Ueber die eindeutigen Raumtransformationen, insbesondere in ihrer Anwendung auf die Abbildung algebraischer Flächen.

Von Max Noether in Heidelberg.

Die hier vorliegenden Untersuchungen über eindeutige Raumtransformationen schliessen sich ihrem Inhalt nach an die Betrachtungen an, welche Herr Cremona über die ebenen Transformationen angestellt hat*). Das erweiterte Problem, zwischen zwei ebenen *Räumen* ein Punkt für Punkt eindeutiges Entsprechen herzustellen, bietet durch die Zufügung einer Dimension wesentlich neue Schwierigkeiten, die es nicht gestatten werden, dasselbe in seiner Allgemeinheit erschöpfend zu behandeln. Diese Schwierigkeiten beruhen hauptsächlich darauf, dass die Bedingungen, welchen die zur Transformation dienenden Flächen unterliegen, an sich schon sehr specieller Art sind, so dass sie sich einer allgemeinen Untersuchung entziehen. Auch existirt eine Reduction, welche der von mir**) für die ebenen Transformationen nachgewiesenen Reduction derselben auf eine Reihenfolge von Transformationen zweiter Ordnung analog wäre, hier im allgemeinen Falle nicht mehr. Ich werde mich daher nur mit einer specielleren Transformation näher beschäftigen, mit derjenigen von der dritten Ordnung, welche durch drei Gleichungen entsteht, die in den Coordinaten jedes der beiden auf einander bezogenen Räume linear sind. Diese Transformation ist immerhin noch allgemein genug, um durch ihre Specialisirungen zu einer unendlichen Mannigfaltigkeit von Transformationen Anlass zu geben, welche eine ähnlich übersichtliche Behandlung zulassen, wie die Cremona'schen, und welche zugleich dem besondern Zwecke dienen, den ich bei diesen Betrachtungen im Auge habe, nämlich bequeme Methoden zur Abbildung algebraischer Flächen zu liefern. Ich werde hierbei ausser den schon bekannten Abbildungen auf die weiterer Reihen von Flächen geführt.

---

*) Mem. dell' Acc. di Bologna, ser. 2, tom. 2 und tom. 5.

**) Diese Ann., Band 3, pag. 165 und Göttinger Nachrichten, Jahrgang 1870, Nr. 1.

Ein specieller Fall der hier erwähnten Transformation dritter Ordnung, in dem man einem Punkte des Raumes den Schnittpunkt seiner Polarebenen in Bezug auf einen Bündel von Flächen zweiter Ordnung entsprechen lässt, ist schon in mehreren geometrischen Untersuchungen benutzt worden; zuerst von Herrn Hesse*) bei Gelegenheit seiner Betrachtungen über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung, dann von Steiner**) bei seiner vierten Erzeugungsweise der Flächen dritter Ordnung, und später u. A. von Herrn Geiser***), dessen hier anknüpfende geometrische Betrachtungen mit den vorliegenden verwandt sind. Man weist aber leicht nach, dass sich die allgemeinere Transformation nicht auf diese speciellere durch lineare Transformation zurückführen lässt. Dagegen hat schon Herr Cremona†) jene zur Erzeugung der Flächen dritter Ordnung benutzt, ohne indess die Theorie weiter zu verfolgen.

Nach Ausarbeitung der folgenden Abhandlung erhalte ich eine Arbeit von Herrn Cayley††) über denselben Gegenstand, „On the rational Transformation between two Spaces", die mit der meinigen den gleichen Ausgangspunkt, die drei bilinearen Gleichungen, besitzt und auch einige der specielleren Transformationen, § 2., § 3. und § 4., schon berührt. Weiterhin aber schlägt, während die Cayley'sche Abhandlung interessante numerische Angaben über die Bedingungen giebt, welchen die allgemeineren Transformationsflächen unterliegen, meine Arbeit, dem oben angegebenen Zwecke zufolge, eine andere Richtung ein.

§ 1.

Die allgemeine Transformation.

Es seien x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Coordinaten der Punkte des Raumes X, y_1, y_2, y_3, y_4 die der Punkte des Raumes Y. Ein eindeutiges Entsprechen zwischen beiden Räumen wird dann durch Formeln vermittelt:

$$(1)\qquad \varrho x_i = \varphi_i(y_1, y_2, y_3, y_4), \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

wo die φ_i ganze rationale Functionen ν^{ter} Ordnung der Coordinaten y sind, wenn diese Formeln eine eindeutige Umkehrung zulassen:

*) Crelle's Journal, Band 49.

**) Ebenda, Band 53, und Monatsber. der Berl. Akad. 1856.

***) Crelle's Journal, Band 69.

†) Crelle's Journal, Band 68.

††) Proceedings of the London Mathem. Society, vol. III (1870).

$$(2)\qquad \begin{gathered}\sigma y_k = \psi_k(x_1, x_2, x_3, x_4),\\ (k = 1, 2, 3, 4),\end{gathered}$$

wobei die ψ_k ganze Functionen s^{ter} Ordnung der x sein mögen. ϱ und σ sind Proportionalitätsfactoren.

Damit die Umkehrung (2) der Formeln (1) möglich ist, müssen die vier Flächen $\varphi_i = 0$ linear von einander unabhängig sein und je drei derselben dürfen sich nur in *einem* beweglichen Punkte schneiden; denn die 3fach unendliche Flächenschaar

$$\Sigma \alpha_i \varphi_i = 0$$

hat dann ebenfalls die Eigenschaft, dass sich je drei ihrer Flächen, wenn sie nicht einem Büschel angehören, in nur *einem* beweglichen Punkte schneiden, und zu einem beliebigen Punkte x gehört somit im Allgemeinen *ein* Punkt y, dessen Coordinaten sich rational durch die des entsprechenden Punktes x ausdrücken lassen. Die Flächen $\psi_k = 0$ haben alsdann dieselbe Eigenschaft, wie die $\varphi_i = 0$.

Die Flächen $\Sigma \alpha_i \varphi_i = 0$ und $\Sigma \beta_k \psi_k = 0$ haben dann, wie aus (1), (2) hervorgeht, die weitere Eigenschaft, dass ihre Coordinaten rational durch zwei Parameter ausdrückbar sind, d. h.*) ihr Flächen- und Curvengeschlecht sind gleich Null.

Den Ebenen $\Sigma \alpha_i x_i = 0$ des Raumes X entsprechen die Flächen $\Sigma \alpha_i \varphi_i = 0$ von Y, und den Ebenen $\Sigma \beta_k y_k = 0$ von Y die Flächen $\Sigma \beta_k \psi_k = 0$ von X. Daher ist die Ordnung s der Functionen ψ_k gleich der Ordnung der beweglichen Schnittcurve je zweier der Flächen φ_i; denn diese Ordnung ist gleich der Anzahl der Schnittpunkte von $\Sigma \beta_k \psi_k = 0$ mit einer beliebigen Geraden, $\Sigma \alpha_i x_i = \Sigma \alpha_i' x_i = 0$, also gleich der Anzahl der Schnittpunkte der Ebene $\Sigma \beta_k y_k = 0$ mit der beweglichen Schnittcurve $\Sigma \alpha_i \varphi_i = \Sigma \alpha_i' \varphi_i = 0$. Die Ordnung der Functionen ψ_k wird daher im Allgemeinen verschieden sein von der der Functionen φ_i. Die Ordnung der beweglichen Schnittcurve zweier Flächen ψ_k wird gleich r.

Die festen Punkte und Curven, welche die Flächen φ_i gemein haben müssen, wenn die für die Transformationsflächen angegebenen Bedingungen zu erfüllen sein sollen, bezeichne ich als das *Fundamentalsystem* oder als die *Fundamentalgebilde* des Raumes Y, und zwar als einfache, doppelte u. s. w. Gebilde, je nachdem die Flächen φ_i diese Gebilde als einfache, doppelte u. s. w. besitzen. Diesen Gebilden entsprechen im Raume X im Allgemeinen Gebilde von höheren Dimensionen und zwar, specielle Fälle ausgenommen, Flächen, welche das *Fundamentalflächensystem* des Raumes X constituiren. Für dieses Entsprechen gelten nun die folgenden Sätze, welche ich dem § 2. meines

*) S. diese Ann., Band 3, pag. 174.

Aufsatzes in diesen Ann., Bd. 2., für den vorliegenden Fall specialisirt, entnehme.

„Einem μfachen Fundamentalpunkte von Y entspricht im Raume X eine Fläche, deren Coordinaten sich als rationale Functionen μ^{ter} Ordnung zweier Parameter darstellen lassen, einem einfachen Fundamentalpunkte also eine Ebene von X."

„Einem jeden Punkte einer μfachen Fundamentalcurve C von Y entspricht im Raume X im Allgemeinen eine rationale Curve μ^{ter} Ordnung. Die C entsprechende Fläche von X wird durch die Bewegung dieser veränderlichen rationalen Curve erzeugt und hat ein mit dem Geschlecht von C übereinstimmendes Curvengeschlecht."

Diese Sätze können sich nur unter speciellen Bedingungen des Verschwindens der φ_i so modificiren, dass sich die Dimensionen der den Fundamentalgebilden entsprechenden Gebilde erniedrigen. Hiervon finden sich in § 5., (C) und (G) und am Schlusse des § 6. Beispiele.

Dieses Entsprechen ist folgendermassen zu verstehen:

Einer allgemeinen Fläche F von der Ordnung m im Raume Y entspricht in X Punkt für Punkt eindeutig eine Fläche Φ von der Ordnung ms, welche durch jedes νfache Fundamentalgebilde von X $m\nu$fach hindurchgeht. Wenn nun F ein Fundamentalgebilde von Y $k$fach besitzt, so zerfällt Φ in die $k$fach zu zählende, diesem Gebilde entsprechende Fläche von einer gewissen Ordnung α und in eine der F eigentlich entsprechende Fläche Φ' von der Ordnung $ms - k\alpha$.

Um das Fundamentalflächensystem von X zu erhalten, betrachte ich die Flächen r^{ter} Ordnung, $\Sigma \alpha_i \varphi_i = 0$, des Raumes Y, welchen, als bewegliche Flächen, die Ebenen $\Sigma \alpha_i x_i = 0$ von X entsprechen. Von den zu den Flächen $\Sigma \alpha_i \varphi_i = 0$ in X gehörenden Flächen der Ordnung rs, welche durch ein νfaches Fundamentalgebilde von X $r\nu$fach gehen, hat man daher $\Sigma \alpha_i x_i = 0$ abzutrennen, und der Rest giebt die Fundamentalflächen von X, jede einem μfachen Fundamentalgebilde von Y entsprechende Fläche μfach. In diesem Sinne hat also das Fundamentalflächensystem die Gleichung:

$$\Omega = \frac{\Sigma \alpha_i \varphi_i (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)}{\Sigma \alpha_i x_i} = 0,$$

eine Gleichung der Ordnung $rs - 1$. $\Omega = 0$ geht ebenfalls $r\nu$fach durch jedes νfache Fundamentalgebilde von X.

Es giebt noch einen andern Weg, um das Fundamentalflächensystem aufzustellen. Zu diesem Zwecke führe ich die folgenden, den §§ 5. und 6. des oben citirten Aufsatzes entnommenen Sätze über die Jacobi'sche Determinantenfläche D der vier Flächen ψ_i an:

„Die Jacobi'sche Fläche D der vier Flächen ψ_k enthält eine einem Fundamentalpunkte, resp. einer Fundamentalcurve von Y entsprechende Fläche zweifach, resp. einfach.“

„$\frac{\Omega}{D} = 0$ stellt die Abbildung der Fundamentalgebilde des Raumes Y dar und giebt die einem μfachen Fundamentalpunkte, resp. einer μfachen Fundamentalcurve entsprechende Fläche $(\mu - 2)$fach, resp. $(\mu - 1)$fach.“

Daher giebt die Determinantenfläche ebenfalls das Fundamentalflächensystem, zweifach oder einfach, je nachdem die Fundamentalfläche einem Punkte oder einer Curve entspricht, und sie enthält keine weiteren Flächen.

Ueber das Verhalten der Jacobi'schen Fläche der ψ_k in den Fundamentalgebilden des Raumes X habe ich (l. c. § 5.) den Satz bewiesen:

„Die Jacobi'sche Fläche hat die einfachen Fundamentalpunkte von X zu Doppelpunkten, die einfachen Fundamentalcurven von X zu dreifachen Curven.“

Den allgemeineren Satz

„Die Jacobi'sche Fläche der ψ_k hat einen νfachen Fundamentalpunkt zum $(4\nu - 2)$fachen Punkt, eine νfache Fundamentalcurve zur $(4\nu - 1)$fachen Curve,“

beweist man entweder durch Bilden der höhern Differentialquotienten von D, oder man kann denselben auch auf den vorhergehenden Satz auf folgendem Wege zurückführen.

