

## Liaison des variétés algébriques. I

C. Peskine (Strasbourg) et L. Szpiro (Paris)

Soit  $X$  une surface cubique lisse dans  $\mathbf{P}_k^3$ . Si  $D$  est une des vingt sept droites contenues dans  $X$ , et  $P$  un plan contenant  $D$ , l'intersection de  $P$  et  $X$  est la réunion de  $D$  et d'une conique  $K$ . Choisissons une autre surface cubique lisse  $Y$  contenant  $K$ . Si  $Y$  est assez générale l'intersection de  $X$  et  $Y$  est égale à la réunion de  $K$  et d'une courbe lisse  $C$  de genre 5 et de degré 7. On peut recommencer le processus et vouloir caractériser les courbes obtenues. Plus précisément quelles sont les courbes  $C$  de  $\mathbf{P}_k^3$  qui jouissent de la propriété suivante? Il existe des courbes  $C_1, \dots, C_s$  de  $\mathbf{P}_k^3$  telles que:

a)  $C_1 = C$ .

b)  $C_i$  et  $C_{i+1}$  n'ont pas de composantes communes et  $C_i \cup C_{i+1}$  est une intersection complète (on dira que  $C_i$  et  $C_{i+1}$  sont *liées géométriquement*).

c)  $C_s$  est une intersection complète.

La réponse est contenue dans le Théorème 3.2, dit *Théorème de liaison*: ce sont les courbes dont le cône projetant est de Cohen-Macaulay. On caractérise aussi le plus petit nombre  $s$  tel qu'il existe une telle chaîne.

L'utilité de la liaison géométrique pour les courbes apparait chez Noether ([17]). La notion de liaison géométrique est clairement introduite en toute généralité par Dubreil ([15]). Ce dernier appelle variétés de première espèce (resp. de seconde espèce) dans  $\mathbf{P}_k^n$ , les sous-schémas fermés dont le cône projetant est de profondeur plus grande ou égale à deux (resp. de profondeur strictement inférieure à deux). Il démontre que deux courbes liées sont de même espèce. Il demande si cette propriété reste vraie en plus grande dimension. La réponse est négative (remarque suivant la Proposition 1.2).

Le théorème de liaison pour les courbes sur  $C$  est énoncé par Apery ([2]). Serre nous a signalé que le même résultat était connu de Gaeta ([9]) qui en donne une démonstration. Ces travaux, antérieurs à «F.A.C.», s'éclairent quand on dispose de l'algèbre homologique, en particulier de la notion de profondeur et des théorèmes de dualité.

Les paragraphes 1 (liaison algébrique) et 2 (liaison géométrique) servent donc à expliciter le cadre naturel où se pose ces questions.

Le théorème de liaison sous sa forme la plus générale (variétés de codimension 2 dans  $\mathbf{P}_k^n$ ) est démontré au § 3.

Au § 4, le problème se pose de *conserver les propriétés par liaison*: soit  $V \hookrightarrow \mathbf{P}_k^n$  un schéma lisse (ou localement intersection complète, ou lisse en codimension donnée, etc.) peut-on le lier à un schéma  $V' \hookrightarrow \mathbf{P}_k^n$  possédant la même propriété? Le résultat le plus notable (4.1) dit qu'on peut conserver le fait d'être lisse en codimension inférieure ou égale à 3 (donc la normalité pour les variétés de Cohen-Macaulay car cette dernière propriété est stable par liaison). De plus, en caractéristique 0, on peut trouver un tel  $V'$  tel que les équations de l'intersection complète  $V \cup V'$  fassent partie d'un système minimal de générateurs de l'idéal gradué définissant  $V$ .

Les schémas de codimension 2 dans  $\mathbf{P}_k^n$  à cône projetant de Cohen-Macaulay ayant été étudiés (§ 3 et § 5), on démontre ensuite le *théorème de déformation* (6.2): Sous certaines conditions numériques un tel schéma possède une déformation (de codimension 2, à cône de Cohen-Macaulay dans  $\mathbf{P}_k^n$ ) lisse en codimension inférieure ou égale à 3, donc normale. Ce résultat est le meilleur possible car un sous-schéma fermé de codimension 2 de  $\mathbf{P}_k^n$  ( $n \geq 6$ ), à cône de Cohen-Macaulay, localement intersection complète en codimension inférieure ou égale à 4 est une intersection complète (5.1). Ce théorème de déformation est classique pour les intersections complètes, la liaison permet de faire une récurrence sur le nombre de générateurs de l'idéal gradué maximal du schéma. Signalons que Schaps ([18]) montre un théorème analogue pour les schémas de Cohen-Macaulay de codimension 2 dans l'espace affine  $\mathbf{A}_k^n$ . Il est à noter que dans le cas projectif nous construisons une courbe réduite, plongée dans  $\mathbf{P}_k^3$ , à cône projetant de Cohen-Macaulay, n'ayant pas de déformation lisse plongée dans  $\mathbf{P}_k^3$ , à cône de Cohen-Macaulay.

Enfin au § 7, on applique les méthodes de la liaison pour montrer qu'il existe des courbes lisses de  $\mathbf{P}_k^3$  qui ne sont pas intersections de trois surfaces.

Nous nous sommes surtout intéressés au cas projectif, mais nous avons énoncé, et le plus souvent démontré, les analogues locaux des résultats. A ce propos, signalons que si  $X$  est un schéma fermé de  $\mathbf{P}_k^n$ , nous appelons le cône projetant de  $X$  dans  $\mathbf{P}_k^n$ , l'unique anneau gradué  $k[x_0, \dots, x_n]$  tel que  $X = \text{Proj } k[x_0, \dots, x_n]$  et que  $(x_0, \dots, x_n)$  n'est pas associé à l'anneau. C'est bien sûr par l'anneau local de ce cône projetant qu'on passe du cas local au cas global.

Nous remercions A. Altman, D. Ferrand, S. Kleiman, Ch. de Laclós, M. Raynaud et J. P. Serre pour l'aide qu'ils nous ont apportée dans l'élaboration de ce travail.

§ 1. Liaison géométrique . . . . .	273
§ 2. Liaison algébrique . . . . .	277
§ 3. Liaison en codimension 2 . . . . .	280
§ 4. Conservation des propriétés géométriques par liaison . . . . .	285
§ 5. Un schéma localement intersection complète, de codimension 2, à cône projetant de Cohen-Macaulay dans $\mathbf{P}_k^n$ ( $n \geq 6$ ) est intersection complète. . . . .	293
§ 6. Déformation «universelle» des variétés de codimension 2, à cône de Cohen-Macaulay de $\mathbf{P}_k^n$ ( $n \leq 5$ ) sur un corps algébriquement clos $k$ . . . . .	295
§ 7. Existence de courbes lisses de l'espace projectif qui ne sont pas intersections de 3 surfaces . . . . .	300

### § 1. Liaison géométrique

Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux sous-schémas fermés de l'espace projectif  $\mathbf{P}_k^n$  (resp.  $R/\mathfrak{a}$  et  $R/\mathfrak{b}$  deux quotients d'un anneau local régulier  $R$ ). On dira que  $V_1$  et  $V_2$  (resp.  $R/\mathfrak{a}$  et  $R/\mathfrak{b}$ ) sont géométriquement liés si

i)  $V_1$  et  $V_2$  (resp.  $R/\mathfrak{a}$  et  $R/\mathfrak{b}$ ) sont équidimensionnels, sans composantes immergées et sans composantes irréductibles communes.

ii)  $V_1 \cup V_2$  (resp.  $R/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ ) est une intersection complète dans  $\mathbf{P}_k^n$  (resp.  $R$ ).

