Math. Ann. 208, 99—132 (1974)


# Die Resolvente zum Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene. Teil III*

Jürgen Elstrodt

## Einleitung

Im folgenden bezeichne $G$ eine diskrete Untergruppe von $SL(2, \mathbb{R})$, welche die negative Einheitsmatrix $-I$ enthält. Ferner sei $k$ ein reeller Parameter, und $v$ sei ein (unitäres) Multiplikatorsystem auf $G$ vom Gewicht $2k$ (d. h. von der Dimension $-2k$ im Sinne der Peterssonschen Bezeichnungsweise). Zu diesen Daten $G, k, v$ betrachten wir den Hilbert-Raum $\mathscr{H}_k$ der (Äquivalenzklassen von) in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ definierten meßbaren Funktionen $f$ mit den folgenden Eigenschaften a), b):

a) Für alle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ und $z \in \mathbb{H}$ ist

$$f(Mz) = v(M)\, e^{2ik \arg(cz+d)} f(z).$$

b) Die Funktion $f$ ist über einen meßbaren Fundamentalbereich $B$ von $G$ in $\mathbb{H}$ quadratisch integrierbar in bezug auf das hyperbolische Flächenelement $d\omega = y^{-2}\, dx\, dy$.

Elemente des Hilbert-Raums $\mathscr{H}_k$ sind insbesondere alle Funktionen $f$ der Gestalt $f = y^k g$, wobei $g$ eine im Sinne der Peterssonschen Metrisierung quadratisch integrierbare, holomorphe ganze automorphe Form zur Gruppe $G$, zum Gewicht $2k$ und zum Multiplikatorsystem $v$ bezeichnet. Diese Funktionen $f$ genügen überdies der Differentialgleichung

$$-\Delta_k f = k(1-k) f$$

mit dem Differentialoperator

$$\Delta_k = y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - 2iky \frac{\partial}{\partial x}.$$

Daher liegt es nahe, den Operator $\Delta_k$ als linearen Operator auf einem geeigneten Definitionsbereich $\mathscr{D}_k \subset \mathscr{H}_k$ zu betrachten. Als angemessener

---

* Teil I: Math. Ann. **203**, 295—330 (1973),
Teil II: Math. Z. **132**, 99—134 (1973).

Definitionsbereich hat sich dabei die Menge $\mathscr{D}_k$ der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f \in \mathscr{H}_k$ bewährt, für welche $\Delta_k f \in \mathscr{H}_k$ ist. Nach einem Ergebnis von Roelcke [39] ist nämlich der Operator $\Delta_k : \mathscr{D}_k \to \mathscr{H}_k$ wesentlich selbstadjungiert, die Abschließung $\tilde{\Delta}_k : \tilde{\mathscr{D}}_k \to \mathscr{H}_k$ dieses Operators ist also selbstadjungiert. Es stellt sich daher die Aufgabe, die Spektralzerlegung des Operators $\tilde{\Delta}_k$ zu bestimmen und die Eigenfunktionen und Eigenpakete dieses Operators zu untersuchen. Diese Aufgabe bezeichnet man als das *Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene.*

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir das Eigenwertproblem der automorphen Formen mit Hilfe der Resolvente $(-\tilde{\Delta}_k - \lambda)^{-1}$ des Operators $-\tilde{\Delta}_k$. Im ersten Teil dieser Abhandlung haben wir die Resolvente für bestimmte komplexe Parameter $\lambda$ beschrieben durch einen Integraloperator vom Carlemanschen Typ mit einem gewissen Kern $G_{k\lambda}$. Dabei ergab sich folgendes Resultat (s. Teil I, Satz 5.6): Es sei

$$E_k := \{(|k| - m)(1 - |k| + m);\, 0 \leqq m < |k| - \tfrac{1}{2}, m \in \mathbb{Z}\}$$

(also $E_k = \emptyset$ für $|k| \leqq \frac{1}{2}$), und $\delta = \delta(G)$ bezeichne die Konvergenzabszisse der Poincaréschen Reihe zur Gruppe $G$ (s. Teil I, Abschnitt 1.4). Ist dann $\lambda \notin E_k \cup [\frac{1}{4}, \infty\rangle$ und $\operatorname{Re}(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}) > \delta$, so ist $G_{k\lambda}$ wohldefiniert, und für alle $u \in \tilde{\mathscr{D}}_k$ gilt

$$u = \int_B G_{k\lambda}(\cdot, z)\ ((-\tilde{\Delta}_k - \lambda)\, u)(z)\ d\omega(z)\,. \tag{1}$$

Ausgehend von diesem Satz wurde in Teil II dieser Arbeit das Spektrum des Operators $-\tilde{\Delta}_k$ untersucht.

Der vorliegende dritte und letzte Teil dieser Abhandlung enthält Anwendungen auf die Theorie der automorphen Formen. Zunächst beschäftigen wir uns in Abschnitt 9 mit Wachstumsabschätzungen. Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist dabei die Ungleichung

$$|u(z)| \leqq \|G_{k\lambda}(z, \cdot)\|\ \|(-\tilde{\Delta}_k - \lambda)\, u\|$$

($z \in \mathbb{H}$), die sofort aus (1) folgt. Durch Abschätzung des Wachstums der Norm des Resolventenkerns (s. Korollar 9.6) gewinnen wir dann Wachstumsaussagen für die Funktionen $u \in \tilde{\mathscr{D}}_k$ und damit speziell für die Eigenfunktionen und Eigenpakete des Operators $-\tilde{\Delta}_k$ (s. Satz 9.7). Die erzielten Wachstumsabschätzungen sind formuliert unter Benutzung der Punktpaarinvarianten

$$\sigma(z, z_0) := \frac{|z - \overline{z_0}|^2}{4 y y_0}$$

($y = \operatorname{Im} z > 0$, $y_0 = \operatorname{Im} z_0 > 0$). Dadurch ist gewährleistet, daß die Abschätzungen gleichmäßig gelten für alle Richtungen, in denen die Variable $z$ sich in der hyperbolischen Ebene ins Unendliche bewegen kann. An Hand einiger Beispiele prüfen wir die Güte der Wachstumsabschätzungen und diskutieren ihre Konsequenzen für die Zuordnung von Dirichletschen Reihen mit Funktionalgleichungen und automorphen Formen (s. Hecke [21], Maaß [30]). Eine weitere bemerkenswerte Konsequenz unserer Wachstumsabschätzungen betrifft die Orthogonalität von quadratisch integrierbaren Spitzenformen und Eisensteinschen Reihen, die wir nun für beliebige Gruppen $G$ beweisen können (s. Satz 9.9 und Korollar 9.11).

Abschnitt 10 enthält einen neuen Beweis der Peterssonschen Koeffizientenformeln für die Poincaréschen Reihen vom elliptischen Typus unter möglichst wenig einschränkenden Voraussetzungen über $G$ und $k$. Wir gewinnen diese Formeln aus der Beziehung (1) durch geeignete Grenzübergänge. Als Anwendung beweisen wir in Abschnitt 11 ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Beschränktheit quadratisch integrierbarer klassischer automorpher Formen (s. Satz 11.1) und diskutieren Konsequenzen dieses Kriteriums.

Ist $G$ eine Fuchssche Gruppe zweiter Art, so lassen sich einige Aussagen verschärfen (s. Abschnitt 12). Insbesondere gelingt es in Korollar 12.3 erstmals auch für gewisse nicht elementare Gruppen, das Spektrum $\sigma(-\tilde{\Delta}_k)$ des Operators $-\tilde{\Delta}_k$ explizit zu bestimmen: *Ist $G$ eine Fuchssche Gruppe zweiter Art mit $\delta(G)<\frac{1}{2}$, so ist*

$$\sigma(-\tilde{\Delta}_k)=E_k\cup[\tfrac{1}{4},\infty\rangle\,.$$

*Alle Elemente von $E_k$ sind Eigenwerte unendlicher Vielfachheit, und im Intervall $[\frac{1}{4},\infty\rangle$ liegt ein Streckenspektrum unendlicher Vielfachheit vor. Das Intervall $[\frac{1}{4},\infty\rangle$ ist frei von Eigenwerten des Operators $-\tilde{\Delta}_k$.*

Der vorliegende dritte Teil der Abhandlung schließt sich in der Numerierung an die vorhergehenden beiden Teile an, damit bequem auf frühere Ergebnisse verwiesen werden kann. Hinweise auf Formeln und Sätze der Abschnitte 1–5 bzw. 6–8 beziehen sich stets auf Teil I bzw. Teil II der Arbeit. Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit. Ferner befindet sich am Ende der Arbeit eine Liste häufig benutzter Bezeichnungen.

## Inhaltsübersicht

Teil I

Einleitung
1. Grundlagen
2. Entwicklung der Eigenfunktionen des Operators $-\Delta_k$ in den Punkten der oberen Halbebene
3. Bestimmung der Eigenwerte des Operators $-\tilde{\Delta}_k$ zur trivialen Gruppe
4. Konstruktion des Resolventenkerns zur trivialen Gruppe
5. Konstruktion des Resolventenkerns zu beliebigen diskreten Gruppen

Liste häufig benutzter Bezeichnungen
Literatur

Teil II

Einleitung
6. Untersuchung des Spektrums von $-\tilde{\Delta}_k$ mit Hilfe des Resolventenkerns
7. Bestimmung der Norm des Resolventenkerns
8. Weitere Untersuchung des Spektrums von $-\tilde{\Delta}_k$
Liste häufig benutzter Bezeichnungen
Literatur

Teil III

Einleitung
9. Wachstumsabschätzungen
10. Anwendungen auf klassische automorphe Formen
11. Kriterien für die Beschränktheit klassischer automorpher Formen
12. Das Spektrum von $-\tilde{\Delta}_k$ bei Fuchsschen Gruppen zweiter Art
Liste häufig benutzter Bezeichnungen
Literatur

## 9. Wachstumsabschätzungen

Im folgenden Abschnitt untersuchen wir das Wachstum von $\|G_{k\lambda}(z,\cdot)\|$ bei festem $\lambda$ in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{H}$ und benutzen die erzielten Abschätzungen zur Analyse des Wachstums automorpher Formen.

**9.1. Satz.** *Es seien $\lambda \notin E_k \cup [\frac{1}{4}, \infty\rangle$, $s := \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$ und* $\operatorname{Re} s > \delta$. *Ist $\lambda$ nicht reell, so gibt es eine Konstante $C_1 > 0$, derart daß für alle $z \in \mathbb{H}$ gilt*

$$\|G_{k\lambda}(z,\cdot)\|^2 \leqq C_1 \sum_{M \in G} (\sigma(z, Mz))^{-\operatorname{Re} s}, \tag{9.1}$$

*und ist $\lambda$ reell, so gilt mit einer geeigneten Konstanten $C_2 > 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$ die Abschätzung*

$$\|G_{k\lambda}(z,\cdot)\|^2 \leqq C_2 \sum_{M \in G} (\sigma(z, Mz))^{-s} (1 + \log \sigma(z, Mz)). \tag{9.2}$$

*Beweis.* Da die Funktionen auf beiden Seiten der Ungleichungen (9.1), (9.2) stetig sind in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{H}$, genügt es diese Ungleichungen zu beweisen für alle $z \in \mathbb{H}$, welche nicht elliptische Fixpunkte von $G$ sind. Es sei nun $\lambda$ nicht reell. Im Hinblick auf Korollar 7.3, (7.20) genügt es zum Beweise von (9.1), wenn wir zeigen: Es gibt eine Konstante $C_3 > 0$, derart daß für alle $\sigma > 1$ gilt

$$\left|\operatorname{Im}\left(\sigma^{-ir} \frac{\Gamma(s+k)\,\Gamma(s-k)}{\Gamma(2s)} F\left(s+k, s-k; 2s; \frac{1}{\sigma}\right)\right)\right| \leqq C_3 \tag{9.3}$$

($r := \operatorname{Im} s$). Da die linke Seite von (9.3) für $\sigma \to +\infty$ offenbar beschränkt ist, bleibt die Beschränktheit für $\sigma \to 1+0$ zu beweisen. Zu diesem Zwecke ziehen wir (4.18) heran und erkennen: Die linke Seite von (9.3) ist für $\sigma \to 1+0$ beschränkt genau dann, wenn

$$\operatorname{Im}\left(\sigma^{-ir}\log\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right) \tag{9.4}$$

für $\sigma \to 1+0$ beschränkt ist. Wegen

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{Im}\left(\sigma^{-ir}\log\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right)\right| &= \left|\sin(r\log\sigma)\log\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right| \\ &\leqq |r|(\log\sigma)\left|\log\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right|\end{aligned}$$

ist (9.4) für $\sigma \to 1+0$ beschränkt, folglich gilt (9.3) und damit (9.1).

Ist hingegen $\lambda$ reell, so genügt es nach Korollar 7.3, (7.21) zum Beweise von (9.2), wenn wir zeigen: Es gibt eine Konstante $C_4 > 0$, derart daß für alle $\sigma > 1$ gilt

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(\sigma^{-s}\frac{\Gamma(s+k)\,\Gamma(s-k)}{\Gamma(2s)}F\left(s+k,s-k;2s;\frac{1}{\sigma}\right)\right)\right| \\ &\quad\leqq C_4\sigma^{-s}(1+\log\sigma)\,.\end{aligned} \tag{9.5}$$

Da offenbar gilt

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial s}\left(\sigma^{-s}\frac{\Gamma(s+k)\,\Gamma(s-k)}{\Gamma(2s)}F\left(s+k,s-k;2s;\frac{1}{\sigma}\right)\right) \\ &\quad=\sigma^{-s}(-\log\sigma)\frac{\Gamma(s+k)\,\Gamma(s-k)}{\Gamma(2s)}F\left(s+k,s-k;2s;\frac{1}{\sigma}\right) \\ &\quad+\sigma^{-s}\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{\Gamma(s+k)\,\Gamma(s-k)}{\Gamma(2s)}F\left(s+k,s-k;2s;\frac{1}{\sigma}\right)\right\},\end{aligned} \tag{9.6}$$

erkennt man sofort, daß die linke Seite von (9.5) sich für $\sigma \to +\infty$ verhält wie $O(\sigma^{-s}\log\sigma)$. Ferner erkennt man leicht mit Hilfe von (4.18), daß beide Terme auf der rechten Seite von (9.6) für $\sigma \to 1+0$ beschränkt sind. Zusammenfassend folgt (9.5) und damit die Behauptung. □

*Bemerkung.* Es seien $\lambda \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$, $s := \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda}$, und die Reihe auf der rechten Seite von (9.1) konvergiere. Nach einer Bemerkung in Teil II, S. 122 gilt dann die Abschätzung (7.20), folglich bleibt der obige Beweis von (9.1) unverändert gültig. Daher gilt die Abschätzung (9.1) für alle $\lambda \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$, für welche die Reihe auf der rechten Seite konvergiert. Diese Bemerkung werden wir später im Beweis von Korollar 9.6, a) verwenden.