Man betrachte zwei eindeutige Transformationen

$$z_k = \vartheta_k(x)$$
$$y_k = \chi_k(z).$$

Bei der ersten sei der Punkt x' ein einfacher Fundamentalpunkt; die χ seien Flächen ν^{ter} Ordnung, welche durch die zur ersten Transformation gehörenden Fundamentalgebilde des Raumes Z nicht hindurchgehen. Bei der hieraus resultirenden eindeutigen Transformation

$$y_k = \psi_k(x)$$

tritt dann der Punkt x' als νfacher Fundamentalpunkt auf, und es ist

$$D = \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \frac{\partial y_4}{\partial x_4}$$
$$= \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial z_1} \frac{\partial y_2}{\partial z_2} \frac{\partial y_3}{\partial z_3} \frac{\partial y_4}{\partial z_4} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \frac{\partial z_2}{\partial x_2} \frac{\partial z_3}{\partial x_3} \frac{\partial z_4}{\partial x_4}.$$

Der erste Factor zur Rechten, als Function der Ordnung $4\nu - 4$ der z, hat, in x ausgedrückt, den Punkt x' zum $(4\nu - 4)$fachen Punkte, der zweite Factor hat denselben zum Doppelpunkte, und für $D = 0$ wird x' also ein $(4\nu - 2)$facher Punkt. Ebenso folgt der andere Theil des Satzes.

Freilich lässt sich die Transformation (2) nicht im Allgemeinen auf die hier angegebenen zwei Transformationen zurückführen; aber der aus denselben gezogene Schluss bleibt richtig, weil die aus ihnen resultirende Transformation für Punkte in der Nähe des Punktes x', von denen allein die Art des Verschwindens der Determinante abhängt, keine weiteren Singularitäten zeigt.

Selbstverständlich gelten die in diesem §. für die Fundamentalgebilde von Y und die Fundamentalflächen von X gegebenen Entwicklungen auch für die Fundamentalgebilde von X und die Fundamentalflächen von Y.

§ 2.

Die Transformation dritter Ordnung.

Die bemerkenswertheste Raumtransformation ist die aus drei bilinearen Gleichungen entstehende Transformation dritter Ordnung, die ich, mit den aus ihr abgeleiteten Transformationen, in den folgenden §§. näher verfolgen will. Ich bezeichne dieselbe schlechtweg als die „Transformation dritter Ordnung", obgleich es, wie ich in § 9. zeigen werde, noch weitere Transformationen dritter Ordnung giebt, deren Umkehrung ebenfalls von der dritten Ordnung wird und die sich trotzdem nicht auf jene zurückführen lassen.

Die drei bilinearen Gleichungen seien:

$$(1) \qquad \begin{cases} A \equiv \sum\limits_{i,k} a_{ik} x_i y_k = 0 \\ B \equiv \sum\limits_{i,k} b_{ik} x_i y_k = 0 \\ C \equiv \sum\limits_{i,k} c_{ik} x_i y_k = 0, \end{cases}$$

$$(i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Ferner setze ich:

$$(2) \qquad \begin{cases} A_i = \dfrac{\partial A}{\partial x_i} = \sum\limits_k a_{ik} y_k \;, \quad B_i = \dfrac{\partial B}{\partial x_i} \;, \quad C_i = \dfrac{\partial C}{\partial x_i}, \\ \mathsf{A}_k = \dfrac{\partial A}{\partial y_k} = \sum\limits_i a_{ik} x_i \;, \quad \mathsf{B}_k = \dfrac{\partial B}{\partial y_k} \;, \quad \Gamma_k = \dfrac{\partial C}{\partial y_k}. \end{cases}$$

Die Transformation wird dann durch die Formeln gegeben:

$$(3) \qquad \varrho x_i = \frac{\partial R}{\partial \lambda_i} = \varphi_i \quad ; \quad \sigma y_k = \frac{\partial \mathsf{P}}{\partial \mu_k} = \psi_k,$$

wo

$$(4) \qquad \begin{cases} R = \Sigma \pm \lambda_1 A_2 B_3 C_4, \\ \mathsf{P} = \Sigma \pm \mu_1 \mathsf{A}_2 \mathsf{B}_3 \Gamma_4. \end{cases}$$

Um die Fundamentalgebilde der Flächen dritter Ordnung φ_i zu bestimmen, bemerke ich, dass:

$$\Sigma \varphi_i A_i = 0 \quad , \quad \Sigma \varphi_i B_i = 0 \quad , \quad \Sigma \varphi_i C_i = 0 .$$

Für die Punkte der Curve neunter Ordnung, in welcher sich $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 0$ schneiden, ist daher

$$\varphi_3 A_3 + \varphi_4 A_4 = 0 \quad , \quad \varphi_3 B_3 + \varphi_4 B_4 = 0 \quad , \quad \varphi_3 C_3 + \varphi_4 C_4 = 0 \, ,$$

also entweder auch $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$, oder

$$A_3 = k A_4 \quad , \quad B_3 = k B_4 \quad , \quad C_3 = k C_4 \, .$$

Diese drei letztern Gleichungen sind die dreier projectivischer Ebenenbüschel, die eine Raumcurve dritter Ordnung erzeugen. Diese Curve bildet den beweglichen Schnitt von $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$; der übrige Schnitt, eine *Raumcurve sechster Ordnung K*, gehört auch $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$ an und stellt das Fundamentalgebilde des Raumes Y dar.

Ebenso folgt, dass die Flächen dritter Ordnung ψ_k eine Raumcurve sechster Ordnung gemein haben, die Fundamentalcurve L des Raumes X.

Für die Fundamentalcurve K verschwinden also die Determinanten des Systems:

$$\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{matrix} \quad ,$$

oder man kann, mit Einführung von Parametern λ, μ, ν, setzen:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lambda A_1 + \mu B_1 + \nu C_1 = 0 \\ \lambda A_2 + \mu B_2 + \nu C_2 = 0 \\ \lambda A_3 + \mu B_3 + \nu C_3 = 0 \\ \lambda A_4 + \mu B_4 + \nu C_4 = 0 \end{array} \right.$$

Durch Elimination der y ergiebt sich hieraus eine Gleichung vierten Grades in λ, μ, ν, die Gleichung einer allgemeinen Curve vierter Ordnung, welcher die Curve K vermöge (5) Punkt für Punkt eindeutig entspricht. *Daher hat K das Geschlecht* 3.

Ferner sieht man, dass jedem Punkte dieser Curve eine *Gerade* von X entspricht; denn für einen Punkt y, welcher den Gleichungen (5) genügt, hat man

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0 \, ,$$

und von den Gleichungen (1) wird eine eine Folge der beiden andern.

Diese Geraden erzeugen die Fundamentalfläche des Raumes X, die, nach § 1., von der achten Ordnung wird und L zur dreifachen Curve hat. Um die Gleichung dieser windschiefen Fläche, $\Omega = 0$, zu erhalten, hat man die Werthe der $y_k = \frac{\partial P}{\partial u_k}$ in $R = 0$ einzuführen und den Factor $\Sigma \lambda_i x_i$ abzutrennen. So ergiebt sich, wenn man die Werthe der y_k zuerst in A_i substituirt:

$$\Omega\,.\,\Sigma\lambda_i x_i = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 & \Gamma_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 & \Gamma_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & \mathsf{A}_3 & \mathsf{B}_3 & \Gamma_3 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & \mathsf{A}_4 & \mathsf{B}_4 & \Gamma_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & -\Sigma\lambda_i x_i & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & 0 & \mathsf{B}_1 & \Gamma_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & 0 & \mathsf{B}_2 & \Gamma_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & 0 & \mathsf{B}_3 & \Gamma_3 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & 0 & \mathsf{B}_4 & \Gamma_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

oder:

$$(6)\qquad \Omega = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & \mathsf{B}_1 & \Gamma_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & \mathsf{B}_2 & \Gamma_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & \mathsf{B}_3 & \Gamma_3 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & \mathsf{B}_4 & \Gamma_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

In diesem Ausdruck (6) hat man noch in den B_i, C_i die y_k durch die $\frac{\partial \mathsf{P}}{\partial \mu_k}$ zu ersetzen, um die Gleichung der Fundamentalfläche von X zu erhalten. Ferner zeigt die Symmetrie dieses Ausdrucks (6), dass er auch die Gleichung $\Theta = 0$ der Fundamentalfläche von Y liefert, wenn man nur in den B_k, Γ_k die x_i durch die $\frac{\partial R}{\partial \lambda_i}$ ersetzt.

Nach § 1. fällt hier die Jacobi'sche Fläche $D = 0$ der ψ_k mit der Fläche $\Omega = 0$ zusammen. In der That hat man:

$$\Sigma\mu_k y_k = \Sigma \pm \mu_1 \mathsf{A}_2 \mathsf{B}_3 \Gamma_4 \quad,\quad \Omega\,.\,\Sigma\lambda_i x_i = \Sigma \pm \lambda_1 A_2 B_3 C_4\,;$$

$$\Sigma\mu_k y_k\,.\,D = \Sigma \pm \mu_1 \mathsf{A}_2 \mathsf{B}_3 \Gamma_4\,.\,\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\frac{\partial y_3}{\partial x_3}\frac{\partial y_4}{\partial x_4}$$

$$= \begin{vmatrix} \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_1} & \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_2} & \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_3} & \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_4} \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{vmatrix}$$

$$\Sigma\lambda_i x_i \,.\, \Sigma\mu_k y_k \,.\, D = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \Sigma\lambda_i x_i \\ \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_1}, & \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_2}, & \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_3}, & \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_4} & 0 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & 0 \\ \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_1} & \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_2} & \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_3} & \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_4} & -3\,\Sigma\mu_k y_k \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & 0 \end{vmatrix} = 3\,\Sigma\mu_k y_k \,.\, \Sigma \pm \lambda_1 A_2 B_3 C_4$$

$$(7)\quad \begin{cases} \text{daher:} & \Omega = \tfrac{1}{3}\,\Sigma \pm \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\frac{\partial\psi_3}{\partial x_3}\frac{\partial\psi_4}{\partial x_4} = \tfrac{1}{3} D \\ \text{und ebenso:} & \Theta = \tfrac{1}{3}\,\Sigma \pm \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2}\frac{\partial\varphi_3}{\partial y_3}\frac{\partial\varphi_4}{\partial y_4} = \tfrac{1}{3}\Delta. \end{cases}$$

Die Geraden, welche die Fläche $\Omega = 0$ erzeugen, schneiden die Curve L in je drei Punkten; denn durch die ihnen entsprechenden Punkte von K gehen je drei Gerade der Fläche $\Theta = 0$. Man erkennt auch geometrisch leicht, dass die dreipunktigen Sehnen einer Raumcurve sechster Ordnung, $L = 0$, deren Geschlecht $p = 3$ ist, eine Fläche achter Ordnung mit dreifacher Curve L erzeugen. Von einem beliebigen Punkte der Curve aus gehen nämlich drei Gerade, welche L in zwei weiteren Punkten schneiden, da sich von einem solchen Punkte aus L als Curve fünfter Ordnung, $p = 3$, also mit 3 Doppelpunkten, projicirt. Daher wird L dreifache Curve der Fläche. Ein durch eine Erzeugende a gehende Ebene schneidet aber die Fläche in einer ebenen Curve siebenter Ordnung; denn diese Curve hat in den 3 Punkten, in welchen L von a getroffen wird, Doppelpunkte, und sie kann a ausserdem nur noch in *einem* Punkte schneiden, in demjenigen Punkte, in welchem die in der Ebene liegende Verbindungslinie der beiden a benachbarten Erzeugenden die Gerade a trifft. Der betrachtete ebene Schnitt, und ebenso die Fläche, ist daher von der Ordnung 8.

Bei der vorliegenden Transformation entsprechen den Flächen m^{ter}-Ordnung von Y, welche die Curve K zur μfachen Curve haben, im Raume X Flächen der Ordnung $3m - 8\mu$, welche L zur $(m - 3\mu)$fachen Curve haben.

Den Geraden des Raumes Y entsprechen Raumcurven dritter Ordnung; und diese treffen die Curve L in 8 Punkten, da die Geraden die Fläche Θ in 8 Punkten schneiden. Allgemeiner entsprechen Curven m^{ter} Ordnung von Y, die μ Punkte mit K gemein haben, im Raume

X Curven der Ordnung $3m-\mu$, welche in $8m-3\mu$ Punkten die Curve L treffen.

