Puppe, D.
Math. Annalen 148, 1—30 (1962)

Korrespondenzen in abelschen Kategorien

Von
Dieter Puppe* in Saarbrücken

Einleitung

Aus mehreren Gründen wird man in der algebraischen Topologie und in der homologischen Algebra dazu geführt, „Homomorphismen" zu betrachten, die nicht überall und nicht eindeutig definiert sind. Genauer: Sind A, B Moduln über einem festen Ring, so wird ein „verallgemeinerter Homomorphismus" von A in B durch einen Untermodul $F \subset A \times B$ gegeben. In Anlehnung an Bourbaki [2] nennen wir $f = (A, B, F)$ eine Modul-Korrespondenz ("additive relation" in [4], [9], [11]). f ist ein (gewöhnlicher) Homomorphismus, wenn es zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ gibt mit $(a, b) \in F$. Im allgemeinen induziert f einen Homomorphismus f': $\operatorname{Def} f \to B/\operatorname{Ind} f$, wobei $\operatorname{Def} f = \{a \mid (a, b) \in F$ für ein $b \in B\}$ (Definitionsbereich) und $\operatorname{Ind} f = \{b \mid (0, b) \in F\}$ (Indeterminiertheit). Man erhält so eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen Modul-Korrespondenzen $A \to B$ und Homomorphismen eines Untermoduls von A in einen Faktormodul von B.

Wir nennen folgende Gründe für die systematische Untersuchung von (Modul-) Korrespondenzen:

1. Die stabilen Cohomologieoperationen höherer Art, z. B. die sekundären [1], [8], [13], sind Modul-Korrespondenzen.

2. Zu jeder Korrespondenz $f = (A, B, F)$ gehört eine „Umkehrung" $f^{\#} = (B, A, F^{\#})$ mit $F^{\#} = \{(b, a) \mid (a, b) \in F\}$. $f^{\#}$ braucht kein Homomorphismus zu sein, selbst wenn f einer ist. Trotzdem kann die Umkehrung zur Konstruktion von Homomorphismen nützlich sein. Sei z. B.

$$\varepsilon : 0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{i} C_2 \xrightarrow{p} C_3 \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von Kettenkomplexen C_ν mit den Randoperatoren d_ν und den Homologiegruppen H_ν ($\nu = 1, 2, 3$). Ordnet man jedem Zykel von C_ν seine Homologieklasse zu, so erhält man eine Korrespondenz h_ν: $C_\nu \to H_\nu$. Die Zusammensetzung (vgl. 1.2)

$$\varepsilon_* : H_3 \xrightarrow{h_3^{\#}} C_3 \xrightarrow{p^{\#}} C_2 \xrightarrow{d_2} C_2 \xrightarrow{i^{\#}} C_1 \xrightarrow{h_1} H_1$$

ist der „verbindende Homomorphismus" in der zu ε gehörigen exakten Homologiefolge (Näheres in 3.6—3.11).

*) Diese Arbeit wurde durch ein Forschungsstipendium der United States National Science Foundation unterstützt (NSF G 10369).

3. Eine spektrale Folge ist in der üblichen Darstellung eine Folge von Kettenkomplexen (E_r, d_r) mit $E_{r+1} \cong H(E_r)$. In den Anwendungen wird aber oft zwischen $a \in E_r$ und der Klasse von a in E_s, $s > r$, nicht unterschieden. Konsequent durchgeführt, bedeutet das: Man läßt alle E_r außer dem ersten E_2 (oder E_1) weg und betrachtet d_r als Randoperator in E_2. Dann ist es zwar kein Homomorphismus, aber eine Modul-Korrespondenz (Näheres in 3.12—3.15). Besonders nützlich ist diese Auffassung, wenn man die spektrale Folge aus einem exakten Paar gewinnt.

In dieser Arbeit wird aus den Eigenschaften der Korrespondenzen der Begriff einer *Kategorie mit Involution* (kurz: *I-Kategorie*) abstrahiert ($f \to f^{\#}$ wird als Involution bezeichnet). Wir fordern zunächst nur einige „selbstverständliche" Axiome, die nicht nur für Korrespondenzen zwischen Moduln, sondern z. B. auch zwischen (nicht-abelschen) Gruppen und zwischen Mengen gelten (1.3). Die charakteristischen Eigenschaften der Modul-Korrespondenzen werden durch zusätzliche Axiome (K 1)—(K 6) ausgedrückt. Was das genauer bedeutet, geht aus folgenden Ergebnissen hervor:

1. *Jede abelsche Kategorie* $\mathfrak{A}$ *kann so zu einer I-Kategorie* $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ *erweitert werden, daß* (K 1)—(K 6) *erfüllt sind und die Morphismen von* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ *dieselbe Rolle spielen wie die Homomorphismen unter den Modul-Korrespondenzen* (2.8, 2.9, § 9).

2. $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ *ist durch diese Eigenschaft (die natürlich präzisiert wird) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt* (4.15).

3. *Zu jeder I-Kategorie* $\mathfrak{K}$, *die* (K 1)—(K 6) *erfüllt, gibt es eine abelsche Kategorie* $\mathfrak{A}$ *mit* $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{K}$ (5.9).

Nach FREYD [4] und LUBKIN [9] läßt sich jede „kleine"[1]) abelsche Kategorie so in die Kategorie der abelschen Gruppen einbetten, daß der Exaktheitsbegriff erhalten bleibt. Es folgt, daß jede kleine I-Kategorie, die (K 1)—(K 6) erfüllt, zu einer I-Unterkategorie der Korrespondenzen zwischen abelschen Gruppen isomorph ist.

MAC LANE hat in [11] ebenfalls ein Axiomensystem für I-Kategorien angegeben, das in $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ erfüllt ist (für jede abelsche Kategorie $\mathfrak{A}$). Es reicht aber nicht aus, um diese I-Kategorien zu charakterisieren. Die Beziehungen zu unseren Axiomen werden in § 6 untersucht.

Für viele Anwendungen der Korrespondenzen wird nur ein Teil unserer Axiome gebraucht. Die Arbeit ist deshalb so aufgebaut, daß wir jedes Axiom erst dann einführen, wenn wir es wirklich benutzen. In § 1 diskutieren wir (K 1) und (K 2). Diese Axiome genügen für die Anwendungen in § 3: Fünfer-Lemma, Homologie, verbindender Homomorphismus, spektrale Folgen, exakte Paare. In § 2 konstruieren wir $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$, um zu zeigen, daß sich unsere Methoden auf jede abelsche Kategorie $\mathfrak{A}$ anwenden lassen. Gegenüber der direkten Behandlung in $\mathfrak{A}$ — etwa des verbindenden Homomorphismus, vgl. [3], [6], [7] — bieten sie erhebliche Vereinfachungen. Andererseits ist ihr Anwendungsbereich nicht auf abelsche Kategorien beschränkt, sondern umfaßt z. B. auch (nicht-abelsche) Gruppen und ihre Homomorphismen.

[1]) Das heißt, die Objekte bilden eine Menge.

Die wichtigsten theoretischen Ergebnisse finden sich in § 4 und § 5. Sie stützen sich auf § 1 und § 2. Dagegen kann § 3 überschlagen werden, wenn man sich nur für diese Resultate interessiert.

Ich danke Herrn S. MAC LANE für zahlreiche anregende Gespräche und wertvolle Ratschläge im Zusammenhang mit dieser Arbeit.

§ 1. Kategorien mit Involution

1.1. Eine *Kategorie* $\mathfrak{C}$ besteht bekanntlich aus einer Klasse von „*Objekten*" und einer Klasse von „*Morphismen*" mit folgender Struktur: Jedem Morphismus $f \in \mathfrak{C}$ ist ein „*Ausgangsobjekt*" A und ein „*Zielobjekt*" B zugeordnet. f heißt dann ein *Morphismus von A in B*, und man schreibt $f: A \to B$. Für festes A, B bilden die Morphismen von A in B eine *Menge*, die wir mit $\mathfrak{C}(A, B)$ bezeichnen. Für $f \in \mathfrak{C}(A, B)$, $g \in \mathfrak{C}(B, C)$ ist eine „*Zusammensetzung*" $f \circ g = fg \in \mathfrak{C}(A, C)$ definiert[2]). Sie ist assoziativ. Zu jedem Objekt $A \in \mathfrak{C}$ gibt es eine „*Identität*" $1_A \in \mathfrak{C}(A, A)$ mit $1_A f = f = f 1_B$ für alle $f \in \mathfrak{C}(A, B)$. 1_A ist dadurch eindeutig bestimmt.

1.2. Seien A, B Mengen. Eine *(Mengen-)Korrespondenz* von A in B ist ein Tripel $f = (A, B, F)$, wobei F eine Untermenge des kartesischen Produkts $A \times B$ ist (BOURBAKI [2]). Ist $g = (B, C, G)$ eine zweite Korrespondenz, so wird die Zusammensetzung $fg = (A, C, F \circ G)$ durch

$$F \circ G = \{(a, c) \mid \text{es gibt ein } b \in B \text{ mit } (a, b) \in F,\ (b, c) \in G\}$$

definiert. Die Mengen-Korrespondenzen bilden dann eine Kategorie $\mathfrak{S}$. Die (gewöhnlichen) Abbildungen zwischen Mengen bilden eine Unterkategorie von $\mathfrak{S}$.

Die Inklusionsrelation zwischen Teilmengen von $A \times B$ liefert eine (Teil-) Ordnung in $\mathfrak{S}(A, B)$. Die Vertauschung der Faktoren $A \times B \to B \times A$ induziert eine (bijektive) Abbildung $\mathfrak{S}(A, B) \to \mathfrak{S}(B, A)$ $(f \to f^{\#})$.

In Anlehnung an dieses Beispiel definieren wir:

1.3. Definition. $\mathfrak{K}$ heißt eine (geordnete) *Kategorie mit Involution* (kurz: *I-Kategorie*), wenn folgendes gilt:

(a) $\mathfrak{K}$ ist eine Kategorie.

(b) Die Morphismenmenge $\mathfrak{K}(A, B)$ ist (teilweise) geordnet (für jedes Paar von Objekten A, B) und

$$f_1 \subset f_2 \Rightarrow f_1 g \subset f_2 g \qquad (f_\nu \in \mathfrak{K}(A, B), g \in \mathfrak{K}(B, C)) .$$

(c) Es ist eine Abbildung $\mathfrak{K}(A, B) \ni f \to f^{\#} \in \mathfrak{K}(B, A)$ gegeben, und

(c 1) $(fg)^{\#} = g^{\#} f^{\#}$,

(c 2) $f^{\#\#} = f$,

(c 3) $f_1 \subset f_2 \Rightarrow f_1^{\#} \subset f_2^{\#} \qquad (f, f_\nu \in \mathfrak{K}(A, B), g \in \mathfrak{K}(B, C))$.

Diese Abbildung heißt *Involution*.

---

[2]) Man beachte die Reihenfolge! Wir lassen demnach Abbildungen „von rechts" wirken.

Offenbar folgt, daß die Involution ein Ordnungsisomorphismus ist. Ferner gilt $1^{\#} = 1 \circ 1^{\#} = (1 \circ 1^{\#})^{\#}$ (nach c 1) $= 1^{\#\#} = 1$. Wendet man die Involution auf die Bedingung unter (b) an, so erhält man $f_1^{\#} \subset f_2^{\#} \Rightarrow g^{\#} f_1^{\#} \subset g^{\#} f_2^{\#}$. Da es sich um beliebige Morphismen handelt, kann man die Kreuze auch weglassen, und es folgt

$$f_1 \subset f_2 \Rightarrow g f_1 \subset g f_2 \qquad (g \in \mathfrak{K}(A, B), f_\nu \in \mathfrak{K}(B, C)) .$$

1.4. Beispiele. Die Mengen-Korrespondenzen bilden eine I-Kategorie $\mathfrak{S}$ (1.2). Weitere Beispiele erhält man, wenn man in 1.2 anstelle von Mengen nimmt: (a) Mengen mit Grundpunkt, (b) Gruppen, (c) (Links-) Moduln über einem festen Ring Λ. Wir nennen diese I-Kategorien $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\Lambda$. Ein Objekt von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}$ ist also eine Menge mit Grundpunkt $*$, eine Gruppe bzw. ein Modul. Ein Morphismus ist ein Tripel (A, B, F) mit der Eigenschaft

$$\begin{array}{ll} (*, *) \in F \subset A \times B & \text{(im Fall } \mathfrak{P}) \\ F \text{ ist eine Untergruppe von } A \times B & \text{(im Fall } \mathfrak{G}) \\ F \text{ ist ein Untermodul von } A \times B & \text{(im Fall } \mathfrak{M}) . \end{array}$$

Zusammensetzung von Morphismen, Ordnung und Involution werden wie für $\mathfrak{S}$ definiert.

1.5. Sei $\mathfrak{K}$ eine I-Kategorie. Eine Unterkategorie $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{K}$ heißt I-Unterkategorie, wenn $f \in \mathfrak{K}' \Rightarrow f^{\#} \in \mathfrak{K}'$. In naheliegender Weise kann dann $\mathfrak{K}'$ ebenfalls als I-Kategorie aufgefaßt werden.

1.6. Wir führen nun zusätzliche Axiome für eine I-Kategorie $\mathfrak{K}$ ein und untersuchen ihre Konsequenzen. Unser Ziel ist es, die Eigenschaften der Modul-Korrespondenzen zu charakterisieren. Wir werden aber auch immer angeben, wie weit die Axiome in den anderen Beispielen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{S}$ erfüllt sind.

Axiom (K 1). *Es gibt ein Objekt* 0 *in* $\mathfrak{K}$, *so daß* $\mathfrak{K}(0, 0)$ *nur aus der Identität* 1_0 *besteht und daß* $\mathfrak{K}(0, A)$ *für jedes* $A \in \mathfrak{K}$ *ein kleinstes und ein größtes Element enthält. Wir schreiben für diese Elemente* $\omega = \omega_A$ *bzw.* $\Omega = \Omega_A$.

Wir nennen 0 ein *I-Nullobjekt* von $\mathfrak{K}$. Man zeigt leicht, daß es bis auf Äquivalenz[3]) eindeutig bestimmt ist.

Erfüllt $\mathfrak{K}$ das Axiom (K 1), so definieren wir für $f \in \mathfrak{K}(A, B)$:

$$(1.7) \qquad \begin{array}{ll} \mathrm{I}f = \omega_A f \in \mathfrak{K}(0, B) & \text{(Indeterminiertheit)} \\ \mathrm{B}f = \Omega_A f & \text{(Bild)} \\ \mathrm{K}f = \omega_B f^{\#} \in \mathfrak{K}(0, A) & \text{(Kern)} \\ \mathrm{D}f = \Omega_B f^{\#} & \text{(Definitionsbereich)}. \end{array}$$

Die ersten beiden Definitionen sind im Sinne der Ordnung zueinander dual. Die Involution liefert eine andere Art von Dualität zwischen der ersten und dritten, sowie der zweiten und vierten. Diese beiden Arten von Dualität werden immer

[3]) In irgendeiner Kategorie heißt g *invers* zu f, wenn $fg = 1$ und $gf = 1$. Ein Morphismus heißt *Äquivalenz*, wenn er ein Inverses hat. Zwei Objekte A, B heißen *äquivalent*, wenn es eine Äquivalenz $A \to B$ gibt.

wieder auftreten. Viele Definitionen und Sätze erscheinen daher in Vierergruppen[4]).

1.8. Die I-Kategorien $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}$ (1.2, 1.4) erfüllen alle das Axiom (K 1)[5]). Die leere Menge $\emptyset$ ist ein I-Nullobjekt in $\mathfrak{S}$. $\mathfrak{S}(\emptyset, A)$ enthält für jede Menge A nur ein Element, nämlich $(\emptyset, A, \emptyset)$. Die Definitionen (1.7) sind daher uninteressant für $\mathfrak{S}$. In $\mathfrak{P}$ ist jede Menge, die nur aus dem Grundpunkt besteht, ein I-Nullobjekt. Hier ist $0 \times A$ mit A äquivalent, und es besteht eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen $\mathfrak{P}(0, A)$ und den Untermengen mit Grundpunkt von A. Dabei entsprechen die Definitionen (1.7) für $f = (A, B, F) \in \mathfrak{P}(A, B)$ den folgenden bekannten Bildungen:

$$\operatorname{Ind} f = \{b \mid (*, b) \in F\}$$

$$\operatorname{Bild} f = \{b \mid \text{es gibt ein } a \in A \text{ mit } (a, b) \in F\}$$

$$\operatorname{Kern} f = \operatorname{Ind} f^{\#}$$

$$\operatorname{Def} f = \operatorname{Bild} f^{\#}.$$

Dasselbe gilt für die I-Kategorien $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{M}$, wenn man „Untermengen" durch „Untergruppen" bzw. „Untermoduln" ersetzt und für $*$ das neutrale Element nimmt.