Il est clair qu'alors  $V_1$  et  $V_2$  (resp.  $R/\mathfrak{a}$  et  $R/\mathfrak{b}$ ) ont même dimension.

*Exemple 1.* Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux polynômes homogènes de  $k[X_0, \dots, X_n]$ , de degrés respectifs  $f_1$  et  $f_2$ . Soient  $S_1$  et  $S_2$  les hypersurfaces de  $\mathbf{P}_k^n$  correspondantes. Si  $S_1$  et  $S_2$  n'ont pas de composantes communes, alors  $S_1$  et  $S_2$  sont géométriquement liées, et  $S_1 \cup S_2$  est l'hypersurface définie par l'équation  $F_1 F_2$  de degré  $f_1 + f_2$ .

*Exemple 2.* Soit  $C$  la courbe intersection complète de

$$\mathbf{P}_k^3 = \text{Proj } k[X_0, \dots, X_3],$$

définie par les équations homogènes:  $(X_0 X_3 - X_1 X_2, X_1^4 - X_0^3 X_2)$ . Alors  $C$  est la réunion des deux courbes suivantes: la quintique  $C_1$  définie par les équations  $(X_0 X_3 - X_1 X_2, X_1^4 - X_0^3 X_2, X_2^4 - X_3^3 X_1)$  et la courbe  $C_2$  égale à trois fois la droite d'équations  $(X_1, X_0)$  placée sur la quadrique d'équation  $(X_0 X_3 - X_1 X_2)$ .

**Proposition 1.1.** Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux sous-schémas fermés de  $\mathbf{P}_k^n$  (resp.  $R/\mathfrak{a}$  et  $R/\mathfrak{b}$  deux quotients de l'anneau local réguliers  $R$ ) géométriquement liés par une intersection complète  $X = V_1 \cup V_2$  (resp.  $R/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ ). Alors, si  $\mathfrak{a}(V_1)$ ,  $\mathfrak{a}(V_2)$  et  $\mathfrak{a}(X)$  sont les faisceaux d'idéaux de  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}$  définissant respectivement  $V_1$ ,  $V_2$  et  $X$ , on a

$$\text{i) } \mathfrak{a}(V_1)/\mathfrak{a}(X) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_{V_2}, \mathcal{O}_X)$$

$$\text{(resp. } \mathfrak{a}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}) = \text{Hom}(R/\mathfrak{b}, R/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})),$$

ii)  $a(V_2)/a(X) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_{V_2}, \mathcal{O}_X)$   
 (resp.  $\mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \text{Hom}(R/\mathfrak{a}, R/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}))$ ).

Il suffit bien sûr de démontrer (i).

On a  $a(X) = a(V_1) \cap a(V_2) \supseteq a(V_1) \cdot a(V_2)$ . Il y a donc une injection naturelle:

$$a(V_1)/a(X) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_{V_2}, \mathcal{O}_X) \text{ (resp. } \mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \hookrightarrow \text{Hom}(R/\mathfrak{b}, R/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})).$$

Montrer que c'est un isomorphisme est une question locale, il suffit donc de montrer la proposition locale. Soit  $\alpha$  un élément de l'annulateur de  $\mathfrak{b}$  modulo  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ . On a  $\alpha \mathfrak{b} \subset (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$  donc  $\alpha(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}$ . Comme le fermé  $V(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$  est de codimension  $\geq 1$  dans  $V(\mathfrak{a})$  (car  $R/\mathfrak{a}$  et  $R/\mathfrak{b}$  n'ont pas de composantes irréductibles communes), et comme  $R/\mathfrak{a}$  est dans composantes immergées, ceci implique  $\alpha \in \mathfrak{a}$ .

**Proposition 1.2.** *Soit  $V_1$  un sous-schéma de  $\mathbf{P}_k^n$ , de codimension  $d$ , et soit  $X$  une intersection complète de  $\mathbf{P}_k^n$ , de codimension  $d$  et contenant  $V_1$ . Soient  $\mathfrak{a}(V_1)$  et  $\mathfrak{a}(X)$  les faisceaux d'idéaux de  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}$  définissant respectivement  $V_1$  et  $X$ . Soit  $V_2$  le sous-schéma fermé de  $\mathbf{P}_k^n$  défini par le faisceau d'idéaux  $\mathfrak{a}(V_2)$  contenant  $\mathfrak{a}(X)$  qui satisfait à:*

$$\mathfrak{a}(V_2)/\mathfrak{a}(X) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_{V_2}, \mathcal{O}_X).$$

Les conditions suivantes sont alors équivalentes:

- (i) Le cône de  $V_1$  est de Cohen-Macaulay.
- (ii) Le cône de  $V_2$  est de Cohen-Macaulay et  $V_1$  est sans composantes immergées.

De plus, dans ces conditions, on a:

$$\mathfrak{a}(V_1)/\mathfrak{a}(X) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_{V_2}, \mathcal{O}_X)$$

et  $\text{codim}(V_2) = d$ .

*Remarque.* L'exemple suivant montre qu'en général la profondeur n'est pas conservée par liaison: Soit  $S$  une variété abélienne de dimension 2 de  $\mathbf{P}_k^n$  dont le cône projetant  $A$  est arithmétiquement normal. Soit  $X$  une intersection complète de dimension 2 de  $\mathbf{P}_k^n$ , contenant  $S$ , de cône projetant  $R$ . Soit  $B$  le cône projetant de la surface  $S'$  liée à  $S$  par  $X$ . Si  $A = R/\mathfrak{a}$  la suite exacte  $0 \rightarrow B \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{a}, R) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, R) \rightarrow 0$  montre que  $\text{prof } B = 1$  car  $\text{Ext}_R^1(A, R)$  est non nul de longueur finie.

La proposition est une conséquence du résultat local qui suit:

**Proposition 1.3.** *Soit  $R$  un anneau local de Gorenstein,  $\mathfrak{a}_1$  un idéal non nul de  $R$  tel que  $\dim R/\mathfrak{a}_1 = \dim R$ . Soit  $\mathfrak{a}_2$  l'annulateur de  $\mathfrak{a}_1$ . Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i)  $R/\mathfrak{a}_1$  est de Cohen-Macaulay.

(ii)  $R/\alpha_2$  est de Cohen-Macaulay et  $R/\alpha_1$  est sans composantes immergées.

De plus sous ces conditions  $\alpha_1$  est l'annulateur de  $\alpha_2$  et  $\dim R/\alpha_2 = \dim R$ .

Supposons (i). En vertu du théorème de dualité locale on a  $\text{Ext}_R^i(R/\alpha_1, R) = 0$  pour tout  $i \geq 1$ . Si  $\dots \rightarrow L_i \rightarrow L_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_1 \rightarrow R \rightarrow R/\alpha_1 \rightarrow 0$  est une résolution projective de  $R/\alpha_1$ , appliquant le foncteur  $\text{Hom}_R(\cdot, R) = \cdot^\vee$  on obtient la suite exacte suivante:

$$0 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow R \rightarrow L_1^\vee \rightarrow L_2^\vee \rightarrow \dots \rightarrow L_{i-1}^\vee \rightarrow L_i^\vee \rightarrow \dots$$

Ce qui prouve que  $R/\alpha_2$  est un  $i$ -ème module de syzygie pour tout  $i$  et donc que  $\text{prof } R/\alpha_2 = \text{prof } R = \dim R = \dim R/\alpha_2$ .

