ansehen kann; die Flächen mit drei Knoten sind also durch die von uns aufgestellten Arten erschöpft. Jetzt zeigt man dasselbe für Flächen mit zwei Knoten, dann für die Flächen mit einem Knoten und endlich für die Flächen ohne Knoten, *womit dann der allgemeine Beweis erbracht ist.*

§ 8.

Ueber den Verlauf der geraden Linien auf den erzeugten Flächen. Zusammenhang der gewonnenen Eintheilung mit der von Schläfli.

Den Ausgangspunkt für die Erzeugung aller anderen Flächen bildete die Fläche mit 4 Knoten. Die Lage der geraden Linien auf ihr ist bekannt (vergl. § 1.). Wie die geraden Linien auf den abgeleiteten Flächen vertheilt sind, ergiebt sich durch eine einfache Ueberlegung, die nun entwickelt werden soll.

Denken wir die abgeleiteten Flächen von der ursprünglichen Fläche mit vier Knoten zunächst wenig verschieden. Dann werden sich die drei einfach zählenden Geraden der ursprünglichen Fläche auf der abgeleiteten wiederfinden. Denn keine von ihnen kann sich mit einer anderen Geraden vereinigt haben und dann imaginär geworden sein, weil sie von vornherein zu keiner Geraden benachbart war. Es fragt sich also nur nach dem Verhalten der 24 bei der ursprünglichen Fläche in den 6 Tetraederkanten vereinigten Geraden.

Hier gilt nun offenbar: *Werden die in einem Knotenpunkte an* *einander stossenden Flächentheile von einander getrennt, so werden die bez. Geraden imaginär*; und man wird vermuthen: *Werden die Theile hingegen vereinigt, so trennen sich die bez. Geraden in die doppelte Zahl reeller.* Eine gerade Linie z. B., welche durch zwei Knotenpunkte hindurchging, die beide von dem Processe des Verbindens betroffen wurden, wird sich in vier reelle Gerade gespalten haben.

Um dies sicherer einzusehen, als es bei der geringen Uebung, welche unsere räumliche Anschauung in solchen Dingen besitzt, gelingen will, bilde ich die Fläche dritten Grades von einem ihrer Punkte durch Projection auf eine Doppelebene ab. Den Projectionspunkt wähle ich auf dem elliptischen Theile der ursprünglichen Fläche, etwa, in dem auf Taf. I dargestellten Falle, in dem höchstgelegenen Punkte des elliptischen Theils. Dabei wird, nach bekannten Eigenschaften der Fläche dritter Ordnung mit vier Knoten, eine aus einem Kegelschnittpaare bestehende Uebergangscurve auftreten, deren vier Doppelpunkte den Knoten der Fläche entsprechen. Nun aber befindet sich der elliptische Theil ganz innerhalb der in den Knoten berührenden Tangentenkegel. Bei der besonderen Wahl des Projectionspunktes, die wir getroffen haben, wird daher das Kegelschnittpaar imaginär sein, die Uebergangscurve sich auf vier isolirte Punkte reduciren. Die sechs Verbindungsgeraden dieser vier Punkte sind die Bilder der sechs auf der Fläche liegenden Tetraederkanten. Der Einfluss einer Deformation der Fläche auf die Geraden derselben lässt sich jetzt in der Abbildung studiren. Denn die Bilder der geraden Linien sind, wie Geiser entwickelt hat (Mathematische Annalen Bd. I.), die Doppeltangenten der bei der Abbildung auftretenden Uebergangscurve vierter Ordnung, welche letztere in dem speciellen bis jetzt betrachteten Falle in ein Kegelschnittpaar ausgeartet war.

Die Aenderung, welche die Uebergangscurve bei der Deformation der Fläche erfährt, ist aber diese: Zerreisst man die an einen Knoten hinantretenden Flächentheile, so verschwindet der bez. isolirte Punkt der Uebergangscurve vollends; im umgekehrten Falle wird er ein kleines Oval. Wendet man z. B. den Process des Verbindens auf alle Knoten an, was die von uns mit I bezeichnete Art ohne Knoten ergiebt, so geht die Uebergangscurve in 4 Ovale über. Dieselben haben unter einander 24 reelle Doppeltangenten (ausserdem sind 4 Doppeltangenten, wie schon im Falle des Kegelschnittpaares, isolirt). Mit den drei einfach zählenden Geraden, die die Fläche ohnehin besitzt, ergiebt dies 27 Gerade; *die mit I bezeichnete Fläche ohne Knoten hat also lauter reelle Gerade.*

Die entsprechende Abzählung ergiebt bei den vier anderen Flächen ohne Knotenpunkt bez.

15, 7, 3, 3

reelle Gerade. *Die drei ersten Arten entsprechen also einzeln den von Schläfli unterschiedenen Arten, insofern dieselben durch die Zahl der reellen Geraden völlig charakterisirt sind; die beiden letzten Arten entsprechen zusammen der vierten und fünften Art Schläfli's, und es bleibt zu untersuchen, ob auch ein Entsprechen im Einzelnen stattfindet.*

Diese Untersuchung ist durch Schläfli's bereits genannte Arbeit (Annali di Matematica V.) erledigt, wo er zeigt, dass die zweitheilige Fläche (unsere fünfte Art) mit seiner fünften Art zusammenfällt. Die vierte und fünfte Art bei Schläfli sind durch die Zahl der reellen Dreiecksebenen unterschieden, sie beträgt bez. 7 und 13. In der That ist nun leicht zu sehen (Schläfli's Betrachtung in den Annali benutzt ganz ähnliche Momente), dass auch unsere fünfte Art 6 reelle Dreiecksebenen mehr besitzt als die vierte. Denn die 3 Ebenen, welche man durch die drei isolirten Geraden der Fläche und den Knotenpunkt legen kann, dessen Flächentheile im Falle IV verbunden, im Falle V getrennt werden, gehen eben deshalb im Falle V in 6 reelle, im Falle IV in imaginäre Tangentenebenen über, und diese Tangentenebenen sind Dreiecksebenen, da sie, durch eine Gerade der Fläche hindurchgelegt, in einem nicht der Geraden angehörigen Punkte berühren. *Also auch die Arten IV und V entsprechen der vierten und fünften Art Schläfli's.*

Durch das nämliche Raisonnement beweist man einen Satz, den mir Hr. Sturm mitgetheilt hat. Eine Tetraederkante liefert imaginäre Gerade, sowohl wenn beide auf ihr befindlichen Knotenpunkte zerrissen werden, als auch, wenn diess nur bei einem der Fall ist. Man findet nun nach Hrn. Sturm, *dass die Gerade völlig imaginär wird, wenn das letztere eintrat, dass sie dagegen im ersteren Falle punktirt imaginär wird.* Doch gehe ich hier nicht näher auf die Betrachtung der einzelnen Fälle ein, als deren Summe eben die Sturm'sche Regel resultirt.