Um die Transformation geometrisch zu characterisiren, bemerke ich, dass die Raumcurve K die allgemeinste Curve ist, in welcher sich zwei Flächen dritter Ordnung, die eine Raumcurve dritter Ordnung gemein haben, noch schneiden können. Denn vermöge dieser Eigenschaft lässt sich, wenn $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$ zwei solcher Flächen sind, $\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2=0$ in die unter (3), (4) gegebene Form setzen, und man kann zwei weitere Flächen $\varphi_3=0$, $\varphi_4=0$ bestimmen, deren Gleichungen die dort angegebene Form haben. Die Transformationsflächen sind dann, wenn K so bestimmt ist, die dreifach unendliche Schaar von Flächen dritter Ordnung, welche durch K hindurchgehen.

Die Entwicklungen dieses §. gehen in die von Herrn Hesse, Crelle Bd. 49, gegebenen über, wenn die Bedingungen

$$(8) \qquad a_{ik}=a_{ki} \quad , \quad b_{ik}=b_{ki} \quad , \quad c_{ik}=c_{ki}$$

erfüllt sind. Die Gleichungen (1) lassen sich dann als die der Polarebenen des Punktes y in Bezug auf die drei Flächen zweiter Ordnung

$$\Sigma a_{ik}x_ix_k=0 \quad , \quad \Sigma b_{ik}x_ix_k=0 \quad , \quad \Sigma c_{ik}x_ix_k=0$$

auffassen, und die Curve L wird der Ort der Doppelpunkte der Kegelflächen des von diesen 3 Flächen erzeugten Bündels von Flächen zweiter Ordnung. Indess ist die Zurückführung des allgemeinen Falles auf diesen specielleren nicht möglich; denn dieselbe müsste durch eine lineare Transformation geschehen, die an der einen Reihe von Variabeln angebracht wird, und die Zahl der Bedingungen (8) beträgt 18, während eine lineare Transformation nur 15 willkürliche Constanten einführt. Dasselbe folgt daraus, dass die Hesse'sche Transformation nur auf eine 21fach unendliche Schaar von Curven sechster Ordnung, $p=3$, führt, während die obige Definition eine 24fach unendliche Schaar von Curven K angiebt.

Die Transformation dritter Ordnung, wie ich sie hier gegeben habe, ist noch zu allgemein, um direct vielfache Anwendungen auf Flächenabbildungen zuzulassen. Die Anwendung auf die ebene Abbildung der Flächen dritter Ordnung ist schon von Herrn Cremona gemacht worden; als weitere Anwendung bezeichne ich die auf die Flächen sechster Ordnung, mit Doppelcurve K, welchen die Hyperboloide von X entsprechen, mit je 12 einfachen Fundamentalpunkten. Durch eine weitere Abbildung dieser Hyperboloide findet man dann die ebene Abbildung jener Flächen sechster Ordnung, und zwar entsprechen, bei der niedrigstmöglichen Abbildung, ihren ebenen Schnitten Curven fünfter Ordnung, mit 2 doppelten und 11 einfachen Fundamentalpunkten. Zu reicheren Anwendungen werden die Specialisirungen der Transformation, zu welchen ich mich jetzt wende, Anlass geben.

§ 3.

Die Transformationen zweiter Ordnung. Anwendungen.

Ich betrachte zunächst die einfachste der Transformationen, diejenige der zweiten Ordnung, welche die Eigenschaft hat, dass ihre Umkehrung wieder auf Functionen zweiter Ordnung führt. Den Ebenen des Raumes X sollen Hyperboloide des Raumes Y entsprechen, welche einen Kegelschnitt K und einen festen Punkt P gemein haben. Diese Hyperboloide bilden eine dreifach unendliche Schaar. Je drei derselben schneiden sich im Allgemeinen in *einem* beweglichen Punkte; denn seien A, B, C drei dieser Hyperboloide, welche nicht einem Büschel angehören; dann haben A und B, ferner A und C bewegliche Kegelschnitte gemein, welche sich, da sie beide auf A liegen, in zwei Punkten schneiden, von denen der eine, P, fest ist.

Es sei $y_4 = 0$ die Gleichung der Ebene E des Kegelschnitts K; der Punkt P sei durch $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ gegeben. Ferner sei $\varphi(y_1, y_2, y_3) = 0$ die Gleichung des Kegels (PK), der über K beschrieben ist und seinen Scheitel im Punkte P hat. Die Transformationsformeln werden dann:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= y_1 y_4 & \qquad \sigma y_1 &= x_1 x_4 \\ \varrho x_2 &= y_2 y_4 & \sigma y_2 &= x_2 x_4 \\ \varrho x_3 &= y_3 y_4 & \sigma y_3 &= x_3 x_4 \\ \varrho x_4 &= \varphi(y_1, y_2, y_3) & \sigma y_4 &= \varphi(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Die Transformationsflächen des Raumes X bilden daher ebenfalls eine dreifach unendliche Schaar von Hyperboloiden, die einen Punkt P' $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ und einen Kegelschnitt K' $(x_4 = 0, \ \varphi(x) = 0)$ gemein haben.

Als Fundamentalflächen treten im Raume Y auf die Ebene E des Kegelschnitts K und der Kegel (PK), im Raume X die Ebene E' des Kegelschnitts K' und der Kegel $(P'K')$, der seinen Scheitel in P' hat und durch K' geht. Dabei entsprechen

dem Punkte P die Ebene E',
dem Punkte P' die Ebene E,
dem Kegelschnitt K der Kegel $(P'K')$,
dem Kegelschnitt K' der Kegel (PK),

und zwar den Punkten von K die Erzeugenden von $(P'K')$, den Punkten von K' die Erzeugenden von (PK).

Den Flächen n^{ter} Ordnung des einen Raumes, die den Fundamentalpunkt zum μfachen Punkt, den Fundamentalkegelschnitt zur νfachen Curve haben, entsprechen im andern Raume Flächen von der Ordnung $2n - \mu - 2\nu$, die den Fundamentalpunkt dieses Raumes zum $(n - 2\nu)$fachen Punkte, den Kegelschnitt zur $(n - \mu - \nu)$fachen

Curve haben. Insbesondere entsprechen sich die Ebenenschaaren durch P und P' gegenseitig, und die Transformation zwischen je zwei dieser Ebenen wird von der zweiten Ordnung.

Die Jacobi'sche Fläche besteht aus E^2 und (PK), resp. aus E'^2 und $(P'K')$. Die Transformation selbst ist, wie die analytische Darstellung zeigt, ein sehr specieller Fall der Transformation dritter Ordnung. Ein specieller Fall der Transformation zweiter Ordnung ist die durch „reciproke Radienvectoren", wobei der Fundamentalkegelschnitt der imaginäre Kugelkreis der unendlich fernen Ebene ist.

Ich mache eine Anwendung auf die Abbildung einer *Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt*, die von Herrn Clebsch, Crelle Bd. 69 und diese Annalen Bd. 3, pag. 60 behandelt worden ist. Die Gleichung der Fläche sei:

$$F \equiv U \cdot y_4^2 + M(y) \cdot y_4 \varphi(y) + \varphi^2(y) = 0$$

wobei

$$U = y_4 A(y) + \psi(y)$$

und $A(y)$ eine lineare; $\psi(y)$ eine quadratische Function von y_1, y_2, y_3, und $M(y)$ eine lineare Function von y_1, y_2, y_3, y_4 ist. Die Fläche geht durch P und hat K zum Doppelkegelschnitt. Ihr entspricht im Raume X die Fläche dritter Ordnung

$$\Phi \equiv \varphi(x) . A(x) + x_4 \psi(x) + x_4^3 + x_4 M\{x_1 x_4\,,\ x_2 x_4\,,\ x_3 x_4\,,\ \varphi(x)\} = 0,$$

welche durch K' hindurchgeht. Durch die ebene Abbildung von Φ ergiebt sich nun die von F. Dabei ist zu bemerken, dass auf Φ schon eine Gerade G eindeutig bekannt ist, nämlich die in der Ebene von K' liegende Gerade $x_4 = 0$, $A(x) = 0$. Die 16 Geraden von Φ, welche G nicht schneiden, und dadurch auch die 16 Geraden von F und die Abbildungen von Φ und F, erhält man also durch Lösung einer Gleichung fünften Grades und von 4 quadratischen Gleichungen. Dieser Zusammenhang ist ebenso schon von Herrn Geiser, Crelle Bd. 70, nachgewiesen worden.

Als weitere Anwendung bezeichne ich die Abbildung einer der von Herrn Kummer behandelten *Flächen vierter Ordnung* (Monatsberichte der Berliner Akad., 1863):

$$\varphi^2 + aA^4 + 4bA^3B + 6cA^2B^2 + 4dAB^3 + eB^4 = 0,$$

wobei φ eine Function zweiter Ordnung, die A, B lineare Functionen der Coordinaten sind, auf einer Kegelfläche dritter Ordnung, vom Geschlecht 1. Die Fläche hat zwei uniplanare Knotenpunkte, in denen sich die zwei Schalen der Fläche berühren, und der Ebenenbüschel $A + \lambda B = 0$ schneidet die Fläche in einer Kegelschnittschaar, eine Ebene in je zwei Kegelschnitten. 4 dieser Ebenen berühren die Fläche nach Kegelschnitten. Lässt man nun P unendlich nahe an K rücken und K mit einem dieser 4 Kegelschnitte zusammenfallen, während P

zugleich in einen der Knotenpunkte der Fläche fällt, so entspricht derselben durch die Transformation zweiter Ordnung ein Kegel dritter Ordnung.

Mit dieser Transformation behandelt man ferner die *Fläche fünfter Ordnung, F, mit Doppelkegelschnitt K und dreifachem Punkte P.* Die ebenen Schnitte von F bilden sich auf der Ebene ab durch Curven sechster Ordnung, mit 6 doppelten und 7 einfachen festen Punkten. Dem Punkt P entspricht eine ebene Curve dritter Ordnung, Q, durch die 6 ersteren Punkte a_i. Man legt sodann eine Curve sechster Ordnung, welche die a_i zu Doppelpunkten hat. Diese Curve schneidet Q in 6 weiteren Punkten, welche als einfache Fundamentalpunkte b_i auftreten. Der siebente Fundamentalpunkt, c, kann beliebig angenommen werden. Dem Punkte c entspricht die Gerade von F, welche in der Ebene von K liegt, den Punkten b_i entsprechen 6 Gerade (PK) von F, und den Punkten a_i 6 Kegelschnitte von F, welche durch P gehen und K in je zwei Punkten treffen. Solcher Kegelschnitte giebt es 27 auf F, deren System mit dem der 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung identisch ist.

Ganz ähnlich geschieht die Abbildung einer Fläche sechster Ordnung mit dreifachem Kegelschnitt K und dreifachem Punkt P durch Functionen sechster Ordnung mit 6 doppelten und 6 einfachen Fundamentalpunkten, welch letztere auf einer durch die 6 ersteren Punkte gehenden Curve dritter Ordnung liegen.

§ 4.

Die Transformation der Ordnung zwei-drei mit ihren Ableitungen. Abbildung der Flächen n^{ter} Ordnung mit $(n-1)$- oder $(n-2)$-facher Geraden.

Es giebt noch eine von der in § 3. betrachteten Art verschiedene Classe von Transformationsflächen zweiter Ordnung. Die *Hyperboloide*, welche eine Gerade und drei einfache Punkte gemein haben, bilden ebenfalls eine dreifach unendliche Schaar, und irgend drei der Flächen treffen sich noch in *einem* beweglichen Punkte; denn zwei derselben schneiden sich noch in einer Raumcurve dritter Ordnung, welche mit der festen Geraden 2 Punkte gemein hat und durch die 3 festen Punkte geht, und diese Curve trifft eine dritte der Flächen in einem weiteren Punkte. Diese Schaar kann daher zur Transformation dienen. Eine Betrachtung der in der Schaar enthaltenen zerfallenden Flächen ergiebt, dass die Transformationsflächen des entsprechenden Raumes *windschiefe Flächen dritter Ordnung* werden, mit fester Doppelgeraden und drei festen einfachen Geraden, welche jene schneiden.