Zur weiteren Abschätzung der Reihe auf der rechten Seite von (9.1) beweisen wir die folgenden Sätze 9.2, 9.3, 9.5.

**9.2. Satz.** a) *Ist* $s \geqq t > 1$ *und* $z_0 \in \mathbb{H}$, *so gilt mit einer geeigneten Konstanten* $C > 0$ *für alle* $z \in \mathbb{H}$ *die Ungleichung*

$$\sum_{M \in G} (\sigma(Mz, z))^{-s} \leqq C(\sigma(z, z_0))^t . \tag{9.7}$$

b) *Konvergiert die Reihe auf der linken Seite von* (9.7) *noch für* $s = 1$, *so gilt* (9.7) *auch für* $s \geqq t := 1$.

*Beweis.* Nach (1.11) ist

$$\sum_{M \in G} (\sigma(Mz, z))^{-s} \leqq (4\sigma(z, z_0))^t \sum_{M \in G} (\sigma(Mz, z_0))^{-t} , \tag{9.8}$$

so daß es genügt, unter den jeweiligen Voraussetzungen die Beschränktheit der Reihe auf der rechten Seite von (9.8) in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{H}$ zu beweisen. Dazu führen wir die Transformation (1.5) $w = Az$ der oberen Halbebene auf den Einheitskreis aus und erhalten nach (5.15)

$$\sum_{M \in G} (\sigma(Mz, z_0))^{-t} = \sum_{S \in AGA^{-1}} (1 - |Sw|^2)^t \tag{9.9}$$

($w = Az$, $z \in \mathbb{H}$).

a) Ist nun $t > 1$, so stellt die Reihe auf der rechten Seite von (9.9) eine beschränkte Funktion von $w \in \mathbb{E}$ dar: Diese Aussage ist ein Spezialfall eines wesentlich allgemeineren Satzes von Godement [20], *Théorème 5 bis;* s. auch [10], S. 868 und [11], Abschnitt 3. Damit ist a) bewiesen.

b) Unter den Voraussetzungen der Aussage b) stellt die Reihe

$$\sum_{M \in G} (\sigma(Mz, z_0))^{-1} \tag{9.10}$$

für jedes feste $z_0 \in \mathbb{H}$ eine beschränkte Funktion des Arguments $z \in \mathbb{H}$ dar (s. (9.9) und [48], Satz 2; vgl. auch [36], S. 636—637). Die Behauptung b) folgt daher aus (9.8). ▯

**9.3. Satz.** *Es sei* $s > 0$, *und* $G$ *sei eine Fuchssche Gruppe zweiter Art, für welche die Reihe*

$$\sum_{M \in G} (\sigma(Mz, z))^{-s} \tag{9.11}$$

($z \in \mathbb{H}$) *konvergiere. Ferner sei* $[a, b] \subset \mathcal{O}(G)$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$). *Dann gilt für* $y \to +0$ *gleichmäßig in bezug auf* $x \in [a, b]$ *die Wachstumsbeschränkung*

$$\sum_{M \in G} (\sigma(Mz, z))^{-s} = 2 + o(1) \tag{9.12}$$

$(z=x+iy)$. *Ist insbesondere die Gruppe G endlich erzeugt, und enthält G keine parabolischen Substitutionen, so gilt*

$$\sup_{z\in\mathbb{H}}\Big(\sum_{M\in G}(\sigma(Mz,z))^{-s}\Big)<\infty\,. \tag{9.13}$$

*Beweis.* Bei der Transformation (1.5) $w=Az$ gilt für $M\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $z\in\mathbb{H}$, $S:=AMA^{-1}$ die Identität

$$|S'(w)|=\frac{\sigma(z,z_0)}{\sigma(Mz,z_0)}\,,$$

wie man leicht nachrechnet. Daher ist nach (1.11) für alle $z\in\mathbb{H}$

$$(\sigma(Mz,z))^{-1}\leqq 4|S'(w)|\,.$$

Beachten wir nun, daß die Reihe

$$\sum_{S\in AGA^{-1}}|S'(w)|^s$$

im Diskontinuitätsgebiet $\mathcal{O}(AGA^{-1})$ normal konvergiert, und setzen wir

$$R:=\{x+iy;\,a\leqq x\leqq b,\,0<y\leqq 1\}\,,$$

so können wir folgern: Zu vorgegebenem $\varepsilon\in\langle 0,1\rangle$ existiert eine endliche Teilmenge $H$ von $G$, derart daß gilt

$$\sup_{z\in R}\Big(\sum_{M\in G-H}(\sigma(Mz,z))^{-s}\Big)<\varepsilon\,.$$

Da $\varepsilon<1$ ist, gehören die Matrizen $\pm I$ zu $H$. Die endliche Summe

$$\sum_{M\in H}(\sigma(Mz,z))^{-s}$$

verhält sich daher für $y\to+0$ wie $2+o(1)$ gleichmäßig in bezug auf $x\in[a,b]$ $(z=x+iy)$, und es folgt (9.12).

Zum Beweis der Aussage (9.13) genügt es, die Beschränktheit der Funktion (9.11) in einem geeignet gewählten Fundamentalbereich der Gruppe $G$ nachzuweisen, denn die Funktion (9.11) ist invariant unter $G$. Nun hat aber jede unendliche und endlich erzeugte Fuchssche Gruppe zweiter Art, welche keine parabolischen Substitutionen enthält, bekanntlich einen Fundamentalbereich, der aus einer relativ kompakten Teilmenge von $\mathbb{H}$ besteht, vereinigt mit endlich vielen „Trichtern" (in der englischsprachigen Fachliteratur oft „funnels" genannt), die längs hyperbolischer Halbgeraden in sogenannte „freie Seiten" des Fundamentalbereichs auf $\mathbb{R}$ einmünden. Daher folgt (9.13) sogleich aus (9.12) (vgl. [33], I, S. 565). $\square$

Halten wir uns noch einmal die Schlüsse vor Augen, die in den Beweisen der Sätze 9.1 und 9.3 durchgeführt wurden, so erkennen wir mit Hilfe von Satz 7.2 mühelos die Richtigkeit der folgenden Aussage:

**9.4. Satz.** *Es seien $G$ eine Fuchssche Gruppe zweiter Art und $[a,b] \subset \mathcal{O}(G)$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$. Ferner seien $\lambda \notin E_k \cup [\frac{1}{4}, \infty\rangle$, $s := \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$ und $\operatorname{Re} s > \delta$. Dann gilt für $y \to +0$ gleichmäßig in bezug auf $x \in [a,b]$ die Wachstumsbeschränkung*

$$\|G_{k\lambda}(x+iy, \cdot)\|^2 = C(\lambda) + o(1)$$

*mit der positiven Konstanten*

$$C(\lambda) := \begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi \operatorname{Im} \lambda} \operatorname{Im}(\psi(s+k) + \psi(s-k)), & \textit{falls } \lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}, \\[2ex] \dfrac{1}{4\pi(2s-1)} (\psi'(s+k) + \psi'(s-k)), & \textit{falls } \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

*Insbesondere ist der Kern $G_{k\lambda}$ nicht vom Hilbert-Schmidtschen Typ.*

Daß $C(\lambda)$ in der Tat positiv ist, kann leicht aus der explizit bekannten Partialbruchentwicklung der Funktion $\psi$ gefolgert werden. – In [49], Satz 3.2 wird gezeigt, daß das Spektrum von $-\tilde{\Delta}_k$ das Intervall $[\frac{1}{4}, \infty\rangle$ enthält, wenn $G$ eine Fuchssche Gruppe zweiter Art ist. Diese Aussage liefert einen zweiten Beweis dafür, daß $G_{k\lambda}$ in der Situation des Satzes 9.4 nicht vom Hilbert-Schmidtschen Typ ist. Für Grenzkreisgruppen erster Art haben wir schon in Korollar 8.4, a) ein befriedigendes notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür hergeleitet, daß $G_{k\lambda}$ vom Hilbert-Schmidtschen Typ ist (s. auch [40], S. 286). Ferner wissen wir aus Korollar 8.3, daß $G_{k\lambda}$ stets dann nicht vom Hilbert-Schmidtschen Typ ist, wenn das Multiplikatorsystem $v$ in bezug auf eine Spitze von $G$ singulär ist. Dagegen ist nicht bekannt, ob $G_{k\lambda}$ auch dann vom Hilbert-Schmidtschen Typ sein kann, wenn $G$ eine Grenzkreisgruppe zweiter Art ist und wenn $v$ regulär ist in bezug auf $G$. Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang folgendes Beispiel einer Grenzkreisgruppe zweiter Art ohne Spitzen, für welche $G_{k\lambda}$ nicht vom Hilbert-Schmidtschen Typ ist.

*Beispiel.* Es seien $U := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, und $G$ bezeichne die von den Matrizen $U^{-2n} T U^{2n}$ $(n \in \mathbb{Z})$ erzeugte Untergruppe von unendlichem Index in der Modulgruppe. Bekanntlich ist $G$ eine Grenzkreisgruppe zweiter Art, und die Menge

$$B := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \{z; z \in \mathbb{H}, |z - 2n| \geq 1\}$$

ist ein Fundamentalbereich von $G$. (Für unsere Zwecke genügt es schon zu wissen, daß keine zwei inneren Punkte von $B$ mod $G$ äquivalent sind, und das ist sofort zu sehen.) Es seien ferner $k$ reell, $v$ sei ein Multiplikatorsystem auf $G$ vom Gewicht $2k$, und es seien $\lambda \notin E_k$, $s := \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$, $\operatorname{Re} s > 1$. Dann gilt für $y \to +\infty$ gleichmäßig in bezug auf $x \in \mathbb{R}$ die

Wachstumsbeschränkung

$$\|G_{k\lambda}(x+iy,\cdot)\|^2 = C(\lambda) + o(1) \tag{9.14}$$

mit der Konstanten $C(\lambda) > 0$ aus Satz 9.4. Diese Abschätzung beweist man wie folgt: Ist $1 < r < \operatorname{Re} s$, so lehrt Satz 7.2 zusammen mit den Abschätzungen aus dem Beweis des Satzes 9.1, daß mit geeignetem $C_1 > 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$ gilt

$$\big|\|G_{k\lambda}(z,\cdot)\|^2 - C(\lambda)\big| \leqq C_1 \sum_{\substack{M \in G \\ M \neq \pm I}} (\sigma(Mz,z))^{-r}.$$

Da ersichtlich

$$\sigma(Mz,z) \geqq \frac{y}{4 \operatorname{Im} Mz}$$

ist, erhalten wir

$$\big|\|G_{k\lambda}(z,\cdot)\|^2 - C(\lambda)\big| \leqq 4^r C_1 \sum_{\substack{M \in G \\ M \neq \pm I}} |cz+d|^{-2r} \tag{9.15}$$

($\underline{M} = (c, d)$). Nun beachten wir, daß die Gruppe $G$ aufgefaßt werden kann als maximales System von Matrizen der Thetagruppe (die von $U^2$ und $T$ erzeugt wird) mit verschiedenen zweiten Zeilen. Auf der rechten Seite der Ungleichung (9.15) steht also eine Eisenstein-Reihe zur Spitze $\infty$ der Thetagruppe, in welcher der Beitrag der Matrizen $\pm I$ fehlt. Die rechte Seite von (9.15) verhält sich daher für $y \to +\infty$ wie $o(1)$ gleichmäßig in bezug auf $x \in \mathbb{R}$, und (9.14) ist bewiesen. Aus (9.14) folgt sogleich, daß $G_{k\lambda}$ nicht vom Hilbert-Schmidtschen Typ ist, da der Fundamentalbereich $B$ die Halbebene $\{z; \operatorname{Im} z \geqq 1\}$ umfaßt.

Wir kommen noch einmal zurück auf (9.7) und den Beweis des Satzes 9.2: Natürlich könnte man die Voraussetzungen über $t$ in Satz 9.2 abschwächen zu der Forderung „$t > \delta$", wenn es gelänge, die Beschränktheit von (9.9) im Bereich $\delta < t < 1$ nachzuweisen. Nun stellt sich aber heraus, daß die Reihe (9.9) im Fall $\delta < t < 1$ nicht beschränkt ist, wenn $G$ eine parabolische Substitution enthält. Daher führt dieser Ansatz nicht immer zum gewünschten Ziel. Auch die Aussage (9.13) ist falsch für Gruppen mit parabolischen Substitutionen, ja, man kann sogar sagen, daß die genannten Abschätzungen scharf sind im Sinne des folgenden Satzes.

**9.5. Satz.** *Enthält $G$ eine parabolische Substitution, so gilt:*

a) *Ist $\delta < s < 1$ und $z_0 \in \mathbb{H}$, so ist*

$$\sup_{z \in \mathbb{H}} \Big( \sum_{M \in G} (\sigma(Mz, z_0))^{-s} \Big) = \infty .$$

b) *Für $t < 1$, $s > \delta$, $z_0 \in \mathbb{H}$ gilt*

$$\sup_{z \in \mathbb{H}} \Big( (\sigma(z, z_0))^{-t} \sum_{M \in G} (\sigma(Mz, z))^{-s} \Big) = \infty .$$

*Beweis.* Offenbar genügt es, die Aussagen a) und b) für den Fall zu beweisen, daß $G$ von $-I$ und einer parabolischen Substitution erzeugt wird. Da $\sigma$ eine Punktpaarinvariante ist, kann ferner angenommen werden, daß $G$ von $-I$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird, denn wegen (1.11) gelten die Aussagen a) bzw. b) entweder für jedes $z_0 \in \mathbb{H}$ oder für kein $z_0 \in \mathbb{H}$. Nun gilt für $z = x + iy \in \mathbb{H}$, $y \geqq 1$ und $s > \frac{1}{2}$ offenbar

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |z+n|^{-2s} > \sum_{n=1}^{\infty} (y^2+n^2)^{-s}$$

$$> \int_1^{\infty} (y^2+t^2)^{-s}\,dt \geqq y^{1-2s} \int_1^{\infty} (1+t^2)^{-s}\,dt\,.$$

Aus dieser Ungleichung folgen sogleich die Aussagen des Satzes. □

Die Gruppe $G$ heißt vom *Konvergenztyp*, wenn die Reihe (9.10) konvergiert; anderenfalls heißt $G$ vom *Divergenztyp* ([47], S. 514). Bekanntlich ist jede Fuchssche Gruppe zweiter Art vom Konvergenztyp und jede Grenzkreisgruppe erster Art vom Divergenztyp. Ferner existieren Grenzkreisgruppen zweiter Art vom Konvergenztyp (s. Abschnitt 1.4).