Supposons maintenant (ii) et raisonnons par récurrence sur la dimension de  $R$ .

Si  $R$  est artinien tout est clair, on peut donc supposer que  $R/\alpha_1$  est Cohen-Macaulay sur le complémentaire du point fermé. Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow R \rightarrow R/\alpha_2 \rightarrow 0. \tag{*}$$

Appliquons le foncteur  $\text{Hom}_R(\cdot, R) = \cdot^\vee$  à cette suite. Après avoir remarqué que  $\text{Ext}_R^1(R/\alpha_2, R) = 0$ , on obtient la suite exacte:

$$0 \rightarrow (R/\alpha_2)^\vee \rightarrow R \rightarrow (R/\alpha_1)^{\vee\vee} \rightarrow 0.$$

Et donc le diagramme commutatif suivant de suites exactes:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \alpha_1 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & R/\alpha_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \parallel & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & (R/\alpha_2)^\vee & \longrightarrow & R & \longrightarrow & (R/\alpha_1)^{\vee\vee} \longrightarrow 0 \end{array}$$

$f$  est surjective, d'après le diagramme du serpent. Le noyau de  $f$  est de longueur finie par hypothèse de récurrence et est donc nul puisque  $R/\alpha_1$  n'a pas de composante immergée. On a donc  $\alpha_1 = \text{Ann}(\alpha_2)$  et on conclut par la première partie de la démonstration.

*Remarque 1.4.* Supposons que les conditions équivalentes de l'énoncé précédent soient réalisées. Si de plus, on a  $\alpha_1 \cap \alpha_2 = 0$ , et si  $R/\alpha_1$  et  $R/\alpha_2$  n'ont pas de composante irréductible commune, alors  $R/(\alpha_1 + \alpha_2)$  est un anneau de Gorenstein de codimension 1 dans  $R$ . En effet, il est clair que  $\text{codim}(R/(\alpha_1 + \alpha_2), R) \geq 1$ . Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow R \rightarrow R/\alpha_1 \oplus R/\alpha_2 \rightarrow R/(\alpha_1 + \alpha_2) \rightarrow 0.$$

Soit  $k$  le corps résiduel de  $R$ . La suite exacte des  $\text{Ext}_R^i(k, \cdot)$  associée à cette suite montre que  $\text{Ext}_R^i(k, R/(\alpha_1 + \alpha_2)) = 0$  pour  $i < \dim R - 1$  et que  $\text{Ext}_R^{\dim R - 1}(k, R/(\alpha_1 + \alpha_2))$  s'injecte dans  $\text{Ext}_R^{\dim R}(k, R) = k$ .

Comme  $\dim R/(\alpha_1 + \alpha_2) \leq \dim R - 1$ , on en déduit bien que  $R/(\alpha_1 + \alpha_2)$  est un anneau de Gorenstein de dimension  $(\dim R - 1)$ .

*Remarque 1.5.* Supposons que les conditions équivalentes de 1.2 soient réalisées. Soit alors  $e$  la somme des degrés des équations de  $X$  dans  $\mathbf{P}_k^n$ , i.e. le degré de  $X$  plongé dans  $\mathbf{P}_k^n$ . Le faisceau dualisant  $\omega_X$  de  $X$  est  $\mathcal{O}_X(e - n - 1)$ . Donc, pour  $i = 1, 2$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{V_i}, \mathcal{O}_X(e - n - 1))$  est isomorphe au faisceau dualisant  $\omega_{V_i}$  (qui n'est pas en général un fibré vectoriel). On en déduit

$$a(V_1)/a(X) \simeq \omega_{V_2}(n + 1 - e)$$

et

$$a(V_2)/a(X) \simeq \omega_{V_1}(n + 1 - e).$$

*Remarque 1.6.* Supposons toujours les conditions équivalentes de 1.2 réalisées. Soient alors  $I(V_1), I(V_2)$  et  $I(X)$  les idéaux gradués de l'anneau de polynômes  $R = k[X_0, \dots, X_n]$  définissant les cônes projetants de Cohen-Macaulay des schémas  $V_1, V_2$  et  $X$ . On a alors :

$$I(V_1)/I(X) \xrightarrow{\alpha_1} \text{Hom}_R(R/I(V_2), R/I(X)) \xrightarrow{\beta_1} \text{Ext}_R^d(R/I(V_2), R),$$

$$I(V_2)/I(X) \xrightarrow{\alpha_2} \text{Hom}_R(R/I(V_1), R/I(X)) \xrightarrow{\beta_2} \text{Ext}_R^d(R/I(V_1), R).$$

On notera que  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des isomorphismes gradués de degrés zéro, alors que les isomorphismes de décalage  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont gradués de degré égal à degré  $X$ .

*Contre-exemple 1.7.* Reprenons l'exemple 2.

*Eintersection complète*  $C$  est réunion de la quintique

$$C_1 = \text{Proj } k[\alpha^5, \alpha^4\beta, \alpha\beta^4, \beta^5]$$

et de la courbe  $C_2$  qui est trois fois une droite sur une quadrique. Nous allons montrer que le cône réduit de  $C$  n'est pas de Cohen-Macaulay ceci en toute caractéristique, ce qui contredit une conjecture de Harshorne ([6]).

Soit  $A$  l'anneau local de ce cône projetant réduit.

Soient  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{q}$  les idéaux premiers de  $A$  correspondant à  $C_1$  et  $C_2$ . On vérifie facilement qu'on a les isomorphismes

$$\mathfrak{p} \simeq \mathfrak{p}/(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}) \simeq (\mathfrak{p} + \mathfrak{q})/\mathfrak{q} \simeq A/\mathfrak{q}.$$

On en déduit la suite exacte

$$0 \rightarrow A/\mathfrak{q} \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{p} \rightarrow 0.$$

Si  $k$  est le corps résiduel de  $A$  on a  $\text{Ext}_A^1(k, A/\mathfrak{p}) \simeq k^2$ . Comme  $\text{Ext}_A^2(k, A/\mathfrak{q}) \simeq k$ , on voit, par la suite exacte des  $\text{Ext}_A^i(k, \cdot)$  que  $\text{Ext}_A^1(k, A) \neq 0$  et donc que  $A$  est de profondeur un (et de dimension deux).

*Contre-exemple 1.8.* L'énoncé 1.2 (ou 1.3) n'est pas vrai si on suppose seulement que le cône projetant de  $X$  est de Cohen-Macaulay (et non Gorenstein).

Soit  $\mathfrak{p}$  l'idéal premier gradué définissant la quartique

$$C = \text{Proj } k[\alpha^4, \alpha^3\beta, \alpha\beta^3, \beta^4]$$

dans  $\mathbf{P}_k^3$ :

$$\mathfrak{p} = (X_0 X_3 - X_1 X_2, X_1^3 - X_0^2 X_2, X_2^3 - X_1 X_3^2, X_0 X_2^2 - X_1^2 X_3).$$

Soit  $X$  l'intersection complète définie par les équations  $X_0 X_3 - X_1 X_2$ ,  $X_0 X_2^2 - X_1^2 X_3$ , et soient  $L$  et  $D$  les droites définies par les équations  $(X_0, X_1)$  et  $(X_2, X_3)$ . On vérifie qu'on a  $X = C \cup L \cup D$ , autrement dit:

$$(X_0 X_3 - X_1 X_2, X_0 X_2^2 - X_1^2 X_3) = \mathfrak{p} \cap (X_0, X_1) \cap (X_2, X_3).$$

Comme le cône  $k[X_0, \dots, X_3]/(X_2, X_3)$  de  $D$  est évidemment de Cohen-Macaulay on déduit de l'Enoncé 1.2 que le cône

$$k[X_0, \dots, X_3]/(\mathfrak{p} \cap (X_0, X_1))$$

de  $C \cup L$  est de Cohen-Macaulay. D'autre part, il est clair que le cône de  $L$  est de Cohen-Macaulay et on vérifie facilement que le cône

$$k[X_0, \dots, X_3]/\mathfrak{p} \simeq k[\alpha^4, \alpha^3\beta, \alpha\beta^3, \beta^4]$$

de  $C$  n'est pas de Cohen-Macaulay car il n'est pas intégralement clos ( $x^2 \beta^2$  n'appartient pas à  $k[\alpha^4, \alpha^3\beta, \alpha\beta^3, \beta^4]$ ).