Aber auch die Flächen mit Knoten, wie wir sie abgeleitet haben, entsprechen den von Schläfli unterschiedenen Arten. Man findet durch blosses Abzählen der geraden Linien, dass sich entsprechen:

Flächen mit drei reellen Knoten:

I	Schläfli	VIII, 1
II	„	VIII, 2.

Flächen mit zwei reellen Knoten:

I	Schläfli	IV, 1
II	„	IV, 2
III	„	IV, 3.

Flächen mit einem reellen Knoten:

I	Schläfli	II, 1
II	„	II, 2

III Schläfli II, 3
IV „ II, 4.

Hiermit sind Schläfli's Arten bis auf die mit einem isolirten Knoten (II, 5) erschöpft; eine solche wurde aber weiterhin (§ 4.) abgeleitet und unter den mit einem Knoten versehenen Flächen durch IV′ bezeichnet, so dass also *alle* in Betracht kommenden Arten unter den unseren nachgewiesen sind.

§ 9.

Weiterer Vergleich mit Schläfli's Eintheilung.

Die Beziehung zur Schläfli'schen Eintheilung wurde erst dargelegt für diejenigen Flächen, die von der ursprünglichen Fläche mit 4 Knoten wenig abwichen. Es bleibt nachzuweisen, *dass unsere Arten ihrem ganzen Umfange nach mit den Schläfli'schen coincidiren*, es bleibt zu begründen, *warum die von uns in § 4. aufgestellten neuen Arten für Schläfli's Eintheilungsprincip, bis auf die eine Art IV′ der Flächen mit einem Knotenpunkte, keine neuen Arten begründen.*

Um nicht zu sehr durch Betrachtung der einzelnen Fälle gehindert zu werden, soll der erste Nachweis hier nur für die Flächen ohne Knoten explicite gegeben werden. Ist er bei ihnen geführt, so ist die Richtigkeit der Behauptung bei den Flächen mit Knoten ebenfalls erwiesen, da man ja nun diese aus den Flächen ohne Knoten entstehen lassen kann.

Bei den Flächen ohne Knoten ist aber die Richtigkeit darin begründet, *dass überhaupt Flächen ohne Knoten keine zusammenfallenden Geraden haben können.* Denn daraus folgt, dass die Flächen jeder der von uns umgrenzten Arten in der Zahl ihrer reellen Geraden und Dreiecksebenen übereinstimmen.

Dieser Hülfssatz ist folgendermassen einzusehen. Wenn zwei Gerade auf einer Fläche consecutiv werden, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder die Geraden schnitten sich vorher, oder es war dies nicht der Fall. In dem ersten Falle hat die Fläche längs der Geraden eine constante Tangentialebene, in dem zweiten sind Tangentenebene und Berührungspunkt projectivisch auf einander bezogen. Legt man also durch die Gerade eine beliebige Ebene, welche dann noch einen Kegelschnitt aus der Fläche ausschneidet, so müssen im ersten Falle *beide* Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der Geraden, im letzteren Falle der *eine* Schnittpunkt fest sein. Im ersteren Falle liegen zwei, im letzteren ein Knotenpunkt der Fläche auf der Geraden; die Fläche hat einen Knotenpunkt w. z. b.

Der Grund nun, um dessen willen Schläfli die grössere Zahl der

Fälle, die wir in § 4. aufstellten, nicht zu unterscheiden hat, liegt darin, *dass der Durchgang eines Knotens durch die biplanare Form die Zahl der reellen Geraden nicht ändert.* Es ist das algebraisch evident. Die Geraden, welche durch den einfachen Knoten gehen, zählen zweimal; wird der Knoten ein biplanarer, so zählen sie dreimal; es hat sich also jede Gerade noch mit einer hinzugetretenen einfach zählenden vereinigt. Hernach, wenn der Knoten wieder ein conischer wird, löst sich diese Gerade ab, ohne aufzuhören, reell zu sein; es ist kein Grund, dass Gerade imaginär werden, weil sich ungleichwerthige Elemente vereinigt hatten.

Geometrisch geht dieses Zusammenfallen folgendermassen vor sich. Es sei etwa ein Knoten mit 6 reellen Linien gegeben, und er gehe in die biplanare Form über. Dann vereinigen sich mit seinen Geraden sechs solche, welche bis dahin durch die Oeffnung verliefen, welche (nach § 3.) die Fläche in der Nähe eines Knotens zeigt, der die biplanare Form annehmen will; hernach erstrecken sich diese Geraden durch die entsprechende Oeffnung, welche auf der anderen Seite des Knotens entstanden ist.

§ 10.

Von der Diagonalfläche.

Unsere weiteren Betrachtungen sollen sich auf die Flächen mit 27 reellen Geraden allein beziehen; die Principien, welche uns dabei leiten, sind in gleicher Weise bei den übrigen Fällen anwendbar, liefern aber nicht immer die gleichen einfachen Resultate.

Wir gehen von der Betrachtung einer einzelnen Fläche mit 27 reellen Geraden aus. Es ist dies die von Clebsch sogenannte *Diagonalfläche* (vergl. Math. Annalen IV. S. 331) mit reell vorausgesetztem Pentaeder. Diese Fläche ist durch die einfache Beziehung zu dem ihr zugeordneten Pentaeder ausgezeichnet. Sind nämlich die Ebenen des Pentaeders durch

$$p = 0\,, \quad q = 0\,, \quad r = 0\,, \quad s = 0\,, \quad t = 0$$

dargestellt, und wählt man die absolute Bedeutung dieser Buchstaben so, dass

$$p + q + r + s + t = 0\,,$$

so ist die Gleichung der Fläche

$$p^3 + q^3 + r^3 + s^3 + t^3 = 0.$$

Die Diagonalfläche ist eine Covariante des zu Grunde gelegten Pentaeders (vergl. Math. Annalen IV. S. 353). Jede Diagonalfläche ist in Folge dessen mit jeder anderen und insbesondere mit sich selbst auf 120 Weisen collinear, wobei die Collineationen reell sind, wenn zwei Flächen mit reellem Pentaeder in einander übergeführt werden sollen. In Folge dessen gestattet ein Modell der Fläche mit reellem Pentaeder für alle solchen Flächen allgemeine Schlüsse zu ziehen; die Kenntniss der Collineationen der Fläche in sich selbst controlirt die Abzählung gleichwerthiger Vorkommnisse. Ein solches Modell wurde von Hrn. Weiler nach Angaben von Clebsch ausgeführt (vergl. Göttinger Nachrichten. Aug. 1872) und ich habe wesentlich an diesem Modelle die im Folgenden entwickelten Verhältnisse kennen gelernt.