Seien $y_1 = y_2 = 0$ die Fundamentalgerade g, und

$$1)\quad y_1 = y_3 = y_4 = 0$$
$$2)\quad y_2 = y_3 = y_4 = 0$$
$$3)\quad y_1 - y_2 = y_1 - y_3 = y_4 = 0$$

die Fundamentalpunkte 1, 2, 3 des Raumes Y. Dann wird die Transformation:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= y_1 y_4 = \varphi_1 & \sigma y_1 &= x_1 (x_1 x_4 - x_2 x_3) = \psi_1 \\
\varrho x_2 &= y_2 y_4 = \varphi_2 & \sigma y_2 &= x_2 (x_1 x_4 - x_2 x_3) = \psi_2 \\
\varrho x_3 &= y_1 (y_2 - y_3) = \varphi_3 & \sigma y_3 &= x_1 x_2 (x_1 - x_3) = \psi_3 \\
\varrho x_4 &= y_2 (y_1 - y_3) = \varphi_4 & \sigma y_4 &= x_1 x_2 (x_1 - x_2) = \psi_4 .
\end{aligned}$$

Die Doppelgerade G der Flächen ψ ist $x_1 = x_2 = 0$. Die drei einfachen Fundamentalgeraden der ψ, (1), (2), (3), sind:

$$(1)\quad x_1 = x_3 = 0$$
$$(2)\quad x_2 = x_4 = 0$$
$$(3)\quad x_1 - x_2 = x_1 - x_3 = 0 .$$

Als Fundamentalflächen von Y treten auf die Ebene E, $y_4 = 0$, welche durch die drei Punkte 1, 2, 3 geht, und die Ebenen $(g1)$, $(g2)$, $(g3)$ durch g und je einen der drei Punkte, nämlich $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_1 - y_2 = 0$; als solche von X das Hyperboloid H oder $x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$, welches durch die drei Geraden (1), (2), (3) geht, und die Ebenen $(G1)$, $(G2)$, $(G3)$, oder $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$, welche durch G und je eine der drei Geraden gehen. Und es entsprechen

die Ebenen $(G1)$, $(G2)$, $(G3)$ resp. den Punkten 1, 2, 3,
die Ebenen $(g1)$, $(g2)$, $(g3)$ resp. den Geraden (1), (2), (3),
das Hyperboloid H der Geraden g,
die Ebene E der Geraden G.

Den Punkten von g entsprechen die Erzeugenden von H, welche (1), (2), (3) schneiden, und den Punkten von G die Kegelschnitte der Ebene E, welche durch die Punkte 1, 2, 3 und den Schnittpunkt von E und g hindurchgehen.

Die Jacobi'sche Fläche von Y besteht aus den Ebenen E, $(g1)$, $(g2)$, $(g3)$, die von X aus H und $(G1)^2$, $(G2)^2$, $(G3)^2$.

Einer Fläche m^{ter} Ordnung von X, welche G zur μfachen und (1), (2), (3) zu je νfachen Geraden hat, entspricht im Raume Y eine Fläche der Ordnung $(2m - \mu - 3\nu)$, welche g zur $(m - 3\nu)$fachen Geraden, die Punkte 1, 2, 3 zu $(m - \mu - \nu)$fachen Knotenpunkten hat. Einer Fläche m^{ter} Ordnung von Y, welche g zur μfachen Geraden, 1, 2, 3 zu νfachen Knotenpunkten hat, entspricht in X einer Fläche der Ordnung $(3m - 2\mu - 3\nu)$, welche G zur $(2m - \mu - 3\nu)$fachen, (1), (2), (3) zu $(m - \mu - \nu)$fachen Geraden hat.

Insbesondere entspricht einer Fläche m^{ter} Ordnung in X, mit $(m-1)$facher Geraden G und einfachen Geraden (1), (2), (3), in Y eine Fläche $(m-2)^{ter}$ Ordnung, mit $(m-3)$facher Geraden g; und einer Fläche m^{ter} Ordnung in X, mit $(m-2)$facher Geraden G und einfachen Geraden (1), (2), (3), in Y eine Fläche $(m-1)^{ter}$ Ordnung, mit $(m-3)$facher Geraden g und einfachen Punkten in 1, 2, 3.

Die Ordnungen dieser beiden Flächen erniedrigen sich also, wenn man unsere Transformation der Ordnung zwei-drei auf sie anwendet: und es wird möglich, da diese Flächen eine genügende Anzahl von Geraden enthalten, welche man als Fundamentalgerade nehmen kann, die Transformation zwei-drei zu wiederholen und auf diese Weise die erstere Flächenart auf der Ebene, die zweite auf einem Hyperboloid eindeutig abzubilden.

Zu der in diesem § angegebenen Transformation füge ich noch die quadratische des § 3. hinzu, indem ich in der letztern den Fundamentalkegelschnitt in zwei sich schneidende Gerade zerfallen lasse. Aus diesen zwei *elementaren* Transformationen bilde ich eine ähnliche Reihenfolge, wie die der Cremona'schen Transformationen, welche die allgemeine ebene Transformation liefert. Die allgemeinste Raumtransformation, welche auf diesem Wege entsteht, ist die folgende:

„Den Ebenen von Y entspricht in X die dreifach unendliche Schaar von Flächen Ψ, der Ordnung $2r-s+1$, welche eine feste Gerade G zur $(2r-s)$fachen Geraden, ferner $3r-2s$ Gerade a_1, $a_2, \ldots a_{3r-2s}$, welche G, aber nicht einander schneiden, zu einfachen Geraden, und s feste Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$ zu einfachen Punkten haben.

Bei dieser Transformation entspricht sodann den Ebenen von X im Raume Y die dreifach unendliche Schaar von Flächen Φ, der Ordnung $r+1$, welche eine feste Gerade g zur $r$fachen Geraden, ferner s feste Geraden $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_s$, welche g, aber nicht einander schneiden, zu einfachen Geraden, und $3r-2s$ feste Punkte $b_1, b_2, \ldots b_{3r-2s}$ zu einfachen Punkten haben."

Denn die Flächen Ψ bilden in der That eine dreifach unendliche Schaar, weil eine Fläche der Ordnung $2r-s+1$ mit $(2r-s)$facher fester Gerade noch $3(2r-s+1)$ Constanten enthält und jede der Geraden a zwei, jeder der Punkte α eine weitere Constante absorbirt. Je drei der Flächen schneiden sich im Allgemeinen in *einem* beweglichen Punkte; denn zwei derselben schneiden sich, ausser G und den a, in einer Curve der Ordnung

$$(2r+1-s)^2-(2r-s)^2-(3r-2s)=r+1,$$

und diese Curve hat mit G r Punkte, mit den Geraden a je einen Punkt gemein und geht einfach durch die Punkte α; sie schneidet daher eine dritte der Flächen Ψ noch in

$$(r+1)(2r+1-s)-r(2r-s)-(3r-2s)-s$$

oder *einem* Punkte.

Daher können die Flächen Ψ zur Transformation dienen. Diese Transformation kann aber durch eine Reihenfolge von elementaren Transformationen ersetzt werden, da man auf diese Weise die Ordnung der den Ψ entsprechenden Flächen so lange erniedrigen kann, bis dieselbe der Einheit gleich wird. Denn ist die Anzahl der Fundamentalgeraden a gleich oder grösser als drei, so nimmt man G und drei der a als Fundamentalgerade der Flächen dritter Ordnung ψ einer Transformation zwei-drei, und die Ordnung der den Ψ entsprechenden Flächen Ψ' wird nach dem Obigen um 2 erniedrigt. Dabei entsprechen im Allgemeinen der Geraden durch G wieder Gerade von ähnlicher Art; und die Ψ' haben daher wohl s feste Punkte α', aber nur $3r-2s-3$ feste, die vielfache Gerade schneidende, Gerade a'. Wird nun die Anzahl der $a'<3$, so macht man eine elementare Transformation der Ordnung zwei, indem man eine der Geraden a' und einen der Punkte α' benutzt; wodurch die Ordnung der entsprechenden Flächen Ψ'' um 1 kleiner wird, ebenso die Anzahl der festen Geraden und die der festen Punkte. Wird endlich die Anzahl der festen Geraden $=0$, so ist die Anzahl der festen Punkte $=3k$, und man muss noch k Transformationen der Ordnung drei-zwei machen, indem man immer drei der Punkte als Fundamentalpunkte der Flächen φ dieser Transformation annimmt; bei jeder derselben erniedrigt sich die Ordnung der transformirten Flächen um 1.

Aus der Betrachtung dieser successiven Transformationen und aus dem oben angeführten Verhalten der beweglichen Schnittcurven je zweier der Flächen Ψ folgt nun direct die Richtigkeit der oben angegebenen Umkehrung der Transformation $(2r-s+1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Man hat dabei nur zu bemerken, dass bei jeder der Transformationen dem Ebenenbüschel durch G wieder ein Ebenenbüschel durch die mehrfache Fundamentalgerade G' des entsprechenden Raumes, und Geraden durch G wiederum Gerade durch G', entsprechen, speciellen Ebenen dieses Büschels aber, wenn dieselben durch Gerade, resp. Punkte gehen, welche bei der Transformation benutzt werden, Punkte, resp. Gerade. Zu einem Ebenenbüschel durch G muss man noch eine Fläche Ω, von der Ordnung $2r-s$, welche G zur $(2r-s+1)$fachen Geraden, die Geraden a zu einfachen Geraden hat und durch die Punkte α geht, hinzufügen, um einen Büschel von Flächen Ψ zu erhalten, der dann die Abbildung des Ebenenbüschels durch g vorstellt. Die Fläche Ω ist daher die Abbildung der vielfachen Fundamentalgeraden g der Φ. Die Fläche Ω ist durch die genannten Bedingungen vollständig und eindeutig bestimmt. Sie wird erzeugt durch die rationalen Curven r^{ter} Ordnung, welche $(r-1)$ Punkte mit G, je einen Punkt mit den Geraden a gemein und einfache Punkte in den α haben; denn solche Curven ergänzen sich mit den Geraden durch G zu Abbildungen von Geraden des Raumes Y.

Ebenso folgt, dass die Abbildung von G eine Fläche ω von der Ordnung r wird, die g als $(r-1)$fache Gerade, die s Geraden β zu einfachen Geraden hat und durch die $3r-2s$ Punkte b einfach geht. Auch diese Fläche ist durch diese Bedingungen vollständig und eindeutig bestimmt. Sie wird erzeugt durch die den Punkten von G entsprechenden, rationalen Curven der Ordnung $2r-s$, welche $2r-s-1$ Punkte mit g, je einen Punkt mit den Geraden β gemein, und einfache Punkte in den b haben.

Als weitere Fundamentalflächen der Transformation treten die Ebenen auf, welche man durch G und die Geraden a und Punkte α, und ebenso die Ebenen, welche man durch g und die Punkte b und Geraden β legen kann. Und zwar gelten für diese Gebilde die folgenden Beziehungen. Es entsprechen

die Ebenen (Ga_i) den Punkten b_i,
die Ebenen $(G\alpha_i)$ den Geraden β_i,
die Ebenen (gb_i) den Geraden a_i,
die Ebenen $(g\beta_i)$ den Punkten α_i,
die Fläche Ω der Geraden g,
die Fläche ω der Geraden G.

Diese Transformation werde nun auf die *Flächen* $(r+2)^{ter}$ *Ordnung* von X, $F=0$, welche G als *rfache Gerade*, die a als einfache Gerade, die Punkte α als Doppelpunkte besitzen, angewendet. Da diese Flächen noch $3r-2s+2$ nicht durch die α gehende Geradenpaare besitzen, so kann man $3r-2s$ dieser Geraden aus $3r-2s$ verschiedenen Paaren herausnehmen und die Transformationsflächen Ψ hindurchlegen. Diesen Flächen entsprechen dann im Raume Y *Hyperboloide* H, welche durch die $3r-2s$ Punkte b hindurchgehen, dagegen die Gerade g und die β nicht enthalten.

Diese Abbildung der Flächen F auf Hyperboloiden giebt sogleich die Eigenschaften derselben. So besteht der Schnitt von g mit H aus zwei Punkten, denen in X zwei Curven r^{ter} Ordnung entsprechen, welche aus F von Ω ausgeschnitten werden, und deren Kenntniss direct zur Abbildung von F geführt hätte. Diese Curven und die Fläche Ω sind die in meiner Abhandlung, diese Annalen, Bd. 3, pag. 180 ff. angegebenen. Bei der Abbildung sind die beiden Punkte, in welchen H von g getroffen wird, $r$fache, die Punkte des Schnittes der β mit H einfache, und ebenso die b einfache Fundamentalpunkte des Hyperboloids. Um auf die ebene Abbildung durch Functionen $(r+2)^{ter}$ Ordnung zu gelangen, projicirt man noch H von einem der Schnittpunkte von g und H aus auf eine Ebene.