## § 2. Liaison algébrique

Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux sous-schémas fermés de  $\mathbf{P}_k^n$  (resp.  $R/\mathfrak{a}$  et  $R/\mathfrak{b}$  deux quotients d'un anneau local régulier  $R$ ). On dira que  $V_1$  et  $V_2$  (resp.  $R/\mathfrak{a}$  et  $R/\mathfrak{b}$ ) sont algébriquement liés (ou plus simplement liés) par une intersection complète  $X$  contenant  $V_1$  et  $V_2$  (resp. une intersection complète  $R/\mathfrak{a}$  telle que  $\mathfrak{a} \subset (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ ) si

(i)  $V_1$  et  $V_2$  (resp.  $R/\mathfrak{a}$  et  $R/\mathfrak{b}$ ) sont équidimensionnels et sans composantes immergées.

(ii) (A)  $a(V_2)/a(X) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_{V_1}, \mathcal{O}_X)$  (resp.  $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} = \text{Hom}(R/\mathfrak{a}, R/\mathfrak{a})$ ),

(B)  $a(V_1)/a(X) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\mathcal{O}_{V_2}, \mathcal{O}_X)$  (resp.  $\mathfrak{a}/\mathfrak{a} = \text{Hom}(R/\mathfrak{b}, R/\mathfrak{a})$ )

(ici pour une sous-variété  $W$  de  $\mathbf{P}_k^n$ ,  $a(W)$  désigne le faisceau d'idéaux de  $W$  dans  $\mathbf{P}_k^n$ ).

On constate immédiatement que si  $V_1$  et  $V_2$  (resp.  $R/\mathfrak{a}$  et  $R/\mathfrak{b}$ ) sont géométriquement liés, alors ils sont algébriquement liés par  $V_1 \cup V_2$  (resp.  $R/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ ).

On vérifie le résultat suivant :

**Proposition 2.1.** *Soit  $V_1$  (resp.  $R/\mathfrak{a}$ ) un sous-schéma fermé (resp. un quotient) de  $\mathbf{P}_k^n$  (resp. de  $R$ ) équidimensionnel et sans composante immergée. Soit  $X$  (resp.  $R/\mathfrak{x}$ ) une intersection complète contenant  $V_1$  (resp. telle que  $\mathfrak{x} \subset \mathfrak{a}$ ). Alors le sous-schéma  $V_2$  de  $\mathbf{P}_k^n$  (resp. le quotient  $R/\mathfrak{b}$  de  $R$ ) dont le faisceau d'idéaux (resp. l'idéal) est défini par  $(A)$  est algébriquement lié à  $V_1$  (resp.  $R/\mathfrak{a}$ ) par  $X$  (resp.  $R/\mathfrak{x}$ ).*

*Exemple 2.2.* Considérons  $\mathbf{P}_k^1$  plongé dans  $\mathbf{P}_k^3$  par le faisceau  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(3)$ , i.e. la cubique gauche  $C$  de  $\mathbf{P}_k^3$  définie par les équations homogènes  $(X_0 X_2 - X_1^2, X_1 X_3 - X_2^2, X_0 X_3 - X_1 X_2)$ . Soit  $X$  l'intersection des deux surfaces d'équations  $X_0 X_2 - X_1^2$  et  $X_2(X_1 X_3 - X_2^2) - X_3(X_0 X_3 - X_1 X_2)$ .  $C$  est liée à elle-même par  $X$ .

Pour vérifier ce fait, on peut soit montrer que le carré de l'idéal gradué  $\mathfrak{p}$  de  $C$  est contenu dans l'idéal gradué  $\mathfrak{a}$  de  $X$ , soit remarquer que  $X$  est de  $d^\circ 6$  et contient au moins deux fois  $C$  qui est de  $d^\circ 3$ , donc que  $X$  contient précisément deux fois  $C$ , et rien d'autre.

*Définition 2.3.* Soit  $V$  un sous-schéma fermé équidimensionnel de codimension  $d$  de  $\mathbf{P}_k^n$  (resp.  $R/\mathfrak{a}$  un quotient de pure codimension  $d$  d'un anneau local régulier  $R$ ). On dira que  $V$  (resp.  $R/\mathfrak{a}$ ) est génériquement intersection complète si pour tout point générique  $\eta$  de  $V$  (resp. de  $\text{Spec } R/\mathfrak{a}$ ), l'anneau  $\mathcal{O}_{V_1, \eta}$  (resp.  $(R/\mathfrak{a})_\eta$ ) est une intersection complète dans  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n, \eta}$  (resp.  $R_\eta$ ).

Au moyen d'une décomposition primaire on démontre simplement que si  $V_1$  et  $V_2$  (resp.  $R/\mathfrak{a}$  et  $R/\mathfrak{b}$ ) sont algébriquement liés par  $X$  (resp.  $R/\mathfrak{x}$ ), ils sont alors géométriquement liés par  $X$  (resp.  $R/\mathfrak{x}$ ) si et seulement si ils n'ont pas de composantes communes. Ceci est encore équivalent au fait que pour tout point générique  $\eta$  de  $V_1$  (resp.  $R/\mathfrak{a}$ ), on a  $\mathcal{O}_{V_1, \eta} = \mathcal{O}_{X, \eta}$  (resp.  $(R/\mathfrak{a})_\eta = (R/\mathfrak{x})_\eta$ ). On constate donc que des schémas (resp. des anneaux locaux) géométriquement liés sont génériquement intersections complètes.

*Exemple 2.4* (Liaison des diviseurs). Soit  $X$  un sous-schéma fermé de  $\mathbf{P}_k^n$ , intersection complète de codimension  $d$ . Soit  $S$  une hypersurface de  $\mathbf{P}_k^n$  d'équation  $C$ , rencontrant proprement  $X$ .

Soit  $(C)$  le diviseur défini par  $S$  sur  $X$ . Alors si  $D$  est un diviseur effectif sur  $X$ , tel que  $(C) > D$  (i.e.  $D$  comme sous-schéma de  $\mathbf{P}_k^n$  est contenu dans  $X \cap S$ ), le lié  $D'$  de  $D$  par rapport à  $X \cap S$  est égal au diviseur  $(C) - D$ .

Soient  $a(D)$ ,  $a(D')$ ,  $a(X \cap S)$  les faisceaux d'idéaux définissant  $D$ ,  $D'$  et  $X \cap S$  dans  $X$ . On a

$$a(D')/a(X \cap S) = \text{Hom}(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_{X \cap S}).$$

Soit  $R = \mathcal{O}_{x,x}$  l'anneau local d'un point  $x$  de  $X$ . Soit  $f$  une équation locale de  $D$  en  $x$  et soit  $g$  l'équation locale de  $(C)$  en  $x$ .

$$a(D')/a(X \cap S) \otimes R = \text{Hom}(R/fR, R/gR).$$

Comme  $gR \subset fR$ , on a  $g = f'f$ . Il est clair que l'image de  $f'$  dans  $R/gR$  engendré  $a(D')/a(X \cap S) \otimes R$  et que  $f'$  n'est pas diviseur de zéro dans  $R$ , puisque  $g$  ne l'est pas.