**9.6. Korollar.** *Es seien* $\lambda \notin E_k \cup [\frac{1}{4}, \infty\rangle$, $s := \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$.

a) *Ferner seien $\lambda$ nicht reell, $z_0 \in \mathbb{H}$. Ist $G$ vom Divergenztyp, so gelte zusätzlich*

$$\operatorname{Re} s \geqq t > 1\,,$$

*und ist G vom Konvergenztyp, so sei*

$$\operatorname{Re} s \geqq t := 1\,.$$

*Dann gilt für alle $z \in \mathbb{H}$ mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$ die Abschätzung*

$$\|G_{k\lambda}(z,\cdot)\|^2 \leqq C(\sigma(z, z_0))^t\,. \tag{9.16}$$

b) *Die Gruppe G sei endlich erzeugt, und es sei* $\operatorname{Re} s > 1$. *Dann gilt die Beziehung*

$$\sup_{z \in \mathbb{H}} \|G_{k\lambda}(z,\cdot)\| < \infty \tag{9.17}$$

*genau dann, wenn das Multiplikatorsystem v regulär ist (in bezug auf G).*

c) *Ist G endlich erzeugt, $z_0 \in \mathbb{H}$ und* $\operatorname{Re} s > \delta$, *so gilt mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$ die Abschätzung*

$$\|G_{k\lambda}(z,\cdot)\|^2 \leqq C\sigma(z, z_0)\,.$$

*Beweis.* a) folgt aus Satz 9.1 zusammen mit der anschließenden Bemerkung und Satz 9.2.

b) ist klar nach Satz 8.2 und Satz 9.4.

c) Offenbar genügt es, die Behauptung für ein geeignet gewähltes $z_0 \in \mathbb{H}$ zu beweisen (s. Lemma 1.1). Wir wählen nun den Punkt $z_0$ so, daß $z_0$ nicht elliptischer Fixpunkt von $G$ ist und daß der zum „Zentrum" $z_0$ gebildete Dirichletsche Fundamentalbereich $B_0$ von $G$ aus einer relativ kompakten Teilmenge $K$ von $\mathbb{H}$ besteht vereinigt mit höchstens endlich vielen „Trichtern" und vereinigt mit höchstens endlich vielen „Spitzensektoren" von $G$. Dann gibt es eine Konstante $C_1 > 0$, derart daß für alle $z \in B_0$ gilt

$$\|G_{k\lambda}(z,\cdot)\|^2 \leqq C_1 \sigma(z, z_0);$$

das erkennt man wie folgt: Für die Punkte $z \in B_0$, die in $K$ oder in einem der Trichter von $B_0$ liegen, ist diese Ungleichung bei geeigneter Wahl von $C_1$ offenbar erfüllt (Satz 9.4). Liegt $z$ in einem Spitzensektor von $B_0$, folgert man das Gewünschte aus Satz 8.2, Lemma 1.1 und der Tatsache, daß $\sigma$ eine Punktpaarinvariante ist.

Es sei nun $z \in \mathbb{H}$ beliebig. Dann gibt es ein $M \in G$, derart daß $Mz \in B_0$ ist. Nach Wahl von $B_0$ gilt für den hyperbolischen Abstand der Punkte $z$, $Mz$ von $z_0$ die Abschätzung $|Mz, z_0| \leqq |z, z_0|$. Daher ergibt sich unter Benutzung von (1.10)

$$\begin{aligned}\|G_{k\lambda}(z,\cdot)\|^2 &= \|G_{k\lambda}(Mz,\cdot)\|^2 \\ &\leqq C_1 \sigma(Mz, z_0) \leqq C_1 e^{|Mz, z_0|} \leqq C_1 e^{|z, z_0|} \\ &< 4C_1 \sigma(z, z_0). \quad \square\end{aligned}$$

Die Ergebnisse des Korollars 9.6 sind im Hinblick auf ihren Grad an Allgemeinheit recht befriedigend. Auch die Schärfe der Abschätzung (9.16) kann nicht wesentlich verbessert werden, wie ein Blick auf Satz 8.2 lehrt. Es ist lediglich eine offene Frage, ob auch für nicht endlich erzeugte Gruppen vom Divergenztyp die Abschätzung (9.16) mit $t = 1$ richtig ist. Ferner ist nicht bekannt, ob in Aussage b) auf die Voraussetzung der endlichen Erzeugbarkeit der Gruppe $G$ verzichtet werden kann. Nach Satz 8.2 wissen wir zwar für beliebige Gruppen, daß die Beziehung (9.17) falsch ist, falls das Multiplikatorsystem $v$ in einer Spitze von $G$ singulär ist. Es ist aber eine offene Frage, ob für beliebige Gruppen im Falle $\operatorname{Re} s > 1$ aus der Regularität des Multiplikatorsystems die Aussage (9.17) folgt. – Offenbar ist Korollar 9.6, b) eine Verschärfung von Korollar 8.4, b).

Wie im Beweis des Satzes 8.5 können wir mit Hilfe von Satz 9.4 und Korollar 9.6 das Wachstum der Elemente von $\tilde{\mathscr{D}}_k$ abschätzen.

**9.7. Satz.** *Es seien $f \in \tilde{\mathscr{D}}_k$ und $z_0 \in \mathbb{H}$.*

a) *Ferner sei $\varepsilon > 0$, falls $G$ eine nicht endlich erzeugte Gruppe vom Divergenztyp ist, und es sei $\varepsilon := 0$, falls $G$ endlich erzeugt oder vom Kon-*

*vergenztyp ist. Dann gilt für alle* $z \in \mathbb{H}$ *mit einer geeigneten Konstanten* $C > 0$ *die Abschätzung*

$$|f(z)| \leqq C(\sigma(z, z_0))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{9.18}$$

b) *Ist die Gruppe G endlich erzeugt, so gilt genau dann für alle* $g \in \tilde{\mathscr{D}}_k$ *die Beziehung*

$$\sup_{z \in \mathbb{H}} |g(z)| < \infty, \tag{9.19}$$

*wenn das Multiplikatorsystem v regulär ist (in bezug auf G).*

c) *Ist G eine Fuchssche Gruppe zweiter Art und* $[a, b] \subset \mathcal{O}(G)$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$, *so gilt für* $y \to +0$ *gleichmäßig in bezug auf* $x \in [a, b]$

$$f(x+iy) = O(1).$$

d) *Insbesondere genügen alle Eigenfunktionen und Eigenpakete des Operators* $-\tilde{\Delta}_k : \tilde{\mathscr{D}}_k \to \mathscr{H}_k$ *den Wachstumsbeschränkungen der Aussagen* a)–c).

Da die Funktion $\sigma$ eine Punktpaarinvariante ist, wird durch (9.18) das Wachstum von $f$ gleichmäßig abgeschätzt für alle Richtungen, in denen das Argument $z$ sich in der hyperbolischen Ebene ins Unendliche bewegen kann, denn die rechte Seite von (9.18) ist invariant bei Anwendung hyperbolischer Drehungen um den Punkt $z_0$. Transformiert man vermöge $w = Az$ [s. (1.5)] die obere Halbebene auf den Einheitskreis, so nimmt (9.18) die Gestalt

$$|f(A^{-1}w)| \leqq C(1-r^2)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} \tag{9.20}$$

$(w \in \mathbb{E}, r = |w|)$ an.

Offenbar beinhaltet Satz 9.7 einen neuen Beweis des Satzes 2.1 von Roelcke [39], S. 304. Ferner liefert Satz 9.7 sogleich folgendes Korollar:

**9.8. Korollar.** *Ist* $f \in \tilde{\mathscr{D}}_k$ *und* $\varepsilon$ *wie in Satz 9.7*, a), *so gelten kompaktgleichmäßig in bezug auf* $x \in \mathbb{R}$ *die Wachstumsbeschränkungen*

$$f(x+iy) = O(y^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \quad \text{für} \quad y \to +\infty, \tag{9.21}$$

$$f(x+iy) = O(y^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}) \quad \text{für} \quad y \to +0. \tag{9.22}$$

*Ist ferner die Gruppe G endlich erzeugt und ist das Multiplikatorsystem v regulär (in bezug auf G), so können die rechten Seiten von* (9.21), (9.22) *durch* $O(1)$ *ersetzt werden. Insbesondere genügen alle Eigenfunktionen und alle Eigenpakete von* $-\tilde{\Delta}_k$ *diesen Abschätzungen.*

Das Korollar 9.8 gibt eine positive Antwort auf eine von Roelcke [39], S. 304 formulierte Frage. – Zur Verdeutlichung der Qualität der gewonnenen Abschätzungen dienen die folgenden Beispiele.

*Beispiele. 1.* Es sei $G$ die von $-I$ und $U := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugte Translationsgruppe, und es sei $v(U)=1$. Dann existiert ein Eigenpaket von $-\tilde{\Delta}_k$, welches für $y \to +\infty$ ein Wachstum von der genauen Größenordnung $O\left(\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\log y}\right)$ aufweist (s. [13], S. 86). Da andererseits in diesem Fall die Abschätzung (9.21) mit $\varepsilon = 0$ gilt, erkennt man sofort: Der Exponent $\frac{1}{2}+\varepsilon$ auf der rechten Seite von (9.18), (9.21) kann nicht generell durch eine Konstante $\gamma < \frac{1}{2}$ ersetzt werden, und zwar selbst dann nicht einmal, wenn man diese Abschätzungen nur für Eigenpakete formuliert.

*2.* Es sei $G$ eine Grenzkreisgruppe von erster Art mit der Spitze $\infty$, und das Multiplikatorsystem $v$ sei singulär in bezug auf die Spitze $\infty$. Dann kann man zur Spitze $\infty$ eine Eisenstein-Reihe bilden, und durch Integration der analytisch fortgesetzten Eisenstein-Reihe erhält man in bekannter Weise ein Eigenpaket des Operators $-\tilde{\Delta}_k$ (s. [40], § 12; [38], § 12). Von diesem Eigenpaket weiß man, daß es für $y \to +\infty$ genau in der Größenordnung $O\left(\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\log y}\right)$ anwächst ([40], S. 309; [38], S. 81–82). Auch wenn man in Satz 9.7 und Korollar 9.8 zusätzlich voraussetzt, daß $G$ eine Grenzkreisgruppe von erster Art ist, kann man also immer noch nicht den Exponenten $\frac{1}{2}+\varepsilon$ auf der rechten Seite von (9.18), (9.21) durch eine Konstante $\gamma < \frac{1}{2}$ ersetzen, und zwar selbst dann nicht einmal, wenn man diese Abschätzungen nur für Eigenpakete formuliert. Dagegen ist es eine offene Frage, ob statt (9.18) die schärfere Abschätzung

$$f(z) = O\left((\sigma(z,z_0))^{\frac{1}{2}}\right) \quad \text{für} \quad \sigma(z,z_0) \to \infty \tag{9.23}$$

auch für nicht endlich erzeugte Gruppen vom Divergenztyp zutrifft.

*3.* Wir greifen zurück auf ein Beispiel von Roelcke [40], S. 304; dort wird gezeigt: Es gibt eine Grenzkreisgruppe $G$ von erster Art mit mindestens drei Spitzen, derart daß für jedes $k>0$ eine klassische ganze Nichtspitzenform (s. [39], S. 305, Definition 2.2) $g$ zu $G$ vom Gewicht $2k$ und zu einem geeigneten Multiplikatorsystem $v$ existiert. Wir denken uns von vornherein $G$ und $g$ so gewählt, daß $G$ die Spitze $\infty$ hat und daß $g$ in der Spitze $\infty$ nicht verschwindet. Es sei nun $0<k<\frac{1}{2}$. Dann ist $f := y^k g \in \mathcal{D}_k$, und $f$ ist eine Eigenfunktion des Operators $-\tilde{\Delta}_k$ zum Eigenwert $k(1-k)$. Nach Konstruktion wächst $f(x+iy)$ für $y \to +\infty$ genau in der Größenordnung $O(y^k)$ an, und hier ist der Parameter $k$ lediglich der Bedingung $0<k<\frac{1}{2}$ unterworfen. Damit ist bewiesen: Auch wenn man in Satz 9.7 und in Korollar 9.8 zusätzlich voraussetzt, daß $G$ eine Grenzkreisgruppe von erster Art ist und daß $f$ eine Eigenfunktion von $-\tilde{\Delta}_k$ ist, kann man in (9.18) und (9.21) immer noch nicht den Exponenten $\frac{1}{2}$ durch eine Konstante $\gamma < \frac{1}{2}$ ersetzen.

*4.* Die obigen Ergebnisse enthalten nicht-triviale Wachstumsaussagen für klassische automorphe Formen: Ist $f \in Q(G, -2k, v)$ ($=$ Menge der bezüglich $y^{2k} d\omega$ über $B$ quadratisch integrierbaren, klassischen ganzen automorphen Formen zur Gruppe $G$, zum Gewicht $2k$ und zum Multiplikatorsystem $v$) und ist $f \neq 0$, so ist $y^k f$ eine Eigenfunktion des Operators $-\tilde{\Delta}_k$ zum Eigenwert $k(1-k)$. Nach (9.21), (9.22) gelten daher kompakt-gleichmäßig in bezug auf $x \in \mathbb{R}$ die Wachstumsbeschränkungen

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= O(y^{-k+\frac{1}{2}+\varepsilon}) \quad \text{für} \quad y \to +\infty\,, \\ f(x+iy) &= O(y^{-k-\frac{1}{2}-\varepsilon}) \quad \text{für} \quad y \to +0 \end{aligned} \tag{9.24}$$

($\varepsilon$ wie in Satz 9.7, a)). Insbesondere gilt für $k > \frac{1}{2}$ kompakt-gleichmäßig in bezug auf $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{y \to +\infty} f(x+iy) = 0\,. \tag{9.25}$$

(Man beachte, daß hier nicht vorausgesetzt ist, daß $G$ die Spitze $\infty$ hat; $G$ braucht überhaupt keine parabolischen Substitutionen zu enthalten.) Wie wir schon in Beispiel *3* gezeigt haben, braucht (9.25) nicht zu gelten für $0 < k < \frac{1}{2}$. – Folgende Bemerkung verdeutlicht die Schärfe der Abschätzung (9.24): Ist $G$ eine Grenzkreisgruppe von erster Art mit der Spitze $\infty$, so gilt bekanntlich für jede klassische ganze automorphe Form $g$ zur Gruppe $G$, zum Gewicht $2k$ und zum Multiplikatorsystem $v$ die Wachstumsbeschränkung

$$g(x+iy) = O(y^{-2k}) \quad \text{für} \quad y \to +0 \tag{9.26}$$

gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$. Die für quadratisch integrierbare automorphe Formen bewiesene Abschätzung (9.24) ist also für alle $k > \frac{1}{2}$ schärfer als (9.26).