Die oben entwickelte Transformation giebt die niedrigstmögliche ebene Abbildung der windschiefen *Flächen* n^{ter} *Ordnung mit* $(n-1)$ *facher Geraden*, $\Psi = 0$, wenn man $s = 0$ für $n = 2r + 1$ und $s = 1$ für $n = 2r$ setzt. Die dreifach unendliche Schaar der Curven $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche Schnitte einer Ebene E von Y mit den Flächen Φ sind, bildet dabei die ebenen Schnitte der E entsprechenden Fläche Ψ ab. Diese Abbildungen sind dann identisch mit den in § 7. der erwähnten Abhandlung gegebenen, wenn man nur noch, für $n = 2r$, den einen Fundamentalpunkt a der Transformationsflächen Ψ unendlich nahe an G heranrücken lässt.

§ 5.

Specialisirung der Transformation dritter Ordnung.

Ich gehe auf die allgemeine Transformation dritter Ordnung des § 2. zurück, um die Specialisirungen abzuleiten, welche durch das Zerfallen der Fundamentalcurve K, der Raumcurve sechster Ordnung, $p = 3$, eintreten. Diese speciellen Fälle, einzeln genommen oder zu einer Reihe von Transformationen mit einander verbunden, bieten eine reiche Quelle für Flächenabbildungen.

Eine Uebersicht über die hierbei möglichen Hauptfälle verschaffe ich mir auf folgendem Wege. Ich betrachte die durch § 2. gegebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung, φ, auf einer Ebene E von X. Dabei bildet sich die Curve K, durch welche φ geht, auf E ab durch den Schnitt dieser Ebene mit der Fundamentalfläche Ω [(6) oder (7) des § 2.], also durch eine Curve achter Ordnung mit 6 dreifachen Punkten. Indem man nun diese Curve auf alle möglichen Arten zerfallen lässt, ergeben sich auch die Singularitäten ihres Bildes, der Curve K. Um die Transformation durchzuführen, untersucht man sodann die Fläche Θ, welche durch die dreifachen Sehnen von K erzeugt wird. Der Schnitt von Θ mit einer Ebene von Y giebt das Bild der Fundamentalcurve L des Raumes X, und somit L selbst. So findet man folgende Transformationen:

(A) Die φ werden Flächen dritter Ordnung, welche eine Raumcurve Q fünfter Ordnung, $p = 2$, und eine Sehne G von Q gemein haben. Q ist der Schnitt einer Fläche zweiter und einer dritter Ordnung, die sich noch in einer Geraden treffen. Die Umkehrung ergiebt für den Raum X ein ganz ähnliches System von Transformationsflächen ψ, mit fester Curve q fünfter Ordnung, $p = 2$, und fester Sehne g von q. Der Sehne g entspricht das Hyperboloid durch Q, der Curve q die Fläche sechster Ordnung, mit Doppelcurve Q und dreifacher Geraden G, erzeugt durch die Sehnen von Q, welche G schneiden.

Ein weiteres Zerfallen von Q giebt Flächen φ, welche eine Raumcurve vierter Ordnung, erster Species, und zwei ihrer Sehnen gemein haben. Diese bemerkenswerthe Transformation werde ich, mit ihren Ableitungen, in § 6. näher untersuchen; ebenso die weiteren hieher gehörigen speciellen Fälle.

(B) Die φ sind Flächen dritter Ordnung, welche eine Raumcurve Q, fünfter Ordnung $p = 1$, und eine Q in drei Punkten treffende Sehne G gemein haben. Die ψ werden sodann Flächen dritter Ordnung, mit gemeinschaftlicher Raumcurve vierter Ordnung erster Species q, und Kegelschnitt g, der q in 3 Punkten trifft. Auch diese Transformation soll in § 8. näher betrachtet werden.

Speciell kann Q in eine Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species, Q', und eine Sehne von Q' zerfallen. G bleibt dreipunktige Sehne von Q'. Dieser Fall ist zugleich in (A) enthalten.

(C) Die φ sind Flächen dritter Ordnung, welche eine rationale Raumcurve fünfter Ordnung, Q, und die vierpunktige Sehne G von Q gemein haben. Die Curve Q entsteht als theilweiser Schnitt zweier Flächen dritter Ordnung, welche eine Raumcurve dritter Ordnung und eine diese nicht schneidende Gerade $L = M = 0$ gemein haben; und die Transformationsformeln werden daher, wenn die A_i, B_i lineare Functionen sind:

$$\varrho\,\Sigma\lambda_i x_i = \Sigma\lambda_i\varphi_i = \begin{array}{cccc} \lambda_1\,, & \lambda_2\,, & \lambda_3\,, & \lambda_4 \\ \alpha_1 L + \beta_1 M\,, & \gamma_1 L + \delta_1 M\,, & A_1\,, & B_1 \\ \alpha_2 L + \beta_2 M\,, & \gamma_2 L + \delta_2 M\,, & A_2\,, & B_2 \\ \alpha_3 L + \beta_3 M\,, & \gamma_3 L + \delta_3 M\,, & A_3\,, & B_3 \end{array}$$

Dabei besteht der Büschel $\lambda_3\varphi_3 + \lambda_4\varphi_4 = 0$ aus windschiefen Flächen. Die Umkehrung führt auf ein ganz ähnliches System von Flächen ψ, mit festen Curven q, g. Der Curve q entspricht die Fläche achter Ordnung, mit 3facher Curve Q und 4facher Geraden G; der Geraden g, welche q in 4 Punkten trifft, entspricht nur wieder eine Gerade G', so dass hier einer der im § 1. berührten singulären Fälle eintritt.

(D) Die φ sind Flächen dritter Ordnung, mit gemeinschaftlicher Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species, Q, und Kegelschnitt G, welcher Q in 4 Punkten trifft. Auch im entsprechenden Raume liegt dann ein solches System von Flächen ψ, mit gemeinschaftlicher Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species, q, und Kegelschnitt g, welcher q in 4 Punkten trifft. Der Curve q entspricht die Fläche sechster Ordnung mit Doppelcurve Q und dreifacher Curve G, erzeugt durch die Sehnen von Q, welche G treffen; dem Kegelschnitt g entspricht das Hyperboloid, welches man durch G legen kann; und ähnlich im Raume X.

(E) Die φ sind Flächen dritter Ordnung, welche eine Raumcurve dritter Ordnung und eine diese in drei Punkten treffende ebene Curve dritter Ordnung gemein haben. Die Umkehrung ergiebt Flächen dritter Ordnung, ψ, mit einem festen Doppelpunkt P und einer gemeinschaftlichen Raumcurve sechster Ordnung, $p = 1$, welche P zum dreifachen Punkte hat. Diese Transformation werde ich in § 7. entwickeln.

(F) Die φ sind Flächen dritter Ordnung, welche zwei Raumcurven dritter Ordnung Q, Q' gemein haben, die sich in vier Punkten treffen. Die ψ bilden dann ein ganz ähnliches System mit zwei Raumcurven dritter Ordnung q, q'. Der Curve q entspricht eine Fläche vierter Ordnung, mit zweifacher Curve Q, einfacher Curve Q', oder eine $F_4(Q^2, Q')$, der q' eine $F_4(Q, Q'^2)$, der Q eine $F_4(q^2, q')$, der Q' eine $F_4(q, q'^2)$.

(G) Ich führe noch die speciellste der Transformationen dritter Ordnung an. Die φ sind die Flächen dritter Ordnung, welche vier feste Punkte zu Doppelpunkten haben und daher die sechs Kanten des Tetraeders, das diese vier Punkte zu Ecken hat, enthalten. Die Gleichungen kann man in die Form bringen:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} : \frac{1}{y_4},$$

oder:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= y_2 y_3 y_4, & \sigma y_1 &= x_2 x_3 x_4 \\ \varrho x_2 &= y_3 y_4 y_1, & \sigma y_2 &= x_3 x_4 x_1 \\ \varrho x_3 &= y_4 y_1 y_2, & \sigma y_3 &= x_4 x_1 x_2 \\ \varrho x_4 &= y_1 y_2 y_3, & \sigma y_4 &= x_1 x_2 x_3 . \end{aligned}$$

Auch die ψ haben die vier Ecken eines Tetraeders zu Doppelpunkten und gehen sodann durch die sechs Kanten desselben. Den vier Ecken des einen Tetraeders entsprechen die vier ebenen Flächen des anderen Tetraeders, die Kanten entsprechen sich gegenseitig. Die Flächen schneiden sich noch in beweglichen Raumcurven dritter Ordnung, die durch die vier Ecken hindurchgehen. Die Jacobi'sche Fläche besteht aus den vier Ebenen des Tetraeders, die doppelt zu rechnen sind.

§ 6.

Die Transformation (A) mit ihren Ableitungen. Abbildung der Flächen $(2n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit $n$facher Raumcurve vierter Ordnung erster Species.

Nimmt man bei der Transformation dritter Ordnung des § 2. an, dass im Raume Y ein Ebenenbüschel $y_1 + \lambda y_2 = 0$ existirt, dem im Raume X ebenfalls ein Ebenenbüschel $x_1 + \lambda x_2 = 0$ entspricht, so werden die drei bilinearen Gleichungen

$$-x_1y_2+x_2y_1=0$$
$$\Sigma x_i A_i=0, \qquad \Sigma x_i B_i=0,$$

woraus

$$\varrho\,\Sigma\lambda_i x_i=\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4\\ -y_2 & y_1 & 0 & 0\\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4\\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4\end{vmatrix}.$$

Dieses ist das in (A), § 5. angeführte System. Für die Fundamentalflächen giebt die Gleichung (6) des § 2.:

$$(A_3B_4-A_4B_3)(\mathsf{A}_3\mathsf{B}_4-\mathsf{A}_4\mathsf{B}_3)=0.$$

Der erste Factor stellt das Hyperboloid dar, welches der Geraden $x_1=x_2=0$ entspricht; der zweite Factor, wenn darin die x durch die y ausgedrückt werden, die in (A) erwähnte windschiefe Fläche sechster Ordnung.

Ich nehme jetzt weiter an, dass noch ein zweiter Ebenenbüschel in Y existirt, dem im Raume X ebenfalls ein Ebenenbüschel entspricht. Die bilinearen Gleichungen seien

$$-x_1y_2+x_2y_1=0$$
$$-x_3y_4+x_4y_3=0$$
$$\Sigma y_k A_k=\Sigma x_i A_i=0,$$

woraus

$$\varrho\,\Sigma\lambda_i x_i=\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4\\ -y_2 & y_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -y_4 & y_3\\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4\end{vmatrix}=\Sigma\lambda_i\varphi_i$$

oder:

$$\begin{aligned}\varphi_1&=-y_1(y_3A_3+y_4A_4)=-y_1H_1\\ \varphi_2&=-y_2(y_3A_3+y_4A_4)=-y_2H_1\\ \varphi_3&=y_3(y_1A_1+y_2A_2)=y_3H_2\\ \varphi_4&=y_4(y_1A_1+y_2A_2)=y_4H_2\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}\psi_1&=x_1(x_3\mathsf{A}_3+x_4\mathsf{A}_4)=x_1h_2\\ \psi_2&=x_2(x_3\mathsf{A}_3+x_4\mathsf{A}_4)=x_2h_2\\ \psi_3&=-x_3(x_1\mathsf{A}_1+x_2\mathsf{A}_2)=-x_3h_1\\ \psi_4&=-x_4(x_1\mathsf{A}_1+x_2\mathsf{A}_2)=-x_4h_1\end{aligned}$$

Die Transformationsflächen werden Flächen dritter Ordnung, welche eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species und zwei ihrer Sehnen gemein haben. Je zwei dieser Flächen schneiden sich noch in einer Raumcurve dritter Ordnung, welche die Raumcurve vierter Ordnung in vier Punkten, die Sehnen in je zwei Punkten trifft

Es seien Q die Raumcurve vierter Ordnung, $H_1 = H_2 = 0$, G_1 $(y_3 = y_4 = 0)$ und G_2 $(y_1 = y_2 = 0)$ die beiden Sehnen von Q. Ebenso seien q $(h_1 = h_2 = 0)$, g_1 $(x_1 = x_2 = 0)$ und g_2 $(x_3 = x_4 = 0)$ die Raumcurve vierter Ordnung und die beiden Sehnen im Raume X. Die Gleichung (6) des § 2. giebt nun für die diesen Curven entsprechenden Fundamentalflächen:

$$(y_3 A_3 + y_4 A_4)(x_3 \mathsf{A}_3 + x_4 \mathsf{A}_4) = 0,$$

oder für den Raum Y:

$$(y_1 A_1 + y_2 A_2)(y_3 A_3 + y_4 A_4)(y_3 \mathsf{A}_3 + y_4 \mathsf{A}_4) = 0.$$

Die Gleichung $y_3 \mathsf{A}_3 + y_4 \mathsf{A}_4 = 0$, die identisch ist mit $y_1 \mathsf{A}_1 + y_2 \mathsf{A}_2 = 0$, stellt die windschiefe Fläche vierter Ordnung Ω dar, welche die Sehnen G_1, G_2 zu Doppelgeraden hat und durch die Curve Q hindurchgeht; sie wird erzeugt durch die Geraden, welche Q, G_1 und G_2 treffen und welche den Punkten der Curve q entsprechen. Ω selbst entspricht also der Curve q. Den Sehnen g_1 und g_2 entsprechen resp. die Hyperboloide H_1 und H_2, von denen H_1 durch G_1, H_2 durch G_2 geht. Ebenso entsprechen der Sehne G_1 das Hyperboloid h_1 durch q und g_1, der Sehne G_2 das Hyperboloid h_2 durch q und g_2, und der Curve Q die windschiefe Fläche ω, welche durch q geht und g_1, g_2 zu Doppelgeraden hat.