**Proposition 2.5.** Soit  $V_1$  un sous-schéma fermé de  $\mathbf{P}_k^n$  équidimensionnel de codimension  $d$  et localement de Cohen-Macaulay. Soit  $X$  une intersection complète de codimension  $d$  dans  $\mathbf{P}_k^n$  contenant  $V_1$ . Soit  $F_1$  (resp.  $F$ ) une résolution projective de  $\mathcal{O}_{V_1}$  (resp. de  $\mathcal{O}_X$ ), et soit  $\alpha: F \rightarrow F_1$  un morphisme de complexes déduit de l'inclusion  $V_1 \subset X$ . Alors une résolution projective de  $\mathcal{O}_{V_2}$  est obtenue en prenant le cône du morphisme  $\alpha^\vee(-e): F_1^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-e) \rightarrow F^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-e)$  où  $e$  est la somme des degrés des équations de  $X$  (ici  $^\vee$  denote  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}}(\cdot, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n})$ ).

Cette manière de trouver le liè nous a été indiquée par Ferrand. Soit

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \swarrow & \searrow \\ F^\vee(-e) & \longleftarrow & F_1^\vee(-e) \end{array}$$

le triangle considéré. La suite exacte longue d'homologie donne:  $H_i(C) = 0$  si  $i \geq 2$  et la suite exacte

$$0 \rightarrow H_1(C) \rightarrow H_0(F_1^\vee(-e)) \xrightarrow{\varphi} H_0(F^\vee(-e)) \rightarrow H_0(C) \rightarrow 0.$$

On sait que  $H_0(F_1^\vee(-e)) = \omega_{V_1}(n+1-e) = a(V_2)/a(X)$  et que  $H_0(F^\vee(-e)) = \omega_X(n+1-e) = \mathcal{O}_X$ . Il nous reste à vérifier que  $\varphi$  est bien l'inclusion canonique. Pour ceci il nous suffit de montrer l'énoncé local analogue à la proposition.

**Proposition 2.6.** Soient  $R$  un anneau local régulier,  $\mathfrak{a}$  un idéal de  $R$  tel que  $R/\mathfrak{a}$ , soit un anneau de Cohen-Macaulay de codimension  $d$ . Soit  $\underline{f} = (f_1, \dots, f_d)$  une suite  $R$ -régulière contenue dans  $\mathfrak{a}$ . Soit  $F_1$  (resp.  $F$ ) une résolution projective de  $R/\mathfrak{a}$  (resp. de  $R/\underline{f}$ ) et  $\alpha: F \rightarrow F_1$  un morphisme de complexes déduit de l'inclusion  $\underline{f} \subset \mathfrak{a}$ . Alors une résolution projective du liè de  $R/\mathfrak{a}$  par rapport à  $R/\underline{f}$  est obtenue en prenant le cône de  $\alpha^\vee: F_1^\vee \rightarrow F^\vee$ .

On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 H_0(F_1^\vee) & \xrightarrow{\varphi} & H_0(F^\vee) \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \\
 \text{Ext}_R^d(R/\mathfrak{a}, R) & \xrightarrow{\text{Ext}_R^d(p, R)} & \text{Ext}_R^d(R/\underline{f}, R)
 \end{array}$$

où  $p$  est l'homomorphisme  $R/\underline{f} \rightarrow R/\mathfrak{a} \rightarrow 0$ .

On sait qu'on a un isomorphisme de foncteurs de la catégorie des  $R/\underline{f}$  modules de type fini dans elle-même:

$$\text{Ext}_R^d(\cdot, R) \simeq \text{Hom}_{R/\underline{f}}(\cdot, R/\underline{f})$$

donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H_0(F_1^\vee) & \xrightarrow{\varphi} & H_0(F^\vee) \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 \text{Hom}(R/\mathfrak{a}_1, R/\underline{f}) & \xrightarrow{\text{Hom}(p, R/\underline{f})} & \text{Hom}(R/\underline{f}, R/\underline{f})
 \end{array}$$

ce qui montre le résultat.

Remarquons qu'en vertu de l'énoncé 1.3,  $R/\mathfrak{a}_2$  est un anneau de Cohen-Macaulay. Prenant des résolutions minimales (i.e. de longueur  $d$ ) pour  $F_1$  et  $F$ , si  $C$  est le cône considéré, la flèche de  $C_{d+1} \rightarrow C_d$  est scindée car l'homomorphisme  $F_0 \rightarrow F_{1,0}$  est l'identité, on retrouve bien que  $R/\mathfrak{a}_2$  est de Cohen-Macaulay.

### § 3. Liaison en codimension 2

On rappelle d'abord ici quelques informations sur la structure des schémas fermés de  $\mathbf{P}_k^n$ , de codimension 2, à cône projetant de Cohen-Macaulay. On applique ensuite le Théorème 2.5 dans le cas de codimension 2, et on en déduit des informations sur les variations par liaison du degré et du genre arithmétique des courbes de  $\mathbf{P}_k^3$  à cône projetant de Cohen-Macaulay. On donne enfin les théorèmes de liaison globale et locale qui révèlent l'intérêt de la liaison en codimension 2.

Soit donc  $V_1$  un sous-schéma de codimension 2 de  $\mathbf{P}_k^n$ , à cône projetant de Cohen-Macaulay. Alors  $\mathcal{O}_{V_1}$  possède une résolution projective minimale à homomorphismes gradués de degré 0, de la forme:

$$0 \rightarrow \sum_1^{m-1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-n_i) \xrightarrow{\varphi} \sum_1^m \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-d_j) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_{V_1} \rightarrow 0, \quad (*)$$

où  $m$  est le nombre minimal de générateurs de l'idéal gradué  $I(V_1)$  définissant le cône de Cohen-Macaulay de  $V_1$  et où les  $d_i$  sont les degrés

des éléments d'un système minimal de générateurs homogènes de  $I(V_1)$ . On sait alors que  $I(V_1)$  est engendré par les  $(m-1)$ -mineurs de la matrice  $\varphi$  (dont le coefficient  $\varphi_{ij}$  est homogène de degré  $n_j - d_i$ ), ces mineurs étant homogènes de degrés  $d_i$ . On vérifie que les entiers  $m, n_j, d_i$  sont strictement positifs (avec évidemment  $m \geq 2$ ) et reliés par la relation:

$$(i) \quad \sum_1^{m-1} n_j = \sum_1^m d_i.$$

Soient  $A_1, \dots, A_m$  les  $(m-1)$ -mineurs de la matrice  $\varphi$ . Si  $F$  et  $G$  sont les équations homogènes d'une intersection complète  $X$  contenant  $V_1$ . On a

$$F = \sum_1^m \lambda_i A_i \quad \text{et} \quad G = \sum_1^m \mu_i A_i.$$

Le schéma  $V_2$ , lié à  $V_1$  par  $X$  a alors son cône projetant de Cohen-Macaulay défini par l'idéal  $I(V_2)$  engendré par les  $m$ -mineurs de la matrice  $(m+1) \times m$  qui suit

$$\psi = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \text{\scriptsize } {}^t\varphi \\ \lambda_1, \dots, \lambda_m \\ \mu_1, \dots, \mu_m \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Si  $f = d^\circ F$  et  $g = d^\circ G$ , on a

$$(ii) \quad \boxed{\begin{array}{l} + d^\circ \psi_{ij} = N_j - D_i \quad \text{avec} \\ + N_j = f + g - d_j \\ + D_i = f + g - n_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-1 \\ + D_m = g, \quad D_{m+1} = f \end{array}}.$$