1.9. Sei nun $\mathfrak{K}$ eine I-Kategorie, die (K 1) erfüllt. Ein Morphismus $f \in \mathfrak{K}(A, B)$ heißt *I-regulär (B-, K-, D-regulär)*, wenn $\mathrm{I} f = \omega$ ($\mathrm{B} f = \Omega$, $\mathrm{K} f = \omega$, $\mathrm{D} f = \Omega$). Ist f ID-regulär (d. h. I- und D-regulär), so nennen wir f auch einen *eigentlichen* Morphismus. In $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{M}$ ist f genau dann ID-regulär, wenn es ein Homomorphismus ist. In $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{S}$ ist zwar jede Abbildung eine ID-reguläre Korrespondenz, aber nicht umgekehrt.

Ein eigentlicher Morphismus, der außerdem B-regulär (K-regulär) ist, heißt *Epimorphismus (Monomorphismus)*. f heißt *Isomorphismus*, wenn f sowohl epimorph als auch monomorph ist. Für Homomorphismen zwischen Gruppen und Moduln stimmt das mit dem üblichen Sprachgebrauch überein.

1.10. Seien $f \in \mathfrak{K}(A, B)$ und $g \in \mathfrak{K}(B, C)$ beide I-regulär. Dann ist $\omega_A f g = \omega_B g = \omega_C$, d. h. auch fg ist I-regulär. Entsprechendes gilt für die Begriffe B-, K- und D-regulär. Die Morphismen eines bestimmten „Regularitätstyps" bilden also eine Unterkategorie von $\mathfrak{K}$. Insbesondere ist das für die eigentlichen Morphismen der Fall. Wir bezeichnen die von ihnen gebildete Kategorie mit $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathfrak{K})$. Sie hat dieselben Objekte wie $\mathfrak{K}$.

Wird umgekehrt fg als I-regulär (B-regulär) vorausgesetzt, so gilt dasselbe für g, denn $\omega g \subset \omega f g = \omega$ ($\Omega g \supset \Omega f g = \Omega$). Durch Involution: Ist fg K- bzw. D-regulär, so auch f. Es folgt, daß jede Äquivalenz ein Isomorphismus ist. Die Umkehrung davon gilt nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen, wie die Beispiele $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{P}$ zeigen (s. aber 1.19).

1.11. Sei $\mathfrak{C}$ irgendeine Kategorie. Ein *System von Nullmorphismen* in $\mathfrak{C}$ besteht darin, daß jedem Paar von Objekten $A, B \in \mathfrak{C}$ ein Morphismus

---

[4]) Eine dritte Art von Dualität ergibt sich, wenn man $f^{\#} \omega_A^{\#}$, $f^{\#} \Omega_A^{\#}$, $f \omega_B^{\#}$, $f \Omega_B^{\#}$ bildet.

[5]) Es ist trotzdem unabhängig von den Forderungen in 1.3, denn es überträgt sich nicht auf beliebige I-Unterkategorien.

$0 = 0_{AB} \in \mathfrak{C}(A, B)$ so zugeordnet ist, daß $f 0_{BC} = 0_{AC} = 0_{AB} g$ für alle $f \in \mathfrak{C}(A, B)$, $g \in \mathfrak{C}(B, C)$. Wenn ein solches System existiert, so ist es eindeutig, denn $0'_{AB} = 0'_{AA} 0_{AB} = 0_{AB}$ (für irgendein zweites System $0'_{AB}$). Ein Objekt $N \in \mathfrak{C}$ heißt *Nullobjekt* von $\mathfrak{C}$, wenn $\mathfrak{C}(N, A)$ und $\mathfrak{C}(A, N)$ für jedes $A \in \mathfrak{C}$ aus genau einem Element 0_A bzw. $\overline{0}_A$ bestehen (MAC LANE [10], Nr. 15). Je zwei Nullobjekte sind äquivalent. Setzt man $0_{AB} = \overline{0}_A 0_B : A \to B$, so erhält man ein System von Nullmorphismen. Sind umgekehrt Nullmorphismen in $\mathfrak{C}$ gegeben, so wird ein Nullobjekt N durch $1_N = 0_{NN}$ charakterisiert[6]).

Ist $\mathfrak{K}$ eine I-Kategorie mit einem I-Nullobjekt 0, so ist 0 ein Nullobjekt von $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\mathfrak{K})$. ω_A bzw. $\Omega_A^{\#}$ sind die einzigen Elemente von $\mathfrak{C}(0, A)$ bzw. $\mathfrak{C}(A, 0)$. $0_{AB} = \Omega_A^{\#} \omega_B : A \to B$ ist ein System von Nullmorphismen in $\mathfrak{C}$.

1.12. Das nächste Axiom betrifft die Frage, in welchen Fällen $f f^{\#}$ und $f^{\#} f$ die Identität oder wenigstens eine Annäherung an die Identität sind. Wann ist etwa $g f^{\#} f \subset g$? Besteht diese Bezeichnung, so folgt $\mathrm{I} f = \omega f \subset \omega g f^{\#} f \subset \omega g = \mathrm{I} g$. Dual dazu (im Sinne der Ordnung) ist $\mathrm{B} f \supset \mathrm{B} g$ eine notwendige Bedingung für $g f^{\#} f \supset g$.

Axiom (K 2). *Die obigen notwendigen Bedingungen sind auch hinreichend, d. h.*

$$\text{(a)} \quad \mathrm{I} f \subset \mathrm{I} g \Rightarrow g f^{\#} f \subset g$$

$$\text{(b)} \quad \mathrm{B} f \supset \mathrm{B} g \Rightarrow g f^{\#} f \supset g\,.$$

(Die Voraussetzungen besagen insbesondere, daß f und g dasselbe Zielobjekt haben.) (K 2a) gilt in den Beispielkategorien $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{G}$, aber nicht in $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{S}$. (K 2b) gilt in $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}$, aber nicht in $\mathfrak{S}$. Diese Behauptungen sind leicht zu verifizieren. Wir beweisen als Beispiel (K 2a) für $\mathfrak{G}$: Sei $f = (A, B, F)$, $g = (C, B, G)$. Aus $(c, b) \in G \circ F^{\#} \circ F$ folgt dann die Existenz von $b' \in B$, $a \in A$ mit

$$(c, b') \in G$$

$$(b', a) \in F^{\#}, \text{ d. h. } (a, b') \in F$$

$$(a, b) \in F\,.$$

Daraus ergibt sich $(e, b'^{-1} b) \in F$ (e = Einselement) und daher auch $\in G$ wegen $\mathrm{I} f \subset \mathrm{I} g$. Also ist $(c, b) = (c, b')\,(e, b'^{-1} b) \in G$.

1.13. Für den Rest des Paragraphen sei $\mathfrak{K}$ eine I-Kategorie, die die Axiome (K 1) und (K 2) erfüllt. Obwohl wir sie später für bestimmte Zwecke durch weitere Axiome ergänzen müssen, haben schon diese beiden weitreichende Konsequenzen. Wir stellen hier einige davon zusammen, die im folgenden immer wieder gebraucht werden:

$$(1.14) \qquad \begin{aligned} \mathrm{I} f \subset \mathrm{I}\, g &\Leftrightarrow g f^{\#} f \subset g \\ \mathrm{B} f \supset \mathrm{B} g &\Leftrightarrow g f^{\#} f \supset g \\ \mathrm{K} f \subset \mathrm{K} g &\Leftrightarrow f f^{\#} g \subset g \\ \mathrm{D} f \supset \mathrm{D} g &\Leftrightarrow f f^{\#} g \supset g\,. \end{aligned}$$

[6]) Eine Kategorie mit Nullmorphismen braucht kein Nullobjekt zu enthalten. Man kann sie aber immer durch Hinzunahme eines Nullobjekts erweitern.

Beweis. Die ersten beiden Implikationen haben wir von rechts nach links unter 1.12 bewiesen. In der anderen Richtung sind sie gerade das Axiom (K 2). Die beiden letzten Aussagen erhält man durch Anwenden der Involution auf die ersten.

(1.15) $\quad ff^{\#}f = f$ *für alle Morphismen* $f \in \mathfrak{K}$.

Beweis. Man setze $g = f$ in (1.14).

(1.16)
$$\omega f^{\#} f = \omega f$$
$$\Omega f^{\#} f = \Omega f\,.$$

Beweis. $\omega f \subset \omega f^{\#} f \subset \omega f f^{\#} f = \omega f$ (nach 1.15) liefert die erste Aussage. Die zweite ist dual dazu.

(1.17) *Aus* $f \subset g$, $\mathrm{I} f = \mathrm{I} g$, $\mathrm{D} f = \mathrm{D} g$ *folgt* $f = g$.

Beweis. $g \subset f f^{\#} g$ (1.14) $\subset f g^{\#} g$ (weil $f^{\#} \subset g^{\#}$) $\subset f$ (1.14).

(1.18)
$$f \textit{ ist } \mathrm{I}\textit{-regulär} \Leftrightarrow f^{\#} f \subset 1$$
$$f \textit{ ist } \mathrm{B}\textit{-regulär} \Leftrightarrow f^{\#} f \supset 1$$
$$f \textit{ ist } \mathrm{K}\textit{-regulär} \Leftrightarrow f f^{\#} \subset 1$$
$$f \textit{ ist } \mathrm{D}\textit{-regulär} \Leftrightarrow f f^{\#} \supset 1.$$

Beweis. Man setze $g = 1$ in (1.14).

(1.19) *Ein Morphismus* $f \in \mathfrak{K}$ *ist genau dann eine Äquivalenz, wenn er ein Isomorphismus* (1.9) *ist. Wenn das der Fall ist, so ist* $f^{\#}$ *invers zu* f.

Beweis. Daß jede Äquivalenz ein Isomorphismus ist, wurde in 1.10 gezeigt. Ist f ein Isomorphismus, so gilt $f^{\#} f = 1$ und $f f^{\#} = 1$ nach (1.18).

(1.20) *Die geordnete Menge* $\mathfrak{K}(A, B)$ *enthält ein kleinstes und ein größtes Element* ω_{AB} *bzw.* Ω_{AB}.

Beweis. Wir definieren
$$\omega_{AB} = \omega_A^{\#}\, \omega_B \colon A \to B$$
$$\Omega_{AB} = \Omega_A^{\#}\, \Omega_B \colon A \to B\,.$$

Für jedes $f \in \mathfrak{K}(A, B)$ ist dann $\omega_B \subset \omega_A f$, also $\omega_{AB} = \omega_A^{\#} \omega_B \subset \omega_A^{\#} \omega_A f \subset f$, letzteres nach (1.18), weil ω_A I-regulär ist. Dual dazu: $f \subset \Omega_{AB}$.

§ 2. Korrespondenzen über einer abelschen Kategorie

In Verallgemeinerung der Modul-Korrespondenzen werden wir Korrespondenzen über einer beliebigen abelschen Kategorie definieren. Vorher treffen wir einige Festsetzungen zur Terminologie.

2.1. Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie. Ein Morphismus $f \in \mathfrak{C}$ heißt *injektiv*, wenn $xf = x'f \Rightarrow x = x'$ für alle $x, x' \in \mathfrak{C}$, *surjektiv*, wenn $fy = fy' \Rightarrow y = y'$ für alle $y, y' \in \mathfrak{C}$. Die Begriffe „monomorph" und „epimorph" werden dagegen in dieser Arbeit immer im Sinne von 1.9 (für eine I-Kategorie) verwendet. In einer I-Kategorie, die den Axiomen (K 1) und (K 2) genügt, ist jeder Monomorphismus (Epimorphismus) injektiv (surjektiv). Ist nämlich f monomorph, so ist $ff^{\#} = 1$ (1.18), also $xf = x'f \Rightarrow x = xff^{\#} = x'ff^{\#} = x'$. Die Umkehrung gilt offenbar nicht, da nach diesem Schluß schon jeder KD-reguläre Morphismus injektiv ist (vgl. aber 4.9).

2.2. Sind $u_\nu: U_\nu \to A$ ($\nu = 1, 2$) Injektionen (in irgendeiner Kategorie $\mathfrak{C}$), so schreiben wir $u_1 \leqq u_2$, wenn es ein $x: U_1 \to U_2$ gibt mit $u_1 = x u_2$. x ist dadurch eindeutig bestimmt (und injektiv). Die Relation $\leqq$ ist transitiv und reflexiv. Ist $u_1 \leqq u_2$ und $u_2 \leqq u_1$, so heißen u_1 und u_2 *(links-) äquivalent*, in Zeichen: $u_1 \sim u_2$. Die zugehörigen Morphismen $U_1 \to U_2$ und $U_2 \to U_1$ sind dann invers zueinander. Wir wählen aus jeder Äquivalenzklasse von Injektionen in A einen Repräsentanten[7]). Diese ausgewählten Injektionen heißen *Unterobjekte* von A.

Dual dazu setzt man $q_1 \leqq q_2$ für Surjektionen $q_\nu: A \to Q_\nu$, wenn es ein y gibt mit $q_1 = q_2 y$. Man definiert *Rechts-Äquivalenz* und wählt aus jeder Äquivalenzklasse einen „*Quotienten*".

2.3. Sei nun $\mathfrak{C}$ eine Kategorie mit Nullmorphismen (1.11). Sind u und f Morphismen von $\mathfrak{C}$, so heißt u ein *Kern* von f, wenn

(a) u injektiv ist,

(b) $uf = 0$,

(c) es zu jedem $x \in \mathfrak{C}$ mit $xf = 0$ ein x' mit $x = x'u$ gibt.

Je zwei Kerne von f sind äquivalent und jede zu einem Kern äquivalente Injektion ist ein Kern. Hat $f: A \to B$ überhaupt einen Kern, so bezeichne $\text{Kern} f$ denjenigen Kern, der zugleich ein Unterobjekt von A ist.

Dual dazu führt man den Begriff eines Cokerns ein und definiert den Quotienten $\text{Cokern} f$. Ferner setzt man: $\text{Bild} f = \text{Kern}(\text{Cokern} f)$ und $\text{Cobild} f = \text{Cokern}(\text{Kern} f)$.

2.4. Ehe wir abelsche Kategorien einführen, definieren wir einen etwas allgemeineren Begriff, den wir später brauchen werden. Es handelt sich — ungenau gesagt — um „abelsche Kategorien ohne Addition":

Eine Kategorie $\mathfrak{C}$ mit Nullmorphismen heißt *quasi-exakt*, wenn sie die beiden folgenden Axiome erfüllt:

(QE 1) *Jeder Morphismus $f \in \mathfrak{C}$ hat einen Kern und einen Cokern, und es gibt eine Äquivalenz $\bar{f}$ mit $f = (\text{Cobild} f) \circ \bar{f} \circ (\text{Bild} f)$.*

(QE 2) *Für jedes Objekt $A \in \mathfrak{C}$ bilden die Unterobjekte von A eine Menge.*

Viele für abelsche Kategorien bekannte Tatsachen gelten auch für quasi-exakte Kategorien, z. B.: $f: A \to B$ ist genau dann eine Injektion, wenn $\text{Kern} f = 0$[8]). Ist das der Fall, so ist f ein Kern von $\text{Cokern} f$. Beweis: Für eine Injektion ist offenbar $\text{Kern} f = 0$. Nehmen wir umgekehrt $\text{Kern} f = 0$ an, so ist 1_A ein Cokern von $\text{Kern} f$, also $\text{Cobild} f$ eine Äquivalenz. Nach (QE 1) ist dann f links-äquivalent mit $\text{Bild} f$. Insbesondere ist f injektiv.

Entsprechend beweist man die duale Aussage, und es folgt: Ist u injektiv und q surjektiv, so ist u ein Kern von q genau dann, wenn q ein Cokern von u ist.

---

[7]) Wir legen ein logisches bzw. mengentheoretisches System zugrunde, in dem solche Auswahlen aus Klassen möglich sind.

[8]) Das bedeutet zunächst: $\text{Kern} f$ ist ein Nullmorphismus $0_{UA}: U \to A$. Da $\text{Kern} f$ injektiv ist, folgt aber $1_U = 0_{UU}$, d. h. U ist ein Nullobjekt (1.11). Indem man $f = 1_A$, A irgendein Objekt von $\mathfrak{C}$, wählt, kann man daraus schließen, daß jede nicht-leere quasi-exakte Kategorie ein Nullobjekt enthält.

Man erhält eine umkehrbare eindeutige Beziehung zwischen Unterobjekten und Quotienten eines Objekts A. Insbesondere bilden auch die Quotienten eine Menge.

Ist f sowohl injektiv als auch surjektiv, so sind Bild$f$ und Cobild$f$ Äquivalenzen, also auch f.

2.5. Eine Kategorie $\mathfrak{C}$ heißt *präadditiv*, wenn $\mathfrak{C}(A, B)$ für alle $A, B \in \mathfrak{C}$ eine abelsche Gruppe ist und die Zusammensetzung von Morphismen beide distributive Gesetze erfüllt. Die neutralen Elemente $0_{AB} \in \mathfrak{C}(A, B)$ sind dann Nullmorphismen im Sinne von 1.11. Eine präadditive Kategorie heißt *additiv*, wenn je zwei Objekte ein direktes Produkt (gleichwertig: eine direkte Summe) haben (s. [5], [14]).

Eine Kategorie heißt *exakt*, wenn sie präadditiv und quasi-exakt ist ([3], [14]). Sie heißt *abelsch*, wenn sie additiv und quasi-exakt (also auch exakt) ist ([5], [14]).