Den Punkten von g_1, resp. g_2 entsprechen die Sehnen von Q, welche G_1, resp. G_2 schneiden, den von G_1, resp. G_2 die Sehnen von q, welche g_1, resp. g_2 schneiden. Im Allgemeinen aber entsprechen sich die Sehnen von q und Q gegenseitig.

Diese Transformation liefert direct die bekannte Abbildung der Fläche fünfter Ordnung mit Doppelcurve vierter Ordnung, $F = 0$. Denn lässt man q mit dieser Curve zusammenfallen und legt g_1 und g_2 in zwei der Sehnen, welche auf F liegen, so entspricht dieser Fläche in Y eine Fläche dritter Ordnung, die Q enthält, und die sich nun weiter abbilden lässt.

Um aber diese Abbildungen auf die einfachste Weise zu geben, benutze ich eine weitere Transformation derselben Art, bei welcher auch dieselbe Curve Q, aber zwei von G_1, G_2 verschiedene Sehnen G_3, G_4 von Q die Fundamentalcurven für die Beziehung zwischen dem Raume Y und einem weiteren Raume Z sein sollen. Den Ebenen von Z sollen die Flächen dritter Ordnung entsprechen, welche durch Q, G_3, G_4 gehen. Den Sehnen G_3, G_4 entsprechen nun im Raume X wieder Sehnen g_3, g_4 von q, und den obenerwähnten Flächen, oder den Ebenen von Z, entsprechen daher in X Flächen fünfter Ordnung, welche die Curve q zur Doppelcurve und die vier Sehnen g_1, g_2, g_3, g_4 von q einfach enthalten.

Die Transformationsflächen Ψ von X, welche den Ebenen von Z

entsprechen, sind somit die dreifach unendliche Schaar von Flächen fünfter Ordnung, welche eine Raumcurve vierter Ordnung, erster Species zur Doppelcurve und vier feste ihrer Sehnen zu einfachen Geraden haben. Je drei dieser Flächen schneiden sich im Allgemeinen in *einem* beweglichen Punkte.

Auch den Ebenen von X entspricht sodann in Z die dreifach unendliche Schaar von Flächen fünfter Ordnung, Φ, welche eine Raumcurve vierter Ordnung, erster Species, Q', zur Doppelcurve und vier feste ihrer Sehnen, G_1', G_2', G_3', G_4', zu einfachen Geraden haben.

Um die Fundamentalflächen dieser Transformation (XZ) zu erhalten, hat man nur die beiden Transformationen (XY) und (YZ) zu betrachten. So ist die Fläche Ω' von Z, welche der Curve q entspricht, das Bild der Fläche Ω bei der Transformation (YZ), also eine Fläche achter Ordnung, die Q' zur dreifachen Curve und die vier Sehnen G' zu Doppelgeraden hat. Diese Fläche wird erzeugt durch die Curven, welche den Erzeugenden von Ω, den Geraden, die Q, G_1, G_2 treffen, entsprechen, also erzeugt durch die Kegelschnitte, welche Q' in drei Punkten, die vier Sehnen G' in je einem Punkte treffen. Ebenso ergiebt sich, dass den Sehnen g_1, g_2, g_3, g_4 der Curve q von X im Raume Z die Hyperboloide H_1', H_2', H_3', H_4' entsprechen, welche resp. durch G_1', G_2', G_3', G_4' und durch Q' gehen.

Aehnlich entsprechen den Sehnen G_1', G_2', G_3', G_4' die Hyperboloide h_1, h_2, h_3, h_4 in X, welche durch q und resp. g_1, g_2, g_3, g_4 gehen; und der Curve Q' entspricht eine Fläche achter Ordnung, ω', die q zur dreifachen Curve, die vier Sehnen g zu Doppelgeraden hat.

Noch bemerke ich, dass der von Herrn Lüroth, diese Annalen, Bd. 3, pag. 124 gegebene Satz, dass zwei Kegelschnitte existiren, welche eine Raumcurve vierter Ordnung, erster Species in drei Punkten und fünf ihrer Sehnen in je einem Punkte treffen, direct daraus folgt, dass eine fünfte Sehne G' die Curve Q' in zwei Punkten trifft; denn diesen beiden Punkten entsprechen eben in X jene zwei Kegelschnitte.

Da jede Fläche fünfter Ordnung mit Doppelcurve vierter Ordnung, erster Species, $\Psi = 0$, sieben Sehnenpaare dieser Curve besitzt, so kann man vier der Sehnen aus vier Paaren herauswählen, und Ψ mittelst der hier angegebenen Transformation auf der Ebene abbilden. Die Bilder der ebenen Schnitte sind dann die Schnitte einer Ebene mit den Flächen Φ der Transformation (XZ), Curven fünfter Ordnung mit vier doppelten und vier einfachen Fundamentalpunkten; und das Bild der Doppelcurve ist der Schnitt der Ebene mit der Fläche Ω'. Die Betrachtung dieser Abbildung erscheint vortheilhafter, als die der möglichst niederen Abbildung.

Man kann nun die Reihe der Transformationen (XY), (YZ) auf gleiche Art weiter fortsetzen, indem man zuerst in Z wieder die Curve Q', dagegen zwei neue Sehnen G_5', G_6' als Fundamentalcurven einer Transformation (ZU) benutzt u. s. w. So ergiebt sich durch eine Verbindung von n dieser Transformationen die folgende *Transformation* $(2n+1)^{\text{ter}}$ *Ordnung*:

„Die den Ebenen eines Raumes W entsprechenden Transformationsflächen des Raumes X sind Flächen Ψ der Ordnung $2n+1$, welche eine Raumcurve vierter Ordnung, erster Species, q, als $n$fache Curve und $2n$ feste Sehnen von q als einfache Gerade besitzen. Dabei entspricht auch den Sehnen von X in W eine ähnliche dreifach unendliche Schaar von Flächen Φ der Ordnung $2n+1$, mit fester $n$facher Raumcurve vierter Ordnung, erster Species Q und festen $2n$ Sehnen von Q als einfachen Geraden. Den Fundamentalgeraden des einen Raumes entsprechen die Hyperboloide, welche durch die Raumcurve und je eine der Sehnen im anderen Raume gehen; der Raumcurve vierter Ordnung des ersten Raumes entspricht im zweiten die Fläche der Ordnung $4n$, welche die Raumcurve desselben als $(2n-1)$fache Curve, die Sehnen zu Doppelgeraden hat, erzeugt durch die rationalen Raumcurven n^{ter} Ordnung, welche die Raumcurve vierter Ordnung in $2n-1$ Punkten, die $2n$ Sehnen in je einem Punkte treffen."

Daraus folgt zugleich der Satz: „Die Anzahl der rationalen Raumcurven n^{ter} Ordnung, welche eine Raumcurve vierter Ordnung, erster Species in $2n-1$ Punkten und $2n+1$ allgemeine ihrer Sehnen in je einem Punkte treffen, ist gleich zwei."

In dieser Transformation ist die *ebene Abbildung jeder Fläche* $(2n+1)^{\text{ter}}$ *Ordnung mit $n$facher Raumcurve vierter Ordnung, erster Species* enthalten; denn auf diesen Flächen liegen immer $2n+3$ Geradenpaare, welche von Hyperboloiden, die durch die Raumcurve gehen, ausgeschnitten werden, und man kann $2n$ Gerade aus $2n$ verschiedenen Paaren herauswählen und zur Transformation benutzen. Die ebenen Schnitte einer solchen Fläche bilden sich ab durch Curven $(2n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, mit vier $n$fachen und $2n$ einfachen Fundamentalpunkten. Durch eine Cremona'sche Transformation zweiter Ordnung erhält man sodann die niedrigste Abbildung durch Curven $(n+2)^{\text{ter}}$ Ordnung, mit einem $n$fachen und $2n+3$ einfachen Fundamentalpunkten. Auf der Fläche liegen 2^{2n+2} der erwähnten rationalen Raumcurven n^{ter} Ordnung.

Ich kehre zur Transformation (A) selbst zurück. Eine weitere Specialisirung derselben kann man dadurch eintreten lassen, dass man noch einem dritten Ebenenbüschel von Y einen Ebenenbüschel von X entsprechen lässt. Die drei bilinearen Gleichungen seien dann:

$$x_1 L_2 - x_2 L_1 = 0$$
$$x_3 M_2 - x_4 M_1 = 0$$
$$x_1 N_2 - x_2 N_1 + x_3 N_2 - x_4 N_1 = 0,$$

oder:

$$\varrho x_1 = L_1 (M_1 N_2 - M_2 N_1) = \varphi_1$$
$$\varrho x_2 = L_2 (M_1 N_2 - M_2 N_1) = \varphi_2$$
$$\varrho x_3 = M_1 (N_1 L_2 - N_2 L_1) = \varphi_3$$
$$\varrho x_4 = M_2 (N_1 L_2 - N_2 L_1) = \varphi_4,$$

wo die L, M, N lineare Functionen der y. Die Flächen φ enthalten dann eine Raumcurve dritter Ordnung Q und drei ihrer Sehnen G gemeinschaftlich. Die Flächen ψ in X enthalten ein ähnliches System q, g. Der Curve q entspricht das Hyperboloid durch die drei Geraden G, den Sehnen g die drei Hyperboloide durch Q und je zwei der Sehnen G.

Die speciellste der Transformationen (A) ergiebt sich durch ein Zerfallen von Q in drei Gerade, von denen zwei die G schneiden. Die φ werden dann Flächen dritter Ordnung, welche vier sich nicht schneidende Gerade G_1, G_2, G_3, G_4 und folglich auch die zwei Geraden G_1', G_2', welche diese vier Geraden treffen, gemein haben. Auch die ψ enthalten dann ein ähnliches System von vier Geraden g_i und den zwei Schnittgeraden g_i'. Die Transformation hat die Gleichungen:

$$\varrho x_1 = H_1 \Sigma l_i' y_i, \qquad \varrho x_3 = H_2 \Sigma l_i y_i,$$
$$\varrho x_2 = H_1 \Sigma m_i' y_i, \qquad \varrho x_4 = H_2 \Sigma m_i y_i,$$

wo

$$H_1 = \begin{vmatrix} l_1 y_1 + l_2 y_2, & m_1 y_1 + m_2 y_2 \\ l_3 y_3 + l_4 y_4, & m_3 y_3 + m_4 y_4 \end{vmatrix},$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} l_1' y_1 + l_2' y_2, & m_1' y_1 + m_2' y_2 \\ l_3' y_3 + l_4' y_4, & m_3' y_3 + m_4' y_4 \end{vmatrix}.$$

Die Jacobi'sche Fläche von Y besteht aus den vier Hyperboloiden, welche durch je drei der Geraden G_i hindurchgehen und welche den Geraden g_i von X entsprechen. Die Geraden g' und G' entsprechen sich gegenseitig. Diese Transformation ist auch specieller Fall von (C), § 5.

§ 7.

Die Transformation (E). Abbildung zweier Flächenarten von der fünften und sechsten Ordnung.

Den Ebenen des Raumes X, die durch einen festen Punkt P derselben gehen, möge im Raume Y die zweifach unendliche Schaar von Hyperboloiden entsprechen, welche durch eine feste Raumcurve dritter Ordnung, Q, hindurchgehen. Der Geradenschaar durch P entspricht alsdann die Schaar der Sehnen von Q, und eine beliebige weitere lineare Beziehung zwischen den Coordinaten der beiden Räume giebt sonach eine eindeutige Transformation zwischen denselben.