Die 27 Geraden der Diagonalfläche spalten sich in zwei Gruppen von bez. 15 und 12. Die 15 ersten Linien liegen in den Pentaederebenen und bilden in jeder die Diagonalen desjenigen Vierseits, in welchem die Ebene von den vier übrigen geschnitten wird. Diese Linien schneiden sich also zu drei in den 10 Pentaedereckpunkten. Die übrigen 12 bilden eine Doppelsechs. Dieselben sollen in bekannter Weise durch:

$$\begin{matrix} 1 & \cdot & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 4 & \cdot & 5 & \cdot & 6 \\ 1' & \cdot & 2' & \cdot & 3' & \cdot & 4' & \cdot & 5' & \cdot & 6' \end{matrix}$$

bezeichnet sein, die 15 Geraden sind dann durch die Zahlen 12, 13. etc. gegeben. Diese Indices können dabei so gewählt werden, dass die Geraden, welche in den fünf Pentaederebenen liegen, die folgenden sind:

$$\left.\begin{matrix} 12, & 34, & 56 \\ 13, & 25, & 46 \\ 14, & 26, & 35 \\ 15, & 24, & 36 \\ 16, & 23, & 45 \end{matrix}\right\} \quad (A)$$

während die Geraden, wie sie sich bez. zu drei in einem Punkte schneiden, durch das Schema gegeben sind:

$$\left.\begin{matrix} 12, & 35, & 46 \\ 12, & 36, & 45 \\ 13, & 24, & 56 \\ 13, & 26, & 45 \\ 14, & 25, & 36 \\ 14, & 23, & 56 \\ 15, & 26, & 34 \\ 15, & 23, & 46 \\ 16, & 24, & 35 \\ 16, & 25, & 34 \end{matrix}\right\} \quad (B)$$

Die 15 Geraden der ersten Art haben reelle *Asymptotenpunkte*; dieselben liegen eben in den zwei Pentaedereckpunkten, welche jede solche Gerade enthält. Die 12 Geraden der zweiten Art hingegen haben imaginäre Asymptotenpunkte. Die 10 Pentaederecken, in welche die 30 Asymptotenpunkte der Geraden erster Art zusammenfallen, sind isolirte Punkte der parabolischen Curve *) der Fläche. Sie können isolirte Punkte vorstellen, da die Hesse'sche Fläche, welche die parabolische Curve ausschneidet, in ihnen Knotenpunkte hat.

Andere reelle Punkte von parabolischer Krümmung giebt es nicht: *die Diagonalfläche ist, abgesehen von den 10 auf ihr liegenden Pentaedereckpunkten, überall hyperbolisch gekrümmt.*

Die Geraden der Fläche bilden auf derselben eine Reihe von Vierecken. Jedes solche Viereck hat zu auf einander folgenden Kanten zwei Gerade der ersten und weiterhin zwei Gerade der zweiten Art. In jedem der 10 Pentaedereckpunkte stossen 6 solcher Vierecke zusammen; die $2 \cdot 6$ Kanten zweiter Art, welche sie besitzen, gehören nur 6 Linien der zweiten Art an, so dass der Eckpunkt von einem (windschiefen) Sechsseit von Geraden zweiter Art umgeben ist. Ausser den $6 \cdot 10 = 60$ an die Eckpunkte hinanreichenden Vierecken finde ich noch 60 andere, so dass die Zahl der überhaupt vorhandenen vierseitigen Felder, in welche die Fläche durch die 27 Geraden zerlegt wird, 120 beträgt.

§ 11.

Uebertragung auf die allgemeine Fläche mit 27 reellen Geraden.

Die bei der Diagonalfläche erkannten Eigenschaften können nun unmittelbar für die Flächen dritten Grades mit 27 reellen Geraden überhaupt verwerthet werden, indem man überlegt, wie sich dieselben ändern werden, wenn man die Diagonalfläche beliebigen Deformationen unterwirft, ohne dass ein Zusammenfallen von geraden Linien stattfindet oder (was dasselbe ist) ein Knotenpunkt entsteht.

Zuvörderst ist ersichtlich: *die Vertheilung der reellen Asymptotenpunkte auf die Geraden der Fläche ist bei den Flächen mit 27 Geraden überhaupt so wie bei der Diagonalfläche.* Denn jede Fläche mit 27 Geraden lässt sich aus jeder anderen und also auch aus der Dia-

*) In einem solchen isolirten Punkte einer parabolischen Curve berührt jede Tangente dreipunktig, jeder durch denselben durchgelegte ebene Schnitt der Fläche hat dort eine Wendung. Drei unter den Tangenten sind vierpunktig berührend; im Falle der Flächen dritten Grades müssen sich also in einem solchen Punkte, wie es bei der Diagonalfläche in der That geschieht, drei Gerade der Fläche kreuzen.

gonalfläche ableiten, ohne dass eine Fläche mit Knotenpunkt dazwischen tritt. Sollten nun bei dieser Ableitung Asymptotenpunkte, die vorher reell waren, imaginär werden oder umgekehrt, so müssten sie vorher zusammenfallen. Wenn aber auf einer Geraden die Asymptotenpunkte zusammenfallen, so hat die Fläche dort nothwendig einen Knotenpunkt Denn die Asymptotenpunkte sind harmonisch zu jedem Punktepaar, in welchem die bez. Gerade von einem Kegelschnitte der Fläche getroffen wird, der in einer beliebig durch die Gerade hindurchgelegten Ebene liegt etc.

Auf jeder Fläche mit 27 Geraden giebt es also eine Doppelsechs von Geraden mit imaginären Asymptotenpunkten, die 15 übrigen Geraden haben reelle Asymptotenpunkte. Bezeichnet man die ersteren, wie bei der Diagonalfläche, mit 1, 2 · · bez. 1', 2' · ·, so geben die Schemata *A*, *B* des vorigen Paragraphen die von den Geraden der anderen Art gebildeten Dreiecksebenen.