*5.* Wir wenden unsere Ergebnisse an auf die von Hecke [21] betrachtete Situation. Es bezeichne $\mathfrak{G}(\lambda)$ die von den Matrizen $U^\lambda := \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($\lambda > 0$ fest) und $T := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erzeugte Gruppe. Wir setzen voraus: Entweder sei $\lambda = 2\cos\frac{\pi}{q}$ mit einer ganzen Zahl $q \geqq 3$ und $G := \mathfrak{G}(\lambda)$, oder es sei $\lambda \geqq 2$, und $G$ sei eine beliebige diskrete Untergruppe von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, welche die Gruppe $\mathfrak{G}(\lambda)$ umfaßt. Ferner seien $k > 0$, $\gamma = \pm 1$, und $v$ sei ein Multiplikatorsystem auf $G$ vom Gewicht $2k$ mit der Eigenschaft, daß gilt

$$v(U^\lambda) = 1\,, \qquad v(T) = \gamma(-i)^{2k}\,.$$

Es sei nun $f \in Q(G, -2k, v)$, und $f$ habe die Fourier-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}} \tag{9.27}$$

($z \in \mathbb{H}$). Nach dem vorhergehenden Beispiel *4* genügt $f$ für jedes $\varepsilon > 0$ der Wachstumsbeschränkung (9.24) gleichmäßig in bezug auf $x \in \mathbb{R}$. Damit ist erkannt, daß $f$ die Bedingungen (10)–(12) von Hecke [21], S. 671 erfüllt; die kritische $O$-Bedingung (12) läßt sich also aus der quadratischen Integrierbarkeit folgern. Zur Beurteilung der Schärfe der Abschätzung (9.24) im vorliegenden Fall beachte man, daß die von Hecke [21], § 3 zur Gruppe $\mathfrak{G}(\lambda)$ ($\lambda > 2$) konstruierten Funktionen für $k > \frac{1}{2}$ in $Q(\mathfrak{G}(\lambda), -2k, v)$ liegen (s. Roelcke [39], S. 326) und sich für $y \to +0$ wie $O(y^{-k})$ verhalten gleichmäßig in bezug auf $x \in \mathbb{R}$ ([21], S. 674). Demgegenüber gilt unsere Abschätzung (9.24) für $k > 0$ und auch für den Fall, daß der Index von $\mathfrak{G}(\lambda)$ in $G$ unendlich ist. (Man beachte in diesem Zusammenhang den Satz 6.6 und die folgende Aussage: Ist $G$ eine endlich erzeugte Fuchssche Gruppe zweiter Art und $k \leq \frac{1}{2}$, so ist $Q(G, -2k, v) = \{0\}$. Dieser Satz folgt sofort aus dem Theorem der Arbeit [50] von Knopp.)

Nach dem Vorgang von Hecke ordnen wir nun der vorgelegten automorphen Form $f$ die Dirichlet-Reihe

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \tag{9.28}$$

zu mit den Koeffizienten $a_n$ aus (9.27). Da die Fourier-Koeffizienten von $f$ wegen (9.24) für jedes $\varepsilon > 0$ der Wachstumsbeschränkung

$$a_n = O(n^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}) \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

unterworfen sind, konvergiert die Reihe (9.28) absolut für $\operatorname{Re} s > k + \frac{3}{2}$. Die Funktion $\varphi$ hat die „Signatur $\{\lambda, 2k, \gamma\}$" im Sinne von [21]. Die Funktion

$$R(s) := \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s)\, \varphi(s)$$

ist also eine meromorphe Funktion von $s \in \mathbb{C}$, welche der Funktionalgleichung

$$R(s) = \gamma R(2k - s)$$

genügt. Ferner ist $R$ genau dann eine ganze Funktion, wenn in der Entwicklung (9.27) der Koeffizient $a_0$ verschwindet (s. [21], S. 671 unten). Ist insbesondere $k \geq \frac{1}{2}$, so folgt das Verschwinden von $a_0$ und damit die Holomorphie von $R$ und $\varphi$ in der vollen komplexen Ebene. In Satz 12.1 werden wir zeigen, daß für jede Fuchssche Gruppe $G$ von zweiter Art und $k > \max(\frac{1}{2}, \delta(G))$ der Raum $Q(G, -2k, v)$ unendlichdimensional ist. Daher erhält man auf dem angegebenen Wege unendlich viele linear unabhängige Dirichlet-Reihen mit der Signatur $\{\lambda, 2k, \gamma\}$ ($\lambda > 2$, $k > \delta(\mathfrak{G}(\lambda))$, $\gamma = \pm 1$), welche ganze Funktionen von $s$ sind.

*6.* Analog zum Beispiel 5 lassen sich die obigen Ergebnisse anwenden auf die reell-analytischen automorphen Formen von Maaß [30]. Den Zusammenhang zwischen dem dort betrachteten Formentyp und dem hier betrachteten haben wir schon in Abschnitt 2, Bemerkung 2 hergestellt. Zusammenfassend ergibt sich: Jeder Eigenfunktion $f$ des Operators $-\Delta_k: \mathscr{D}_k \to \mathscr{H}_k$ ($G, k, v$ wie in Beispiel 5) entspricht vermöge der Zuordnung des Satzes 8 von Maaß [30], S. 255 ff. ein Paar $(\varphi, \psi)$ Dirichletscher Reihen, welche gewissen Funktionalgleichungen genügen. Ist insbesondere $f$ eine Eigenfunktion zu einem Eigenwert $\lambda \geqq \frac{1}{4}$, so ist $f$ nach [39], S. 305 eine Spitzenform; speziell verschwinden die nullten Fourier-Koeffizienten in der Fourier-Entwicklung von $f$ zur Spitze $\infty$. In diesem Fall stellen die Dirichlet-Reihen $\varphi$ und $\psi$ ganze Funktionen dar. – Auch der Fall von Systemen automorpher Formen und von zugeordneten Systemen Dirichletscher Reihen läßt sich erfassen, wenn man nach dem Vorbild [39], [40] von Anfang an automorphe Formen mit Werten in einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum und Multiplikatorsysteme mit Werten in der Gruppe der linearen unitären Selbstabbildungen dieses Raumes betrachtet.

*7.* Die gewonnenen Wachstumsabschätzungen für die Eigenfunktionen des Operators $-\tilde{\Delta}_k$ liefern $O$-Aussagen für die Entwicklungskoeffizienten dieser Funktionen, welche in den Fourier-Entwicklungen in den Spitzen auftreten: Die Gruppe $G$ habe den parabolischen Fixpunkt $L\infty$ $(L \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}))$. Dann existiert eine reelle Zahl $q > 0$, derart daß die Fixgruppe von $\infty$ in $L^{-1}GL$ von $-I$ und $U^q = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird. Es sei $f$ eine Eigenfunktion des Operators $-\Delta_k: \mathscr{D}_k \to \mathscr{H}_k$ zu den Daten $G, k, v$ und zum Eigenwert $\lambda$, ferner sei $s := \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$. Wir setzen für $y > 0$

$$u(y, s) := y^{1-s}, \qquad \text{falls} \qquad s \neq \tfrac{1}{2},$$
$$u(y, \tfrac{1}{2}) := y^{\frac{1}{2}} \log y .$$

Ferner bezeichnen wir wie üblich mit $W_{l,m}(y)$ die Whittakersche Funktion (s. [31], S. 88–91) und setzen $v(LU^qL^{-1}) = \exp(2\pi i \varkappa)$ mit $0 \leqq \varkappa < 1$. Dann besitzt $f$ in der Spitze $L\infty$ eine Fourier-Entwicklung der Gestalt

$$f|[L, k]\,(x + iy) = a_0 y^s + b_0 u(y, s) + \sum_{n+\varkappa \neq 0} a_{n+\varkappa} W_{k\,\mathrm{sgn}(n+\varkappa),\, s-\frac{1}{2}}\left(4\pi |n+\varkappa| \frac{y}{q}\right) e^{2\pi i (n+\varkappa)\frac{x}{q}}$$

mit komplexen Koeffizienten $a_0, b_0, a_{n+\varkappa}$, wobei im Falle $0 < \varkappa < 1$ gilt $a_0 = b_0 = 0$ (s. [39], § 2; [30], § 2). Wenden wir nun (9.22) an auf die zur transformierten Gruppe $L^{-1}GL$ gehörige Form $f|[L, k]$, so erhalten wir in bekannter Weise die Abschätzung

$$a_{n+\varkappa}=O(|n|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \qquad \text{für} \qquad |n|\to+\infty$$

($\varepsilon$ wie in Satz 9.7, a)). (Man beachte, daß $\delta(G)=\delta(L^{-1}GL)$ ist.) Ist insbesondere $f=y^k g$ mit $g\in Q(G,-2k,v)$, und schreibt man die Fourier-Entwicklung von $g$ in der Form

$$(cz+d)^{-2k}\,g(Lz)=\sum_{n+\varkappa\geqq 0} b_{n+\varkappa}e^{2\pi i(n+\varkappa)\frac{z}{q}}$$

($\underline{L}=(c,d)$), so ergibt sich für die Koeffizienten $b_{n+\varkappa}$ die Wachstumsbeschränkung

$$b_{n+\varkappa}=O(n^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}) \qquad \text{für} \qquad n\to\infty$$

($\varepsilon$ wie oben). Beim Vergleich dieses Ergebnisses mit Theorem 5 von Drasin [7], S. 363 beachte man, daß dort $t=k>1$ ist und daß dort vorausgesetzt wird, daß $y^k g$ beschränkt ist.

*8.* Ist $G=\{I,-I\}$, $k$ reell und $v$ trivial, so ist $G_{k\lambda}=g_{k\lambda}$ $(\lambda\notin E_k\cup[\frac{1}{4},\infty\rangle)$, und in (7.17) ist die Summe über die von $\pm I$ verschiedenen $M\in G$ leer, also gleich Null. Die Abschätzungstechnik des Beweises von Satz 8.5 ergibt daher für alle $f\in\tilde{\mathscr{D}}_k$, $\lambda<\frac{1}{4}$, $\lambda\notin E_k$ und $z\in\mathbb{H}$ die Ungleichung

$$|f(z)|^2\leqq\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{2s-1}\,(\psi'(s+k)+\psi'(s-k))\,\|(-\tilde{\Delta}_k-\lambda)f\|^2\,,$$

wobei wir wieder die Abkürzung $s:=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda}$ verwenden. Ist insbesondere $f$ eine Eigenfunktion von $-\tilde{\Delta}_k$ zum Eigenwert $\lambda_m=(|k|-m)\cdot(1-|k|+m)\in E_k$ $(0\leqq m<|k|-\frac{1}{2}, m\in\mathbb{Z}$; s. Satz 3.2), so gilt für alle $z\in\mathbb{H}$

$$|f(z)|^2\leqq\frac{1}{4\pi}\,\frac{(\lambda-\lambda_m)^2}{2s-1}\,(\psi'(s+k)+\psi'(s-k))\,\|f\|^2\,.$$

Führt man hier auf der rechten Seite den Grenzübergang $\lambda\to\lambda_m$ durch, so erhält man

$$|f(z)|^2\leqq\frac{1}{4\pi}(2(|k|-m)-1)\,\|f\|^2\leqq\frac{2|k|-1}{4\pi}\,\|f\|^2 \qquad (z\in\mathbb{H})\,.$$

Eine ähnliche Ungleichung wurde für integrierbare Formen zur trivialen Gruppe von Bers [4], S. 199 unten angegeben. Die obige Abschätzung ist scharf in dem Sinne, daß für eine geeignete Eigenfunktion $f$ das Maximum der linken Seite gleich der Konstanten auf der rechten Seite ist [s. (3.3)].

Als weitere Anwendung unserer Wachstumsabschätzungen beweisen wir den Satz 9.9, zu dessen Formulierung wir folgende Redeweise vereinbaren: Genügen die meßbaren Funktionen $f,g:\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ den

Transformationsformeln

$$f\,|\,[M,k]=v(M)\,f\,,\qquad g\,|\,[M,k]=v(M)\,g$$

($M\in G$), so ist $f\bar{g}$ eine unter $G$ invariante Funktion. Ist zusätzlich $f\bar{g}$ über $B$ $\omega$-integrierbar, so bezeichnen wir das Integral

$$\int_B f\bar{g}\,d\omega$$

als „inneres Produkt" von $f$ und $g$. Falls das innere Produkt von $f$ und $g$ existiert und verschwindet, sollen $f$ und $g$ zueinander *orthogonal* oder aufeinander *senkrecht* stehend heißen. (Diese Begriffsbildung ist offenbar unabhängig von der Auswahl des Fundamentalbereichs $B$.)

Wir erinnern an die Definition der Eisensteinschen Reihen (s. [40], § 10): Die Gruppe $G$ habe den parabolischen Fixpunkt $L^{-1}\infty$ ($L\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$). Dann existiert eine reelle Zahl $q>0$, derart daß die Fixgruppe von $L^{-1}\infty$ in $G$ durch $-I$ und $P:=L^{-1}\begin{pmatrix}1 & q\\ 0 & 1\end{pmatrix}L$ erzeugt wird. Es sei nun $\mathscr{S}$ ein maximales System von Matrizen der Gruppe $G$ mit der Eigenschaft, daß sich keine zwei verschiedenen Elemente von $\mathscr{S}$ lediglich um einen linken Faktor der Form $P^n$ ($n\in\mathbb{Z}$) unterscheiden. Ein solches System $\mathscr{S}$ ist dadurch charakterisiert, daß $L\mathscr{S}$ ein maximales System von Matrizen der Menge $LG$ mit verschiedenen zweiten Zeilen ist. Ist dann $v(P)=1$, so ist für $\mathrm{Re}\,s>\delta$ die Eisensteinsche Reihe

$$E(z,s,L,G,k,v):=\tfrac{1}{2}\sum_{M\in\mathscr{S}}(\sigma_{2k}(L,M))^{-1}\,v^{-1}(M)\,y^s\,|\,[LM,k] \tag{9.29}$$

($z\in\mathbb{H}$) wohldefiniert, denn diese Reihe konvergiert normal in $\mathbb{H}$ (s. [13], S. 15, Satz 1.3) und hängt nicht ab von der Auswahl des Systems $\mathscr{S}$. (In (9.29) und im folgenden schreiben wir anstelle von $(\mathrm{Im}(\cdot))^s\,|\,[M,k]\,(z)$ kurz $y^s\,|\,[M,k]$.)