On montre alors facilement que les  $m$ -mineurs de  $\psi$  sont homogènes de degrés  $D_i, i = 1, \dots, m+1$ , et on obtient la résolution projective suivante de  $\mathcal{O}_{V_2}$ :

$$0 \rightarrow \sum_1^m \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-N_j) \xrightarrow{\psi} \sum_1^{m+1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-D_i) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_{V_2} \rightarrow 0. \quad (**)$$

Il faut remarquer que la résolution  $(**)$  n'est pas forcément minimale. En fait comme on est parti d'une résolution minimale de  $\mathcal{O}_{V_1}$ , tous les coefficients de  $\varphi$  (donc de  ${}^t\varphi$ ) sont contenus dans l'idéal maximal  $(X_0, \dots, X_n)$  de  $k[X_0, \dots, X_n]$ . Le nombre minimal de générateurs de l'idéal  $I(V_2)$  sera donc  $(m+1), m$  ou  $(m-1)$  si la matrice,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1, \dots, \lambda_m \\ \mu_1, \dots, \mu_m \end{pmatrix}$$

n'a pas de mineur inversible, a un 1-mineur inversible mais pas de 2-mineur inversible, ou a un 2-mineur inversible, mais nous reviendrons sur cette question dans le théorème de liaison.

Les suites exactes (\*) et (\*\*) permettent de calculer les polynômes de Hilbert de  $V_1$  et  $V_2$ .

**Proposition 3.1.** *Soit  $C$  une courbe de  $\mathbf{P}_k^3$  à cône projetant de Cohen-Macaulay admettant la résolution projective (\*). Le degré  $d(C)$  et le genre arithmétique  $p(C)$  de  $C$  sont donnés par les formules:*

$$(iii) \quad 2d(C) = \sum_1^{m-1} n_j^2 - \sum_1^m d_i^2;$$

$$(iv) \quad p(C) = 1 + \frac{1}{6} \left[ \sum_1^{m-1} n_j^3 - \sum_1^m d_i^3 \right] - 2d(C);$$

Si  $X$  est une courbe de  $\mathbf{P}_k^3$ , contenant  $C$ , intersection complète de deux surfaces de degrés  $f$  et  $g$ , le degré et le genre arithmétique de la courbe  $C'$  liée à  $C$  par  $X$  satisfont les relations

$$(v) \quad d(C) + d(C') = f \cdot g;$$

$$(vi) \quad p(C) - p(C') = \left( \frac{f+g}{2} - 2 \right) (d(C) - d(C')).$$

Remarquons que la formule (v) est évidente lorsque la liaison est géométrique. Les formules (v) et (vi) sont des conséquences directes des formules (ii), (iii) et (iv). On démontre (iii) et (iv) en calculant le polynôme de Hilbert de  $C$  au moyen de (\*), et en appliquant le théorème de Riemann-Roch.

*Remarque.* La formule (vi) montre que sauf dans le cas où  $X$  est une courbe plane et lorsqu'une des surfaces liantes est un plan les variations du degré et du genre par liaison ont même signe

**3.2. Théorème de liaison globale.** *Soit  $V$  un sous-schéma fermé (resp. génériquement intersection complète) de codimension 2 de l'espace projectif  $\mathbf{P}_k^n$  sur un corps infini  $k$ . Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i)  *$V$  a un cône projetant de Cohen-Macaulay (i.e. l'anneau de ce cône est  $\sum_{v \in \mathbf{Z}} H^0(V, \mathcal{O}_V(v))$  et  $H^i(V, \mathcal{O}_V(v)) = 0$  pour tout  $1 \leq i < n-2$  et tout  $v \in \mathbf{Z}$ ).*

(ii) *Il existe des sous-schémas fermés  $V_1, \dots, V_s$  de codimension 2 de  $\mathbf{P}_k^n$  tels que*

a) *pour  $i < s$ , les schémas  $V_i$  et  $V_{i+1}$  sont liés algébriquement (resp. géométriquement et  $V_i \cap V_{i+1}$  a un cône projetant de Gorenstein).*

b)  *$V_1 = V$  et  $V_s$  est une intersection complète.*

De plus, sous ces conditions, le plus petit entier  $s$  pour lequel on a une telle suite est égal au nombre minimal de générateurs de l'idéal gradué définissant le cône de Cohen-Macaulay de  $V$ , diminué de un.

**3.3. Théorème de liaison locale.** Soit  $R$  un anneau local régulier (resp. à corps résiduel infini) et soit  $R/\mathfrak{a}$  un quotient de  $R$  (resp. génériquement intersection complète) de codimension 2. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i)  $R/\mathfrak{a}$  est de Cohen-Macaulay.

(ii) Il existe des quotients de codimension 2 de  $R$ , soient  $R/\mathfrak{a}_1, \dots, R/\mathfrak{a}_s$  tels que

a) pour  $i < s$ , les quotients  $R/\mathfrak{a}_i$  et  $R/\mathfrak{a}_{i+1}$  sont liés algébriquement (resp. géométriquement et  $R/(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_{i+1})$  est un anneau de Gorenstein).

b)  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$  et  $R/\mathfrak{a}_s$  est une intersection complète. De plus, sous ces conditions, le plus petit  $s$  pour lequel on a une telle suite est égal au nombre minimal de générateurs de  $\mathfrak{a}$ , diminué de un.

Pour ces deux théorèmes, l'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i) résulte immédiatement de 1.2 ou 1.3.

Les implications inverses résultent formellement des lemmes suivants:

**Lemme 3.4.** Soit  $R$  un anneau local régulier, et soit  $R/\mathfrak{a}$  un quotient de codimension 2 de  $R$  tel que  $R/\mathfrak{a}$  soit de Cohen-Macaulay. Le nombre minimal de générateurs de  $\Omega^0(R/\mathfrak{a}) = \text{Ext}_R^2(R/\mathfrak{a}, R)$  est égal au nombre minimal de générateurs de  $\mathfrak{a}$  diminué de un.

En effet, soit  $m$  le nombre minimal de générateurs de  $\mathfrak{a}$ . Alors  $R/\mathfrak{a}$  admet une résolution projective minimale

$$0 \rightarrow R^{m-1} \rightarrow R^m \rightarrow R. \quad (*)$$

En appliquant à (\*) le foncteur  $\text{Hom}_R(\cdot, R)$ , on obtient une résolution projective minimale de  $\text{Ext}_R^2(R/\mathfrak{a}, R)$ , ce qui prouve le lemme.

**Lemme 3.5.** Dans les hypothèses du lemme précédent, soit  $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$  une suite  $R$ -régulière contenue dans  $\mathfrak{a}$  et soit  $R/\mathfrak{b}$  le quotient de  $R$  lié à  $R/\mathfrak{a}$  par  $R/\underline{\alpha}$ . Le nombre minimal de générateurs de  $\mathfrak{b}$  est égal au nombre minimal de générateurs de  $\mathfrak{a}/\underline{\alpha}$  augmenté de un.