Betrachten wir jetzt *die Vertheilung der Geraden* und den Verlauf *der parabolischen Curve* auf der allgemeinen Fläche. Zu diesem Zwecke sei angenommen, dass die Fläche zunächst wenig von einer Diagonalfläche abweiche. Dann ist der einzige Unterschied in der Vertheilung der Geraden der, dass die drei Geraden, welche sich bis dahin in den Pentaederecken schnitten, nunmehr ein Dreieck, aber (zunächst) ein kleines Dreieck zwischen sich einschliessen. Von den 6 Vierecken der Fläche, die in dem gemeinsamen Schnittpunkte zusammenstiessen, sind drei zu Fünfecken geworden; die Fläche wird also durch die geraden Linien in 10 Dreiecke, 90 Vierecke, 30 Fünfecke zerlegt. Die drei Asymptotenpunkte der drei sich in einem Punkte schneidenden Geraden, die bis dahin vereinigt waren, sind in drei Punkte auf den Seiten des kleinen Dreiecks auseinandergerückt. Der isolirte Punkt der parabolischen Curve hat sich zu einem kleinen in das Dreieck eingeschriebenen Ovale erweitert (denn imaginär kann er nicht geworden sein, da die Asymptotenpunkte, in denen ein Zweig der parabolischen Curve berühren soll, reell geblieben sind). *Die parabolische Curve besteht also aus 10 Ovalen, welche bezüglich in die durch das Schema B bezeichneten Dreiecke eingeschlossen sind; das Schema A bezeichnet fünf Dreiecksebenen, welche je 6 dieser Ovale berühren.* Auch die Lage, welche das Pentaeder der neuen Fläche angenommen hat, lässt sich näherungsweise angeben. Die Hesse'sche Fläche, welche in den Pentaedereckpunkten Knotenpunkte hat, schneidet die Fläche dritten Grades nach 10 getrennten Ovalen. Die Fläche dritten Grades ist durch leichte Deformation aus der Diagonalfläche entstanden, bei der an Stelle dieser Ovale isolirte Punkte auftraten, die eben selbst die Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche vorstellten. In Folge dessen sind die 10 Ovale der neuen Fläche *die Durchschnitte derselben* *bez. mit den 10 von den Knotenpunkten der Hesse'schen Fläche sich erhebenden kegelartigen Stücken derselben* (welche näherungsweise durch die Tangentenkegel in den bez. Knotenpunkten dargestellt werden). Aber auf diesen Stücken verlaufen jedesmal drei Kanten des durch die Knotenpunkte bestimmten Pentaeders, denn diese Kanten gehören der Hesse'schen Fläche ganz an. *Das Pentaeder unserer Fläche liegt also in der Nähe der durch das Schema A bezeichneten fünf Dreiecksebenen, derart, dass seine Kanten zu drei jedes der 10 Ovale der parabolischen Curve treffen.*

Die hiermit bezeichneten Verhältnisse übertragen sich nun ohne Weiteres auf die allgemeine Fläche mit 27 Geraden. In der That können sie sich nicht ändern, wenn man eine beliebige Deformation der Fläche, bei der die 27 Geraden getrennt bleiben, eintreten lässt. *Die Vertheilung der Geraden auf der Fläche* kann keine andere werden, es können höchstens drei Gerade erster Art, die sich bei der Diagonalfläche in einem Punkte schnitten, wieder in einen Punkt zusammenrücken (was unwesentlich sein würde). Denn es können nie drei Gerade verschiedener Art sich in einem Punkte schneiden, weil sonst dieser Punkt ein gemeinsamer Asymptotenpunkt wäre und also gerade Linien, welche vorher imaginäre Asymptotenpunkte besassen, nunmehr reelle hätten etc. *Die Zahl der Ovale der parabolischen Curve ist immer 10*; es kann sich höchstens ein oder das andere Oval in einen isolirten Punkt zusammenziehen, was nicht in Betracht kommt. Denn kein Oval kann verschwinden — es bleiben ja die Asymptotenpunkte, in denen es berührt, reell —, es können sich nie zwei Ovale vereinigen — denn jedes Oval ist von einem Sechsseit von geraden Linien umgeben, welche keine reellen Asymptotenpunkte besitzen, und das also von dem Ovale nie überschritten werden kann, — es darf endlich auch nie ein Oval neu entstehen, denn dasselbe müsste aus einem neuen isolirten Punkte hervorgehen und ein solcher würde (wie oben in einer Note bemerkt) einen neuen Kreuzungspunkt von drei Geraden der Fläche bedeuten, der doch nicht auftreten soll. *Die Beziehung des Pentaeders zur Fläche ist dieselbe geblieben.* Denn waren einmal die 10 Ovale den 10 Knotenpunkten einzeln zugeordnet, so kann dies Verhältniss, so lange die 10 Ovale einzeln erhalten bleiben, keine Aenderung erleiden.

Es begründen diese Beziehungen insbesondere noch den Satz, der die Wichtigkeit der Diagonalfläche gerade für Untersuchungen der vorliegenden Art kennzeichnet: *Eine Fläche dritten Grades mit 27 reellen Geraden kann nur auf eine continuirliche Weise in eine Diagonalfläche übergeführt werden.* Das Pentaeder derselben entsteht aus den fünf Dreiecksebenen A, welche bez. je 6 der 10 parabolischen Ovale berühren.

§ 12.

Die Entstehung der Fläche mit 27 Geraden aus der Fläche mit vier Knoten.

Wenn wir nach § 2. eine Fläche mit 27 Geraden aus einer mit vier Knoten ableiten, so werden die 10 elliptisch gekrümmten Theile der Fläche in folgender Weise erzeugt. Vier derselben werden durch die vier Seitenfelder des ursprünglich elliptischen Flächentheils (der tetraederähnlich gestaltet war) hervorgebracht. Die sechs anderen entstehen an denjenigen Stellen des ursprünglich hyperbolischen Theiles, in denen die drei einfachen Geraden der Fläche von den sechs Tetraederkanten geschnitten werden.

Die Ebene der einfachen Geraden giebt also eine der fünf Dreiecksebenen A ab, die den fünf Pentaederebenen benachbart sind, wie das mit dem Umstande stimmt, dass für die Fläche mit vier Knoten jene Ebene geradezu eine Pentaederebene ist.

Will man daher untersuchen, wie oft eine Fläche mit 27 reellen Geraden aus der Fläche mit 4 Knoten abgeleitet werden kann, so hat man von vornherein fünf Classen solcher Ableitungen zu unterscheiden, je nach der Dreiecksebene A, welche man aus der Ebene der isolirten Geraden hervorgehen lassen will. Aber man überzeugt sich, dass jede solche Classe nur eine Art enthält, *dass eine Fläche mit reellen Geraden überhaupt nur in fünf Weisen aus einer Fläche mit vier Knoten gewonnen werden kann.* Als solche fünf Flächen mag man dann geradezu diejenigen nehmen, deren Pentaeder*) mit den fünf Dreiecksebenen A zusammenfällt.