Sei P gegeben durch $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, und Q durch den Schnitt der Hyperboloide:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & A_1 & B_1 \\ \alpha_2 & A_2 & B_2 \\ \alpha_3 & A_3 & B_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Die angegebene Beziehung kann man dann durch die Gleichungen ausdrücken:

$$(1)\quad \begin{cases} A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 \equiv \mathsf{A}_1 y_1 + \mathsf{A}_2 y_2 + \mathsf{A}_3 y_3 + \mathsf{A}_4 y_4 = 0 \\ B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 \equiv \mathsf{B}_1 y_1 + \mathsf{B}_2 y_2 + \mathsf{B}_3 y_3 + \mathsf{B}_4 y_4 = 0, \\ y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 - y_4 x_4 = 0 \end{cases}$$

woraus:

$$(2)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = y_4 (A_2 B_3 - A_3 B_2) = \varphi_1 \\ \varrho x_2 = y_4 (A_3 B_1 - A_1 B_3) = \varphi_2 \\ \varrho x_3 = y_4 (A_1 B_2 - A_2 B_1) = \varphi_3 \\ \varrho x_4 = y_1 (A_2 B_3 - A_3 B_2) + y_2 (A_3 B_1 - A_1 B_3) + y_3 (A_1 B_2 - A_2 B_1) = \varphi_4 \end{cases}$$

und

$$(3)\qquad \sigma\, \Sigma \mu_k y_k = \Sigma \pm \mu_1 x_2 \mathsf{A}_3 \mathsf{B}_4 = \Sigma \mu_k \psi_k .$$

Die Flächen dritter Ordnung φ gehen durch Q und durch die ebene Curve dritter Ordnung R hindurch, welche die Gleichungen $y_4 = 0$, $\varphi_4 = 0$ hat und welche die Curve Q in drei Punkten schneidet. Umgekehrt führt auch ein solches Fundamentalsystem auf Gleichungen der angegebenen Form.

Die Flächen ψ haben den Punkt P zum Doppelpunkt. Je zwei der Flächen schneiden sich noch in einer beweglichen Raumcurve dritter Ordnung, die durch P einfach geht. Die ψ enthalten daher als feste Curve eine Raumcurve sechster Ordnung, welche P zum dreifachen Punkte hat. Diese Fundamentalcurve q ist vom Geschlecht 1; denn nach den Formeln (5) des § 2. kann man sie eindeutig in eine ebene Curve dritter Ordnung transformiren.

Dem Punkte P entspricht die Ebene E ($y_4 = 0$), welche durch R geht. Der Curve q entspricht daher noch die windschiefe Fläche sechster Ordnung, Ω, welche Q zur dreifachen, R zur einfachen Curve hat, erzeugt durch die Sehnen von Q, welche R schneiden. Nach (6), § 2. hat man für die Fundamentalflächen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &(A_2 B_3 - A_3 B_2)(\mathsf{A}_2 \mathsf{B}_3 - \mathsf{A}_3 \mathsf{B}_2) \\ +\, &(A_3 B_1 - A_1 B_3)(\mathsf{A}_3 \mathsf{B}_1 - \mathsf{A}_1 \mathsf{B}_3) \\ +\, &(A_1 B_2 - A_2 B_1)(\mathsf{A}_1 \mathsf{B}_2 - \mathsf{A}_2 \mathsf{B}_1) = 0 \end{aligned}$$

und hieraus, wenn man mittelst (2) die x durch die y ausdrückt und den Factor y_4^2 ausscheidet:

$$\Omega \equiv \sum_{i,j,h} p_{ij,h} \Phi_i \Phi_j \Phi_h = 0 \qquad (i, j, h = 1, 2, 3),$$

wobei

$$\Phi_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2, \text{ u. s. w.}$$

$$p_{ij,1} = a_{i2} b_{j3} - a_{i3} b_{j2}, \text{ u. s. w.}$$

Wenn man aber in (4) mittelst (3) die y durch die x ausdrückt, ergiebt sich zuerst:

$$\omega \equiv x_1 (\mathsf{A}_2 \mathsf{B}_3 - \mathsf{A}_3 \mathsf{B}_2) + x_2 (\mathsf{A}_3 \mathsf{B}_1 - \mathsf{A}_1 \mathsf{B}_3) + x_3 (\mathsf{A}_1 \mathsf{B}_2 - \mathsf{A}_2 \mathsf{B}_1) = 0,$$

eine Kegelfläche dritter Ordnung, die den Punkt P zum Scheitelpunkt hat und über der Curve sechster Ordnung q beschrieben ist. Dieser Kegel ω entspricht der Curve R. Endlich findet man die der Curve Q entsprechende Fundamentalfläche χ, wenn man in den Φ_i die y durch die x ausdrückt und den Factor x_i abtrennt. Diese Fläche χ muss noch, nach § 1., eine windschiefe Fläche fünfter Ordnung sein, welche q zur Doppelcurve hat und erzeugt wird durch die Geraden, welche q in drei Punkten treffen. Diese Fläche hat dann P zum dreifachen Punkte und ihre Gleichung ist:

$$\chi \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & B_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & B_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & B_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \\ \mathsf{B}_1 & \mathsf{B}_2 & \mathsf{B}_3 & \mathsf{B}_4 & 0 \end{vmatrix}$$

Als eine Anwendung dieser Transformation führe ich die ebene Abbildung einer Fläche F von der sechsten Ordnung, welche q zur Doppelcurve, den Punkt P zum dreifachen Punkte hat, an. Dieser Fläche entspricht in Y eine Fläche f von der dritten Ordnung, die durch R geht. Bildet man nun f und somit auch F auf der Ebene ab, so werden die Bilder der ebenen Schnitte von F Curven sechster Ordnung S, mit sechs doppelten Fundamentalpunkten a und sechs einfachen Fundamentalpunkten b, welche auf der Ebene eine willkürliche Lage haben. Eine nähere Betrachtung zeigt, dass auf der Bildebene dann immer drei Punkte c liegen, welche eine zweifach unendliche Schaar von Curven S, die durch die drei Punkte c gehen, zulassen, den Bildern der durch P gehenden ebenen Schnitte von F. Die b und c entsprechen den neun Punkten, in welchen f von der Raumcurve dritter Ordnung Q geschnitten wird. Man legt durch die a zwei Curven dritter Ordnung, die sich noch in drei Punkten d schneiden. Sodann legt man zwei Curven sechster Ordnung, welche die a zu Doppelpunkten haben und durch die d gehen. Diese Curven schneiden sich noch in neun Punkten, von denen man sechs für die b nimmt.

Die drei anderen sind dann die c. Die Fläche besitzt sechs Gerade, welche dreipunktige Sehnen von q sind, und ein System von 27 Kegelschnitten, welches dem Geradensystem einer Fläche dritter Ordnung analog ist.

Von einem specielleren Falle der vorliegenden Transformation (E), in welchem einem Ebenenbüschel von Y wieder ein Ebenenbüschel von X entspricht, habe ich schon in meiner Arbeit, diese Annalen, Bd. 3, pag. 205, eine Anwendung auf eine Abbildungsaufgabe gemacht. Bei dieser Transformation zerfällt die ebene Curve dritter Ordnung, R, in einen Kegelschnitt K, der Q in drei Punkten trifft, und in eine Gerade G, welche in der Ebene von K liegt und Q nicht schneidet. Auch q zerfällt dann in eine Raumcurve fünfter Ordnung, q', welche den Punkt P zum dreifachen Punkte und das Geschlecht 0 hat, und in eine nicht durch P gehende Sehne G' von q'. Es entspricht dabei der Geraden G' das Hyperboloid durch Q und K, der Curve q' die windschiefe Fläche vierter Ordnung, mit Doppelcurve Q und einfacher Geraden G, erzeugt durch die Sehnen von Q, welche G schneiden, dem Punkte P die Ebene durch K und G; ferner der Geraden G der Kegel zweiter Ordnung, welcher seinen Scheitel in P hat und über q' beschrieben ist, dem Kegelschnitt K die Ebene durch P und G' und endlich der Raumcurve dritter Ordnung, Q, die windschiefe Fläche fünfter Ordnung, mit Doppelcurve q', Doppelgeraden G' und dreifachem Punkte P, erzeugt durch die Sehnen von q', welche G' schneiden.

Diese Transformation liefert direct die Abbildung einer Fläche F fünfter Ordnung mit dreifachem Punkte P und Doppelcurve q', deren, zugleich mit ihrem Geradensystem, Herr Clebsch, diese Annalen, Bd. 3, pag. 75 Anmerk., Erwähnung thut. Der Fläche F entspricht in Y eine Fläche f von der vierten Ordnung, die durch Q geht und K als Doppelcurve enthält. Das Geradensystem von F ist sodann dasselbe, wie das ihrer Bilder, der zehn Geraden von f, welche K und Q in je einem Punkte treffen. Benutzt man eine der Geraden von F zur Transformation als Gerade G', so entspricht der Fläche F in X ein Hyperboloid durch K.

§. 8.

Die Transformation (B). Abbildung der Flächen sechster Ordnung mit Doppelcurve fünfter Ordnung vom Geschlecht 1.

Ich gehe hier aus von der dreifach unendlichen Schaar der Transformationsflächen ψ des Raumes X, Flächen dritter Ordnung mit fester Raumcurve vierter Ordnung, erster Species, q, und festem Kegelschnitt k, der q in drei Punkten trifft.

Es ist nachzuweisen, dass die Transformationsflächen φ des Raumes Y Flächen dritter Ordnung werden, mit fester Raumcurve fünfter

Ordnung vom Geschlecht 1, Q, und fester Geraden G, die Q in drei Punkten trifft.

Nun giebt es unter den Flächen ψ eine einfach unendliche Schaar, welche in die k enthaltende Ebene E und in den durch q gehenden Flächenbüschel zweiter Ordnung zerfällt und welche einem Ebenenbüschel von Y entspricht, woraus folgt, dass in Y eine Fundamentalgerade G, die Axe des Ebenenbüschels, liegt, welcher die Ebene E entspricht. Weiter muss daher in Y noch eine Fundamentalcurve fünfter Ordnung Q liegen, deren Punkten die Sehnen von q entsprechen, welche k schneiden. Diese Sehnen erzeugen eine Fläche ω von der Ordnung 7, welche q zur dreifachen, k zur doppelten Curve besitzt und welche das Curvengeschlecht 1 hat. Daher hat auch Q das Geschlecht 1. Da sich ferner die Ebene E und die Fläche ω ausser k in noch drei Geraden schneiden, so muss auch die Gerade G die Curve Q in drei Punkten treffen, womit die oben angegebene Umkehrung der Transformation erwiesen ist. Ganz ähnlich kann man auch von den Flächen φ zu den Flächen ψ übergehen.

Die den Punkten von q entsprechenden dreipunktigen Sehnen von Q erzeugen eine Fläche Ω von der Ordnung 5, mit Doppelcurve Q und einfacher Geraden G. Die den Punkten von k entsprechenden Sehnen von Q, welche G schneiden, erzeugen eine Fläche Θ von der dritten Ordnung, welche Q zur einfachen Curve, G zur Doppelgeraden hat. Es entsprechen sich G und E, Q und ω, k und Θ, q und Ω.

Zur Anwendung dieser Transformation untersuche ich die ebene Abbildung einer *Fläche F von der sechsten Ordnung*, welche die *Raumcurve fünfter Ordnung mit $p = 1$, Q, zur Doppelcurve* hat. Diese Fläche hat das Flächengeschlecht 0, da man durch die Curve Q keine Fläche zweiter Ordnung legen kann.

Durch die Transformation dieses § entspricht der Fläche F im Raume X eine Fläche f von der vierten Ordnung, welche den Kegelschnitt k zur Doppelcurve hat. Die ebene Abbildung der Fläche f gibt somit auch die von F.

Man kann aber die Abbildung dadurch noch einfacher gestalten, dass man auch die Sehne G von Q benutzt. Denn die windschiefe Fläche Ω, erzeugt durch die dreipunktigen Sehnen von Q, schneidet die Fläche F noch in einer Curve zehnter Ordnung, welche, da diese Sehnen ausser Q die Fläche F nicht mehr treffen, in zehn der Sehnen zerfällt. Wählt man daher eine dieser zehn auf F liegenden Geraden heraus und lässt G mit derselben zusammenfallen, so wird der Fläche F durch die vorliegende Transformation in X eine Fläche Φ von der dritten Ordnung, welche durch den Kegelschnitt k einfach geht, eindeutig entsprechen.

Die ebene *Abbildung* der Fläche F verlangt also, wie die von f

oder Φ, die Lösung einer Gleichung fünften Grades und vier quadratischer Gleichungen; um die Eigenschaften der Fläche kennen zu lernen, hat man ausserdem noch eine Gleichung zehnten Grades zu lösen.