C'est une conséquence de l'isomorphisme de décalage  $\text{Ext}_R^2(R/\mathfrak{b}, R) \simeq \text{Hom}_{R/\underline{\alpha}}(R/\mathfrak{b}, R/\underline{\alpha}) = \mathfrak{a}/\underline{\alpha}$ , et du lemme précédent.

**Proposition 3.6.** Soit  $R$  un anneau local régulier de corps résiduel  $k$ . Soit  $R/\mathfrak{a}$  un quotient de Cohen-Macaulay de codimension 2 de  $R$  tel que  $\dim_k k \otimes \mathfrak{a} = n$ . Si  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux éléments de  $\mathfrak{a}$ , formant une suite  $R$ -régulière, tels que  $(\alpha_1, \alpha_2)$  se prolonge en un système minimal de générateurs de  $\mathfrak{a}$ , et si  $R/\mathfrak{b}$  est le lié de  $R/\mathfrak{a}$  par rapport à  $R/\underline{\alpha}$ , alors  $\dim_k (k \otimes \mathfrak{b}) =$

$n-1$ . De plus, si la liaison est géométrique  $R/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$  est un anneau de Gorenstein, et  $\dim_k k \otimes (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = 2n-3$ .

La première partie de la proposition est une conséquence immédiate du lemme précédent. Pour la deuxième partie, toujours d'après le lemme précédent, on a  $n = \dim k \otimes \mathfrak{a} = \dim(k \otimes \mathfrak{b}/\underline{\alpha}) + 1$ . Ceci implique que  $\dim_k(k \otimes \mathfrak{b}/\underline{\alpha}) = \dim_k(k \otimes \mathfrak{b})$ , et cela entraîne

$$\dim_k k \otimes (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \dim_k k \otimes (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\underline{\alpha}.$$

Mais comme la liaison est géométrique  $\underline{\alpha} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ , donc

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\underline{\alpha} = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \oplus \mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}).$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} \dim_k k \otimes (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) &= \dim_k k \otimes \Omega^0(R/\mathfrak{b}) + \dim_k k \otimes \Omega^0(R/\mathfrak{a}) \\ &= (n-2) + (n-1) = 2n-3. \end{aligned}$$

Au vu de ces trois résultats, pour démontrer le théorème global, il suffit de démontrer que si  $V = \text{Proj } k[X_0, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ , on peut « bien » choisir des éléments homogènes dans  $\mathfrak{a}$ , plus précisément, on a

**Lemme 3.7.** *Soit  $k$  un corps infini, et soit  $k[x_0, \dots, x_n] = R$  un quotient gradué de l'anneau de polynômes.*

*Soit  $\mathfrak{a}$  un idéal gradué de  $R$ , contenant un élément régulier de  $R$ . Alors il existe un élément homogène  $\alpha$  de  $\mathfrak{a}$ , régulier dans  $R$  et faisant partie d'un système minimal de générateurs de  $\mathfrak{a}$ . Si de plus,  $R/\mathfrak{a}$  est génériquement intersection complète dans  $R$ , il existe un tel élément  $\alpha$  tel que  $R/\mathfrak{a}$  soit génériquement intersection complète dans  $R/\alpha$ .*

Soit  $g$  le plus grand entier  $i$  tel que  $\mathfrak{a}_i \not\subset (x_0, \dots, x_n)\mathfrak{a}$  (où bien sûr  $\mathfrak{a} = \sum_{i \geq 1} \mathfrak{a}_i$ ). Considérons le  $k$ -espace vectoriel fini  $\mathfrak{a}_g$ . On a  $\mathfrak{a}^g \subset \mathfrak{a}_g R$ . Soient  $p_1, \dots, p_l$  les idéaux premiers associés à  $R$ . Comme  $\mathfrak{a} \not\subset p_i$  pour tout  $i = 1, \dots, l$ , on a  $\mathfrak{a}_g \cap p_i \subsetneq \mathfrak{a}_g$  pour  $i = 1, \dots, l$ . D'après le lemme d'évitement pour les espaces vectoriels finis sur un corps infini, on peut trouver un élément  $\alpha$  de  $\mathfrak{a}_g$  tel que  $\alpha \notin ((x_0, \dots, x_n)\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_g)$  et  $\alpha \notin (\mathfrak{a}_g \cap p_i)$  pour  $i = 1, \dots, l$ . Alors  $\alpha$  est bien un générateur minimal homogène de  $\mathfrak{a}$ , régulier dans  $R$ .

Supposons maintenant  $R/\mathfrak{a}$  génériquement intersection complète dans  $R$ . Si  $R/\mathfrak{a}$  est artinien, alors  $R/\mathfrak{a}$  est intersection complète, et il n'y a pas de problème. Si  $\dim R/\mathfrak{a} \geq 1$ , soient  $q_1, \dots, q_l$  les idéaux premiers minimaux contenant  $\mathfrak{a}$ . Comme  $\mathfrak{a}_g R_{q_i} = \mathfrak{a} R_{q_i}$ , pour  $i = 1, \dots, l$ , on en déduit  $\mathfrak{a}_g \not\subset q_i \mathfrak{a} R_{q_i} \cap R$  pour  $i = 1, \dots, l$  autrement dit  $\mathfrak{a}_g \cap (q_i \mathfrak{a} R_{q_i} \cap R) \subsetneq \mathfrak{a}_g$  pour  $i = 1, \dots, l$ . Toujours en utilisant le lemme d'évitement sur les

corps infinis, on termine la démonstration du lemme en vérifiant qu'un élément régulier  $\alpha$  de  $R$  tel que  $\alpha \notin (q_i \cap R_{q_i} \cap R)$  pour  $i = 1, \dots, l$  est tel que  $R/\alpha$  est génériquement intersection complète dans  $R/\alpha$ .

Pour démontrer le théorème local, il suffira de démontrer le résultat suivant :

**Lemme 3.8.** *Soit  $R$  un anneau local noethérien. Soit  $R/\alpha$  un quotient de  $R$  tel que  $\alpha$  contienne un élément non diviseur de 0. Alors il existe un élément  $\alpha$  de  $\alpha$  non diviseur de 0, appartenant à un système minimal de générateurs de  $\alpha$ . Si de plus,  $R/\alpha$  est génériquement intersection complète dans  $R$ , et si le corps résiduel de  $R$  est infini, il existe un tel élément tel que  $R/\alpha$  soit génériquement intersection complète dans  $R/\alpha$ .*

La démonstration suit le même cheminement que celle du lemme précédent. Pour la première partie, il suffit d'éviter les idéaux premiers associés à  $R$ , et l'idéal  $\mathfrak{m}_\alpha$  (où  $\mathfrak{m}$  est l'idéal maximal de  $R$ ). Pour la deuxième partie il faut aussi éviter les idéaux  $q \cap R_q \cap R$  pour tout idéal premier  $q$  minimal contenant  $\alpha$ . On utilise ici le lemme d'évitement sur un corps infini et le lemme de Nakayama.

L'inconvénient du théorème de liaison globale présenté ici est que si on sait a priori que le schéma  $V$  a certaines propriétés géométriques (localement intersection complète, conditions  $R_i$ , non singularité), on ne sait pas si ces propriétés peuvent se transmettre au  $V_i$ . C'est cette question que nous résolvons au paragraphe suivant.

#### § 4. Conservation des propriétés géométriques par liaison

Rappelons pour mémoire, deux énoncés classiques que nous utiliserons systématiquement dans cette section. Le premier est la forme générale d'un lemme de Serre que nous démontrerons, car il n'en existe pas de preuve publiée à notre connaissance. Le deuxième est le théorème de Bertini pour la lissité que nous ne démontrerons pas bien sûr.