Um dies zu begründen, betrachte ich die Gruppe der 24 Geraden, die bei der Auflösung der Knoten einer Fläche mit vier Doppelpunkten aus den Tetraederkanten entstehen. *Eine solche Gruppirung lässt sich aus den 24 Geraden, die von den 27 bleiben, wenn man die drei in einer Ebene A gelegenen fortnimmt, nur einmal bilden, und darin liegt der Beweis.*

Diese Gruppirung ist nämlich folgende. Die drei Kanten, welche durch einen Knoten hindurchgingen, ergeben bei der Auflösung eine Doppelsechs. Je drei Linien aus jeder Sechs derselben haben reelle, die drei anderen imaginäre Asymptotenpunkte. Die vier Doppelsechsen, welche den vier Knotenpunkten entsprechen, haben je vier Gerade gemein, darunter zwei und nur zwei mit reellen Asymptotenpunkten.

*) Eine Fläche mit vier Knoten ist, wie leicht zu sehen, vollständig bestimmt, wenn ihr Pentaeder bekannt und eine Entscheidung darüber getroffen ist, welche Pentaederebene die isolirten Geraden enthalten soll. Zu einem Pentaeder gehören also fünf Flächen mit vier Knoten.

Die Linien einer Doppelsechs, welche reelle Asymptotenpunkte haben, berühren unter den 6 Ovalen der parabolischen Curve, welche in der Nähe der Ebene der isolirten Geraden entstehen, solche drei, welche nicht (auch nicht annähernd) in gerader Linie liegen.

Sondern wir aber aus den 27 Geraden drei in einer Ebene A gelegene, etwa

$$12,\ 34,\ 56,$$

aus, so lassen sich die übrigen 24 nur in einer Weise in vier Doppelsechsen gruppiren, welche diesen Forderungen genügen. Bei der Bezeichnung der Geraden, die ich an dem Weiler'schen Modelle der Diagonalfläche angebracht habe, sind dies die folgenden:

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 5 & 46 & 62 & 24 \\ 35 & 51 & 13 & 2' & 4' & 6' \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 6 & 35 & 52 & 23 \\ 46 & 61 & 14 & 2' & 3' & 5' \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 6 & 45 & 51 & 14 \\ 36 & 62 & 23 & 1' & 4' & 5' \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 5 & 36 & 61 & 13 \\ 45 & 52 & 24 & 1' & 3' & 6' \end{matrix}$$

Die Doppelsechsen, welche in dieser Weise bei den 5 Rückleitungen einer Fläche mit 27 Geraden auftreten, sind übrigens nicht in der Zahl 20, sondern nur in der Zahl 10 vorhanden, indem jede Doppelsechs zweimal benutzt wird. Bezeichnet man die eben genannten (in verständlicher Weise) durch:

$$135,\ 146,\ 245,\ 236,$$

so giebt es ausserdem die folgenden sechs:

$$\begin{matrix} 123, & 124, & 156 \\ 256, & 345, & 346 \end{matrix}$$

und dieselben vertheilen sich auf die fünf Ebenen A in der folgenden Weise:

Ebene	
12 · 34 · 56	135 · 146 · 245 · 236
13 · 25 · 46	124 · 156 · 236 · 345
14 · 26 · 35	123 · 156 · 245 · 346
15 · 24 · 36	123 · 146 · 256 · 345
16 · 23 · 45	124 · 135 · 256 · 346

§ 13.

Von den ebenen Schnitten der Fläche mit 27 reellen Geraden.

Auf Grund der bisherigen Erörterungen wird es möglich, die Gesammtheit der ebenen Schnitte, welche eine Fläche mit 27 Geraden zeigt, zu classificiren. Ich muss mich freilich darauf beschränken, hier die Resultate einfach anzugeben, da eine genaue Herleitung derselben ohne die durch ein Modell ermöglichte concrete Anschauung zum mindesten sehr weitläufig scheint.

Der ebene Schnitt einer Fläche dritter Ordnung zeigt als Curve dritter Ordnung entweder nur einen zusammenhängenden Curvenzug (mit 3 Wendungen) oder er besitzt ausserdem ein Oval. Die Ebenen, welche die Fläche nur nach *einem* Zuge schneiden, bilden nun, wie sich zeigt, *eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen.* Von ihr werden ebenfalls dreifach unendliche Mannigfaltigkeiten solcher Ebenen, die in Curven mit Oval schneiden, eingeschlossen.

Diese Ebenen selbst zerfallen zunächst in drei Gruppen, deren jede wieder in eine grössere Zahl getrennter Mannigfaltigkeiten getheilt ist. *Das Oval wird nämlich entweder von keiner Geraden der Fläche, oder von 12 oder von 16 getroffen.*

Dass hiermit in der That alle Möglichkeiten erschöpft sind, welche eintreten können, wenn man Durchschnittscurven mit Doppelpunkt etc. nicht beachtet, ergiebt sich durch folgende Betrachtung aus der eindeutigen Abbildung der Fläche auf eine Ebene. Der ebene Schnitt bildet sich bekanntlich ab als Curve dritter Ordnung, die durch sechs Fundamentalpunkte hindurchgeht. Er wird überdies, je nachdem er aus einem Zuge oder aus zwei Theilen besteht, eine ebenso beschaffene Bildcurve liefern. Beschränken wir uns also auf Bildcurven, die aus zwei Theilen, aus einem Ovale und einem Zuge mit drei Wendungen bestehen. Es liegen dann noch eine Reihe von Möglichkeiten bezüglich der Vertheilung der Fundamentalpunkte auf die beiden Curventheile vor: das Oval kann $0, 1, 2 \cdots 6$ Fundamentalpunkte enthalten. Man beweist nun zunächst: *Das Oval des ebenen Bildes entspricht dem Ovale der räumlichen Curve oder dem anderen Theile derselben, je nachdem es eine gerade oder ungerade Zahl von Fundamentalpunkten enthält.* Enthält nämlich das Oval eine ungerade Zahl, so wird es, nach Grundsätzen der Analysis situs, von jeder Curve, die durch die 6 Fundamentalpunkte geht, noch in einem Punkte oder in einer ungeraden Zahl von Punkten geschnitten; der entsprechende räumliche Curvenzug wird also von jeder Ebene einmal oder eine ungerade Anzal von Malen getroffen, d. h. er ist ein Curvenzug mit drei Wendungen, kein Oval. Umgekehrt beweist man, dass das Oval des ebenen Bildes und das

Oval des räumlichen Schnittes einander entsprechen, wenn ersteres eine gerade Zahl von Fundamentalpunkten enthält. — Indem man sich dieser Regel bedient, ersieht man sofort, dass die räumlichen Schnitte mit Oval eben in die drei Arten zerfallen, die dadurch charakterisirt sind, dass das Oval bez. von keiner Geraden, oder von 12 (die eine Doppelsechs bilden), oder von 16 Geraden geschnitten wird.