Wir verwenden den Begriff „*Spitzenform*" im Sinne von [39], S. 305, Definition 2.2. In teilweiser Verallgemeinerung einer für Grenzkreisgruppen von erster Art wohlbekannten Aussage (s. [40], S. 302, Satz 11.1,a)) besteht dann für beliebige diskrete Untergruppen $G$ von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ folgender Sachverhalt:

**9.9. Satz.** *Ist $f\in\mathscr{D}_k$ eine Eigenfunktion von $-\tilde{\Delta}_k$, und ist $f$ eine Spitzenform, so steht $f$ senkrecht auf allen Eisenstein-Reihen* (9.29) *mit* $\mathrm{Re}\,s>\frac{3}{2}$.

*Beweis.* Beim Nachweis der Orthogonalität von $f$ zur Reihe (9.29) können wir uns auf den Fall beschränken, daß $L=I$ ist und daß die Fixgruppe von $\infty$ in $G$ von $-I$ und $U=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ erzeugt wird, denn durch eine einfache Transformation läßt sich der allgemeine Fall auf die soeben beschriebene Situation zurückführen. Ist dann $v(U)=1$, so gilt zunächst formal

$$\begin{aligned}
&\int_B f(z)\,\overline{E(z,s,I,G,k,v)}\,d\omega(z)\\
&=\tfrac{1}{2}\sum_{M\in\mathcal{S}}\int_B v(M)\,f(z)\,\overline{y^s|[M,k]}\,d\omega(z)\\
&=\tfrac{1}{2}\sum_{M\in\mathcal{S}}\int_{MB} f(z)\,y^{\bar{s}}d\omega(z) \qquad (9.30)\\
&=\int_V f(z)\,y^{\bar{s}}\,d\omega(z)\,,
\end{aligned}$$

wobei wir mit $V:=\{x+iy;0\leqq x\leqq 1, y>0\}$ einen Vertikalhalbstreifen der Breite 1 in der oberen Halbebene bezeichnen. Diese Umformung ist nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz zulässig, wenn das Integral

$$\int_V |f|\,y^{\mathrm{Re}\,s}\,d\omega \qquad (9.31)$$

endlich ist. Wir zeigen nun, daß dieses unter den Voraussetzungen des Satzes 9.9 tatsächlich der Fall ist: Die Spitzenform $f$ verschwindet für $y\to+\infty$ exponentiell, und zwar gleichmäßig in $x\in\mathbb{R}$. Ferner genügt $f$ als Eigenfunktion des Operators $-\tilde{\Delta}_k$ für $y\to+0$ gleichmäßig in $x\in\mathbb{R}$ der Wachstumsbeschränkung (9.22). Daher ist das Integral (9.31) für $\mathrm{Re}\,s>\frac{3}{2}$ endlich, und die Umformung bei (9.30) ist gerechtfertigt.

Trägt man nun auf der rechten Seite von (9.30) die Fourier-Entwicklung der Funktion $f$ zur Spitze $\infty$ ein, so erkennt man, daß die Integration des entstehenden Ausdrucks in bezug auf die Variable $x\in[0,1]$ Null ergibt, da die nullten Fourier-Koeffizienten von $f$ verschwinden. Daher ist die rechte Seite von (9.30) gleich Null, wie zu zeigen war. □

Es ist eine offene Frage, ob diejenigen Eigenfunktionen $f$ von $-\tilde{\Delta}_k$, welche *Spitzenformen* sind, für jedes $\varepsilon>0$ der Wachstumsbeschränkung

$$f(x+iy)=O(y^{-\varepsilon}) \qquad \text{für} \qquad y\to+0$$

gleichmäßig in $x\in\mathbb{R}$ genügen, falls $G$ die Spitze $\infty$ hat. Sollte in der genannten speziellen Situation eine solche Verschärfung unserer Abschätzung (9.22) richtig sein, könnte man in Satz 9.9 die Voraussetzung „$\mathrm{Re}\,s>\frac{3}{2}$" ersetzen durch „$\mathrm{Re}\,s>1$". Ist $G$ endlich erzeugt, so ist in der Tat eine solche Verschärfung von Satz 9.9 möglich, wie wir jetzt zeigen werden.

**9.10. Satz.** *Ist $G$ endlich erzeugt, so ist jede Eigenfunktion $f$ von $-\tilde{\Delta}_k$, die zugleich eine Spitzenform ist, in der oberen Halbebene beschränkt.*

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, daß $f$ in einem geeignet gewählten Fundamentalbereich $B$ von $G$ beschränkt ist. Dazu sei $B$ ein Fundamentalbereich von $G$, der aus einer relativ kompakten Teilmenge $K$ von $\mathbb{H}$ besteht vereinigt mit höchstens endlich vielen „Trichtern" und vereinigt mit höchstens endlich vielen „Spitzensektoren" von $G$. Offenbar ist $f$ auf $K$ beschränkt, und $f$ ist auf jedem der Trichter beschränkt (Satz 9.7, c)). Da $f$ eine Spitzenform ist, ist $f$ auch auf jedem der Spitzensektoren beschränkt, und es folgt die Behauptung. $\square$

Die Bemerkungen im Anschluß an den Beweis des Satzes 9.9 in Verbindung mit Satz 9.10 ergeben folgendes Korollar.

**9.11. Korollar.** *Ist die Gruppe $G$ endlich erzeugt, und ist $f$ eine Eigenfunktion von $-\tilde{\Delta}_k$, die zugleich eine Spitzenform ist, so steht $f$ senkrecht auf allen Eisenstein-Reihen* (9.29) *mit* $\operatorname{Re} s > 1$.

Im Zusammenhang mit der Orthogonalität von Spitzenformen und Eisenstein-Reihen ist folgendes Beispiel bemerkenswert.

*Beispiel.* Es seien $G$ gleich der Heckeschen Gruppe $\mathfrak{G}(\lambda)$ $(\lambda > 2)$, $k \in \mathbb{R}$, $\gamma = \pm 1$, und $v$ sei vermöge

$$v(U^\lambda) = 1\,, \qquad v(T) = \gamma(-i)^{2k}$$

festgelegt (s. Beispiel 5). Im Falle $k > 0$ hat Hecke [21], § 3 unendlich viele linear unabhängige klassische ganze automorphe Formen $g \in \{\mathfrak{G}(\lambda), -2k, v\}$ konstruiert. Diese Formen sind auf dem Fundamentalbereich

$$B := \{z;\, z \in \mathbb{H}, |z| \geqq 1, |\operatorname{Re} z| \leqq \tfrac{\lambda}{2}\}$$

der Gruppe $\mathfrak{G}(\lambda)$ beschränkt und verschwinden in der Spitze $\infty$ exponentiell. Entsprechende Formen erhält man für $k \leqq 0$ auf folgende Weise: Mit $h, H$ bezeichnen wir die von Hecke [21], § 3 konstruierten Funktionen. Ist $k = 0$, so setzen wir für $\gamma = 1$

$$g := (h-1)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

und für $\gamma = -1$

$$g := H(h-1)^n \quad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Im Fall $k < 0$, $\gamma = 1$ sei $g := g_n$ $(n \in \mathbb{N})$ mit der Funktion $g_n$ aus [39], S. 326 unten, und für $k < 0$, $\gamma = -1$ sei $g := H g_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Zu jedem System von Daten $\lambda > 2$, $k \in \mathbb{R}$ und $\gamma = \pm 1$ existieren also unendlich viele linear unabhängige klassische ganze automorphe Formen $g \in \{\mathfrak{G}(\lambda), -2k, v\}$, die auf $B$ beschränkt sind und in der Spitze $\infty$ exponentiell verschwinden. In der Gestalt $f := y^k g$ erhalten wir sodann unendlich viele linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung

$$-\Delta_k f = k(1-k)\, f\,.$$

Für $k > \frac{1}{2}$ sind diese Funktionen $f$ $\omega$-quadratintegrierbar über $B$, also Eigenfunktionen des Operators $-\Delta_k : \mathscr{D}_k \to \mathscr{H}_k$ zum Eigenwert $k(1-k)$. Ist dagegen $k \leqq \frac{1}{2}$, so kann man der Heckeschen Arbeit entnehmen, daß die konstruierten Funktionen $f$ nicht $\omega$-quadratintegrierbar sind über $B$. (Diese Aussage folgt auch aus dem in Beispiel 5 zitierten Ergebnis von Knopp [50]; s. auch Satz 6.6.) Die Funktionen $f$ sind ersichtlich automorphe Formen zur Gruppe $\mathfrak{G}(\lambda)$, zum Gewicht $2k$, zum Multiplikatorsystem $v$ und zur „Kennzahl" $k(1-k)$ im Sinne von [39], S. 297, Definition 1.1. Offenbar sind alle diese Funktionen Spitzenformen.

Es sei nun $E(z,s)$ $(\mathrm{Re}\,s > \delta(\mathfrak{G}(\lambda)) =: \delta(\lambda))$ die Eisenstein-Reihe zu den vorliegenden Daten $\mathfrak{G}(\lambda)$, $k$, $v$ und zur Spitze $\infty$. Bezeichnen wir mit $\mathcal{S}$ ein maximales System von Matrizen der Gruppe $\mathfrak{G}(\lambda)$ mit verschiedenen zweiten Zeilen, so ist die der Reihe $E(z,s)$ zugeordnete Betragreihe $|E|(z,s)$ ersichtlich gleich

$$|E|(z,s) = y^r \sum_{M \in \mathcal{S}} |cz+d|^{-2r} \tag{9.32}$$

$(r := \mathrm{Re}\,s > \delta(\lambda), z \in \mathbb{H}, \underline{M} = (c,d))$. Hier stellt die über die Elemente $M \in \mathcal{S}$ erstreckte Reihe auf der rechten Seite eine beschränkte Funktion von $z \in B \cap \{\tau; \mathrm{Im}\,\tau \leqq 1\} =: B_1$ dar, wie man leicht zeigen kann.

Für $y \to +0$ gelten also gleichmäßig in bezug auf $z = x + iy \in B_1$ die Abschätzungen

$$|E|(z,s) = O(y^r), \qquad f(z) = O(y^k),$$

wobei $f$ eine der oben genannten Funktionen bezeichnet. Da ferner $f(x+iy)$ für $y \to +\infty$ gleichmäßig in bezug auf $x \in \mathbb{R}$ exponentiell verschwindet, ist das Integral

$$\int_B |f(z)|\,|E|(z,s)\,d\omega(z)$$

endlich, wenn $r = \mathrm{Re}\,s > 1-k$ ist. Der Beweis des Satzes 9.9 lehrt nun: Ist $\mathrm{Re}\,s > \max(\delta(\lambda), 1-k)$, so ist $f$ orthogonal zu $E(\cdot,s)$. Da $\delta(\lambda) > \frac{1}{2}$ ist ([1], S. 464, Theorem 1), ist $f$ im Falle $k \geqq \frac{1}{2}$ orthogonal zu allen Eisenstein-Reihen $E(\cdot,s)$ $(\mathrm{Re}\,s > \delta(\lambda))$. *Insbesondere stehen alle oben konstruierten Eigenfunktionen $f$ des Operators $-\Delta_k : \mathcal{D}_k \to \mathcal{H}_k$ (Fall $k > \frac{1}{2}$) senkrecht auf allen konvergenten Eisenstein-Reihen.* Dagegen stehen die nicht quadratisch integrierbaren Spitzenformen unter den Funktionen $f$ nicht notwendig senkrecht auf *allen* konvergenten Eisenstein-Reihen, da die entsprechenden inneren Produkte im Fall $\delta(\lambda) < \mathrm{Re}\,s \leqq 1-k$ nicht notwendig existieren, was man z.B. im Fall $k=0$, $v=1$ leicht sieht. Wir haben aber bewiesen, daß die nicht quadratisch integrierbaren Spitzenformen $f$ zu allen Eisenstein-Reihen $E(\cdot,s)$ mit $\mathrm{Re}\,s > \max(\delta(\lambda), 1-k)$ orthogonal sind. Es ist eine offene Frage, ob ähnliche Sachverhalte bei beliebigen Gruppen, welche parabolische Transformationen enthalten, vorliegen.

## 10. Anwendungen auf klassische automorphe Formen

Das Ziel des Abschnitts 10 besteht darin, die von Petersson [35] für den Fall der Grenzkreisgruppen erster Art und für $r=2k>2$ hergeleiteten Koeffizientenformeln für die Poincaréschen Reihen vom elliptischen Typus

$$P_{kn}(\tau,z):=\sum_{M\in G}\frac{\left(\dfrac{M\tau-z}{M\tau-\bar{z}}\right)^n}{v(M)\,(c\tau+d)^{2k}\,(M\tau-\bar{z})^{2k}} \tag{10.1}$$

($\tau, z\in\mathbb{H}, k>\delta, n$ ganz, $n\geqq 0$) und einige Folgerungen aus diesen Formeln unter möglichst wenig einschränkenden Voraussetzungen über $G$ und $k$ zu beweisen. Es wird sich zeigen, daß die genannten Formeln durch einfache Grenzübergänge aus der Resolventengleichung gewonnen werden können.

Wir verwenden die Bezeichnungen $\alpha:=\max(\frac{1}{2},\delta)$, $\{G,-2k,v\}$ und $Q(G,-2k,v)$ in der in Abschnitt 6 festgelegten Bedeutung. Ist nun $k>\delta$, so ergibt eine elementare Zwischenrechnung folgende gliedweise gültige Beziehung zwischen der Reihe $P_{k0}(\tau,z)$ [s. (10.1)] und der zum Wert $s=k$ gehörigen Reihe (5.9):

$$H_{kk}(z,\tau)=\tfrac{1}{2}e^{-\pi ik}(4yy')^k\,\overline{P_{k0}(\tau,z)} \tag{10.2}$$

($\tau, z\in\mathbb{H}$, $y=\operatorname{Im} z$, $y'=\operatorname{Im}\tau$). Daher impliziert Lemma 5.3 sogleich folgende Aussage:

**10.1. Lemma.** *Für* $k>\max(\frac{1}{2},\delta)$, $z\in\mathbb{H}$ *und ganzes* $n\geqq 0$ *ist* $P_{kn}(\cdot,z)\in Q(G,-2k,v)$.