Nicht jede quasi-exakte Kategorie $\mathfrak{C}$ läßt sich durch Einführung einer Addition in $\mathfrak{C}(A, B)$ zu einer exakten machen (s. die beiden Beispiele in § 7). Andererseits gilt:

2.6. Satz. *Ist $\mathfrak{C}$ eine quasi-exakte Kategorie und haben je zwei Objekte von $\mathfrak{C}$ ein direktes Produkt (oder je zwei eine direkte Summe), so gibt es genau eine Verknüpfung in $\mathfrak{C}(A, B)$, die $\mathfrak{C}$ zu einer additiven (und damit abelschen) Kategorie macht.*

Die Begriffe „direktes Produkt" und „direkte Summe" werden wie in [5] definiert. Wir beweisen den Satz in § 8. Er wird später auch benutzt werden, ist aber für diesen Paragraphen nicht wichtig.

2.7. Sei nun $\mathfrak{A}$ eine abelsche Kategorie. Für ein Objekt $A \in \mathfrak{A}$ bezeichne $U(A)$ die Menge der Unterobjekte von A. Die Relation $\leqq$ (2.2) liefert eine (Teil-) Ordnung in $U(A)$, die $U(A)$ zu einem Verband macht ([5], 1.4). Zu jedem Paar $A, B \in \mathfrak{A}$ wählen wir ein bestimmtes direktes Produkt $A \times B$[7]).

Wir definieren: Eine *Korrespondenz über* $\mathfrak{A}$ von A in B ist ein Tripel (A, B, u) mit $u \in U(A \times B)$. Zur Abkürzung schreiben wir auch u für (A, B, u) und betrachten dementsprechend $U(A \times B)$ als die Menge der Korrespondenzen von A in B.

Ist $u: U \to A \times B$ aus $U(A \times B)$ und $v: V \to B \times C$ aus $U(B \times C)$, so definieren wir $u \circ v \in U(A \times C)$ wie folgt. (Zur Unterscheidung schreiben wir die Zusammensetzung von Morphismen in $\mathfrak{A}$ ohne „$\circ$".) Wir bilden die Injektionen

$$u \times 1: U \times C \to A \times B \times C$$

$$1 \times v: A \times V \to A \times B \times C\,.$$

(Dabei sei $A \times B \times C$ etwa durch $(A \times B) \times C$ festgelegt. Dann ist es mit $A \times (B \times C)$ in natürlicher Weise äquivalent.) u' und v' seien die zu $u \times 1$ bzw. $1 \times v$ links-äquivalenten Elemente des Verbandes $U(A \times B \times C)$, und $w' = u' \cap v'$ sei ihre untere Grenze. Ist schließlich $p': A \times B \times C \to A \times C$ die natürliche Projektion, so setzen wir $u \circ v = \text{Bild}(w' p')$.

$U(A \times B)$ ist bereits eine geordnete Menge. Die Vertauschung der Faktoren $A \times B \to B \times A$ induziert die „Involution" $U(A \times B) \ni u \to u^{\#} \in U(B \times A)$.

2.8. Satz. *Die Korrespondenzen über der abelschen Kategorie $\mathfrak{A}$ bilden eine I-Kategorie $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ (mit der oben definierten Zusammensetzung, Ordnung und Involution), die den Axiomen* (K 1) *und* (K 2) *genügt.*

Der Beweis wird in § 9 geführt. Wir stellen hier nur fest: Ein Nullobjekt 0 von $\mathfrak{A}$ ist auch ein I-Nullobjekt von $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ (1.6, Axiom K 1). Wir können $0 \times A = A$ für jedes Objekt A annehmen. Das kleinste bzw. größte Element von $\mathfrak{K}(0, A) = U(A)$ ist dann durch

$$\omega_A \sim 0_{0A} : 0 \to \mathrm{A}$$
$$\Omega_A \sim 1_A : A \to A$$

gegeben.

Wir definieren nun eine Abbildung $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{K}(\mathfrak{A})$: Für ein Objekt A sei $\varphi(A) = A$. Ist f irgendein Morphismus von $\mathfrak{A}$, so ist $(1, f) : A \to A \times B$[9]) eine Injektion. $\varphi(f)$ sei das zu $(1, f)$ links-äquivalente Element von $U(A \times B)$.

2.9. Satz. $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ *ist ein Funktor. Er bildet $\mathfrak{A}(A, B)$ umkehrbar eindeutig auf die Menge der eigentlichen Morphismen in $\mathfrak{K}(A, B)$ ab. Für jedes $f \in \mathfrak{A}(A, B)$ gilt*

$$\mathrm{K}\varphi(f) = \omega_B \circ \varphi(f)^{\#} = \mathrm{Kern}\, f$$
$$\mathrm{B}\varphi(f) = \Omega_A \circ \varphi(f) = \mathrm{Bild}\, f\,.$$

Der Beweis wird zusammen mit dem von 2.8 in § 9 gegeben. Dort werden auch die noch zu diskutierenden Axiome (K 3)—(K 6) für $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ bestätigt. Alle diese Beweise können auf Grund eines einfachen Hilfssatzes (9.4) fast ebenso geführt werden wie für Modul-Korrespondenzen.

§ 3. Einige Anwendungen

In diesem ganzen Paragraphen sei $\mathfrak{K}$ eine I-Kategorie, die den Axiomen (K 1) und (K 2) genügt. Darunter fallen insbesondere die I-Kategorien $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ von Korrespondenzen über einer abelschen Kategorie $\mathfrak{A}$ (2.8). Da $\mathfrak{A}$ mit der Unterkategorie $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ der eigentlichen Morphismen von $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ isomorph ist (2.9), erhält man Anwendungen auf $\mathfrak{A}$ selbst. Unsere Voraussetzungen über $\mathfrak{K}$ lassen aber neben $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ noch viele andere I-Kategorien zu, z. B. die I-Kategorie $\mathfrak{G}$ der Gruppen-Korrespondenzen.

3.1. Das Fünfer-Lemma. Eine Folge

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

aus $\mathfrak{K}$ heißt *exakt*, wenn $\mathrm{B}f_{n-1} = \mathrm{K}f_n$ für alle n. Ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(\mathfrak{A})$, so stimmt das für eigentliche Morphismen mit dem üblichen Exaktheitsbegriff in $\mathfrak{A}$ überein (2.9, wir identifizieren $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ durch φ). Entsprechendes gilt für $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}$.

Das Diagramm

(3.2)
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "c"'] & D \arrow[d, "d"'] \\
\bar{A} \arrow[r, "\bar{f}"] & \bar{B} \arrow[r, "\bar{g}"] & \bar{C} \arrow[r, "\bar{h}"] & \bar{D}
\end{tikzcd}$$

Fig. 1

[9]) Wir schreiben $(a_1, a_2) : X \to A_1 \times A_2$ für den (eindeutig bestimmten) Morphismus mit $(a_1, a_2)p_\nu = a_\nu$ $(\nu = 1, 2)$, wobei $p_\nu : A_1 \times A_2 \to A_\nu$ die Projektionen sind.

sei kommutativ und bestehe aus lauter eigentlichen[10]) Morphismen von $\mathfrak{K}$. Aus $gc = b\bar{g}$ folgt im allgemeinen nicht $c\bar{g}^{\#} = g^{\#}b$, aber es folgt

(3.3) $$g^{\#}b \subset g^{\#}b\bar{g}\bar{g}^{\#} = g^{\#}gc\bar{g}^{\#} \subset c\bar{g}^{\#},$$

denn $1 \subset \bar{g}\bar{g}^{\#}$ und $g^{\#}g \subset 1$ für eigentliche Morphismen $\bar{g}$, g (1.18). Wir nehmen nun zusätzlich an, daß die Zeilen in (3.2) exakt sind und daß a epimorph, d monomorph ist. Dann gilt

(3.4) $$\mathrm{I}g^{\#}b = \mathrm{I}c\bar{g}^{\#},\ \mathrm{D}(g^{\#}b) = \mathrm{D}(c\bar{g}^{\#}).$$

Beweis. $\omega g^{\#}b = \Omega fb$ (Exaktheit) $= \Omega a\bar{f}$ (Kommutativität) $= \Omega\bar{f}$ (a epimorph) $= \omega\bar{g}^{\#}$ (Exaktheit) $= \omega c\bar{g}^{\#}$ (c eigentlich). Der Beweis der zweiten Gliederung ist dual[11]).

Aus (3.3) und (3.4) erhält man nun doch (nach 1.17)

(3.5) $$g^{\#}b = c\bar{g}^{\#}.$$

Das Fünfer-Lemma ist bekanntlich ein Korollar der beiden Aussagen: c epimorph $\Rightarrow$ b epimorph, b monomorph $\Rightarrow$ c monomorph. Diese folgen unmittelbar aus (3.5), da $g^{\#}$, $\bar{g}^{\#}$ BK-regulär sind (vgl. 1.9, 1.10).

3.6. **Homologie.** Sei C ein Objekt von $\mathfrak{K}$ und $d \in \mathfrak{K}(C, C)$. Ein Objekt H zusammen mit einem Morphismus $h \in \mathfrak{K}(C, H)$ heißt *Homologieobjekt* von (C, d), wenn h IB-regulär ist und $\mathrm{K}h = \mathrm{B}d$, $\mathrm{D}h = \mathrm{K}d$. Notwendige Bedingung für die Existenz von (H, h) ist also $\mathrm{B}d \subset \mathrm{K}d$[12]). In der I-Kategorie $\mathfrak{M}$ der Modul-Korrespondenzen ist das auch hinreichend: Für H nimmt man den üblichen Homologiemodul Kern d/Bild d, und h ist die natürliche Projektion von Kern d auf H. Im nächsten Paragraphen werden wir ein weiteres Axiom (K 3) für I-Kategorien einführen, das die Existenz eines Homologieobjekts unter der Bedingung $\mathrm{B}d \subset \mathrm{K}d$ sichert und insbesondere in jedem $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ (Korrespondenzen über der abelschen Kategorie $\mathfrak{A}$) erfüllt ist. Es gilt jedoch nicht in $\mathfrak{G}$ (Gruppen-Korrespondenzen); dort existiert (H, h) genau dann, wenn Bild d ein Normalteiler von Kern d ist.

Daß (H, h) ein Homologieobjekt von (C, d) ist, kann auch durch die Exaktheit der Folge

(3.7) $$0 \xrightarrow{0=\omega_H} H \xrightarrow{h^{\#}} C \xrightarrow{d} C \xrightarrow{h} H \xrightarrow{0=\Omega_H^{\#}} 0$$

ausgedrückt werden. Wenn (H, h) existiert, so nennen wir (C, d) ein *Kettenobjekt* und d einen *Randoperator*.

Seien nun (C_ν, d_ν), $\nu = 1, 2$, zwei Kettenobjekte mit den Homologieobjekten (H_ν, h_ν). Für $f \in \mathfrak{K}(C_1, C_2)$ setzen wir $f_* = h_1^{\#}fh_2 \in \mathfrak{K}(H_1, H_2)$ und sagen: f_* wird durch f induziert.

3.8. Hilfssatz. *Ist $\mathrm{B}d_1 f \subset \mathrm{B}d_2$ und $\mathrm{K}(fd_2) \supset \mathrm{K}d_1$, so ist f_* ein eigentlicher Morphismus (selbst wenn f es nicht ist).*

---

[10]) Diese Voraussetzung könnte abgeschwächt werden.

[11]) „Dual" bedeutet hier: Man ersetze jeden Morphismus f durch $f^{\#}$ und kehre die Ordnung in $\mathfrak{K}(A, B)$ um. Eigentliche Morphismen und exakte Folgen behalten dann diese Eigenschaften. Die Begriffe „monomorph" und „epimorph" werden vertauscht.

[12]) Das ist mit $dd = 0$ äquivalent, wenn d eigentlich ist, s. 4.10.

Beweis. $\mathrm{I} f_* = \omega h_1^{\#} f h_2 = \Omega d_1 f h_2 \subset \Omega d_2 h_2 = \omega h_2^{\#} h_2 = \omega h_2 \ (1.16) = \omega$. Dual[13]) dazu $\mathrm{D} f_* = \Omega$.

Die Voraussetzungen des Hilfssatzes sind insbesondere dann erfüllt, wenn f ein „*Kettenmorphismus*" ist, d. h. wenn $d_1 f = f d_2$. Ist außerdem $f^{\#}$ ein Kettenmorphismus, so ist auch $(f^{\#})_* = h_2^{\#} f^{\#} h_1 = (f_*)^{\#}$ eigentlich, d. h. f_* ist ein Isomorphismus und daher eine Äquivalenz (1.19). Setzt man $(C_1, d_1) = (C_2, d_2)$ und $f = 1$, so erkennt man, daß das Homologieobjekt eines Kettenobjekts bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist.

3.9. **Der verbindende Morphismus.** Seien (C_ν, d_ν), $\nu = 1, 2, 3$, Kettenobjekte mit den Homologieobjekten (H_ν, h_ν). $i \in \mathfrak{K}(C_1, C_2)$ und $p \in \mathfrak{K}(C_2, C_3)$ seien Kettenmorphismen und die Folge

$$\varepsilon : 0 \xrightarrow{0} C_1 \xrightarrow{i} C_2 \xrightarrow{p} C_3 \xrightarrow{0} 0$$

sei exakt. (Weder d_ν noch i, p brauchen eigentliche Morphismen zu sein.) Wir betrachten das Diagramm

(3.10)
$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d, "0"'] & 0 \arrow[d, "0"'] & & \\
0 \arrow[r, "0"] & H_1 \arrow[r, "h_1^{\#}"] & C_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "i"'] & C_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "i"'] & H_1 \arrow[r, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r, "0"] & H_2 \arrow[r, "h_2^{\#}"] & C_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "p"'] & C_2 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "p"'] & H_2 \arrow[r, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r, "0"] & H_3 \arrow[r, "h_3^{\#}"] & C_3 \arrow[r, "d_3"] \arrow[d, "0"'] & C_3 \arrow[r, "h_3"] \arrow[d, "0"'] & H_3 \arrow[r, "0"] & 0 \\
 & & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Fig. 2

Nach Voraussetzung sind darin alle Zeilen und Spalten exakt und die beiden Quadrate kommutativ. Nach 3.6 haben wir durch i bzw. p induzierte eigentliche Morphismen

$$i_* = h_1^{\#} i h_2 : H_1 \to H_2$$
$$p_* = h_2^{\#} p h_3 : H_2 \to H_3 .$$

Wir definieren den „*verbindenden Morphismus*" der Folge ε durch

$$\varepsilon_* = h_3^{\#} p^{\#} d_2 i^{\#} h_1 : H_3 \to H_1 .$$

3.11. **Satz.** *ε_* ist ein eigentlicher Morphismus, und das Dreieck*

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[dr, "i_*"'] & & H_3 \arrow[ll, "\varepsilon_*"'] \\
 & H_2 \arrow[ur, "p_*"'] &
\end{tikzcd}$$

ist exakt.

[13]) S. Fußnote 11. Man beachte aber, daß h_ν nicht durch $h_\nu^{\#}$ ersetzt wird, sondern ungeändert bleibt.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Exaktheit. Man verfolge die Rechnungen im Diagramm (3.10):

Bei H_1: $\mathrm{B}\varepsilon_* = \Omega h_3^\# p^\# d_2 i^\# h_1 = \omega d_3^\# p^\# d_2 i^\# h_1 = \omega p^\# d_2^\# d_2 i^\# h_1$ (wegen $pd_3 = d_2 p$) $= \Omega i d_2^\# d_2 i^\# h_1 = \Omega d_2 i^\# h_1$ (1.16) $= \omega h_2^\# i^\# h_1 = \mathrm{K} i_*$.

Bei H_3 ist $\mathrm{K}\varepsilon_* = \mathrm{B} p_*$ dual dazu.

Bei H_2: $\mathrm{B} i_* = \Omega h_1^\# i h_2 = \omega d_1^\# i h_2 = \omega i^\# d_1^\# i h_2$ (wegen $\mathrm{K} i = \omega$) $= \omega d_2^\# i^\# i h_2$ (wegen $d_1 i = i d_2$) $= \Omega h_2^\# i^\# i h_2 = \Omega i h_2$ (1.16). Dual dazu ist $\mathrm{K} p_* = \omega p^\# h_2$, und wegen der Exaktheit von ε folgt $\mathrm{B} i_* = \mathrm{K} p_*$.

Nun zeigen wir, daß ε_* ein eigentlicher Morphismus ist: Zunächst gilt $\omega h_3^\# = \Omega d_3 = \Omega p d_3$ (p B-regulär) $= \Omega d_2 p \subset \omega d_2^\# p$ (wegen $\mathrm{B} d_2 \subset \mathrm{K} d_2$). Es folgt $\mathrm{I}\varepsilon_* = \omega h_3^\# p^\# d_2 i^\# h_1 \subset \omega d_2^\# p p^\# d_2 i^\# h_1 = \omega p^\# d_2 i^\# h_1$ (1.16) $= \Omega i d_2 i^\# h_1 = \Omega d_1 i i^\# h_1 = \omega h_1^\# i i^\# h_1 = \omega i^\# h_1 = \omega h_1 = \omega$. Dual dazu $\mathrm{D}\varepsilon_* = \Omega$.