Ebenen, welche nach Curven mit Oval schneiden, so dass das Oval keiner Geraden begegnet, erhält man z. B., wenn man das Oval ganz auf eine der 10 elliptisch gekrümmten Partieen der Fläche verlegt. Man überzeugt sich dann ferner, dass dies die einzigen Ebenen dieser Art sind, *die bez. Ebenen constituiren also 10 getrennte Mannigfaltigkeiten.*

Ebenen, deren Oval einer Doppelsechs begegnet, erhält man beispielsweise, wenn man die Fläche zunächst in eine solche mit Knotenpunkt überleitet und dann einen ebenen Schnitt legt, für den einer der Knotenpunkte ein isolirter Punkt ist. Geht man sodann zur ursprünglichen Fläche zurück, so hat man einen Schnitt, dessen Oval von den Linien derjenigen Doppelsechs getroffen wird, welche aus den drei durch den Knotenpunkt verlaufenden Kanten entstanden ist. Jede der 10 im vorigen Paragraphen aufgezählten Doppelsechsen giebt zu solchen ebenen Schnitten*) Veranlassung. Man kann wiederum beweisen, dass diese die einzigen ihrer Art sind, *dass also auch die Ebenen dieser Art 10 getrennte Mannigfaltigkeiten constituiren.*

Es giebt ferner *15 Mannigfaltigkeiten von Ebenen, deren Oval von 16 Geraden getroffen wird.* Man überzeugt sich hiervon einmal, indem man zu den Flächen mit 4 Knoten zurückgeht. Jede der fünf Flächen mit 4 Knoten, aus denen die allgemeine Fläche entstehen kann, hat dreierlei Schnitte, die beim Uebergange Durchschnittscurven der gewünschten Art geben: diejenigen Schnitte, welche den elliptischen Theil der Fläche mit 4 Knoten so treffen, dass die Knoten in zwei Gruppen von zwei zerlegt werden. Andererseits erhält man Schnitte der gewünschten Art, wenn man, was ersichtlich möglich ist, durch jede der 15 Geraden mit reellen Asymptotenpunkten Ebenen hindurchlegt, welche Kegelschnitte enthalten, die der bez. Geraden nicht be-

*) Ein Modell einer Fläche mit 27 Geraden zeigt eine Reihe von „Durchgängen" oder „Oeffnungen".

Auf den Partieen der Fläche, welche an diese Durchgänge angrenzen, verlaufen eben die Geraden einer der 10 Doppelsechsen. Jede solche Doppelsechs giebt zu einem „Durchgange" Veranlassung; ob derselbe aber in dem Modelle ohne Weiteres sichtlich ist, hängt einmal von der Beziehung zum Unendlich-Weiten ab, die man bei der Construction des Modell's zu Grunde gelegt hat, dann aber auch davon, welche Seite der im Endlichen gelegenen Partie der Fläche man als äussere, welche als innere betrachten will.

gegnen, — und wenn man weiterhin diese Ebene etwas verschiebt, so dass sie eine eigentliche Curve dritter Ordnung enthält.

Diese Unterscheidung der ebenen Schnitte liefert die Eintheilung der Flächen mit 27 Geraden nach dem Unendlich-Weiten. Sieht man von Flächen mit parabolischen Aesten ab (welche die unendlich ferne Ebene berühren), *so hat man bei den Flächen mit 27 reellen Geraden vier Arten zu unterscheiden.* Das Wiener'sche Modell gehört zu der Art, welche die unendlich ferne Ebene in einem zusammenhängenden Curvenzuge trifft. Ebendahin gehört die Fläche, die man aus der Fläche mit 4 Knoten ableiten wird, wie sie auf Tafel I dargestellt ist. Das von Hrn. Neesen angefertigte Modell einer Fläche mit 4 Knoten, dessen oben Erwähnung geschah, würde eine Fläche mit 27 Geraden angeben, die das Unendlichferne in einer Curve mit Oval trifft, so, dass das Oval von 12 Linien geschnitten wird. —

§ 14.

Von den Haupttangentencurven der Fläche mit 27 reellen Geraden.

Die Aufgabe, auf einem Modelle einer Fläche mit 27 reellen Geraden die Haupttangentencurven zu zeichnen, ist practisch nicht zu schwer auszuführen, da die 27 Geraden selbst Haupttangentencurven vorstellen. In der That ist der Verlauf der bez. Curven innerhalb der Vierecke, welche von den Geraden der Fläche eingeschlossen werden, durch diese Bemerkung durchaus bestimmt, d. h. schematisch bestimmt. Nur bez. der Dreiecke und Fünfecke, welche an die parabolische Curve angränzen, wird eine anderweitige Ueberlegung nöthig. Das Resultat derselben, das auf Tafel VI versinnlicht ist, mag hier um so lieber mitgetheilt werden, als dasselbe einen Beitrag zur Theorie der Haupttangentencurven überhaupt, noch allgemeiner, zur Theorie der singulären Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variabeln abgiebt.

Auf Tafel VI bezeichnet die punktirte Curve eins der 10 Ovale der parabolischen Curve; die drei geradlinigen Tangenten stellen drei Gerade der Fläche vor, die sechs umschliessenden Geraden repräsentiren das windschiefe Sechsseit, in welches das Oval eingeschlossen ist. Die ausgezogenen Curven, zusammen mit diesen Geraden, sind Haupttangenten-Curven. Dieselben haben auf der parabolischen Curve (wie das schon sonst bekannt war, vergl. Berliner Monatsberichte 1870 S. 894) Spitzen; in den Asymptotenpunkten der drei Geraden sind aber diese Spitzen in *Selbstberührungspunkte* übergegangen. Solcher Selbstberührungspunkte treten auf der parabolischen Curve einer Fläche n^{ter} Ordnung im Allgemeinen eine endliche Zahl auf. Es sind die

Punkte, in denen sich die parabolische Curve und die Curve vierpunktiger Berührung begegnen.

§ 15.