Ein Blick auf die Beweise der Lemmata 5.2, 5.3 lehrt, daß die Voraussetzung „$k>\alpha$" in Lemma 10.1 weitgehend optimal ist, da die Betragreihe $|H|_{kk}(\cdot,z)$ im Falle $\delta<k\leqq\frac{1}{2}$ nicht $\omega$-quadratintegrierbar über $B$ ist. (Man beachte in diesem Zusammenhang auch Satz 6.6 und das in Abschnitt 9, Beispiel 5 genannte Resultat von Knopp [50].) – Ansatzpunkt für die folgenden Untersuchungen ist die Peterssonsche Integralgleichung (s. [35], S. 56), die wir nun für beliebige diskrete Untergruppen $G$ der Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ und für $k>\alpha$ beweisen.

**10.2. Satz.** *Ist* $k>\max(\frac{1}{2},\delta)$, *so gilt für alle* $g\in Q(G,-2k,v)$ *die Peterssonsche Integralgleichung*

$$\int_B g(\tau)\,\overline{P_{k0}(\tau,z)}\,(\operatorname{Im}\tau)^{2k}\,d\omega(\tau)=\frac{8\pi}{(2k-1)\,4^k}\,e^{\pi ik}g(z)\qquad(z\in\mathbb{H}). \tag{10.3}$$

*Beweis.* Die Funktion $f(\tau):=(\operatorname{Im}\tau)^k g(\tau)$ $(\tau\in\mathbb{H})$ ist eine in $\mathscr{D}_k$ gelegene Lösung der Differentialgleichung $-\Delta_k f=k(1-k)f$. Da nach Voraussetzung $k>\alpha$ ist, ist $k(1-k)<\alpha(1-\alpha)$. Für alle $\zeta\neq 0$ von hinreichend kleinem Betrage liegt daher der Punkt $k(1-k)+\zeta$ in dem Bereich der komplexen Ebene, in welchem wir die Resolvente durch den Resolventenkern ausdrücken können (s. Korollar 6.2). Daher gilt für alle $\zeta \neq 0$ von hinreichend kleinem Betrage

$$f(z) = -\zeta \int_B G_{k\,k(1-k)+\zeta}(z,\tau)\, f(\tau)\, d\omega(\tau)$$

($z \in \mathbb{H}$; s. (7.3)). Wir berücksichtigen nun, daß der Kern $H_{ks}(z,\cdot)$ in einer geeigneten Umgebung des Punktes $s=k$ im quadratischen Mittel stetig abhängt vom Parameter $s$ (s. Satz 5.5). Tragen wir nun die Beziehung [s. (5.29)]

$$G_{k\lambda}(z,z') = \frac{\Gamma(s+k)\,\Gamma(s-k)}{4\pi\Gamma(2s)}\, H_{ks}(z,z')$$

in die obige Gleichung ein, so können wir den Grenzübergang $\zeta \to 0$ im $\Gamma$-Quotienten und unter dem Integralzeichen getrennt vollziehen, und es ergibt sich

$$f(z) = \frac{2k-1}{4\pi} \int_B H_{kk}(z,\tau)\, f(\tau)\, d\omega(\tau)\,. \tag{10.4}$$

Wegen (10.2) ist das genau die behauptete Integralgleichung (10.3). $\square$

In der Literatur sind zahlreiche Varianten der reproduzierenden Formel (10.3) bekannt; s. dazu die Arbeiten von Bers [3, 4], Drasin [7], Earle [10, 11], Godement [20], Kra [27] (Appendix), Metzger u. Rajeswara Rao [52], Rajeswara Rao [37], Selberg [42] und Spilker [45]. Es scheint aber neu zu sein, daß (10.3) schon unter der Voraussetzung „$k>\alpha$" richtig ist. Wie bereits im Anschluß an Lemma 10.1 bemerkt wurde, ist diese Bedingung in gewissem Sinne optimal.

Die Integralgleichung (10.3) ist für $z := z_0 \in \mathbb{H}$ gerade die Peterssonsche Koeffizientenformel für den Koeffizienten $a_0$ der Entwicklung

$$g(z) = (z-\overline{z}_0)^{-2k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}\right)^n \tag{10.5}$$

der automorphen Form $g \in Q(G, -2k, v)$ zum Entwicklungszentrum $z_0 \in \mathbb{H}$ (s. [35], S. 56). Nun ist aber mit $w = Az = \dfrac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}$ offenbar

$$a_n = \frac{1}{n!}\left(\left(\frac{d}{dw}\right)^n (z-\overline{z}_0)^{2k}\, g(z)\right)\Bigg|_{w=0}\,. \tag{10.6}$$

Durch Ausübung des Differentialoperators $\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{d}{dw}\right)^n (z-\overline{z}_0)^{2k}$ auf (10.3) und anschließende Auswertung an der Stelle $w=0$ (d. h. $z=z_0$)

entsteht also aus (10.3) eine Koeffizientenformel für den Koeffizienten $a_n$ ($n$ ganz, $n \geqq 0$). Eine elementare Rechnung, die wir hier unterdrücken, ergibt die Wirkung des in Rede stehenden Differentialoperators auf den Kern $\overline{P_{k0}(\tau, z)}$:

**10.3. Lemma.** *Für $k > \delta$, $\tau, z, z_0 \in \mathbb{H}$ und ganzes $n \geqq 0$ gilt mit $w = \dfrac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$ die Beziehung*

$$\left(\left(\frac{d}{dw}\right)^n (z - \overline{z_0})^{2k}\, \overline{P_{k0}(\tau, z)}\right)\Bigg|_{z = z_0} = (2k)_n (z_0 - \overline{z_0})^{2k}\, \overline{P_{kn}(\tau, z_0)}\,. \tag{10.7}$$

Nun können wir leicht die Peterssonschen Koeffizientenformeln (s. [35], § 3, (29)) für beliebige diskrete Gruppen und für $k > \alpha$ beweisen.

**10.4. Satz.** *Es sei $k > \max(\frac{1}{2}, \delta)$, und die automorphe Form $g \in Q(G, -2k, v)$ habe im Entwicklungszentrum $z_0 = x_0 + i y_0 \in \mathbb{H}$ die Entwicklung (10.5). Dann gelten für alle ganzen $n \geqq 0$ die Peterssonschen Koeffizientenformeln*

$$a_n = \frac{1}{8\pi} (4 y_0)^{2k} \frac{(2k-1)_{n+1}}{n!} \int_B g(\tau)\, \overline{P_{kn}(\tau, z_0)}\, (\operatorname{Im} \tau)^{2k}\, d\omega(\tau)\,. \tag{10.8}$$

*Beweis.* Nach (10.3), (10.6), (10.7) brauchen wir nur noch zu begründen, daß der Differentialoperator $\left(\dfrac{d}{dw}\right)^n (z - \overline{z_0})^{2k}$ in (10.3) unter dem Integralzeichen angewendet werden darf. Dazu bezeichnen wir mit $|P|_{k0}(\tau, z)$ die zur Reihe $P_{k0}(\tau, z)$ gehörige Betragreihe. Ferner sei $K \subset \mathbb{H}$ eine kompakte Umgebung von $z_0$. Dann existiert nach (10.2) und nach Lemma 1.1 eine Konstante $C > 0$, derart daß für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und $z \in K$ gilt

$$|P|_{k0}(\tau, z) \leqq C\, |P|_{k0}(\tau, z_0)\,.$$

Die Funktionen $g(\cdot)\, \overline{P_{k0}(\cdot, z)}\; (\operatorname{Im}(\cdot))^{2k}$ $(z \in K)$ haben daher eine über $B$ $\omega$-integrierbare Majorante. Wählen wir noch ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Fundamentalbereich $B$ als abgeschlossene Menge, so sind die Voraussetzungen bei Dieudonné [6], S. 125, (13.8.6), (iii) erfüllt, und der zitierte Satz impliziert die gewünschte Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation. □

Die Konsequenzen des Satzes 10.4 sind nach dem Vorgang von Petersson [35] nunmehr klar. Wir erwähnen nur die folgenden beiden Sätze.

**10.5. Satz.** *Für $k > \max(\frac{1}{2}, \delta)$ und $z_0 \in \mathbb{H}$ ist die Menge $\{P_{kn}(\cdot, z_0);\ n \geqq 0\}$ total im Hilbert-Raum $Q(G, -2k, v)$ [d. h. die lineare Hülle dieser Menge liegt dicht in $Q(G, -2k, v)$].*

*Beweis.* Steht die automorphe Form $g \in Q(G, -2k, v)$ auf allen $P_{kn}(\cdot, z_0)$ $(n \geqq 0)$ senkrecht, so verschwinden nach (10.8) sämtliche Entwicklungskoeffizienten von $g$ zum Entwicklungszentrum $z_0$, folglich ist $g = 0$. $\square$

**10.6. Satz.** *Es sei $k > \max(\frac{1}{2}, \delta)$, und $Q_n(z_0)$ bezeichne die Menge der Funktionen $g \in Q(G, -2k, v)$, deren Koeffizient $a_n$ in der Entwicklung* (10.5) *verschwindet* ($n$ *ganz*, $n \geqq 0$). *Dann gilt:*

a) *Die Form $P_{kn}(\cdot, z_0)$ steht senkrecht genau auf den Formen der Menge $Q_n(z_0)$ und ist durch diese Eigenschaft bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.*

b) *Es ist $P_{kn}(\cdot, z_0) = 0$ genau dann, wenn $Q_n(z_0) = Q(G, -2k, v)$ ist. Dieses ist genau dann der Fall, wenn der n-te Entwicklungskoeffizient von $P_{kn}(\cdot, z_0)$ zum Entwicklungszentrum $z_0$ verschwindet.*

*Beweis.* a) Nach (10.8) braucht nur noch die Eindeutigkeitsaussage bewiesen zu werden. Diese ist trivial im Falle $P_{kn}(\cdot, z_0) = 0$. Es sei nun $P_{kn}(\cdot, z_0) \neq 0$: Dann ist $Q_n(z_0)$ eine abgeschlossene Hyperebene im Hilbert-Raum $Q(G, -2k, v)$, und $P_{kn}(\cdot, z_0) \neq 0$ steht senkrecht auf $Q_n(z_0)$. Daher ist $Q(G, -2k, v)$ die direkte orthogonale Summe gebildet aus $Q_n(z_0)$ und dem von $P_{kn}(\cdot, z_0)$ erzeugten eindimensionalen linearen Teilraum. Die Eindeutigkeitsaussage unter a) ist nunmehr evident.

b) ist klar nach a) und Satz 10.4. $\square$

## 11. Kriterien für die Beschränktheit klassischer automorpher Formen

Die Ergebnisse des Abschnitts 10 erlauben es uns, ein Kriterium für die Beschränktheit quadratisch integrierbarer klassischer automorpher Formen herzuleiten. Metzger und Rajeswara Rao [33], Teil I haben einen analogen Satz für integrierbare automorphe Formen im Fall $k > 1$ bewiesen.

**11.1. Satz.** *Es sei $k > \max(\frac{1}{2}, \delta)$. Dann sind die folgenden Aussagen* a), b) *äquivalent:*

a) *Für jedes $g \in Q(G, -2k, v)$ ist die Funktion $y^k g$ in $\mathbb{H}$ beschränkt.*

b) *Die durch die Zuordnung $z \mapsto H_{kk}(z, z)$* [s. (10.2)] *definierte Funktion ist in $\mathbb{H}$ beschränkt.*

*Beweis.* Für festes $z \in \mathbb{H}$ ist $\overline{H_{kk}(z, \cdot)}$ gleich einem mit $(\mathrm{Im}\,\cdot)^k$ multiplizierten Element von $Q(G, -2k, v)$ [s. (10.2) und Lemma 10.1]. Daher gilt nach (10.4) für diese Funktion

$$\overline{H_{kk}(z, \tau)} = \frac{2k-1}{4\pi} \int_B H_{kk}(\tau, z')\, \overline{H_{kk}(z, z')}\, d\omega(z') \tag{11.1}$$

($\tau \in \mathbb{H}$). Für $\tau = z$ besagt diese Beziehung

$$H_{kk}(z, z) = \frac{2k-1}{4\pi} \|\overline{H_{kk}(z, \cdot)}\|^2 \tag{11.2}$$

(Norm in $\mathscr{H}_k$); insbesondere ist $H_{kk}(z, z) \geqq 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$.

Wir zeigen zunächst, daß aus b) die Aussage a) folgt. Dazu sei $g \in Q(G, -2k, v)$. Dann genügt $f := y^k g$ der Integralgleichung (10.4), und es ergibt sich

$$|f(z)| \leqq \frac{2k-1}{4\pi} \|\overline{H_{kk}(z, \cdot)}\| \, \|f\| \tag{11.3}$$

($z \in \mathbb{H}$). Ist also die Funktion $z \mapsto H_{kk}(z, z)$ in $\mathbb{H}$ beschränkt, so ist nach (11.2), (11.3) auch $f$ in $\mathbb{H}$ beschränkt, wie zu zeigen war.

Es werde nun umgekehrt vorausgesetzt, daß a) zutrifft. Wir zeigen, daß dann auch b) gilt: Dazu bezeichnen wir mit $\mathscr{A}_k$ den abgeschlossenen Teilraum von $\mathscr{H}_k$, welcher die Funktionen der Form $y^k g$ ($g \in Q(G, -2k, v)$) enthält. Ferner sei $\mathscr{B}_k$ die Menge der beschränkten Funktionen $f: \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, für welche gilt $y^{-k} f \in \{G, -2k, v\}$. Dann ist $\mathscr{B}_k$ bezüglich der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup_{z \in \mathbb{H}} |f(z)|$$

ein Banach-Raum, und nach Voraussetzung ist die kanonische Einbettung $j: \mathscr{A}_k \to \mathscr{B}_k$ wohldefiniert. Der Graph von $j$ ist offenbar abgeschlossen. Daher ist $j$ nach dem Graphensatz stetig. (Diese Schlußweise stammt von Drasin und Earle [8], S. 1041.) Es existiert also eine Konstante $C > 0$ mit der Eigenschaft, daß für alle $f \in \mathscr{A}_k$ und alle $\tau \in \mathbb{H}$ gilt

$$|f(\tau)| \leqq C \|f\| \, .$$

Dies gilt insbesondere für $f = \overline{H_{kk}(z, \cdot)}$ [s. (10.2) und Lemma 10.1]. Daher ist nach (11.2) für alle $\tau, z \in \mathbb{H}$

$$|H_{kk}(z, \tau)| \leqq C \left( \frac{4\pi}{2k-1} H_{kk}(z, z) \right)^{\frac{1}{2}},$$

und für $\tau = z$ erhält man

$$|H_{kk}(z, z)| \leqq \frac{4\pi C^2}{2k-1},$$

womit b) bewiesen ist. $\square$

Auch für den folgenden Satz ist ein Analogon für integrierbare automorphe Formen und $k > 1$ bekannt ([33], Teil II, Theorem 1; s. auch [8]). Ein besonders einfacher Beweis dieses bekannten Satzes wurde vor kurzem von Lehner [51] mitgeteilt.