3.12. **Spektrale Folgen.** Sei C ein Objekt von $\mathfrak{K}$ und d_r eine Folge von Randoperatoren in C ($r \geqq r_0$), so daß

$$\begin{aligned} \mathrm{I} d_r &= \mathrm{B} d_{r-1} \\ \mathrm{D} d_r &= \mathrm{K} d_{r-1} \end{aligned} \tag{3.13}$$

(wobei $d_{r_0-1} = 0$). Wir wollen zeigen, daß man $(C, d_{r_0}, d_{r_0+1}, \ldots)$ als spektrale Folge auffassen kann.

Sei (H_r, h_r) ein Homologieobjekt von (C, d_r). d_r induziert $\bar{d}_r = h_{r-1}^\# d_r h_{r-1}$: $H_{r-1} \to H_{r-1}$ (wobei $H_{r_0-1} = C$, $h_{r_0-1} = 1$, $\bar{d}_{r_0} = d_{r_0}$). Wir setzen ferner $\bar{h}_r = h_{r-1}^\# h_r$: $H_{r-1} \to H_r$.

3.14. Satz. (a) *$\bar{d}_r$ ist ein eigentlicher Morphismus.* (b) *$(H_r, \bar{h}_r)$ ist ein Homologieobjekt von (H_{r-1}, d_r).*

Beweis. (a) folgt aus 3.8, denn $\mathrm{B} d_{r-1} d_r = \Omega d_{r-1} d_r = \omega d_r d_r$ (3.13) $\subset \Omega d_r d_r \subset \omega d_r^\# d_r = \omega d_r$ (1.16) $= \Omega d_{r-1} = \mathrm{B} d_{r-1}$ und dual dazu $\mathrm{K}(d_r d_{r-1}) \supset \mathrm{K} d_{r-1}$.

(b) Aus $\mathrm{K} h_{r-1} = \mathrm{B} d_{r-1} = \mathrm{I} d_r \subset \mathrm{B} d_r = \mathrm{K} h_r$ ergibt sich $\mathrm{I}\bar{h}_r = \omega h_{r-1}^\# h_r \subset \omega h_r^\# h_r = \omega h_r = \omega$, d.h. $\bar{h}_r$ ist I-regulär. Dual dazu ist es D-regulär. Ferner ist $\mathrm{K}\bar{h}_r = \omega h_r^\# h_{r-1} = \Omega d_r h_{r-1} = \Omega d_r^\# d_r h_{r-1} = \omega d_{r-1}^\# d_r h_{r-1} = \Omega h_{r-1}^\# d_r h_{r-1} = \mathrm{B}\bar{d}_r$ und dual dazu $\mathrm{D}\bar{h}_r = \mathrm{K}\bar{d}_r$.

Nach diesem Satz ist $(E_r = H_{r-1}, \bar{d}_r)$, $r \geqq r_0$, eine spektrale Folge im üblichen Sinn (in der Kategorie der eigentlichen Morphismen von $\mathfrak{K}$). Ist umgekehrt eine solche Folge gegeben, so läßt sich leicht ein Objekt $C = E_{r_0}$ und eine Folge von Randoperatoren d_r in $\mathfrak{K}(C, C)$ konstruieren, für die (3.13) gilt. Die beiden Konstruktionen sind invers zueinander.

3.15. **Exakte Paare.** Die obige Interpretation einer spektralen Folge ist besonders zweckmäßig, wenn man von einem exakten Paar

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & A \arrow[dl, "g"] \\ & C \arrow[ul, "h"] & \end{tikzcd}$$

ausgeht (Massey [12]). Wir nehmen an, daß g und h eigentliche Morphismen sind (f dagegen beliebig) und setzen

$$d_r = h(f^\#)^{r-1} g : C \to C,\ r \geqq 1 .$$

Dann ist

$$\mathrm{D}d_r = \Omega g^{\#} f^{r-1} h^{\#} = \Omega f^{r-1} h^{\#} = \begin{cases} \Omega h^{\#} = \Omega, & r = 1 \\ \Omega f f^{r-2} h^{\#} = \omega g^{\#} f^{r-2} h^{\#} = \mathrm{K} d_{r-1}, & r > 1 \end{cases}$$

und dual

$$\mathrm{I}d_r = \begin{cases} \omega, & r = 1 \\ \mathrm{B}d_{r-1}, & r > 1. \end{cases}$$

Ferner gilt

$$\mathrm{B}d_r = \Omega h (f^{\#})^{r-1} g \subset \Omega g = \omega h^{\#} \subset \omega g^{\#} f^{r-1} h^{\#} = \mathrm{K} d_r.$$

Erfüllt die zugrunde gelegte I-Kategorie nicht nur die Axiome (K 1), (K 2), sondern auch (K 3) aus § 4, so ist also d_r ein Randoperator (4.4), und $(C, d_1, d_2, \ldots)$ ist eine spektrale Folge im Sinne von 3.12. Dieselbe Folge erhält man, wenn man sukzessive derivierte exakte Paare bildet. Auch für ihre weitere Untersuchung (z. B. Konvergenzfragen) sind die hier entwickelten Methoden nützlich. Man wird dann allerdings bald dazu geführt, graduierte Objekte zu betrachten und weitere Voraussetzungen über die Kategorie (Existenz von Limites) oder das exakte Paar (Beschränkungen für die Grade) zu machen. Wir gehen darauf hier nicht näher ein.

§ 4. Zerlegung von Morphismen

4.1. Neben (K 1), (K 2) führen wir nun folgendes Axiom für eine I-Kategorie $\mathfrak{K}$ ein:

Axiom (K 3). *Zu jedem* $u \in \mathfrak{K}(0, A)$ *($A \in \mathfrak{K}$ beliebig) gibt es*

(a) *einen Monomorphismus* $m : U \to A$ *mit* $\mathrm{B}m = u$,

(b) *einen Epimorphismus* $e : A \to Q$ *mit* $\mathrm{K}e = u$.

Wie man leicht bestätigt, ist (K 3) in den I-Kategorien $\mathfrak{M}$ (Moduln), $\mathfrak{P}$ (Mengen mit Grundpunkt) und $\mathfrak{S}$ (Mengen) erfüllt (vgl. 1.8). In $\mathfrak{G}$ (Gruppen) gilt (K 3a), aber nicht (K 3b). Die Behauptung von (K 3b) ist genau dann richtig, wenn $u = (0, A, U)$ und U ein Normalteiler von $0 \times A \cong A$ ist.

4.2. Satz. *Die I-Kategorie* $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ *der Korrespondenzen über einer abelschen Kategorie* $\mathfrak{A}$ *erfüllt* (K 3).

Beweis. Sei $u \in \mathfrak{K}(0, A)$. Nach Definition (2.7) ist u ein Unterobjekt von $0 \times A = A$. Nach 2.9 haben $m = \varphi(u)$ und $e = \varphi(\mathrm{Cokern}\, u)$ die in (K 3) geforderten Eigenschaften.

4.3. Wir setzen in diesem ganzen Paragraphen voraus, daß $\mathfrak{K}$ eine I-Kategorie ist, die (K 1), (K 2) und (K 3) erfüllt. Die Buchstaben $m, \bar{m}, m_1, \ldots$ $(e, \bar{e}, e_1, \ldots)$ stehen immer für Monomorphismen (Epimorphismen).

4.4. Satz. *Ist C ein Objekt von* $\mathfrak{K}$, $d \in \mathfrak{K}(C, C)$ *und* $\mathrm{B}d \subset \mathrm{K}d$, *so hat* (C, d) *ein Homologieobjekt* (vgl. 3.6).

Beweis. Wir wählen $m : Z \to C$ mit $\mathrm{B}m = \mathrm{K}d$ und $e : Z \to H$ mit $\mathrm{K}e = \mathrm{B}dm^{\#}$. Dann ist (H, h) mit $h = m^{\#} e : C \to H$ ein Homologieobjekt von (C, d) : $m^{\#}$ und e sind IB-regulär, also auch h (1.10). Nach 1.14 ist $dm^{\#} m = d$ (wegen $\mathrm{B}m = \mathrm{K}d \supset \mathrm{B}d$), also

$$\mathrm{K}h = \omega e^{\#} m = \Omega d m^{\#} m = \mathrm{B}d$$

$$\mathrm{D}h = \Omega e^{\#} m = \Omega m = \mathrm{K}d\,.$$

4.5. Wir wollen nun einen beliebigen Morphismus von $\mathfrak{K}$ in einfachere Bestandteile zerlegen. Sei $f \in \mathfrak{K}(A, B)$ gegeben. Wir wählen $m_1\colon A_1 \to A$, $e_1\colon B \to B_1$ mit $\mathrm{B} m_1 = \mathrm{D} f$, $\mathrm{K} e_1 = \mathrm{I} f$ und setzen $f_1 = m_1 f e_1$. Dann ist $m_1^{\#} f_1 e_1^{\#} = m_1^{\#} m_1 f e_1 e_1^{\#} = f$ nach 1.14. Wendet man dasselbe Verfahren noch einmal auf $f_1^{\#}$ anstelle von f an, so erhält man

(4.6)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "m_1^{\#}"'] & B \arrow[d, shift right, "e_1"'] \\ A_1 \arrow[u, shift right, "m_1"'] \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, shift right, "e_2"'] & B_1 \arrow[u, shift right, "e_1^{\#}"'] \arrow[d, shift right, "m_2^{\#}"'] \\ A_2 \arrow[u, shift right, "e_2^{\#}"'] \arrow[r, "f_2"] & B_2 \arrow[u, shift right, "m_2"'] \end{tikzcd}$$

Fig. 3

mit $\mathrm{B} m_2 = \mathrm{D} f_1^{\#} = \mathrm{B} f_1$, $\mathrm{K} e_2 = \mathrm{I} f_1^{\#} = \mathrm{K} f_1$. Das Diagramm ist kommutativ — genauer: Man erhält ein kommutatives Diagramm, wenn man aus jedem Paar vertikaler Pfeile einen Pfeil beliebig auswählt. f_1 ist ein eigentlicher Morphismus, denn $\mathrm{I} f_1 = \omega m_1 f e_1 = \omega f e_1 = \omega e_1^{\#} e_1 = \omega e_1$ (1.16) $= \omega$ und dual $\mathrm{D} f_1 = \Omega$. Folglich ist auch $f_2^{\#}$ eigentlich, denn es wurde aus $f_1^{\#}$ ebenso erhalten wie f_1 auf f. Außerdem ist aber f_2 eigentlich, denn $\mathrm{I} f_2 = \omega e_2^{\#} f_1 m_2^{\#} = \omega f_1^{\#} f_1 m_2^{\#} = \omega f_1 m_2^{\#} = \omega$ und dual $\mathrm{D} f_2 = \Omega$. f_2 ist also ein Isomorphismus. Er kann mit m_2 oder e_2 zusammengefaßt werden, und man erhält

4.7. Satz. *Jeder Morphismus $f \in \mathfrak{K}$ läßt sich in der Form $f = m_1^{\#} e_2 m_2 e_1^{\#}$ zerlegen.*

Man kann leicht zeigen, daß m_ν, e_ν in dieser Zerlegung bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt sind.

4.8. Satz. *Die Kategorie $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ der eigentlichen Morphismen von $\mathfrak{K}$ ist quasi-exakt.* (2.4). *Eine Folge von Morphismen aus $\mathfrak{E}$ ist genau dann exakt in $\mathfrak{E}$, wenn sie in $\mathfrak{K}$ exakt ist.*

Die Kategorie $\mathfrak{E}$ braucht nicht exakt oder gar abelsch zu sein, wie die beiden Beispiele in § 7 zeigen. Man beachte aber 2.6. Der Begriff einer exakten Folge in einer quasi-exakten Kategorie wird ebenso definiert wie in einer exakten: Das Bild eines Morphismus' ist der Kern des folgenden (oder dual). Exaktheit in $\mathfrak{K}$ wurde in 3.1 erklärt.

4.9. Korollar. *Ein Morphismus aus $\mathfrak{E}$ ist genau dann injektiv (surjektiv), wenn er in $\mathfrak{K}$ monomorph (epimorph) ist.*

Nach 1.11 hat $\mathfrak{E}$ Nullmorphismen. Das Korollar folgt aus 4.8, wenn man die Folgen

$$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B \quad \text{bzw.} \quad A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{0} 0$$

betrachtet. Zum Beweis von 4.8 brauchen wir zwei Hilfssätze:

4.10. Hilfssatz. *Für $f \in \mathfrak{E}(A, B)$, $g \in \mathfrak{E}(B, C)$ gilt $fg = 0_{AC} \Leftrightarrow \mathrm{B} f \subset \mathrm{K} g$*[14]).

Beweis. Sei $fg = 0_{AC} = \Omega_A^{\#} \omega_C$. Dann ist $\mathrm{B} f = \Omega_A f \subset \Omega_A f g g^{\#}$ (1.18) $= \Omega_A \Omega_A^{\#} \omega_C g^{\#} = 1_0 \omega_C g^{\#} = \mathrm{K} g$. Nimmt man umgekehrt $\mathrm{B} f \subset \mathrm{K} g$ an, so folgt

[14]) Hierfür braucht man nur die Axiome (K1) und (K2) vorauszusetzen, wie der Beweis zeigt.

$\mathrm{B}fg = \Omega_A fg \subset \omega_C g^{\#} g = \omega_B g = \omega_C$ und dual dazu $\mathrm{K}fg = \Omega_A$. Schließlich ist $fg = \Omega_A^{\#} \Omega_A fg$ (1.14) $= \Omega_A^{\#} \omega_C = 0_{AC}$.

4.11. **Hilfssatz.** *Sei* $f \in \mathfrak{C}(A, B)$. $u \in \mathfrak{C}(U, A)$ *ist genau dann ein Kern von* f *in* $\mathfrak{C}$, *wenn* u *monomorph ist und* $\mathrm{B}u = \mathrm{K}f$.

Beweis. Sei u monomorph und $\mathrm{B}u = \mathrm{K}f$. Dann ist u injektiv in $\mathfrak{K}$ (2.1), also auch in $\mathfrak{C}$. Nach 4.10 gilt $uf = 0$. Ist schließlich $x \in \mathfrak{C}(X, A)$ gegeben mit $xf = 0$, so ist $\mathrm{B}x \subset \mathrm{K}f = \mathrm{B}u$ (4.10). Setzt man $x' = xu^{\#}: X \to U$, so ist x' eigentlich (denn $\mathrm{D}x' = \Omega u x^{\#} \supset \Omega x x^{\#} = \Omega x^{\#} = \Omega$) und $x' u = xu^{\#} u = x$ (nach 1.14). u ist also ein Kern von f.

Ist umgekehrt u ein Kern von f in $\mathfrak{C}$, so wählen wir m mit $\mathrm{B}m = \mathrm{K}f$ (Axiom K 3). Wie wir eben gezeigt haben, ist dann auch m ein Kern von f, also links-äquivalent zu u (2.3). Daher ist u monomorph und $\mathrm{B}u = \mathrm{B}m = \mathrm{K}f$.

Beweis von 4.8. Sei $f \in \mathfrak{C}(A, B)$. Wir wählen m und e, so daß $\mathrm{B}m = \mathrm{K}f$, $\mathrm{K}e = \mathrm{B}f$ (Axiom K 3). Nach dem Hilfssatz 4.11 und seinem Dualen ist dann m ein Kern und e ein Cokern von f. Setzt man $m_2 = \mathrm{Bild} f$, $e_2 = \mathrm{Cobild} f$, so ist (wieder nach 4.11) m_2 monomorph, e_2 epimorph und $\mathrm{B}m_2 = \mathrm{K}e = \mathrm{B}f$, $\mathrm{K}e_2 = \mathrm{B}m = \mathrm{K}f$. Die Zerlegung (4.6) von f (mit $m_1 = 1_A$, $e_1 = 1_B$) liefert $f = e_2 f_2 m_2$, wobei f_2 eine Äquivalenz ist. Damit ist das Axiom (QE 1) von 2.4 bestätigt.

Eine Folge

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

ist genau dann exakt in $\mathfrak{C}$, wenn $\mathrm{Kern}\, g$ auch ein Kern von $\mathrm{Cokern}\, f$ ist, d. h. wenn $\mathrm{B}(\mathrm{Kern}\, g) = \mathrm{K}(\mathrm{Cokern}\, f)$ (4.11). Unter nochmaliger Benutzung von 4.11 ist das mit $\mathrm{K}g = \mathrm{B}f$ äquivalent, d. h. mit der Exaktheit in $\mathfrak{K}$ (3.1).