Einige allgemeine Sätze über die Gestalten algebraischer Curven und Flächen.

Die geschlossenen Curven der Ebene hat man in projectivischem Sinne in zwei Clossen zu theilen, in *paare* und *unpaare* Curven.*) Zu den unpaaren Curven gehört z. B. die gerade Linie, sowie der Zug mit drei Wendungen, der bei den Curven dritter Ordnung auftritt. Als ein Beispiel für eine paare Curve mag man jede im Endlichen verlaufende geschlossene Curve betrachten. Man hat für diese Curven und ihre gegenseitigen Beziehungen eine Reihe allgemeiner Sätze (vergl. Staudt's Geometrie), von denen hier nur der eine angeführt sein soll:

Zwei Curven schneiden sich nothwendig, wenn beide unpaar sind, und zwar in einer unpaaren Anzahl von Punkten. Ist eine von zwei Curven eine paare, so brauchen sich die Curven nicht zu treffen; thun sie es, so geschieht es in einer paaren Anzahl von Punkten.

Man kann hieran einen Schluss über die Gestalten der ebenen algebraischen Curven ohne vielfachen Punkt oder, wenn man will, der allgemeinen durch eine Gleichung zwischen Punkt-Coordinaten gegebenen Curven knüpfen. Da eben kein vielfacher Punkt vorhanden sein soll, da ferner die Curve, je nachdem ihre Ordnung gerade oder ungerade ist, von einer geraden Linie in einer paaren oder unpaaren Zahl von Schnittpunkten getroffen werden muss, so kommt:

*Curven gerader Ordnung enthalten keinen, Curven ungerader Ordnung einen und nur einen unpaaren Zug; die Zahl der etwa vorhandenen paaren Züge ist unbeschränkt.***)

Entsprechende Ueberlegungen kann man mit Bezug auf *geschlossene Flächen* anstellen. Bei ihnen, wie bei den Curven im Raume, hat man, nach Staudt, ebenfalls paare und unpaare zu unterscheiden. Eine unpaare Fläche und eine unpaare Curve schneiden sich nothwendig.

*) Es ist wohl Staudt's Verdienst, auf diesen Unterschied zuerst aufmerksam gemacht zu haben (Geometrie der Lage §§ 1, 2, 12 (1847)). Andererseits geht Möbius von demselben aus bei seiner Untersuchung über die Grundformen der Linien dritter Ordnung (Abhandl. der Sächs. Akademie. Bd. I. 1852).

**) Ist n die gegebene Ordnung, so kann die Zahl der paaren Züge, für $n > 2$, nicht grösser als $\frac{n-2\cdot n+1}{2}-1$ sein. Denn betrüge sie $\frac{n-2\cdot n+1}{2}$, so könnte man durch ebensoviele bezüglich in deren Innerem angenommene Punkte eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung legen; dieselbe hätte dann $n-2\cdot n+1$ Punkte mit der gegebenen Curve gemein, was unmöglich ist.

Eben dieser Umstand begründet aber noch eine weitere Theilung der paaren Flächen: in solche nämlich, welche unpaare Curven enthalten, und solche, bei denen das nicht der Fall ist. Für die so gewonnenen drei Flächenarten: *die unpaaren, die paaren mit unpaaren Curven und die paaren ohne unpaare Curven*, sind etwa Beispiele: die Ebene, das einschalige Hyperboloid, das Ellipsoid (oder das zweischalige Hyperboloid). Man findet sofort:

Unpaare Flächen oder auch eine unpaare Fläche und eine paare der ersten Art schneiden sich nothwendig.

Und hierauf gestützt leitet man den Satz ab:

Flächen n^{ter} Ordnung ohne vielfache Punkte und Curven enthalten, wenn n gerade ist, keinen, wenn n ungerade ist, einen und nur einen unpaaren Theil. Paare Theile der ersten Art treten nur bei den Flächen einer paaren Ordnung auf und ihre Zahl ist dann beliebig; paare Theile der zweiten Art können, unabhängig davon, ob die Ordnung der Fläche gerade oder ungerade ist, in unbeschränkter Zahl vorhanden sein.

Die Flächen dritter Ordnung ohne Knotenpunkt, wie wir sie oben haben kennen lernen, bestehen nur in einem Falle (F) aus zwei Theilen. Der eine Theil ist, wie er sein muss, ein paarer von der zweiten Art, der andere ein unpaarer. Die überall zusammenhängenden Flächen der vier ersten Arten geben Beispiele unpaarer Flächentheile. Sie haben — ähnlich wie die unpaaren Curvenzüge der Ebene, die sich nicht selbst durchsetzen — die Eigenschaft, den Raum unzertheilt zu lassen, ihn nur zu begränzen.

§ 16.

Beziehungen zur Analysis situs.

Die entwickelten Unterscheidungen bei geschlossenen Curven und Flächen beziehen sich auf Eigenschaften derselben, welche ebenso wohl bei beliebigen reellen Collineationen als bei stetigen Deformationen ungeändert bleiben. Es entsteht durch diese Bemerkung überhaupt die Frage nach solchen Eigenschaften. Die Fragestellung ist ähnlich, aber nicht dieselbe, wie in der gewöhnlichen *Analysis situs*, und es mag hier ausdrücklich auf das Gemeinsame wie auf das Unterscheidende aufmerksam gemacht werden.

Die Analysis situs beschäftigt sich zunächst nur mit Gebilden, die durchaus im Endlichen verlaufen, indem sie bei ihnen allen als gleichartig betrachtet, was durch stetige Deformation in einander übergeführt werden kann. Besondere Festsetzungen sind zu treffen, wenn auch von Theilen die Rede sein soll, die sich in's Unendliche erstrecken, und diese mit im Endlichen verlaufenden Theilen verglichen werden sollen.