Den 16 Geraden der Fläche f entsprechend, ergiebt sich für F:

> Auf der Fläche F liegen 16 Kegelschnitte, welche mit der Raumcurve Q je fünf Punkte gemein haben. Die Combination dieser Kegelschnitte ist identisch mit der der 16 Geraden der Fläche f. Sie verhalten sich gleichmässig gegen die 10 Geraden von F, die sie nicht treffen. Die Flächen dritter Ordnung, welche durch die Curve Q und einen dieser Kegelschnitte gehen, schneiden aus F eine einfach unendliche Schaar rationaler Curven sechster Ordnung (die eine fünfpunktige Sehne besitzen) aus.

Ich gehe nun von einer ebenen Abbildung der Fläche Φ aus. Den ebenen Schnitten von Φ möge auf der Bildebene die Schaar der Curven dritter Ordnung entsprechen, welche sechs feste Punkte a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 und c gemein haben. Dabei sei das Bild des Kegelschnittes k der Fläche Φ eine Curve dritter Ordnung, welche c zum Doppelpunkte, die fünf Punkte a_i zu einfachen Punkten hat.

Den ebenen Schnitten der Fläche F entsprechen die Schnitte der Fläche Φ mit den Flächen ψ von der dritten Ordnung, welche durch k und die Raumcurve vierter Ordnung, erster Species q gehen, die Φ ausserhalb k in noch neun Punkten trifft, den Bildern der neun weiteren Geraden von F. Diesen Schnitten von Φ mit den ψ entsprechen auf der Bildebene Curven sechster Ordnung, welche die fünf Punkte a_i zu Doppelpunkten, den Punkt c zum einfachen Punkte haben und welche ebenfalls noch durch neun feste Punkte b_i der Ebene gehen müssen.

Daher sind die Bilder der *ebenen Schnitte* der Fläche F *Curven sechster Ordnung, welche fünf doppelte und zehn einfache Fundamentalpunkte besitzen.*

Damit diese Curven eine dreifach unendliche Schaar bilden, muss die Lage der Fundamentalpunkte noch einer Bedingung unterliegen. Nun weiss man, dass die den b_i entsprechenden neun Punkte von Φ ausgeschnitten werden von einer Raumcurve vierter Ordnung, erster Species, welche drei Punkte mit dem Kegelschnitt k gemein hat, oder sie sind der Schnitt von Φ mit zwei Hyperboloiden, welche durch drei feste Punkte von k gehen. Auf der Bildebene entspricht aber dem Kegelschnitt k eine Curve S von der dritten Ordnung, die c zum Doppelpunkt, die a_i zu einfachen Punkten hat. Man legt daher in dieser Ebene zwei Curven R von der sechsten Ordnung, welche die Punkte a_i und c zu Doppelpunkten haben und durch drei feste Punkte λ_1, λ_2, λ_3 der Curve S hindurchgehen. Diese beiden Curven R schneiden sich dann noch in neun Punkten b_i, welche man mit c als einfache Fundamentalpunkte der Abbildung von F annehmen kann.

Ausserdem ergiebt die Betrachtung der zerfallenden ebenen Schnitte der Fläche F, dass die 15 Punkte a_i, b_i, c auf einer Curve vierter Ordnung liegen, dass man ferner eine Curve fünfter Ordnung legen kann, welche drei der a_i zu Doppelpunkten hat und durch die beiden übrigen a_i, die b_i und c geht, und dass man endlich eine Curve sechster Ordnung legen kann, welche einen der Punkte a_i zum dreifachen Punkte, die übrigen a_i zu Doppelpunkten, die b_i und c zu einfachen Punkten hat.

Die Abbildung durch die Methode der eindeutigen Raumtransformationen liefert auf diese Weise direct die Schnittpunktsysteme, welche unter den Fundamentalpunkten der Abbildung im Allgemeinen auftreten werden. Um auch nachträglich einzusehen, dass das für die Abbildung der Fläche F angegebene Schnittpunktsystem eine dreifach unendliche Schaar von Curven giebt, gebrauche ich das Abel'sche Theorem (s. Clebsch, Crelle, Bd. 63), indem ich die vier endlichen Integrale einführe, welche sich auf eine der oben genannten Curven R beziehen.

Diese Curve R' von der sechsten Ordnung hat die fünf Punkte a_i und den Punkt c zu Doppelpunkten und ist vom Geschlecht $p=4$. Die vier auf R' sich beziehenden endlichen Integrale seien, wenn die Coordinaten des Punktes u_i die obere Grenze derselben bilden, mit u_k^i $(k=1,2,3,4)$ bezeichnet; die Integrale in Bezug auf die beiden in a_i oder c vereinigt liegenden Punkte zusammen mit A_k^i oder C_k. Man habe dann für den Schnitt einer Curve r^{ter} Ordnung mit R':

$$\sum_{i=1}^{i=6r} u_k^i = r j_k \quad (k=1,2,3,4).$$

Hieraus folgt für den Schnitt der Curve R' mit der oben bezeichneten Curve S, wenn man S noch durch einen beliebigen festen Punkt l von R' legt:

$$\text{(1)} \qquad \sum_{i=1}^{i=5} A_k^i + 2C_k + l_k + \sum_{i=1}^{i=3} \lambda_k^i = 3j_k.$$

Die drei Punkte λ_i sind durch diese vier Gleichungen (1) bestimmt als Schnitt von R' mit einer Curve S von der dritten Ordnung, welche c zum Doppelpunkte, die a_i und den Punkt l zu einfachen Punkten hat.

Ferner folgt für den Schnitt von R' mit einer weiteren Curve R'' von der sechsten Ordnung, welche die a_i und c zu Doppelpunkten hat und durch die drei Punkte λ_i von R' geht:

$$\text{(2)} \qquad 2\sum_{i=1}^{i=5} A_k^i + 2C_k + \sum_{i=1}^{i=3} \lambda_k^i + \sum_{i=1}^{i=9} b_k^i = 6j_k.$$

Die neun Punkte b_i sind die Punkte, in denen sich die beiden Curven

R' und R'' ausser den a_i, c und λ_i noch schneiden. Wenn man noch fünf der b_i willkürlich auf R' annimmt, bestimmen die vier Gleichungen (2) die vier übrigen b_i.

Die zu bestimmenden Curven sind die Curven R von der sechsten Ordnung, welche in den a_i Doppelpunkte besitzen und durch c und die b_i einfach gehen. Damit nun eine zweifach unendliche Schaar solcher Curven R, die mit R' nicht zusammenfallen, existirt, muss es möglich sein, diese Curven R noch durch zwei ganz beliebige Punkte v_i von R' zu legen, ohne dass R mit R' zusammenfällt; d. h. aus den vier Gleichungen, welche dann für den Schnitt von R und R' gelten:

$$(3) \qquad 2\sum_{i=1}^{i=5} A_k^i + C_k + \sum_{i=1}^{i=9} b_k^i + \sum_{i=1}^{i=2} v_k^i + \sum_{i=1}^{i=3} w_k^i = 6\, j_k,$$

müssen sich bei beliebigen Punkten v_1, v_2 drei Punkte w_1, w_2, w_3 eindeutig ergeben. Nun folgt aus (1), (2), (3):

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=5} A_k^i + C_k + l_k + \sum_{i=1}^{i=2} v_k^i + \sum_{i=1}^{i=3} w_k^i = 3\, j_k,$$

welche vier Gleichungen in der That eine eindeutige Lösung für die drei Punkte w_i zulassen. Die Punkte w_i sind nach (4) der Schnitt von R' mit einer Curve dritter Ordnung, welche durch die fünf Punkte a_i und die beiden Punkte c und l, sowie durch die beiden Punkte v_1, v_2 hindurchzulegen ist.

Durch eine Specialisirung der Lage der Punkte v_1, v_2 erhält man auch hier die oben angegebenen zerfallenden Curven der Schaar.

Die hier gefundene zweifach unendliche Schaar von Curven R giebt, mit R' verbunden, die dreifach unendliche Schaar von Curven, welche zur Abbildung dienen können.

Die Abbildung der Doppelcurve Q der Fläche F wird eine hyperelliptische Curve fünfzehnter Ordnung, $p = 11$, welche die a_i zu fünffachen, c und die b_i zu dreifachen, die drei Punkte λ_i von S zu einfachen Punkten hat.

§ 9.

Transformationen, welche sich nicht auf solche der dritten Ordnung zurückführen lassen.

Den Bedingungen des § 1., welchen die Transformationsflächen unterliegen, kann auf eine unendliche Mannigfaltigkeit von Arten genügt werden, von denen ich nur noch eine hervorheben will. Ich betrachte eine Schaar von Transformationsflächen n^{ter} Ordnung φ, die einen festen $(n-1)$fachen Knotenpunkt P besitzen und von denen sich je zwei Flächen in einer beweglichen ebenen Curve n^{ter} Ordnung mit $(n-1)$fachem Punkte P schneiden. Diese Flächen haben daher als feste Fundamentalcurve eine Curve von der $n(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, die als Schnitt einer Fläche φ mit einer Fläche Φ von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche den Punkt P zum $(n-2)$ fachen Knotenpunkt hat, erhalten wird. Die Gleichung der Flächenschaar ist somit von der Form:

$$a\varphi + A\Phi = 0,$$

wo $A = 0$ die Gleichung einer durch P gehenden Ebene ist.

Diese Gleichungsform zeigt, dass die Flächenschaar eine dreifach unendliche ist. Ferner schneiden sich je drei der Flächen im Allgemeinen in nur einem beweglichen Punkte; denn eine solche Fläche wird von zwei anderen in zwei ebenen durch P gehenden Schnittcurven getroffen, und die Schnittlinie der Ebenen dieser beiden Curven trifft die Fläche ausser P in nur einem Punkte. Daher wird die Transformation eine eindeutige.

Um diese Transformation analytisch darzustellen, sei $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ der Punkt P; mit $f_\mu(y)$ sei eine in y_1, y_2, y_3 homogene Function μ^{ter} Ordnung bezeichnet. Man hat dann:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= y_1 \Phi(y), \\
\varrho x_2 &= y_2 \Phi(y), \\
\varrho x_3 &= y_3 \Phi(y), \\
\varrho x_4 &= \varphi(y),
\end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned}
\Phi(y) &= y_4 \Phi_{n-2}(y) + \Phi_{n-1}(y), \\
\varphi(y) &= y_4 \varphi_{n-1}(y) + \varphi_n(y).
\end{aligned}$$

Die Umkehrung dieser Transformation ergiebt ein ähnliches System:

$$\begin{aligned}
\sigma y_1 &= x_1 \Psi(x) \\
\sigma y_2 &= x_2 \Psi(x) \\
\sigma y_3 &= x_3 \Psi(x) \\
\sigma y_4 &= \psi(x),
\end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \varphi_{n-1}(x) - x_4 \Phi_{n-2}(x) \\
\psi(x) &= x_4 \Phi_{n-1}(x) - \varphi_n(x).
\end{aligned}$$

Die Flächen des Raumes X haben den Punkt $P'(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ zum Doppelpunkte, die Curve $\Psi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ zur Fundamentalcurve.

Dabei entspricht dem Punkte P' die Fläche $\Phi(y) = 0$. Der Curve $\Psi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ entspricht der Kegel $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welchen man vom Punkte P aus über der Curve $\Phi(y) = 0$, $\varphi(y) = 0$ beschreiben kann und welcher die Gleichung hat:

$$\varphi_{n-1}(y)\,\Phi_{n-1}(y) - \varphi_n(y)\,\Phi_{n-2}(y) = 0;$$

und ebenso entspricht dem Punkte P die Fläche $\Psi(x) = 0$ und der

Curve $\Phi(y) = 0$, $\varphi(y) = 0$ der über $\Psi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ von P' aus beschriebene Kegel:

$$\varphi_{n-1}(x)\,\Phi_{n-1}(x) - \varphi_n(x)\,\Phi_{n-2}(x) = 0\,.$$

Ein schon betrachteter specieller Fall dieser Transformation ist der in § 3. behandelte. Dagegen ist diese Transformation für $n = 3$ gänzlich verschieden von der des § 2. und nur der besondere Fall für $n = 3$, in dem die Fläche $\varphi(y) = 0$ in ein Hyperboloid und eine Ebene, die beide durch P gehen, zerfallen, kann auf zwei successive Transformationen des § 2. zurückgeführt werden; auch habe ich von diesem Falle schon Math. Ann. Bd. 3, pag. 199 Gebrauch gemacht.

Mannheim, den 31. Dec. 1870.