Es bleibt (QE 2) zu zeigen. Das Korollar 4.9 folgt aber schon aus dem bisher Bewiesenen. Wir brauchen also „injektiv" und „monomorph" nicht mehr zu unterscheiden. Sei $m_\nu: U_\nu \to A$, $\nu = 1, 2$. Aus $m_1 \leqq m_2$ (d. h. $m_1 = x m_2$, 2.2) folgt offenbar $\mathrm{B}m_1 \subset \mathrm{B}m_2$. Setzt man umgekehrt diese Beziehung voraus, so ist $x = m_1 m_2^{\#}: U_1 \to U_2$ eigentlich (denn $\mathrm{D}x = \Omega m_2 m_1^{\#} \supset \Omega m_1 m_1^{\#} = \Omega m_1^{\#} = \Omega$) und $x m_2 = m_1 m_2^{\#} m_2 = m_1$ (nach 1.14), also $m_1 \leqq m_2$. Nach (K 3) ist jedes Element aus $\mathfrak{K}(0, A)$ von der Form $\mathrm{B}m$. Folglich stehen die Unterobjekte von A in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu den Elementen der Menge $\mathfrak{K}(0, A)$ und bilden daher selbst eine Menge $U(A)$. Außerdem haben wir gezeigt:

4.12. **Satz.** *Die Zuordnung* $m \to \mathrm{B}m$ *definiert einen Ordnungsisomorphismus* $U(A) \to \mathfrak{K}(0, A)$.

4.13. Sei nun $\mathfrak{K}'$ neben $\mathfrak{K}$ eine weitere I-Kategorie, die (K 1)—(K 3) erfüllt.

Definition. $\Psi: \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$ heißt ein *I-Funktor*, wenn

(a) Ψ ein Funktor ist (d. h. $\Psi(fg) = \Psi(f)\Psi(g)$, $\Psi(1) = 1$),

(b) $\Psi(f^{\#}) = \Psi(f)^{\#}$,

(c) $f_1 \subset f_2 \Rightarrow \Psi(f_1) \subset \Psi(f_2)$,

(d) $\Psi(0) = 0$ (0 = I-Nullobjekt von $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{K}'$).

Für einen I-Funktor ist $\Psi(\omega) = \omega$ (ω = kleinstes Element von $\mathfrak{K}(0, A)$ bzw. $\mathfrak{K}'(0, \Psi(A))$) und dual $\Psi(\Omega) = \Omega$. Beweis: ω ist das einzige I-reguläre Element von $\mathfrak{K}(0, A)$. Es wird daher durch $\omega^{\#}\omega \subset 1$ charakterisiert (1.18). Diese Beziehung bleibt aber bei Anwendung von Ψ erhalten[15]).

Es folgt, daß Ψ mit den Operatoren I, B, K, D vertauschbar ist. Daher induziert Ψ einen Funktor $\psi : \mathfrak{E}(\mathfrak{K}) \to \mathfrak{E}(\mathfrak{K}')$. Wir nennen einen Funktor zwischen quasi-exakten Kategorien *exakt*, wenn er Nullmorphismen in Nullmorphismen abbildet und exakte Folgen exakt läßt. Nach 4.8 ist ψ in diesem Sinne exakt.

Vor allem ist für uns die Umkehrung dieses Ergebnisses wichtig:

4.14. Satz. *Für jeden exakten Funktor $\psi : \mathfrak{E}(\mathfrak{K}) \to \mathfrak{E}(\mathfrak{K}')$ gibt es genau eine Erweiterung zu einem I-Funktor $\Psi : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$.*

Hat ψ ein Inverses, so offenbar auch Ψ, also folgt:

4.15. Korollar. *$\mathfrak{K}$ ist durch $\mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Insbesondere bilden die in § 2 konstruierten Korrespondenzen über einer abelschen Kategorie $\mathfrak{A}$ (bis auf Isomorphie) die einzig mögliche Erweiterung von $\mathfrak{A}$ zu einer I-Kategorie, die (K 1)—(K 3) erfüllt.

Beweis von 4.14. Die Eindeutigkeit von Ψ ist klar: Nach 4.5—4.7 gibt es zu jedem $f \in \mathfrak{K}$ eine Zerlegung $f = m^{\#} f' e^{\#}$ mit $f' \in \mathfrak{E}$ (und wie immer: m monomorph, e epimorph). Also gilt $\Psi(f) = \Psi(m)^{\#}\Psi(f')\Psi(e)^{\#} = \psi(m)^{\#}\psi(f')\psi(e)^{\#}$. Dabei wurden übrigens nur die Bedingungen (a) und (b) aus 4.13 benutzt.

Um die Existenz zu zeigen, stützen wir uns auf folgenden, auch für sich interessanten Hilfssatz:

4.16. Hilfssatz. *Sei $f_\nu \in \mathfrak{K}(A, B)$ und $f_\nu = m_\nu^{\#} f'_\nu e_\nu^{\#}$ mit $f'_\nu \in \mathfrak{E}(\mathfrak{K})$, $\nu = 1, 2$. Dann ist $f_1 \subset f_2$ äquivalent mit $(*)$: Es gibt m, e, so daß $m_1 = m m_2$, $e_2 = e_1 e$ und $f'_1 e = m f'_2$.*

Man betrachte dazu das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_\nu"] & B \arrow[d, "e_1"] \arrow[dd, bend left=60, "e_2"] \\
\bullet \arrow[u, "m_2"] \arrow[dr, "f'_2"' near end] & \bullet \arrow[d, "e"] \\
\bullet \arrow[u, "m"] \arrow[ur, "f'_1" near end] \arrow[uu, bend left=60, "m_1"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Fig. 4

Beweis. Aus $(*)$ folgt

$$f_1 = m_2^{\#} m^{\#} f'_1 e_1^{\#} \subset m_2^{\#} m^{\#} f'_1 e e^{\#} e_1^{\#} = m_2^{\#} m^{\#} m f'_2 e^{\#} e_1^{\#} \subset m_2^{\#} f'_2 e^{\#} e_1^{\#} = f_2$$

(denn $1 \subset e e^{\#}$, $m^{\#} m \subset 1$ nach 1.18). Sei umgekehrt $f_1 \subset f_2$ vorausgesetzt. Dann ist $\mathrm{B} m_1 = \mathrm{D} f_1 \subset \mathrm{D} f_2 = \mathrm{B} m_2$, und es gibt daher ein m mit $m_1 = m m_2$ (4.12). Dual dazu erhält man ein e mit $e_2 = e_1 e$. Aus der gegebenen Zerlegung von f_ν folgt $m_\nu f_\nu e_\nu = m_\nu m_\nu^{\#} f'_\nu e_\nu^{\#} e_\nu = f'_\nu$ (1.14). Also ist

$$f'_1 e = m m_2 f_1 e_1 e \subset m m_2 f_2 e_1 e = m f'_2$$

und daher $f'_1 e = m f'_2$, weil es sich um eigentliche Morphismen handelt (1.17).

Nun definieren wir $\Psi : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$ durch

$$\Psi(f) = \psi(m)^{\#}\psi(f')\psi(e)^{\#}, \quad \text{wenn } f = m^{\#} f' e^{\#}, \; f' \in \mathfrak{E}\,.$$

[15]) Dabei wurden nur die Axiome (K 1) und (K 2) benutzt. Die Definition eines *I*-Funktors ist schon sinnvoll, wenn man nur (K 1) fordert.

Gilt die Aussage (*) von 4.16 für m_ν, f'_ν, e_ν, so auch für $\psi(m_\nu)$, $\psi(f'_\nu)$, $\psi(e_\nu)$. (Weil ψ exakt ist, bleiben die Begriffe „monomorph“ und „epimorph“ erhalten.) Daraus folgt, daß $\Psi(f)$ durch die obige Definition eindeutig bestimmt ist und daß $f_1 \subset f_2 \Rightarrow \Psi(f_1) \subset \Psi(f_2)$.

Als nächstes zeigen wir, daß Ψ ein Funktor ist. Offenbar gilt $\Psi(1) = \psi(1) = 1$. Sei nun $f \in \mathfrak{K}(A, B)$, $g \in \mathfrak{K}(B, C)$ und $f = m_A^{\#} f' e_B^{\#}$, $g = m_B^{\#} g' e_C^{\#}$, f', $g' \in \mathfrak{E}$. Um $\Psi(fg) = \Psi(f)\Psi(g)$ zu beweisen, konstruieren wir eine bestimmte Zerlegung von fg: Wir betrachten das Diagramm

(4.17)
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] & & B \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, "e_B"'] & & C \arrow[d, "e_C"] \\
\bullet \arrow[u, "m_A"] \arrow[r, "f'"] & \bullet & & \bullet \arrow[ul, "m_B"'] \arrow[r, "g'"] \arrow[dl, "\bar e_B"] & \bullet \arrow[d, "\bar e_C"] \\
\bullet \arrow[u, "\bar m_A"] \arrow[rr, "\bar f"] & & \bullet \arrow[ul, "\bar m_B"] \arrow[rr, "\bar g"] & & \bullet
\end{tikzcd}$$

Fig. 5

Die bisher noch nicht definierten Morphismen werden in der quasi-exakten Kategorie $\mathfrak{E}$ ohne Benutzung von $\mathfrak{K}$ konstruiert: $\bar e_B \bar m_B$ sei eine Zerlegung von $m_B e_B$ in eine Surjektion und eine Injektion. $\bar m_A = \operatorname{Kern}(f' \operatorname{Cokern} \bar m_B)$ (= „Urbild von $\bar m_B$ bei f'“). $\bar f$ sei der eindeutig bestimmte Morphismus mit $\bar f \bar m_B = \bar m_A f'$. Dual dazu werden $\bar e_C$ und $\bar g$ erklärt.

Benutzt man nun wieder $\mathfrak{K}$, so folgt $\bar m_A^{\#} \bar f = \bar m_A^{\#} \bar f \bar m_B \bar m_B^{\#} = \bar m_A^{\#} \bar m_A f' \bar m_B^{\#} = f' \bar m_B^{\#}$ (letzteres nach 1.14, weil $\mathrm{B}\bar m_A = \mathrm{K}(f' \operatorname{Cokern} \bar m_B) = (\mathrm{K} \operatorname{Cokern} \bar m_B) f'^{\#} = \mathrm{B} \bar m_B f'^{\#}$, vgl. 4.11). Dual dazu $\bar g \bar e_C^{\#} = \bar e_B^{\#} g'$. Das Diagramm (4.17) bleibt also kommutativ, wenn man alle mit m oder e bezeichneten Morphismen durch ihre Umkehrungen $m^{\#}$ bzw. $e^{\#}$ ersetzt. Insbesondere gilt $fg = (\bar m_A m_A)^{\#} (\bar f \bar g)(e_C \bar e_C)^{\#}$.

Wendet man Ψ auf (4.17) an, so erhält man ein Diagramm in $\mathfrak{K}'$ mit denselben Eigenschaften — in der oberen Hälfte nach Definition von $\Psi(f)$, $\Psi(g)$, in der unteren, weil alle Morphismen in $\mathfrak{E}$ liegen und die definierenden Eigenschaften bei Anwendung eines exakten Funktors invariant bleiben. Also ist

$$\Psi(f)\Psi(g) = \psi(\bar m_A m_A)^{\#} \psi(\bar f \bar g) \psi(e_C \bar e_C)^{\#} = \Psi(fg)\,.$$

Die Behauptung $\Psi(f^{\#}) = \Psi(f)^{\#}$ folgt unmittelbar aus der Definition von Ψ, wenn f eine der vier Formen m, $m^{\#}$, e, $e^{\#}$ hat. Sie gilt allgemein, da Ψ ein Funktor ist und sich jeder Morphismus von $\mathfrak{K}$ in der Form $m_1^{\#} e_2 m_2 e_1^{\#}$ schreiben läßt (4.7).

Es bleibt zu sagen, daß $\Psi(0) = \psi(0) = N$ ein I-Nullobjekt von $\mathfrak{K}'$ ist. Sei $0'$ irgendein I-Nullobjekt von $\mathfrak{K}'$. Dann sind $0'$ und N Nullobjekte von $\mathfrak{E}(\mathfrak{K}')$ (denn $1_N = \psi(1_0) = \psi(0_{00}) = 0_{NN}$, vgl. 1.11), also äquivalent.

4.18. B e m e r k u n g. Vermutlich läßt sich mit ähnlichen Methoden wie im obigen Beweis zeigen, daß jede quasi-exakte Kategorie $\mathfrak{Q}$ (und nicht nur eine abelsche wie in 2.8, 2.9) zu einer I-Kategorie $\mathfrak{K}$ erweitert werden kann, für die (K 1)—(K 3) und $\mathfrak{E}(\mathfrak{K}) = \mathfrak{Q}$ gilt.

§ 5. Axiomatische Charakterisierung der Korrespondenzen über abelschen Kategorien

In diesem Paragraphen betrachten wir drei weitere Axiome (K 4)—(K 6) für I-Kategorien und zeigen, daß die I-Kategorien der Form $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ ($\mathfrak{A}$ eine abelsche Kategorie, vgl. § 2) durch (K 1)—(K 6) charakterisiert sind.

5.1. Axiom (K 4). *$\mathfrak{K}(A, B)$ ist ein Verband für alle $A, B \in \mathfrak{K}$.*

Dieses Axiom gilt offenbar in allen Beispielkategorien $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{S}$ (1.4) sowie in jedem $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$. (Es überträgt sich aber nicht auf jede I-Unterkategorie.) Die Verbandsoperationen werden mit $\cap$ (untere Grenze) und $\cup$ (obere Grenze) bezeichnet. Die Involution $\mathfrak{K}(A, B) \to \mathfrak{K}(B, A)$ ist als Isomorphismus von geordneten Mengen mit den Verbandsoperationen vertauschbar.

5.2. Seien $f: A \to B$, $g_\nu: B \to C$, $\nu = 1, 2$, Morphismen einer I-Kategorie $\mathfrak{K}$, die (K 4) erfüllt. Eine einfache Folgerung aus der Monotonie der Zusammensetzung (1.3b) ist

$$(5.3) \qquad \begin{aligned} f(g_1 \cap g_2) &\subset fg_1 \cap fg_2, \\ f(g_1 \cup g_2) &\supset fg_1 \cup fg_2 . \end{aligned}$$

Die umgekehrten Inklusionen sind nicht allgemein richtig, wie man schon in den Beispielen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{G}$ sehen kann. (In $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{S}$ ist die erste im allgemeinen falsch, die zweite richtig.) Es gilt aber

$$(5.4) \qquad \begin{aligned} \mathrm{I}f \subset \mathrm{K}g_\nu\, (\nu = 1, 2) &\Rightarrow f(g_1 \cap g_2) \supset fg_1 \cap fg_2 , \\ \mathrm{B}f \supset \mathrm{D}g_\nu\, (\nu = 1, 2) &\Rightarrow f(g_1 \cup g_2) \subset fg_1 \cup fg_2 , \end{aligned}$$

wenn man die Axiome (K 1), (K 2) und (K 4) voraussetzt.

Beweis. $\mathrm{D}(fg_1 \cap fg_2) = \Omega(g_1^\# f^\# \cap g_2^\# f^\#) \subset \Omega g_1^\# f^\# \subset \Omega f^\# = \mathrm{D}f$. Daraus folgt $fg_1 \cap fg_2 \subset ff^\#(fg_1 \cap fg_2)$ (nach 1.14) $\subset f(f^\# fg_1 \cap f^\# fg_2)$ (nach 5.3) $\subset f(g_1 \cap g_2)$ (wegen $f^\# fg_\nu \subset g_\nu$, 1.14). Damit ist die erste Behauptung bewiesen; die zweite ist dual im Sinne der Ordnung.

Eine Verschärfung von (5.4) ist

Axiom (K 5). (a) $\mathrm{I}f \subset \mathrm{K}g_1 \Rightarrow f(g_1 \cap g_2) \supset fg_1 \cap fg_2$,

(b) $\mathrm{B}f \supset \mathrm{D}g_1 \Rightarrow f(g_1 \cup g_2) \subset fg_1 \cup fg_2$.

Es gilt in $\mathfrak{M}$ und allgemeiner in jedem $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$, wie wir in § 9 beweisen werden (9.9). In $\mathfrak{G}$ gilt zwar (K 5a), aber nicht (K 5b). (K 5) ist also sicher nicht aus (K 1), (K 2), (K 4) ableitbar. Daß es auch nicht ableitbar wird, wenn man noch (K 3) hinzunimmt, zeigt das Beispiel B in § 7.

5.5. Auch (K 1)—(K 5) genügen nicht, um die Unterkategorie $\mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ der eigentlichen Morphismen zu einer präadditiven Kategorie zu machen (Beispiel A in § 7). Daher betrachten wir noch:

Axiom (K 6). *Zu je zwei Objekten $A_1, A_2 \in \mathfrak{K}$ gibt es*

(a) *ein Objekt P und eigentliche Morphismen $g_\nu: P \to A_\nu$ ($\nu = 1, 2$), so daß $g_1^\# g_2 = \Omega_{A_1 A_2}$ (= größtes Element von $\mathfrak{K}(A_1, A_2)$, 1.20)* ;

(b) *ein Objekt S und eigentliche Morphismen $h_\nu: A_\nu \to S$ ($\nu = 1, 2$), so daß $h_1 h_2^\# = \omega_{A_1 A_2}$ (= kleinstes Element von $\mathfrak{K}(A_1, A_2)$).*

Das Axiom ist in $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{S}$ erfüllt: Für P kann man das kartesische Produkt $A_1 \times A_2$ und für g_ν die natürliche Projektion $P \to A_\nu$ nehmen. Für S kann man eine „direkte Summe" in der Kategorie der Homomorphismen ($\mathfrak{M}$, $\mathfrak{G}$) bzw. Abbildungen ($\mathfrak{B}$, $\mathfrak{S}$) wählen. In $\mathfrak{M}$ ist dann wieder $S \cong A_1 \times A_2$, während man in $\mathfrak{G}$ das freie Produkt der Gruppen A_1 und A_2 erhält. In § 9 werden wir (K 6) für die Korrespondenzen über einer abelschen Kategorie beweisen (9.9). Auch hier kann man $P = A_1 \times A_2 = S$ nehmen.