Man wird ganz allgemein eine solche Festsetzung in der Weise treffen können, dass man mit den im Endlichen stattfindenden Deformationen irgendwelche Transformationen verbunden denkt, welche das Unendliche in's Endliche überführen, *und dann Gebilde als äquivalent betrachtet, welche durch Verknüpfung dieser Transformationen mit den Deformationen im Endlichen in einander übergeführt werden können.*

Man hat nun seither bei derartigen Untersuchungen, und zwar (so viel mir bekannt) *ohne* die darin liegende Willkürlichkeit hervorzuheben, das Unendliche so betrachtet, wie es bei einer Raumtransformation durch reciproke Radii vectores erscheint, d. h. *als einen einzelnen Punkt.* Es entspricht das der Art, nach welcher bei der geometrischen Interpretation von $x + iy$ in der Ebene das Unendliche beurtheilt werden muss, damit sich die geometrische Auffassung an die Vorstellung einer complexen Veränderlichen anschmiegt. Man hat es bei dieser Anschauung als eine Zufälligkeit zu erachten, die sich immer durch geeignete Transformation vermöge reciproker Radien vermeiden lässt, wenn sich eine Curve oder Fläche einfach oder mehrfach in's Unendliche erstreckt. *Die Unterscheidung der geschlossenen Curven in zwei, der geschlossenen Flächen in drei Arten, wie sie für die projectivische Anschauung stattfand, kommt in Wegfall.*

Die Ergebnisse dieser Art von Analysis situs sind daher nicht ohne Weiteres für die projectivische Auffassung zu verwerthen. Letzterer entspricht eine Analysis situs, die das Unendlichferne durch reelle *Collineationen* mit dem Endlichen vergleichbar macht, wobei es als Ebene, allgemeiner ausgedrückt, als in eine Ebene ausbreitbare unpaare Fläche erscheint. Für sie sind die Theoreme der anderen ein erster Beitrag, der unbedingt für alle im Endlichen verlaufenden Gebilde giltig ist; es treten aber weitere Unterscheidungen ganz neuer Art ein, wie eben die Eintheilung der Curven und Flächen in paare und unpaare.

Ein Theorem, das auf diesem Standpunkte eben nur als ein Anfang zur Lösung eines allgemeinen Problem's erscheint, *ist das Riemann'sche vom Zusammenhang der Flächen.* Nach Riemann können zwei geschlossene Flächen (und nur von solchen mag die Rede sein) dann in einander durch stetige Deformation übergeführt werden, wenn die Zahl der geschlossenen Curven, die man auf den Flächen ziehen kann, ohne dass dieselben in Stücke zerfallen, beiderseits dieselbe ist; das Doppelte der Zahl dieser Curven heisst der (ausserordentliche) *Zusammenhang.* Für die von uns geforderte Analysis situs ist das Uebereinstimmen in der Zahl ebenso eine nothwendige aber nicht mehr eine ausreichende Bedingung. *Flächen verschiedener Classen können niemals in einander übergeführt werden, auch wenn diese Zahl stimmt.*

Die unbegrenzte Ebene z. B. wird nach dieser Definition des Zusammenhanges bei projectivischer Anschauung den Zusammenhang 2 bekommen. Denn man kann eine und nur eine geschlossene Curve in der Ebene ziehen, ohne dass dieselbe zerfällt, z. B. eine gerade Linie oder jede unpaare Curve, welche sich nicht selbst durchsetzt; zwei Curven aber trennen die Ebene nothwendig. Und doch wird man die Ebene nicht überführen können in eine im Endlichen gelegene Ringfläche, die auch den Zusammenhang 2 besitzt.

Der Unterschied der beiden Flächen ist auch nicht darin allein begründet, dass das eine Mal eine unpaare, das andere Mal eine paare Curve auf der Fläche gezogen wird.

Denn ein einschaliges Hyperboloid hat wie die Ringfläche die Eigenschaft, dass man auf der Fläche eine und nur eine geschlossene Curve ziehen kann, ohne dass sie zerfällt, und dass man für diese Curve eine paare Curve wählen kann. Und doch sind die beiden Flächen verschieden: das Hyperboloid gehört zur ersten, die Ringfläche zur zweiten Classe der paaren Flächen.

Das Resultat dieser Ueberlegungen ist also Folgendes: *Der Zusammenhang der Flächen ist auch für die projectivische Anschauung ein bleibendes Element; es giebt aber nicht mehr das ausreichende Kriterium für die Transformirbarkeit zweier Flächen in einander ab.*

§ 17.

Der Zusammenhang der Flächen dritten Grades.

Herr Schläfli hat in dem wiederholt genannten Aufsatze (Annali di Mat. V) den Zusammenhang der Flächen ohne Knoten I, II, III, IV, V bez. zu 6, 4, 2, 0, — 2 bestimmt. Diese Bestimmung gründet sich aber nicht auf die projectivische Auffassung vom Unendlich-Weiten, sondern auf die andere, die das Unendlich-Ferne als Punkt betrachtet. Denn Herr Schläfli setzt den Zusammenhang der unbegränzten Ebene gleich Null, während er projectivisch gleich 2 zu setzen ist, wie eben bemerkt wurde. Er gewinnt sodann seine Zahl dadurch, dass er die vierte Fläche aus der fünften, die dritte aus der vierten etc. ableitet, indem er zwei bis dahin getrennte Partieen der Fläche in einem Knotenpunkte zusammenwachsen lässt. Diese Operationen erhöhen den Zusammenhang immer um zwei und so entsteht die Reihe der jedesmal um zwei unterschiedenen Zahlen — 2, 0, 2, 4, 6.

Für die im vorigen Paragraphen entwickelte projectivische Auffassung behält die Operation, welche in dem Entstehenlassen eines Knotenpunktes und der weiteren Verwerthung desselben besteht, ihren Einfluss auf den Zusammenhang. Es sind nur die Zahlen — 2, 0, 2, 4, 6 alle um zwei zu erhöhen. Denn z. B. die Art IV, die sich in eine unbegränzte Ebene ausbreiten lässt, erhält für uns den Zusammenhang

2, und daraus folgt (in derselben Weise, wie Schläfli seine Zahlen ableitet):

I	8
II	6
III	4
IV	2
V	0.

In der That kann man auf diesen Flächen 4, 3, 2, 1, 0 geschlossene Curven ziehen, ohne dass sie in Stücke zerfallen, wenn man sich der Entstehung aus der Fläche mit vier Knoten erinnert. Bei I, II, III, IV haben sich bez. die Flächentheile, die in 4, 3, 2, 1 Knoten an einander stiessen, mit einander vereinigt. Um 3, 2, 1, 0 der so entstandenen dünnen Stelle der Fläche lege man geschlossene Ovale. Man ziehe ferner auf dem ursprünglichen hyperbolischen Theile der Fläche mit vier Knoten einen geschlossenen unpaaren Curvenzug, als welchen man z. B. eine der isolirten Geraden wählen kann. Dann hat man auf den Flächen I, II, III, IV, V bez. 4, 3, 2, 1, 0 geschlossene Curven gezogen, ohne dass ein Zerfallen der Fläche eingetreten wäre. Jede weitere geschlossene Curve führt aber ein Zerfallen herbei. Der Zusammenhang ist also bez. 8, 6, 4, 2, 0.

Erlangen, den 6. Juni 1873.