**11.2. Satz.** *Die Gruppe $G$ sei endlich erzeugt, und falls $G$ parabolische Substitutionen enthält, sei $k \geqq \frac{1}{2}$. Dann ist für jedes $g \in Q(G, -2k, v)$ die Funktion $y^k g$ in $\mathbb{H}$ beschränkt.*

*Beweis.* Ist $0 \neq g \in Q(G, -2k, v)$, so ist $y^k g$ eine Eigenfunktion von $-\tilde{\Delta}_k$. Da nach Voraussetzung $k \geqq \frac{1}{2}$ ist, falls $G$ parabolische Substitutionen enthält, ist $y^k g$ eine Spitzenform. Die Behauptung folgt daher aus Satz 9.10. □

Wie wir schon in Abschnitt 9, Beispiel *3* gesehen haben, wird die Aussage des Satzes 11.2 falsch, wenn man die Voraussetzung „$k \geqq \frac{1}{2}$" ersetzt durch „$k \geqq \gamma$" für irgendein $\gamma < \frac{1}{2}$. Man beachte jedoch in diesem Zusammenhang das in Abschnitt 9, Beispiel *5* erwähnte Ergebnis von Knopp [50].

Die Betragreihe $|H|_{kk}(z, z)$ zur Reihe $H_{kk}(z, z)$ ist offenbar gegeben durch

$$|H|_{kk}(z, z) = \tfrac{1}{2} \sum_{M \in G} (\sigma(z, Mz))^{-k}.$$

Diese Reihe ist nach Satz 9.5, b) nicht beschränkt in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{H}$, wenn $G$ eine parabolische Substitution enthält. Dagegen ist $H_{kk}(z, z)$ für $k > \max(\frac{1}{2}, \delta)$ nach Satz 11.1, 11.2 beschränkt in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{H}$, falls $G$ endlich erzeugt ist. Für endlich erzeugte Gruppen mit parabolischen Substitutionen ist also die Abschätzung von $H_{kk}(z, z)$ durch die entsprechende Betragreihe in manchen Situationen völlig unzureichend. – In diesem Zusammenhang ist der folgende Satz bemerkenswert:

**11.3. Satz.** *Es sei $k > \max(\frac{1}{2}, \delta)$, und die zu den Daten $G$, $2k$, $v^2$ gebildete Reihe* [s. (10.1), (10.2)]

$$\sum_{M \in G} \frac{(4y^2)^{2k}}{v^2(M)\,(cz+d)^{4k}\,(Mz-\bar{z})^{4k}} \tag{11.4}$$

*sei beschränkt in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{H}$. Dann stellt auch die Reihe*

$$\sum_{M \in G} \frac{(4y^2)^{k}}{v(M)\,(cz+d)^{2k}\,(Mz-\bar{z})^{2k}} \tag{11.5}$$

*eine beschränkte Funktion von $z \in \mathbb{H}$ dar.*

*Beweis.* Das Theorem 1 von [33], Teil I lautet in unseren Bezeichnungen: *Ist $k > 1$, so sind die folgenden Aussagen* a′), b′) *äquivalent:*

a′) *Für jedes $g \in \{G, -2k, v\}$ mit $\int_B |y^k g|\, d\omega < \infty$ ist $y^k g$ in $\mathbb{H}$ beschränkt.*

b′) *Die Funktion $z \mapsto H_{kk}(z, z)$ ist in $\mathbb{H}$ beschränkt.*

Es sei nun $k > \max(\frac{1}{2}, \delta)$, und die Reihe (11.4) sei beschränkt in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{H}$. Dann ist die Bedingung b′) für die Daten

$G, 2k, v^2$ (anstelle von $G, k, v$) erfüllt, denn es ist $2k > 1$, und die Beschränktheit von (11.4) ist mit der Beschränktheit von $H_{2k\,2k}(z, z)$ gleichbedeutend [s. (10.1), (10.2)]. Daher folgt aus a'): Für jedes Element $g \in \{G, -4k, v^2\}$, für welches das Integral $\int\limits_B |y^{2k} g|\, d\omega$ endlich ausfällt, ist die Funktion $y^{2k} g$ in $\mathbb{H}$ beschränkt. Unter den hier zugelassenen Funktionen $g$ kommen insbesondere alle Funktionen der Gestalt $g = h^2$ mit $h \in Q(G, -2k, v)$ vor. Daher ist die Aussage a) des Satzes 11.1 erfüllt, und nach Satz 11.1 ist die Funktion $z \mapsto H_{kk}(z, z)$ in $\mathbb{H}$ beschränkt. Wegen (10.1), (10.2) ist das gerade die Behauptung. □

Offenbar sind die Glieder der Reihe (11.4) gerade die Quadrate der Glieder der Reihe (11.5), und das allgemeine Glied von (11.4) hat den Betrag $(\sigma(Mz, z))^{-2k} \leqq 1$. Es ist eine überraschende Tatsache, daß aus der Beschränktheit der Reihe (11.4) mit den betragsmäßig kleineren Gliedern schon die Beschränktheit der Reihe (11.5) mit den betragsmäßig größeren Gliedern folgt. Dieses Phänomen verliert seine Merkwürdigkeit, wenn folgende bislang unbewiesene Aussagen richtig sind (vgl. [8], [33]): Für $k > \max(\frac{1}{2}, \delta)$ ist Aussage a) des Satzes 11.1 richtig, und für $k > 1$ ist die Aussage a') aus dem Beweis von Satz 11.3 richtig. Wenn nämlich diese Vermutungen zutreffen, so kann man aus Satz 11.1 b) und aus der obigen Aussage b') die Beschränktheit von (11.5) und (11.4) folgern, und Satz 11.3 wird trivial. Solange jedoch obige Vermutungen unbewiesen sind, kann man Satz 11.3 als Indiz für ihre Richtigkeit auffassen.

## 12. Das Spektrum von $-\tilde{\Delta}_k$ bei Fuchsschen Gruppen zweiter Art

Ist $G$ eine Fuchssche Gruppe zweiter Art, so lassen sich einige frühere Sätze verschärfen. Zunächst beweisen wir folgende Ergänzung zu Lemma 10.1.

**12.1. Satz.** *Es seien $G$ eine Fuchssche Gruppe zweiter Art und $k > \delta$. Dann enthält die Menge $\{P_{kn}(\cdot, z_0); z_0 \in \mathbb{H}\}$ [s. (10.1)] für jede ganze Zahl $n \geqq 0$ unendlich viele linear unabhängige Elemente. Insbesondere ist $Q(G, -2k, v)$ für $k > \max(\frac{1}{2}, \delta)$ ein unendlich-dimensionaler Hilbert-Raum.*

*Beweis.* Da $G$ eine Fuchssche Gruppe zweiter Art ist, existiert ein Rechteck $R \subset \mathcal{O}(G)$ von der Form

$$R = \{z; z \in \mathbb{C}, a < \operatorname{Re} z < b, -y_0 < \operatorname{Im} z \leqq 0\} \tag{12.1}$$

($a < b$, $y_0 > 0$) mit folgenden Eigenschaften:

a) Für alle $M \in G$, $M \neq \pm I$ und $z, z' \in \bar{R}$ (= Abschluß von $R$ in $\mathbb{C}$) gilt $|Mz - z'| \geqq \vartheta$ mit geeignetem $\vartheta > 0$.

b) $M\infty \notin [a, b]$ für alle $M \in G$.

Wir setzen nun $z_0 = x_0 + iy_0$ mit $a < x_0 < b$ und mit $y_0$ aus (12.1) und betrachten die Reihe $P_{kn}(z, z_0)$ [s. (10.1)] in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{H} \cup R$. Es ist wegen b) leicht zu sehen, daß jedes Glied dieser Reihe eine holomorphe Funktion von $z \in \mathbb{H} \cup R$ darstellt und daß diese Reihe für $k > \delta$ in $\mathbb{H} \cup R$ normal konvergiert. Wir werden zeigen, daß alle Funktionen $P_{kn}(\cdot, z_0)$ $(a < x_0 < b)$ linear unabhängig sind, und damit wird dann Satz 12.1 bewiesen sein.

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit genügt es offenbar, wenn wir zeigen: Für $k > \delta$ ist die Funktion

$$P_{kn}(z, z_0) - 2\left(\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}\right)^n (z - \overline{z_0})^{-2k}$$

in Abhängigkeit von $z \in R$ beschränkt. Nun gilt für $z, z' \in R$, $M \in G$, $M \neq \pm I$, $\underline{M} = (c, d)$ ersichtlich:

$$\frac{|cz' + d|}{|cz + d|} \frac{|Mz' - \overline{z_0}|}{|Mz - \overline{z_0}|} = \frac{|z' - M^{-1}\overline{z_0}|}{|z - M^{-1}\overline{z_0}|} \leqq 1 + \frac{|z' - z|}{|z - M^{-1}\overline{z_0}|}.$$

Nach a) folgt nun die Existenz einer Konstanten $C > 0$ mit der Eigenschaft, daß für alle $z, z' \in R$, $M \in G$, $M \neq \pm I$ gilt

$$\frac{|cz' + d|}{|cz + d|} \frac{|Mz' - \overline{z_0}|}{|Mz - \overline{z_0}|} \leqq C.$$

Wir wählen ferner $C$ so groß, daß zusätzlich gilt

$$\left|\frac{Mz - z_0}{Mz - \overline{z_0}}\right| \leqq 1 + \frac{|z_0 - \overline{z_0}|}{|Mz - \overline{z_0}|} \leqq C$$

für alle $z \in R$, $M \in G$, $M \neq \pm I$. (Nach a) ist eine solche Wahl von $C$ möglich.) Dann gilt für alle $z, z' \in R$:

$$\begin{aligned}
&\left|P_{kn}(z, z_0) - 2\left(\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}\right)^n (z - \overline{z_0})^{-2k}\right| \\
&\qquad \leqq \sum_{\substack{M \in G \\ M \neq \pm I}} \left|\frac{Mz - z_0}{Mz - \overline{z_0}}\right|^n |cz + d|^{-2k} |Mz - \overline{z_0}|^{-2k} \\
&\qquad \leqq C^{n+2k} \sum_{\substack{M \in G \\ M \neq \pm I}} |cz' + d|^{-2k} |Mz' - \overline{z_0}|^{-2k}.
\end{aligned}$$

Da hier die rechte Seite von $z$ nicht abhängt, folgt die Beschränktheit der linken Seite in Abhängigkeit von $z \in R$ und damit die Behauptung. □

Aus Satz 12.1 zusammen mit Satz 6.1 und Korollar 6.5 ergibt sich nun sofort folgende Ergänzung zu Satz 6.1.

**12.2. Korollar.** *Es seien $G$ eine Fuchssche Gruppe zweiter Art und* $\alpha = \max(\frac{1}{2}, \delta)$. *Dann ist*

$$\sigma(-\tilde{\Delta}_k) \cap \langle -\infty, \alpha(1-\alpha)\rangle$$
$$= \{(|k|-m)(1-|k|+m); 0 \leqq m < |k| - \alpha, m \in \mathbb{Z}\},$$

*und alle Zahlen* $\lambda_m = (|k|-m)(1-|k|+m)$ *($m$ ganz,* $0 \leqq m < |k| - \alpha$*) sind Eigenwerte des Operators* $-\tilde{\Delta}_k$ *von unendlicher Vielfachheit.*

Ist insbesondere $G$ eine Fuchssche Gruppe zweiter Art mit $\delta \leqq \frac{1}{2}$, so ist im Falle $|k| > \frac{1}{2}$ die Zahl $|k|(1-|k|)$ ein Eigenwert von $-\tilde{\Delta}_k$ von unendlicher Vielfachheit. Dabei ist die Zahl $k$ lediglich der Bedingung $|k| > \frac{1}{2}$ unterworfen; vom Multiplikatorsystem $v$ wird nur vorausgesetzt, daß $v$ irgendein Multiplikatorsystem auf $G$ vom Gewicht $2k$ ist. Wir erinnern nun an ein Ergebnis des Satzes 6.1, welches besagt: Ist $\delta \leqq \frac{1}{2}$ und ist $\lambda < \frac{1}{4}$ ein Eigenwert von $-\tilde{\Delta}_k$, so ist $|k| > \frac{1}{2}$. Nachträglich stellen wir jetzt fest, daß hier in der Abschätzung „$|k| > \frac{1}{2}$" die Konstante $\frac{1}{2}$ auf der rechten Seite nicht durch eine größere Zahl ersetzt werden kann. – Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang jedoch folgendes Ergebnis von Roelcke [39], S. 320, Satz 5.4: *Bezeichnet* $k^+$ *die in* $[0, 1\rangle$ *gelegene zu $k$ modulo 1 kongruente Zahl, und ist* $\lambda < k^+(1-k^+)$ *ein Eigenwert von* $-\tilde{\Delta}_k$, *so ist* $|k| > 1$ *und* $\lambda \in E_k$.

Im Hinblick auf Korollar 12.2 ist es eine interessante Frage, ob alle Elemente von $E_k$ Eigenwerte von $-\tilde{\Delta}_k$ sind, falls $G$ eine Fuchssche Gruppe zweiter Art ist. Nach Korollar 6.5 ist diese Frage äquivalent mit der folgenden: Ist $Q(G, -2k, v) \neq \{0\}$, falls $G$ eine Fuchssche Gruppe zweiter Art ist und $k > \frac{1}{2}$?