5.6. **Satz.** *Sei $\mathfrak{K}$ eine I-Kategorie, die* (K 1)—(K 4) *erfüllt. Gilt außerdem* (K 5a) *und* (K 6a), *so haben je zwei Objekte in $\mathfrak{C}(\mathfrak{K})$ ein direktes Produkt. Dual: Gilt* (K 5b) *und* (K 6b), *so haben je zwei Objekte eine direkte Summe.*

Wir beweisen den Satz weiter unten. Nach 4.8 ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{K})$ quasi-exakt. Mit Hilfe von 2.6 folgt daher:

5.7. **Korollar.** *Sei $\mathfrak{K}$ eine I-Kategorie, die* (K 1)—(K 4) *und außerdem* (K 5a), (K 6a) *oder* (K 5b), (K 6b) *erfüllt. Dann gibt es genau eine Addition, die $\mathfrak{C}(\mathfrak{K})$ zu einer additiven (und damit abelschen) Kategorie macht.*

Bildet man unter den Voraussetzungen dieses Korollars die I-Kategorie $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ der Korrespondenzen über $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}(\mathfrak{K})$, so ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{K}(\mathfrak{A})) \cong \mathfrak{A}$ (2.9), also $\mathfrak{K} \cong \mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ nach dem Eindeutigkeitssatz 4.15. $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ erfüllt aber alle Axiome (K 1)—(K 6) (§ 9). Es folgt:

5.8. **Korollar.** *Auf der Grundlage von* (K 1)—(K 4) *sind die Axiome* (K 5a), (K 6a) *einerseits und* (K 5b), (K 6b) *andererseits äquivalent.*

5.9. **Korollar.** *Die Zuordnungen $\mathfrak{A} \to \mathfrak{K}(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{K} \to \mathfrak{C}(\mathfrak{K})$ liefern eine bis auf Isomorphie umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen abelschen Kategorien $\mathfrak{A}$ und solchen I-Kategorien $\mathfrak{K}$, die* (K 1)—(K 6) *erfüllen.*

Beweis von 5.6. Sei $A_\nu \in \mathfrak{K}$, $\nu = 1, 2$ gegeben. Wir wählen $g_\nu\colon P \to A_\nu$ mit $g_1^\# g_2 = \Omega_{A_1 A_2}$ (K 6a) und einen Epimorphismus $e\colon P \to D$ mit $\mathrm{K}e = \mathrm{K}g_1 \cap \mathrm{K}g_2$ (K 3). Für $p_\nu = e^\# g_\nu\colon D \to A_\nu$ gilt dann

$$(5.10)\quad \mathrm{K}p_1 \cap \mathrm{K}p_2 = \omega g_1^\# e \cap \omega g_2^\# e = (\omega g_1^\# \cap \omega g_2^\#) e \quad \text{(aus 5.4 durch Involution)}$$
$$= \omega e^\# e = \omega e = \omega$$

und ferner $p_1^\# p_2 = g_1^\# e e^\# g_2 \supset g_1^\# g_2$ (1.18) $= \Omega_{A_1 A_2}$. p_ν ist eigentlich ($\omega p_\nu = \omega e^\# g_\nu \subset \omega g_\nu^\# g_\nu = \omega g_\nu = \omega$) und B-regulär (weil $\Omega_{A_1 A_2}$ und $\Omega_{A_2 A_1} = p_2^\# p_1$ B-regulär sind), also epimorph.

Wir werden nun zeigen: Zu jedem Paar $f_\nu\colon X \to A_\nu$, $\nu = 1, 2$, aus $\mathfrak{C}(\mathfrak{K})$ gibt es genau ein $f\colon X \to D$ aus $\mathfrak{C}(\mathfrak{K})$ mit $f p_\nu = f_\nu$; d. h. (D, p_1, p_2) ist ein direktes Produkt von A_1 und A_2. Ist f_ν gegeben, so setzen wir $f = f_1 p_1^\# \cap f_2 p_2^\#\colon X \to D$. Dann gilt

$$\mathrm{I}f = \omega(f_1 p_1^\# \cap f_2 p_2^\#) \subset \omega f_1 p_1^\# \cap \omega f_2 p_2^\# = \omega p_1^\# \cap \omega p_2^\# = \omega \quad (5.10)$$

$$\mathrm{D}f = \Omega(p_1 f_1^\# \cap p_2 f_2^\#) = \Omega p_1^\# (p_1 f_1^\# \cap p_2 f_2^\#) = \Omega(p_1^\# p_1 f_1^\# \cap p_1^\# p_2 f_2^\#)$$

(nach K 5a).

Nun ist $p_1^\# p_1 = 1$ (1.18) und $p_1^\# p_2 f_2^\# = \Omega_{A_1 A_2} f_2^\# = \Omega_{A_1}^\# \Omega_{A_2} f_2^\# = \Omega_{A_1}^\# \Omega_X = \Omega_{A_1 X}$, folglich $\mathrm{D}f = \Omega(f_1^\# \cap \Omega_{A_1 X}) = \Omega f_1^\# = \Omega$. Daher ist $f \in \mathfrak{C}(\mathfrak{K})$. Ferner gilt $f p_\nu = (f_1 p_1^\# \cap f_2 p_2^\#) p_\nu \subset f_\nu p_\nu^\# p_\nu = f_\nu$, also $f p_\nu = f_\nu$, da es sich um eigentliche Morphismen handelt (1.17).

Ist andererseits $f': X \to D$ irgendein Morphismus von $\mathfrak{C}(\mathfrak{K})$ mit $f'p_\nu = f_\nu$, so gilt $f = f_1 p_1^{\#} \cap f_2 p_2^{\#} = f' p_1 p_1^{\#} \cap f' p_2 p_2^{\#} \supset f'$ (wegen $p_\nu p_\nu^{\#} \supset 1$, 1.18), also $f = f'$ nach 1.17.

§ 6. Vergleich mit der Theorie von Mac Lane

Mac Lane gibt in [11] ein Axiomensystem für I-Kategorien an, das in $\mathfrak{M}$ (Modul-Korrespondenzen) erfüllt ist und aus dem viele in $\mathfrak{M}$ geltende Sätze abstrakt abgeleitet werden können. Wir wollen es mit unseren Axiomen vergleichen.

6.1. Das Axiomensystem von Mac Lane besteht aus drei Gruppen. Die Gruppe I enthält außer den Eigenschaften, die wir in 1.3 für jede I-Kategorie gefordert haben, folgende Aussagen:

(Ia) $ff^{\#}f = f$ für jeden Morphismus $f \in \mathfrak{K}$.

(Ib) $\mathfrak{K}(A, B)$ ist ein modularer Verband.

(Ia) folgt aus unseren Axiomen (K 1) und (K 2) (s. 1.15). (Ib) stimmt mit (K 4) überein bis auf die Frage, ob der Verband modular ist, die wir vorläufig unberücksichtigt lassen. Die Axiomengruppe III von Mac Lane bezieht sich auf die kleinsten und größten Elemente ω_{AB}, $\Omega_{AB} \in \mathfrak{K}(A, B)$ und läßt sich leicht aus (K 1), (K 2) folgern (vgl. 1.20, wir übergehen die Einzelheiten). Am interessantesten ist die Gruppe II, die aus folgenden Axiomen besteht[16]):

(IIa) $f^{\#}f \subset g_1 g_1^{\#} \cup 1 \Rightarrow f(g_1 \cap g_2) \supset fg_1 \cap fg_2$,

(IIb) $f^{\#}f \supset g_1 g_1^{\#} \cap 1 \Rightarrow f(g_1 \cup g_2) \subset fg_1 \cup fg_2$,

(IIc) $gf^{\#} \cap 1 \subset ff^{\#} \subset gf^{\#} \cup 1$ für alle $f, g \in \mathfrak{K}(A, B)$.

Außerdem wird in [11] gefordert: (IId) Aus $g \subset f$, $gg^{\#} \cap 1 = ff^{\#} \cap 1$, $g^{\#}g \cup 1 = f^{\#}f \cup 1$ folgt $g = f$. Dieses Axiom folgt aber aus den übrigen. Beweis: Nach (IIa) und (Ia) gilt $f^{\#}(ff^{\#} \cap 1) = f^{\#}ff^{\#} \cap f^{\#} = f^{\#}$, also durch Involution $(ff^{\#} \cap 1)f = f$. Dual dazu $g(g^{\#}g \cup 1) = g$ (aus (IIb) und (Ia)). Daher ist $f = (ff^{\#} \cap 1)f \subset gg^{\#}f \subset gf^{\#}f \subset g(g^{\#}g \cup 1) = g$.

6.2. Man kann leicht I-Kategorien konstruieren, die alle Axiome von Mac Lane erfüllen, aber kein I-Nullobjekt im Sinne von (K 1) haben, oder solche, die zwar (K 1) auch noch erfüllen, aber nicht (K 3). Man braucht dazu nur gewisse Objekte von $\mathfrak{M}$ wegzulassen. Andererseits gilt:

(6.3) *Erfüllt eine I-Kategorie* $\mathfrak{K}$ *die Axiome von* Mac Lane *und außerdem* (K 1), *so auch* (K 2).

Beweis. Wir zeigen $If \subset Ig \Rightarrow gf^{\#}f \subset g$. Die zweite Aussage von (K 2) ist dual. Sei also $f \in \mathfrak{K}(A, B)$, $g \in \mathfrak{K}(C, B)$ und $\omega_A f \subset \omega_C g$. Dann folgt $f^{\#}\omega_A^{\#}\omega_A f \subset$ $\subset g^{\#}\omega_C^{\#}\omega_C g \subset g^{\#}g$, denn $\omega_C^{\#}\omega_C$ ist das kleinste Element von $\mathfrak{K}(C, C)$ nach dem Axiom (III-2) in [11]. Aus (IIc) folgt $f^{\#}f \subset f^{\#}\omega_A^{\#}\omega_A f \cup 1$ (man wende die Involution auf (IIc) an, ersetze $f^{\#}$ durch f und $g^{\#}$ durch $\omega_A^{\#}\omega_A f$). Also ist $f^{\#}f \subset g^{\#}g \cup 1$ und damit $gf^{\#}f \subset g(g^{\#}g \cup 1) = g$ (s. den Beweis von (IId) in 6.1).

6.4. Ein Morphismus $s \in \mathfrak{K}(A, A)$ heißt *symmetrisch*, wenn $s^{\#} = s$, und *idempotent*, wenn $ss = s$. Diese Begriffe spielen in [11] eine wichtige Rolle. Wir

[16]) Man beachte, daß hier die Zusammensetzung der Morphismen umgekehrt wie in [11] geschrieben wird.

bezeichnen die Menge der symmetrischen und idempotenten Elemente von $\mathfrak{K}(A, A)$ mit $SI(A)$.

Sei nun $\mathfrak{K}$ eine I-Kategorie, die (K 1) und (K 2) erfüllt. Jeder Morphismus der Form $ff^{\#}$ ist dann symmetrisch (1.3c) und idempotent ($ff^{\#}ff^{\#} = ff^{\#}$ nach 1.15). Für $s_1, s_2 \in SI(A)$ gilt

$$(6.5) \qquad s_1 \subset s_2 \Leftrightarrow (\mathrm{I}s_1 \subset \mathrm{I}s_2 \text{ und } \mathrm{B}s_1 \subset \mathrm{B}s_2).$$

Beweis. „$\Rightarrow$" ist klar. Setzt man umgekehrt die rechte Seite voraus, so folgt $s_1 \subset s_1 s_2^{\#} s_2$ (nach 1.14) $= s_1 s_2 = s_1 s_1^{\#} s_2 \subset s_2$ (1.14).

(6.5) besagt, daß die Zuordnung $s \to (\mathrm{I}s, \mathrm{B}s)$ einen Ordnungsisomorphismus γ von $SI(A)$ auf eine Teilmenge von $\mathfrak{K}(0, A) \times \mathfrak{K}(0, A)$ (mit der Produktordnung) definiert. Nimmt man noch das Axiom (K 3) hinzu, so folgt:

(6.6) *Das Bild von γ besteht aus allen Paaren $(u, v) \in \mathfrak{K}(0, A) \times \mathfrak{K}(0, A)$ mit $u \subset v$.*

Beweis. Offenbar ist $\mathrm{I}s \subset \mathrm{B}s$. Sind umgekehrt $u, v \in \mathfrak{K}(0, A)$ mit $u \subset v$ gegeben, so wählen wir einen Monomorphismus m mit $\mathrm{B}m = v$ und einen Epimorphismus e mit $\mathrm{K}e = um^{\#}$ (nach (K 3) ist das möglich). Setzt man $f = e^{\#}m$, so ist $\mathrm{I}f = \omega e^{\#} m = u m^{\#} m = u$ (1.14) und $\mathrm{B}f = \Omega e^{\#} m = \Omega m = v$. $s = f^{\#}f$ ist symmetrisch und idempotent, und es gilt $\mathrm{I}s = \mathrm{I}f = u$, $\mathrm{B}s = \mathrm{B}f = v$ (1.16).

6.7. Sei $T(A) = \{s \mid s \in \mathfrak{K}(A, A) \text{ und } s \subset 1\}$. Es gilt $T(A) \subset SI(A)$, denn aus $s \subset 1$ folgt $s = ss^{\#}s$ (1.15) $\subset ss^{\#} \subset s$, also $s = ss^{\#}$ (vgl. [11] Th. 3.3). Dual dazu $Q(A) = \{s \mid s \in \mathfrak{K}(A, A) \text{ und } s \supset 1\} \subset SI(A)$. Nach (6.5) und (6.6) sind die Abbildungen

$$T(A) \to \mathfrak{K}(0, A) \text{ mit } s \to \mathrm{B}s$$

$$Q(A) \to \mathfrak{K}(0, A) \text{ mit } s \to \mathrm{I}s$$

Fig. 6

Ordnungsisomorphismen. Insbesondere ergibt sich $T(A) \cong Q(A)$. Diese Isomorphie wird in [11] unter Benutzung aller dort eingeführten Axiome bewiesen. Hier erscheint sie als Folgerung aus (K 1)—(K 3).

6.8. Wir setzen nun zusätzlich das Axiom (K 4) voraus, d. h. $\mathfrak{K}(A, B)$ ist ein Verband. Sind $s, t \in \mathfrak{K}(A, A)$ symmetrisch und idempotent, so auch $s \cap t$ und $s \cup t$, d. h. $SI(A)$ ist ein Unterverband von $\mathfrak{K}(A, A)$ (s. [11], Th. 3.2). Die Paare (u, v) mit $u \subset v$ bilden offenbar einen Unterverband von $\mathfrak{K}(0, A) \times \mathfrak{K}(0, A)$. Die Abbildung $\gamma : s \to (\mathrm{I}s, \mathrm{B}s)$ ist daher für $s \in SI(A)$ mit $\cap$ und $\cup$ vertauschbar (6.5, 6.6).

In [11] wird die Indeterminiertheit von $f \in \mathfrak{K}(A, B)$ durch $f^{\#}f \cup 1 \in SI(B)$ definiert. Bei γ geht das in $(\mathrm{I}f \cup \omega, \mathrm{B}f \cup \Omega) = (\mathrm{I}f, \Omega)$ über, entspricht also unserer Definition der Indeterminiertheit. Analoges gilt für Bild, Kern und Definitionsbereich. Insbesondere ist $f^{\#}f \subset gg^{\#} \cup 1$ mit $\mathrm{I}f \subset \mathrm{I}g^{\#} = \mathrm{K}g$ äquivalent und daher das Axiom (IIa) mit unserem Axiom (K 5a). Dual: (IIb) $\Leftrightarrow$ (K 5b).

6.9. Das Axiom (IIc) von MAC LANE folgt aus (K 1), (K 2) und (K 4). Beweis: Wegen $\mathrm{B}(gf^{\#} \cap 1) \subset \mathrm{B}gf^{\#} \subset \mathrm{B}f^{\#}$ gilt $gf^{\#} \cap 1 \subset (gf^{\#} \cap 1) ff^{\#}$ (1.14) $\subset ff^{\#}$. Die zweite Inklusion in (IIc) ist dual dazu.

6.10. Zusammenfassung. *Die Axiome von* MAC LANE *folgen aus* (K 1)—(K 4) *mit Ausnahme von* (IIa), (IIb) *und der Forderung, daß der Verband*

$\mathfrak{K}(A, B)$ *modular ist.* (IIa), (IIb) *sind auf der Grundlage von* (K 1)—(K 4) *mit* (K 5) *äquivalent.*

Daß $\mathfrak{K}(A, B)$ modular ist, wird in [11] nirgends benutzt. Für die I-Kategorie $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ der Korrespondenzen über einer abelschen Kategorie $\mathfrak{A}$ ist es erfüllt (9.11).

Das Beispiel A in § 7 zeigt, daß die Axiome (K 1)—(K 5) und die Forderung, daß der Verband $\mathfrak{K}(A, B)$ modular ist (worin also alle Axiome von Mac Lane enthalten sind), nicht genügen, um die I-Kategorien der Form $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ zu charakterisieren.

6.11. Bemerkung. Obwohl die Axiome (IIa), (IIb) von (K 1)—(K 4) unabhängig sind (§ 7, Beispiel B), lassen sich alle Ergebnisse von [11] — auch solche, bei deren Beweis in [11] (IIa) oder (IIb) benutzt werden muß — mit Ausnahme von Theorem 4.7 aus (K 1)—(K 4) ableiten. Ein Beispiel dafür ist die Isomorphie $T(A) \cong Q(A)$ (6.7).

§ 7. Zwei Beispiele

Beispiel A. *Eine I-Kategorie* $\mathfrak{K}$, *in der* (K 1)—(K 5) *und alle Axiome von* Mac Lane [11] *gelten. Weder* (K 6a) *noch* (K 6b) *ist erfüllt. Die Unterkategorie* $\mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ *der eigentlichen Morphismen läßt sich nicht zu einer präadditiven Kategorie machen.*

Sei R der Körper der reellen Zahlen[17]) und $\mathfrak{M}_R$ die I-Kategorie aller Vektorraum-Korrespondenzen über R. $\mathfrak{K}$ sei folgende I-Unterkategorie von $\mathfrak{M}_R$: $\mathfrak{K}$ hat genau zwei Objekte, nämlich 0 und R. $\mathfrak{K}(0, 0)$, $\mathfrak{K}(0, R)$, $\mathfrak{K}(R, 0)$ bestehen aus allen Korrespondenzen zwischen den betreffenden Vektorräumen, d. h. $\mathfrak{K}(0, 0) = \{1_0\}$, $\mathfrak{K}(0, R) = \{\omega_R, \Omega_R\}$, $\mathfrak{K}(R, 0) = \{\omega_R^{\#}, \Omega_R^{\#}\}$. $\mathfrak{K}(R, R)$ ist dagegen eine echte Teilmenge von $\mathfrak{M}_R(R, R)$. Sie enthält die Elemente: ω_{RR}, Ω_{RR}, 0_{RR}, $0_{RR}^{\#}$, 1_R und a^n für $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, wobei $a: R \to R$ durch $a(x) = 2x$ definiert ist.

Man prüft leicht nach, daß $\mathfrak{K}$ eine I-Unterkategorie von $\mathfrak{M}_R$ ist, die (K 1)—(K 5) erfüllt. $\mathfrak{K}(A, B)$ ist ein Unterverband von $\mathfrak{M}_R(A, B)$, also modular. Nach 6.10 gelten dann auch alle Axiome von Mac Lane für $\mathfrak{K}$.

Gäbe es eine Addition, die $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ zu einer präadditiven Kategorie macht, so wäre $\mathfrak{E}(R, R)$ ein Ring mit der Zusammensetzung als Multiplikation. $\mathfrak{E}(R, R)$ besteht aus den Elementen 0 und a^n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Es müßte also sogar ein Körper sein, dessen multiplikative Gruppe frei zyklisch ist. Man zeigt leicht, daß es keinen solchen Körper gibt.

Nach 5.7 kann weder (K 6a) noch (K 6b) gelten.

Beispiel B. *Eine I-Kategorie* K, *die* (K 1)—(K 4) *und* (K 6), *aber weder* (K 5a) *noch* (K 5b) *erfüllt.* $\mathfrak{E}(\mathfrak{K})$ *läßt sich nicht zu einer präadditiven Kategorie machen.*

Die Objekte von $\mathfrak{K}$ seien die nicht-negativen ganzen Zahlen. Für die Menge $\{1, \ldots, n\}$ schreiben wir $[n]$; $[0]$ ist die leere Menge. $\mathfrak{K}(p, q)$ bestehe aus den Quintupeln $f = (p, q, A, B, \Phi)$, wobei A, B, Φ Teilmengen von $[p]$, $[q]$ bzw. $[p] \times [q]$ sind, die den Bedingungen

$$(i, j),\ (i, j') \in \Phi \Rightarrow j = j'$$

$$(i, j),\ (i', j) \in \Phi \Rightarrow i = i'$$

$$(i, j) \in \Phi \Rightarrow i \notin A \text{ und } j \notin B$$

[17]) Man könnte auch irgendeinen anderen Körper der Charakteristik 0 nehmen.

genügen. Faßt man Φ als Mengen-Korrespondenz von $[p]$ in $[q]$ auf, so bedeutet das: Φ und $\Phi^{\#}$ sind eindeutig, $\mathrm{Def}\,\Phi \cap A = \emptyset$, $\mathrm{Bild}\,\Phi \cap B = \emptyset$.

Ist $g = (q, r, B', C, \Psi) \in \mathfrak{K}(q, r)$, so setzen wir $fg = (p, r, \bar{A}, \bar{C}, \Phi \circ \Psi)$ mit $\bar{A} = A \cup (B')\Phi^{\#}$, $\bar{C} = C \cup (B)\Psi$. Dabei ist $(B)\Psi$ das Bild von B bei Ψ, d. h. die Menge aller $k \in [r]$, für die es ein $j \in B$ mit $(j, k) \in \Psi$ gibt. Zur Definition von $\Phi \circ \Psi$ und $\Phi^{\#}$ s. 1.2.

Wir setzen ferner $f^{\#} = (q, p, B, A, \Phi^{\#})$ und definieren $f_1 \subset f_2$ durch die drei Bedingungen

$$A_1 \supset A_2, \quad B_1 \supset B_2\,,$$
$$\Phi_1 \cup (A_1 \times B_1) \supset \Phi_2\,,$$

wobei $f_\nu = (p, q, A_\nu, B_\nu, \Phi_\nu) \in \mathfrak{K}(p, q)$.

Zur leichteren Untersuchung von $\mathfrak{K}$ definieren wir $\iota : \mathfrak{K} \to \mathfrak{M}_R$ (R = Körper der reellen Zahlen) durch

$$\iota(n) = R^n, \quad n \geqq 0 \ (R^0 = 0)$$
$$\iota(p, q, A, B, \Phi) = (R^p, R^q, F)\,,$$

wobei der Untervektorraum F von $R^p \times R^q$ aus allen $(p + q)$-tupeln $(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ besteht, für die gilt

$$x_i = 0 \ \text{ für } \ i \in A, \quad y_j = 0 \ \text{ für } \ j \in B\,,$$
$$x_i = y_j \ \text{ für } \ (i, j) \in \Phi\,.$$

Man bestätigt ohne Schwierigkeiten, daß ι ein Isomorphismus von $\mathfrak{K}$ auf eine I-Unterkategorie $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{M}_R$ ist, die (K 1)—(K 3) erfüllt. Dabei ist der Hinweis nützlich, daß die eigentlichen Morphismen aus $\mathfrak{K}'(R^p, R^q)$ genau diejenigen linearen Abbildungen $R^p \to R^q$ sind, bei denen jeder Vektor der Form $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in R^p$ in 0 oder in einen ebensolchen Vektor aus R^q übergeht.

(K 4) wird weiter unten bewiesen. Zum Nachweis von (K 6) betrachten wir

$$\begin{tikzcd}
R^p \arrow[dr, "i_1"] & & R^p \\
& R^{p+q} \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
R^q \arrow[ur, "i_2"'] & & R^q
\end{tikzcd}$$

Fig. 7

wobei i_ν die natürlichen Injektionen des ersten bzw. zweiten Faktors von $R^{p+q} = R^p \times R^q$ und p_ν die entsprechenden Projektionen sind. Alle diese Morphismen liegen in $\mathfrak{E}(\mathfrak{K}')$, und es gilt $p_1^{\#} p_2 = \Omega_{R^p R^q}$, $i_1 i_2^{\#} = \omega_{R^p R^q}$.

$\mathfrak{E}(\mathfrak{K}')$ ist quasi-exakt und

$$0 \xrightarrow{0} R^p \xrightarrow{i_1} R^{p+q} \xrightarrow{p_2} R^q \xrightarrow{0} 0$$

ist eine exakte Folge in $\mathfrak{E}(\mathfrak{K}')$ (4.8). Ferner ist $i_1 p_1 = 1$. Gäbe es eine Addition, die $\mathfrak{E}(\mathfrak{K}')$ zu einer präadditiven und damit exakten Kategorie macht, so würde durch einen bekannten Schluß folgen, daß (R^{p+q}, p_1, p_2) ein direktes Produkt von R^p und R^q ist. Das ist aber in $\mathfrak{E}(\mathfrak{K}')$ nicht der Fall: Für $p = q = 1$ gibt es z. B. kein $d : R \to R^2$ in $\mathfrak{E}(\mathfrak{K}')$ mit $dp_1 = dp_2 = 1$.

Wenn wir (K4) gezeigt haben, so kann nach 5.7 weder (K 5a) noch (K 5b) gelten.

Beweis von (K 4): $\mathfrak{K}'(R^p, R^q)$ ist nicht etwa ein Unterverband von $\mathfrak{M}_R(R^p, R^q)$, denn sonst würde nicht nur (K 4) sondern auch (K 5) folgen. Wir gehen daher auf $\mathfrak{K}$ zurück. Sei $f_\nu = (p, q, A_\nu, B_\nu, \Phi_\nu) \in \mathfrak{K}(p, q)$, $\nu = 1, 2$. Dann setzen wir

$$f_1 \cup f_2 = (p, q, A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2, \Phi)$$

$$\text{mit } \Phi = [\Phi_1 \cap \Phi_2] \cup [\Phi_1 \cap (A_2 \times B_2)] \cup [(A_1 \times B_1) \cap \Phi_2] .$$

Aus der Definition der Ordnung in $\mathfrak{K}(p, q)$ entnimmt man leicht, daß $f_1 \cup f_2$ eine obere Grenze von f_1 und f_2 ist. Da die Menge $\mathfrak{K}(p, q)$ endlich ist, existiert auch die obere Grenze einer beliebigen Teilmenge. $\mathfrak{K}(p, q)$ hat ferner ein kleinstes Element, nämlich $(p, q, [p], [q], \mathfrak{O})$. Bekanntlich ist dann $\mathfrak{K}(p, q)$ ein (vollständiger) Verband. Man kann auch eine direkte Konstruktion für $f_1 \cap f_2$ angeben; sie ist aber komplizierter als für $f_1 \cup f_2$.

§ 8. Beweis von Satz 2.6

Wir beginnen mit einem Hilfssatz über eine beliebige quasi-exakte Kategorie $\mathfrak{C}$. Ist $u \in \mathfrak{C}$ injektiv und $q \in \mathfrak{C}$ surjektiv, so ist u genau dann ein Kern von q, wenn q ein Cokern von u ist (2.4). Wir schreiben dafür kurz $u \| q$ (nach [7]).

8.1. Hilfssatz. *In dem Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[dr, "u_1"] & & \bullet \\ & \bullet \arrow[ur, "q_1"] \arrow[dr, "q_2"'] & \\ \bullet \arrow[ur, "u_2"'] & & \bullet \end{tikzcd}$$

Fig. 8

sei $u_1 \| q_2$ und $u_2 \| q_1$. $u_1 q_1$ ist genau dann injektiv (surjektiv), wenn $u_2 q_2$ diese Eigenschaft hat.

Beweis. Sei $u_1 q_1$ injektiv. Ist $x u_2 q_2 = 0$, so gibt es ein x' mit $x u_2 = x' u_1$ (wegen $u_1 \| q_2$). Es folgt $x' u_1 q_1 = x u_2 q_1 = 0$, also $x' = 0$ nach Voraussetzung, daraus $x u_2 = 0$ und schließlich $x = 0$. $u_2 q_2$ hat also 0 als Kern und ist daher injektiv (2.4). Aus Symmetriegründen gilt die Umkehrung. Die Behauptung über „surjektiv" ist dual.

Wir nehmen nun an, daß je zwei Objekte A_1, A_2 in der quasi-exakten Kategorie $\mathfrak{C}$ ein direktes Produkt $A_1 \times A_2$ mit den Projektionen $p_\nu : A_1 \times A_2 \to A_\nu$ haben, und wollen zeigen, daß es genau eine Addition gibt, die $\mathfrak{C}$ zu einer additiven Kategorie macht. Der Fall, daß die Existenz von direkten Summen vorausgesetzt wird, ist dual.

Wir setzen $i_1 = (1, 0) : A_1 \to A_1 \times A_2$, $i_2 = (0, 1) : A_2 \to A_1 \times A_2$. Gibt es eine Addition, die $\mathfrak{C}$ zu einer präadditiven Kategorie macht, so ist bekanntlich $(A_1 \times A_2, i_1, i_2)$ eine direkte Summe von A_1 und A_2 [5]. Zu jedem $A \in \mathfrak{C}$ gibt es dann einen eindeutig bestimmten Morphismus $c_A : A \times A \to A$ mit $i_\nu c_A = 1$, $\nu = 1, 2$ (Codiagonale). Für die Addition in $\mathfrak{C}(A, B)$ gilt

$$f + g = f i_1 c_B + g i_2 c_B = (f i_1 + g i_2) c_B = (f, g) c_B .$$

Sie ist also eindeutig bestimmt.

Aus der Voraussetzung, daß $\mathfrak{C}$ quasi-exakt ist, werden wir nun umgekehrt eine Codiagonale $c_A : A \times A \to A$ konstruieren und dann die Addition in $\mathfrak{C}(A, B)$ durch die obige Formel definieren. In dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_1"] & & \\
A \arrow[r, "d"] & A \times A \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "p_2"] & Q \\
& & A
\end{tikzcd}$$

Fig. 9

sei $d = d_A = (1, 1)$ (Diagonale) und q ein Cokern von d. Weil d injektiv ist ($d p_\nu = 1$), gilt $d \| q$. Ferner ist $i_1 \| p_2$, wie man leicht bestätigt. Aus $d p_2 = 1$ folgt nach dem Hilfssatz 8.1, daß $i_1 q$ injektiv und surjektiv, also eine Äquivalenz ist (2.4). Dasselbe gilt für $i_2 q$. Setzen wir

$$s = s_A = q (i_1 q)^{-1} : A \times A \to A \ ,$$
$$n = n_A = i_2 q (i_1 q)^{-1} : A \to A \ ,$$

so ist $d_A \| s_A$, $i_1 s_A = 1$, $i_2 s_A = n_A$ und n_A eine Äquivalenz.

Zu gegebenem $f : A \to B$ betrachten wir

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f"] & A \times A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f \times f"] & A \arrow[d, "f'"] \\
B \arrow[r, "d"] & B \times B \arrow[r, "s"] & B \ .
\end{tikzcd}$$

Fig. 10

Das linke Quadrat ist offenbar kommutativ. f' wird so gewählt, daß auch das rechte Quadrat kommutativ wird. Wegen $d \| s$ ist das möglich. Es folgt

$$f' = i_1 s f' = i_1 (f \times f) s = f i_1 s = f \ ,$$
$$n f' = i_2 s f' = i_2 (f \times f) s = f i_2 s = f n \ ,$$

d. h. $f' = f$, und n ist mit f vertauschbar. Setzt man

$$c_A = (1 \times n_A^{-1}) s_A : A \times A \to A \text{ [18]},$$

so gilt

(8.2) $$i_\nu c_A = 1_A \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2 \ ,$$

(8.3) $$c_A f = (f \times f) c_B \quad \text{für} \quad f : A \to B \ .$$

In bekannter Weise (s. [10], Nr. 19) definieren wir nun eine Addition in $\mathfrak{C}(A, B)$ durch

$$f + g = (f, g) c_B = d_A (f \times g) c_B \ .$$

Sie ist rechts-distributiv wegen (8.3) und links-distributiv, weil $h(f, g) = (hf, hg)$. Wegen (8.2) ist 0_{AB} ein zweiseitiges neutrales Element. Ferner gilt

$$f + (g + h) = (0, f) c_B + (g, h) c_B = [(0, f) + (g, h)] c_B = (g, f + h) c_B = g + (f + h) \ .$$

[18] Tatsächlich ist $n_A^{-1} = n_A = -1_A$, wie sich am Schluß ergeben wird. Mit Hilfe der Faktorenvertauschung in $A \times A$ könnte man $n_A n_A = 1_A$ auch direkt beweisen.

Für $h = 0$ erhält man das kommutative Gesetz, und wenn man das hat, so liefert die Formel das assoziative Gesetz. Schließlich ist $f n_B = -f$, denn

$$f + f n_B = d_A (f \times f n_B)(1 \times n_B^{-1}) s_B = d_A (f \times f) s_B = f d_B s_B = 0 \, .$$

(Insbesondere $n_A = -1_A$.) Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{C}$ mit dieser Addition präadditiv und daher auch additiv und abelsch ist.