Es seien nun $G$ eine endlich erzeugte Fuchssche Gruppe zweiter Art, $k > \frac{1}{2}$, und $v_0$ sei ein Multiplikatorsystem auf $G$ vom Gewicht $2k$. Dann gilt für jedes Multiplikatorsystem $v$ auf $G$ vom Gewicht $2k$

$$\dim Q(G, -2k, v) = \dim Q(G, -2k, v_0)$$

(s. [33], Teil II, S. 203, Theorem 3). Die Antwort auf die obige Frage hängt also für endlich erzeugte Fuchssche Gruppen zweiter Art nicht ab von der Auswahl des Multiplikatorsystems $v$. Ist insbesondere $G$ gleich der Heckeschen Gruppe $\mathfrak{G}(\lambda)$ $(\lambda > 2)$ und $k > \frac{1}{2}$, so ist für ein geeignetes Multiplikatorsystem $v_{2k}$ auf $G$ vom Gewicht $2k$ der Raum $Q(G, -2k, v_{2k})$ unendlich-dimensional, wie wir in Abschnitt 9 im Anschluß an Korollar 9.11 in einem Beispiel bemerkten. Fassen wir dieses Resultat mit den obigen Bemerkungen zusammen, so erkennen wir: *Ist* $G = \mathfrak{G}(\lambda)$ $(\lambda > 2)$, $|k| > \frac{1}{2}$, *und ist $v$ irgendein Multiplikatorsystem auf* $\mathfrak{G}(\lambda)$ *vom Gewicht $2k$, so sind alle Elemente von $E_k$ Eigenwerte des Operators* $-\tilde{\Delta}_k$ *von unendlicher Vielfachheit.*

**12.3. Korollar.** *Es sei $G$ eine Fuchssche Gruppe zweiter Art mit $\delta(G) < \frac{1}{2}$. Dann ist*

$$\sigma(-\tilde{\Delta}_k) = E_k \cup [\tfrac{1}{4}, \infty\rangle . \tag{12.2}$$

*Alle Elemente von $E_k$ sind Eigenwerte des Operators $-\tilde{\Delta}_k$ von unendlicher Vielfachheit, und im Intervall $[\frac{1}{4}, \infty\rangle$ liegt ein Streckenspektrum unendlicher Vielfachheit vor. Das Intervall $[\frac{1}{4}, \infty\rangle$ enthält keine Eigenwerte.*

*Bemerkung.* In Korollar 12.3 kann die Voraussetzung „$\delta(G) < \frac{1}{2}$" ersetzt werden durch die schwächere Forderung, daß die Reihe

$$\sum_{M \in G} \frac{\log \sigma(Mz, z)}{(\sigma(Mz, z))^{\frac{1}{2}}} \tag{12.3}$$

konvergiere.

*Beweis von Korollar 12.3:* Nach Korollar 12.2 ist $\sigma(-\tilde{\Delta}_k) \cap \langle -\infty, \frac{1}{4}\rangle = E_k$, und alle Elemente von $E_k$ sind Eigenwerte des Operators $-\tilde{\Delta}_k$ von unendlicher Vielfachheit. (Das gilt schon für $\delta \leqq \frac{1}{2}$, insbesondere ist die Konvergenz der Reihe (12.3) für die Richtigkeit dieser Aussage hinreichend.) Ferner ist aus Satz 8.1 bekannt, daß im Intervall $[\frac{1}{4}, \infty\rangle$ keine Eigenwerte von $-\tilde{\Delta}_k$ liegen, falls die Reihe (12.3) konvergiert. In meiner Dissertation [13], S. 71, Korollar 4.1 habe ich bewiesen, daß im Intervall $[\frac{1}{4}, \infty\rangle$ ein Streckenspektrum unendlicher Vielfachheit vorhanden ist. (Statt der dort genannten Voraussetzung „$\delta < \frac{1}{2}$" wird in den Beweisen nur die Konvergenz der Reihe (12.3) benutzt.) Damit ist Korollar 12.3 bewiesen. □

Wie wir schon in Abschnitt 1.4 unter Hinweis auf Beardon [1] bemerkten, existieren Schottky-Gruppen, welche die Voraussetzung „$\delta(G) < \frac{1}{2}$" des Korollars 12.3 erfüllen. Für diese Gruppen enthält Korollar 12.3 die vollständige Bestimmung des Spektrums von $-\tilde{\Delta}_k$. *Bislang sind die von Korollar 12.3 erfaßten Fälle die einzigen nicht elementaren Beispiele, in denen das Spektrum von $-\tilde{\Delta}_k$ vollständig bekannt ist* (s. auch Satz 6.9). Von den elementaren Gruppen werden nur die von $-I$ und einer parabolischen Matrix erzeugten „Translationsgruppen" nicht von Korollar 12.3 erfaßt. Bei diesen Gruppen ist $\delta = \frac{1}{2}$, und das Spektrum ist durch (12.2) gegeben. Auffällig ist in der Situation von Korollar 12.3, daß das Multiplikatorsystem keinen Einfluß auf die Beschaffenheit des Spektrums hat – sehr im Unterschied zu den Verhältnissen bei Grenzkreisgruppen erster Art (s. [40], S. 286, Satz 8.2 und S. 308 ff., § 12).

Bislang hat man über die nicht elementaren Fuchsschen Gruppen mit $\delta < \frac{1}{2}$ nur lückenhafte Kenntnisse. Abgesehen davon, daß man weiß, daß solche Gruppen existieren, ist fast nichts bekannt. So ist es zum Beispiel im Hinblick auf Satz 6.9 eine interessante offene Frage, ob jede

Fuchssche Gruppe mit $\delta < \frac{1}{2}$ notwendig eine Fuchssche Gruppe zweiter Art ist.

## Liste häufig benutzter Bezeichnungen

*1. Lateinisches Alphabet*

| | |
|---|---|
| $A$ | s. (1.4), (1.5) |
| arg | s. Abschnitt 1.2 |
| $B$ | Fundamentalbereich von $G$ |
| $\mathbb{C}$ | Körper der komplexen Zahlen |
| $\mathscr{D}_k$ | Definitionsbereich von $-\Delta_k$, s. Abschnitt 1.3 |
| $\tilde{\mathscr{D}}_k$ | Definitionsbereich von $-\tilde{\Delta}_k$, s. Abschnitt 1.3 |
| $\mathbb{E}$ | offene Einheitskreisscheibe |
| $E_k$ | s. (4.2) |
| $F(a, b; c; z)$ | hypergeometrische Funktion |
| $G$ | diskrete Untergruppe von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ mit $-I \in G$ |
| $g_{k\lambda}(z, z')$ | s. Satz 4.1 |
| $G_{k\lambda}(z, z')$ | s. (5.29) |
| $\mathfrak{G}(\lambda)$ | Heckesche Gruppe, erzeugt von $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $\mathbb{H}$ | obere Halbebene |
| $\mathscr{H}_k$ | Hilbert-Raum, s. Abschnitt 1.2 |
| $H_{ks}$ | s. (5.9) |
| $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | |
| $k$ | reeller Parameter, s. Abschnitt 1.2 |
| $\underline{M}$ | zweite Zeile von $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ |
| $\mathbb{N}$ | Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ |
| $\mathscr{O}(G)$ | s. Abschnitt 1.1 |
| $P_{kn}(z, z_0)$ | s. (10.1) |
| $Q(G, -2k, v)$ | Menge der quadratisch integrierbaren, ganzen automorphen Formen zur Gruppe G, zum Gewicht $2k$ und zum Multiplikatorsystem $v$ |
| $\mathbb{R}$ | Körper der reellen Zahlen |
| $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ | Gruppe der reellen, zweireihigen Matrizen mit der Determinante 1 |
| $v$ | Multiplikatorsystem auf $G$ vom Gewicht $2k$ |
| $y = \operatorname{Im} z$ | |
| $\mathbb{Z}$ | Ring der ganzen Zahlen |

*2. Griechisches Alphabet*

| | |
|---|---|
| $\alpha = \max(\frac{1}{2}, \delta)$ | s. (6.3) |
| $\Gamma$ | Eulersche Gammafunktion |
| $\delta = \delta(G)$ | Konvergenzabszisse der Reihe (1.26) |
| $\Delta_k$ | s. (1.22) |
| $\tilde{\Delta}_k$ | Abschließung von $\Delta_k : \mathscr{D}_k \to \mathscr{H}_k$ |
| $\sigma(-\tilde{\Delta}_k)$ | Spektrum von $-\tilde{\Delta}_k$ |
| $\sigma_k(M, N)$ | s. (1.13) |
| $\sigma(z, z')$ | s. (1.8) |
| $\psi$ | logarithmische Ableitung der Gammafunktion |
| $\omega, d\omega$ | s. (1.2) |

### 3. *Mathematische Zeichen*

$[a,b], \langle a,b], [a,b\rangle, \langle a,b\rangle$ s. Abschnitt 1.1
$f|[M,k]$ s. (1.17)
$\{G, -2k, v\}$ Menge der ganzen automorphen Formen zur Gruppe $G$, zum Gewicht $2k$ und zum Multiplikatorsystem $v$
$|z,z'|$ hyperbolischer Abstand der Punkte $z, z'$, s. (1.1), (1.9)
$z \equiv z' \bmod G$ s. Abschnitt 1.1

## Literatur

Die Titel [1—47] des folgenden Verzeichnisses sind ein Auszug aus dem Literaturverzeichnis des Teils I dieser Arbeit. Die Arbeiten [48—52] ergänzen die Zitate in Teil I.


1. Beardon, A. F.: The exponent of convergence of Poincaré series. Proc. London math. Soc., III. Ser. **18**, 461—483 (1968)
3. Bers, L.: Completeness theorems for Poincaré series in one variable. Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces, held at the Hebrew University of Jerusalem, July 5—12, 1960, S. 88—100. Jerusalem: Jerusalem Academic Press 1961
4. Bers, L.: Automorphic forms and Poincaré series for infinitely generated Fuchsian groups. Amer. J. Math. **87**, 196—214 (1965)
6. Dieudonné, J.: Treatise on analysis, Vol. II. New York, London: Academic Press 1970
7. Drasin, D.: Cusp forms and Poincaré series. Amer. J. Math. **90**, 356—365 (1968)
8. Drasin, D., Earle, C. J.: On the boundedness of automorphic forms. Proc. Amer. math. Soc. **19**, 1039—1042 (1968)
10. Earle, C. J.: A reproducing formula for integrable automorphic forms. Amer. J. Math. **88**, 867—870 (1966)
11. Earle, C. J.: Some remarks on Poincaré series. Compositio math. **21**, 167—176 (1969)
13. Elstrodt, J.: Über das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene bei Fuchsschen Gruppen zweiter Art. Dissertation, München 1970
20. Godement, R.: Série de Poincaré et Spitzenformen. Séminaire H. Cartan, 10e année (1957/58), Exposé 10. Paris: Secrétariat mathématique, Ecole Normale Supérieure 1958
21. Hecke, E.: Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung. Math. Ann. **112**, 664—699 (1936)
27. Kra, I.: Eichler cohomology and the structure of finitely generated Kleinian groups. Advances in the theory of Riemann surfaces. Proceedings of the 1969 Stony Brook Conference. Edited by L. V. Ahlfors *et al.*, S. 225—263. Princeton, N. J.: Princeton University Press 1971
30. Maaß, H.: Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Math. Ann. **125**, 235—263 (1953)
31. Magnus, W., Oberhettinger, F.: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin: Springer 1943
33. Metzger, T. A., Rao, K. V. Rajeswara: On integrable and bounded automorphic forms. I. Proc. Amer. math. Soc. **28**, 562—566 (1971). II. ibid. **32**, 201—204 (1972)
35. Petersson, H.: Einheitliche Begründung der Vollständigkeitssätze für die Poincaréschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art. Abh. math. Sem. Hansische Univ. **14**, 22—60 (1941)
36. Rao, K. V. Rajeswara: Fuchsian groups of convergence type and Poincaré series of dimension —2. J. Math. Mech. **18**, 629—644 (1969)

37. Rao, K. V. Rajeswara: Reproducing formulas for Poincaré series of dimension —2 and applications. Advances in the theory of Riemann surfaces. Proceedings of the 1969 Stony Brook Conference. Edited by L. V. Ahlfors *et al.*, S. 329—340. Princeton, N. J.: Princeton University Press 1971
38. Roelcke, W.: Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art. S.-ber. Heidelberger Akad. Wiss. math.-naturw. Kl. 1953/55, 4. Abh. 109 S. (1956)
39. Roelcke, W.: Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene, I. Math. Ann. **167**, 292—337 (1966)
40. Roelcke, W.: Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene, II. Math. Ann. **168**, 261—324 (1967)
42. Selberg, A.: Automorphic functions and integral operators. Seminars in analytic functions, Vol. 2, S. 152—161. Princeton, N. J.: Institute for Advanced Study 1957
45. Spilker, J.: Darstellung automorpher Formen durch Poincaré-Reihen. Math. Z. **99**, 216—234 (1967)
47. Tsuji, M.: Potential theory in modern function theory. Tokyo: Maruzen Co. 1959
48. Elstrodt, J.: Einige Eigenschaften der Poincaréschen Reihen der Dimension —2. Manuscripta math. **10**, 197—202 (1973)
49. Elstrodt, J., Roelcke, W.: Über das wesentliche Spektrum zum Eigenwertproblem der automorphen Formen. manuscripta math. **11**, 391—406 (1974)
50. Knopp, M. I.: Bounded and integrable automorphic forms. Indiana Univ. Math. J. **22**, 769—778 (1973)
51. Lehner, J.: On the $A_q(\Gamma) \subset B_q(\Gamma)$ conjecture. Modular functions of one variable I, Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp 1972. Lecture Notes in Mathematics **320**, 187—194 (1973). Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1973
52. Metzger, T. A., Rao, K. V. Rajeswara: Approximation of Fuchsian groups and automorphic forms of dimension —2. Indiana Univ. Math. J. **21**, 937—949 (1972)

Jürgen Elstrodt
Mathematisches Institut der
Universität München
D-8000 München 2
Theresienstr. 39
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 2. April 1973)

*Nachtrag bei der Korrektur.* Nach Einreichen dieser Arbeit haben Metzger und Rajeswara Rao das oben mehrfach zitierte Ergebnis von Knopp [50] ohne die Voraussetzung der endlichen Erzeugbarkeit der zugrundeliegenden Fuchsschen Gruppe zweiter Art bewiesen (s. Metzger, T. A., Rao, K. V. Rajeswara: Fuchsian groups of convergence type and non-tangential growth of automorphic forms (erscheint demnächst)). Es folgt daher: Ist $G$ eine Fuchssche Gruppe zweiter Art und $k \leqq \frac{1}{2}$, so ist $Q(G, -2k, v) = \{0\}$. Die obigen Verweise auf [50] sind entsprechend zu verschärfen.