§ 9. Beweise über $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$

9.1. Sei $\mathfrak{A}$ eine abelsche Kategorie. In 2.7 wurden „Korrespondenzen über $\mathfrak{A}$" als Unterobjekte von $A \times B$ (A, B Objekte von $\mathfrak{A}$) erklärt. Zusammensetzung, Ordnung und Involution wurden eingeführt. In diesem Paragraphen zeigen wir, daß die Korrespondenzen über $\mathfrak{A}$ eine I-Kategorie $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ bilden, die den Axiomen (K 1)—(K 6) und allen Axiomen von Mac Lane [11] genügt. Das liefert insbesondere Satz 2.8. Außerdem werden wir Satz 2.9 beweisen.

9.2. Wir erweitern zunächst die Bedeutung des Zeichens „$\leqq$" für Injektionen (2.2): Ist $u : U \to A$ eine Injektion und $a : X \to A$ beliebig, so schreiben wir $a \leqq u$, wenn es ein $x : X \to U$ gibt mit $a = xu$. Das ist mit $a(\operatorname{Cokern} u) = 0$ äquivalent, und es gilt

(9.3) $$a \leqq u \Leftrightarrow qa \leqq u$$

für jede Surjektion $q : X' \to X$. Der Buchstabe q (oder q', q'' usw.) soll von jetzt an immer eine Surjektion bezeichnen.

Es ist klar, wie die ausstehenden Beweise zu führen sind, wenn $\mathfrak{A}$ die Kategorie der (Links-) Moduln (und Homomorphismen) über einem festen Ring ist. Der allgemeine Fall läßt sich sehr ähnlich behandeln, wenn man die Morphismen $a : X \to A$ als Ersatz für die Elemente von A und die Relation $a \leqq u$ als Ersatz für die Aussage ansieht, daß das Element a im Unterobjekt u von A liegt. Entscheidend ist dabei

9.4. **Hilfssatz.** *Ist $u \in U(A \times B)$, $v \in U(B \times C)$, $a : X \to A$, $c : X \to C$, so gilt $(a, c) \leqq u \circ v (\in U(A \times C))$ genau dann, wenn es ein $b' : X' \to B$ und eine Surjektion $q : X' \to X$ gibt mit $(qa, b') \leqq u$, $(b', qc) \leqq v$.*

Diese Charakterisierung von „$\circ$" lautet fast ebenso wie die Definition der Zusammensetzung von Modul-Korrespondenzen. Nur das Auftreten der Surjektion q macht einen Unterschied, der aber wegen (9.3) unwesentlich ist.

Beweis von 9.4. Sei $(a, c) \leqq w = u \circ v$. Wir betrachten

(9.5)
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "x'"] \arrow[d, "q"] & W' \arrow[r, "w'"] \arrow[d, "p"] & A \times B \times C \arrow[d, "p'"] \\ X \arrow[r, "x"] \arrow[rr, bend right, "{(a,c)}"'] & W \arrow[r, "w"] & A \times C \end{tikzcd}$$

Fig. 11

Darin ist $w' = u' \cap v'$, $u' \sim u \times 1$, $v' \sim 1 \times v$, p' die natürliche Projektion und $w = \operatorname{Bild}(w' p')$ (s. 2.7). Es gibt genau eine Surjektion p mit $pw = w'p'$ (2.4).

Nach Voraussetzung gibt es ein x mit $(a, c) = xw$. x' und die Surjektion q werden so gewählt, daß auch das linke Quadrat kommutativ ist. Nach dem "pull back"-Lemma [4], [9] ist das möglich[19]).

Sei nun $x'w' = (a', b', c')$. Dann ist $(a', b', c') \leqq w' \leqq u' \sim u \times 1$ und daher $(a', b') \leqq u$. Analog $(b', c') \leqq v$. Andererseits ist $(a', c') = (a', b', c')p' = x'w'p' = q(a, c)$, also $a' = qa$, $c' = qc$.

Sei umgekehrt $(qa, b') \leqq u$, $(b', qc) \leqq v$ vorausgesetzt. Dann ist $(qa, b', qc) \leqq \leqq u \times 1$ und auch $\leqq 1 \times v$, also $\leqq u' \cap v' = w'$. Es gibt daher ein x' mit $(qa, b', qc) = x'w'$, und wir haben $q(a, c) = (qa, b', qc)p' = x'w'p' = x'pw \leqq w$. Man kann sich dabei wieder am Diagramm (9.5) orientieren; nur der Morphismus x fehlt jetzt.) Nach (9.3) folgt $(a, c) \leqq w = u \circ v$.

9.6. Wir bestätigen nun der Reihe nach die Axiome einer I-Kategorie für die Korrespondenzen über $\mathfrak{A}$:

Die Zusammensetzung ist assoziativ. Beweis: Sei $u \in U(A \times B)$, $v \in U(B \times C)$, $w \in U(C \times D)$. Wir setzen $(a, d) = (u \circ v) \circ w \in U(A \times D)$. Nach dem Hilfssatz 9.4 gibt es c' und q mit $(qa, c') \leqq u \circ v$, $(c', qd) \leqq w$. Durch nochmalige Anwendung erhält man $(q'qa, b'') \leqq u$, $(b'', q'c') \leqq v$ für geeignete b'', q'. Mit (c', qd) ist auch $(q'c', q'qd) \leqq w$ (9.3). Wiederum nach 9.4 folgt $(b'', q'qd) \leqq v \circ w$ und schließlich $(a, d) \leqq u \circ (v \circ w)$. Aus Symmetriegründen gilt auch $u \circ (v \circ w) \leqq (u \circ v) \circ w$.

Sei i_A das zu $(1, 1): A \to A \times A$ äquivalente Element von $U(A \times A)$ (zum Unterschied von $1_A: A \to A$ aus $\mathfrak{A}$). Dann ist $i_A \circ u = u = u \circ i_B$ für jedes $u \in U(A \times B)$. Diese Tatsache sowie die übrigen Forderungen an eine I-Kategorie in 1.3 sind sehr leicht zu bestätigen — entweder mit Hilfssatz 9.4 oder direkt aus der Definition der Zusammensetzung. Wir erinnern: Die Ordnung in $U(A \times B)$ ist durch $\leqq$ gegeben, und für $u = (u_1, u_2) \in U(A \times B)$ ist $(u_2, u_1) \sim \sim u^{\#} \in U(B \times A)$.

Axiom (K 1): Schon im Anschluß an 2.8 wurde darauf hingewiesen, daß ein Nullobjekt 0 von $\mathfrak{A}$ auch ein I-Nullobjekt von $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ ist. Wählt man $0 \times A = A$, so ist $\omega_A \sim 0_{0A}$, $\Omega_A \sim 1_A$ in $\mathfrak{K}(0, A) = U(A)$. Für $u \in U(A \times B)$ und $b: X \to B$ folgt leicht aus 9.4

$$(9.7)\quad \begin{aligned} &(a)\quad b \leqq \omega_A \circ u \Leftrightarrow (0, b) \leqq u\,,\\ &(b)\quad b \leqq \Omega_A \circ u \Leftrightarrow (a', qb) \leqq u \text{ für geeignete } a', q. \end{aligned}$$

Axiom (K 2): (a) Sei $u \in U(A \times B)$, $v \in U(C \times B)$ und $\omega \circ v \leqq \omega \circ u$. Wir setzen $(a, b) = u \circ v^{\#} \circ v$. Nach 9.4 gibt es b', c', q mit

$$\begin{aligned} &(qa, b') \leqq u\,,\\ &(b', c') \leqq v^{\#}, \text{ d. h. } (c', b') \leqq v\,,\\ &(c', qb) \leqq v\,. \end{aligned}$$

---

[19]) Wir wiederholen den Beweis: Man wählt einen Kern k von $r = p_1 p - p_2 x$: $W' \times X \to W$ und setzt $x' = kp_1$, $q = kp_2$. Dann ist das Quadrat kommutativ. Für die Injektion $i_1: W' \to W' \times X$ gilt $i_1 || p_2$ und $i_1 r = p$. Mit p ist also auch r surjektiv und daher $k || r$. Nach 8.1 ist kp_2 surjektiv, weil $i_1 r$ es ist.

Es folgt $(0, qb - b') \leqq v$, also $qb - b' \leqq \omega \circ v \leqq \omega \circ u$ und daher $(0, qb - b') \leqq u$ (9.7a). Durch Addition zu $(qa, b') \leqq u$ ergibt sich $(qa, qb) \leqq u$ und daher $(a, b) \leqq u$ nach (9.3). (Vgl. den Beweis von (K 2a) für $\mathfrak{G}$ in 1.12.)

(b) Sei nun $\Omega \circ u \leqq \Omega \circ v$ und $(a, b) = u$. Dann ist $b \leqq \Omega \circ u \leqq \Omega \circ v$ und daher $(a', qb) \leqq v$ für geeignete a', q (9.7b). Zusammen mit $(qa, qb) \leqq u$ liefert das $(a, b) \leqq u \circ v^{\#} \circ v$ nach 9.4.

Damit ist Satz 2.8 bewiesen. Ehe wir die übrigen Axiome verifizieren, bringen wir:

9.8. Beweis von Satz 2.9. Wir erinnern: $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ ist durch $(1, f) \sim \sim \varphi(f) \in U(A \times B)$, $f \in \mathfrak{A}(A, B)$ definiert. Offenbar ist $\varphi(1_A) = i_A$ (9.6). Daß $\varphi(fg) = \varphi(f) \circ \varphi(g)$ ist, bestätigt man entweder direkt aus der Definition der Zusammensetzung oder mit Hilfssatz 9.4.

$\varphi : \mathfrak{A}(A, B) \to U(A \times B)$ ist injektiv, denn aus $(1, f_1) \sim (1, f_2)$ folgt offenbar $f_1 = f_2$. Entweder direkt aus den Definitionen oder mit (9.7) beweist man $\omega \circ \varphi(f) = \omega$, $\Omega \circ \varphi(f)^{\#} = \Omega$, d. h. $\varphi(f)$ ist eigentlich. Ist umgekehrt $u = (u_1, u_2) \in U(A \times B)$ ein eigentlicher Morphismus, so ist u_1 eine Äquivalenz, und es gilt $u \sim (1, u_1^{-1} u_2)$, also $u = \varphi(u_1^{-1} u_2)$. Wir zeigen dazu, daß u_1 sowohl injektiv als auch surjektiv ist: Aus $xu_1 = 0$ folgt $(0, xu_2) = (xu_1, xu_2) \leqq u$, also $xu_2 \leqq \omega \circ u = \omega$ (9.7a). Das heißt aber $xu_2 = 0$, und weil (u_1, u_2) injektiv ist, folgt $x = 0$. Andererseits ist $1_A \sim \Omega_A = \Omega \circ u^{\#}$ und daher $(a', q) \leqq u^{\#} \sim (u_2, u_1)$ für geeignete a', q (9.7b). Da q surjektiv ist, muß es auch u_1 sein.

Beweis für $\mathrm{K}\varphi(f) = \mathrm{Kern} f$: Sei $a : X \to A$. $a \leqq \omega \circ \varphi(f)^{\#}$ ist äquivalent mit $(0, a) \leqq \varphi(f)^{\#} \sim (f, 1)$ (9.7a), d. h. mit $af = 0$ und schließlich mit $a \leqq \mathrm{Kern} f$.

Die Behauptung $\mathrm{B}\varphi(f) = \mathrm{Bild} f$ entnimmt man am einfachsten direkt aus der Definition von $\Omega \circ \varphi(f)$.

9.9. Das Axiom (K 3) für $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ wurde (unter Benutzung von 2.9) bereits in 4.2 bewiesen. Wir haben auch schon festgestellt (2.7), daß $U(A)$ für jedes $A \in \mathfrak{A}$ und daher auch $U(A \times B)$ ein Verband ist (Axiom (K 4)).

Ist $u_\nu : U_\nu \to A$ aus $U(A)$, $\nu = 1, 2$, und $a : X \to A$ beliebig, so gilt

$$(9.10)\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad a \leqq u_1 \cap u_2 \Leftrightarrow a \leqq u_\nu \ \text{ für } \nu = 1, 2\,, \\ &\text{(b)}\quad a \leqq u_1 \cup u_2 \Leftrightarrow qa = a_1 + a_2 \ \text{ und } a_\nu \leqq u_\nu \ \text{ für geeignete } q, a_1, a_2. \end{aligned}$$

Die erste Behauptung ist trivial. Die zweite folgt mit dem "pull back"-Lemma aus $u_1 \cup u_2 = \mathrm{Bild}\,([u_1, u_2] : U_1 \times U_2 \to A)$. (Dabei ist $U_1 \times U_2$ als direkte Summe aufzufassen und $[u_1, u_2]$ ist durch $i_\nu [u_1, u_2] = u_\nu$ definiert.)

Axiom (K 5): Statt (K 5) direkt zu bestätigen, ist es einfacher, zuerst

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\quad u \circ (u^{\#} \circ w \cap v) \supset w \cap u \circ v\,, \\ &\text{(b)}\quad u \circ (u^{\#} \circ w \cup v) \subset w \cup u \circ v \end{aligned}$$

für beliebige $u \in U(A \times B)$, $v \in U(B \times C)$, $w \in U(A \times C)$ zu beweisen. (K 5) folgt daraus, wenn man $u = f$, $w = f \circ g_1$, $v = g_2$ setzt. Man kann auch leicht zeigen, daß die obigen Formeln umgekehrt aus (K 5) (und (K 1)—(K 4)) folgen.

Beweis von (a): Sei $(a, c) = w \cap u \circ v$. Dann gibt es b', q mit $(qa, b') = u$, $(b', qc) \leqq v$ (9.4). Wegen $(qa, qc) \leqq w$ folgt $(b', qc) \leqq u^{\#} \circ w \cap v$ und daraus $(a, c) \leqq u \circ (u^{\#} \circ w \cap v)$.

Der Beweis von (b) ist etwas länger, ergibt sich aber ohne Schwierigkeiten aus 9.4 und (9.10b). Wir übergehen die Einzelheiten.

Axiom (K 6): Seien A_1, A_2 Objekte von $\mathfrak{A}$ und $p_\nu : A_1 \times A_2 \to A_\nu$, $i_\nu : A_\nu \to A_1 \times A_2$ die natürlichen Projektionen bzw. Injektionen. Wie man leicht bestätigt, ist dann $\varphi(p_1)^\# \circ \varphi(p_2)$ das größte und $\varphi(i_1) \circ \varphi(i_2)^\#$ das kleinste Element von $U(A_1 \times A_2)$.

9.11. *Für jedes Objekt $A \in \mathfrak{A}$ ist der Verband $U(A)$ modular.* Beweis: Sei $u, v, w \in U(A)$ und $u \leqq w$. Zu zeigen ist $(u \cup v) \cap w \leqq u \cup (v \cap w)$. Sei $a = (u \cup v) \cap w$, also $a \leqq u \cup v$ und $a \leqq w$. Nach (9.10b) gibt es q, a_1, a_2 mit $qa = a_1 + a_2$, $a_1 \leqq u$, $a_2 \leqq v$. Es folgt $a_2 = qa - a_1 \leqq w$, daher $a_2 \leqq v \cap w$ und schließlich $a \leqq u \cup (v \cap w)$.

Nach 6.10 sind dann alle Axiome von Mac Lane [11] in $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ erfüllt.

Literatur

[1] Adams, J. F.: On the non-existence of elements of Hopf invariant one. Ann. Math. **72**, 20—104 (1960).

[2] Bourbaki, N.: Théorie des ensembles, Chap. II. Paris 1954.

[3] Buchsbaum, D.: Exact categories and duality. Trans. Am. Math. Soc. **80**, 1—34 (1955).

[4] Freyd, J. F.: Functor theory. Dissertation Princeton 1960.

[5] Grothendieck, A.: Sur quelques points d'algèbre homologique. Tôhoku Math. J. **9**, 119—221 (1957).

[6] Heller, A.: Homological algebra in abelian categories. Ann. Math. **68**, 484—525 (1958).

[7] Hilton, P. J., and W. Ledermann: Homology and ringoids. II. Proc. Cambridge Philos. Soc. **55**, Part 2, 149—164 (1959).

[8] Liulevicius, A.: The factorization of cyclic reduced powers by secondary cohomology operations. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. **46**, 978—981 (1960).

[9] Lubkin, S.: Imbedding of abelian categories. Trans. Am. Math. Soc. **97**, 410—417 (1960).

[10] Mac Lane, S.: Duality for groups. Bull. Am. Math. Soc. **56**, 485—516 (1950).

[11] Mac Lane, S.: An algebra of additive relations. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. **47**, 1043—1051 (1961).

[12] Massey, W. S.: Exact couples in algebraic topology. Ann. Math. **56**, 363—396 (1952).

[13] Peterson, F. P., and N. Stein: Secondary cohomology operators: two formulas. Am. J. Math. **81**, 218—305 (1959).

[14] Yoneda, N.: On Ext and exact sequences. J. Fac. Sci. Univ. Tokio, Sec. I, VIII, 507—576 (1960).

(Eingegangen am 27. November 1961)