**Lemme de Serre.** *Soit  $X$  un schéma de type fini sur un corps infini  $k$ . Soit  $E$  un faisceau cohérent sur  $X$ , et soit  $s$  un entier tel que pour tout point  $x$  de  $X$ , le  $k(x)$ -espace vectoriel  $E(x)$  est de rang  $> s$ . Si  $M \subset \Gamma(X, E)$  est un  $k$ -espace vectoriel fini engendrant  $E$  en codimension  $\leq s$ , et si  $(a_1, \dots, a_l)$  est une base de  $M$ , il existe un ouvert dense  $U$  de  $\mathbf{A}^l(k)$ , tel que pour tout point fermé rationnel sur  $k$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$  de  $U$ , la section  $f_\alpha = \sum_1^l \alpha_i a_i$  est telle que l'application  $\mathcal{O}_X \xrightarrow{f_\alpha} E$  induit pour tout point  $x$ , de codimension  $\leq s$  dans  $X$ , une injection  $0 \rightarrow k(x) \xrightarrow{f_\alpha \otimes k(x)} E(x)$ .*

Posons  $V = \mathbf{A}_k^l = \text{Spec } k[T_1, \dots, T_l]$  et  $Y = X \times_k V$ . Considérons la section  $f = \sum T_i a_i$  du  $Y$ -faisceau  $E_Y$ . Soit  $\eta$  le point générique de  $V$  et

soit  $Y_\eta$  la fibre générique de la projection  $p_2: Y \rightarrow V$ . Montrons que pour tout point  $y \in Y_\eta$ , tel que  $\text{Codimension}_{Y_\eta}(y) \leq s$ , l'application induite  $k(y) \xrightarrow{f \otimes k(y)} E_{Y_\eta}(y)$  est une injection.

Soit  $x$  l'image de  $y$  par la projection  $Y \rightarrow X$ . Considérons donc l'application

$$\pi_y: k(y) \xrightarrow{\sum \bar{T}_i \bar{a}_i} E(x) \otimes_{k(x)} k(y) \quad (*)$$

où  $\bar{T}_i$  est l'image de  $T_i$  dans  $k(y)$  et  $\bar{a}_i$  l'image de  $a_i$  dans  $E(x)$ . Supposons par exemple que  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_d$  (avec  $d > s$ ) forment une base de  $E(x)$  sur  $k(x)$  et que pour  $i > d$  on a  $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^d \beta_j^i \bar{a}_j$  (où  $\beta_j^i \in k(x)$ ). Alors

$$\pi_y(1) = (\bar{T}_1 + \sum_{i>d} \beta_1^i \bar{T}_i) \bar{a}_1 + \dots + (\bar{T}_d + \sum_{i>d} \beta_d^i \bar{T}_i) \bar{a}_d.$$

Si  $\pi_y$  n'est pas injective, on a donc  $\bar{T}_k + \sum_{i>d} \beta_k^i \bar{T}_i = 0$  pour  $k = 1, \dots, d$ .

Ceci implique  $d_{k(x)}^0(k(y)) \leq l - d$ . Comme la fibre de  $x$  par la projection  $Y \rightarrow X$  est de dimension  $l$ , on en déduit que  $y$  est de codimension  $\geq d$  dans cette fibre et a fortiori que  $y$  est de codimension  $\geq d > s$  dans  $Y$ .

Soit  $F$  l'ensemble des points  $y$  de  $Y$  tels que  $k(y) \xrightarrow{f \otimes k(y)} E_Y(y)$  n'est pas une injection. Comme  $F$  est fermé, on sait que l'ensemble  $Z$  des points  $z$  de  $Y$  tels que  $\text{codim}_z(F \times_k k(p_2(Z))), Y \times_k k(p_2(Z)) \leq s$  est constructible (E.G.A. Chap. IV. 9.9.1). On en déduit que  $p_2(Z)$  est constructible. On vient de montrer que  $p_2(Z)$  ne contenait pas  $\eta$ . Il existe donc un voisinage ouvert  $U$  de  $\eta$  dans  $V$  (i.e. un ouvert dense de  $V$ ) ne rencontrant pas  $p_2(Z)$ . Autrement dit, pour tout point  $\alpha$  de  $U$  et pour tout point  $y$  de  $p_2^{-1}(\alpha)$  on sait que  $\text{codim}_y(F_\alpha, Y_\alpha) > s$  ce qui implique que l'application  $k(y) \xrightarrow{f \otimes k(y)} E_Y(y)$  est une injection si  $\text{codim}(y) \leq s$  et le lemme est démontré.

**Théorème de Bertini.** Soit  $k$  un corps algébriquement clos; soit  $X$  un schéma sur  $k$ , possédant la propriété  $R_s$ , soit un morphisme de type fini  $f: X \rightarrow \mathbf{P}_k^n = \text{Proj } k[X_0, \dots, X_n]$ . Alors, si  $\text{car } k = 0$ , ou si  $f$  est non ramifié il existe un ouvert dense  $U$  de l'espace affine  $\mathbf{A}^{n+1}(k)$  tel que pour tout point fermé  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  de  $U$  la section hyperplane  $f^{-1}(H_\alpha)$ , où  $H_\alpha$  est l'hyperplan d'équation  $\sum_{i=0}^n \alpha_i X_i$ , possède la propriété  $R_s$ .

L'énoncé qui suit est le résultat clef pour la conservation des propriétés géométriques par liaison. Une analyse rapide de la démonstration montre que l'hypothèse  $\text{codim } V = 2$  est en fait inutile, et qu'on peut obtenir le même résultat en remplaçant  $S_{\alpha_1} \cap S_{\alpha_2}$  par  $S_{\alpha_1} \cap \dots \cap S_{\alpha_d}$ , où  $d = \text{codim } V$  (Hironaka a d'ailleurs démontré un théorème de ce type dans

([7]), avec  $V$  lisse, et sans les précisions données ici sur les  $\alpha_i$ , précisions qui, comme on l'a vu, jouent un rôle important pour la liaison en codimension 2). Par contre, nous avons voulu écrire la proposition dans toute sa généralité pour ce qui est du comportement du lieu singulier, car elle montre qu'on peut toujours lier une courbe réduite localement intersection complète de  $\mathbf{P}_k^3$  (resp. une surface normale localement intersection complète de  $\mathbf{P}_k^4$ ) à une courbe lisse (resp. à une surface lisse). Jusqu'à la fin du § 4, le corps  $k$  sera algébriquement clos.

**Proposition 4.1.** *Soit  $V$  un sous-schéma fermé, sans composante immergée, génériquement intersection complète de codimension 2 dans  $P = \mathbf{P}_k^l$ , défini par un idéal gradué  $\mathfrak{a}$  de  $k[X_0, \dots, X_l]$ . Soit  $U_1$  l'ouvert de  $V$  formé des points de  $V$  où  $V$  est intersection complète dans  $P$ , et soit  $U_2$  l'ouvert des points réguliers de  $V$ .*

*Il existe des équations homogènes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de  $\mathfrak{a}$  définissant deux hypersurfaces  $S_{\alpha_1}$  et  $S_{\alpha_2}$  se coupant proprement telles que  $S_{\alpha_1} \cap S_{\alpha_2} = V \cup V'$  où*

- 1)  $V$  et  $V'$  n'ont pas de composantes communes.
- 2)  $V \cap V' \cap U_1$  est localement intersection complète.
- 3)  $V'$  est intersection complète en tout point de codimension  $\leq 3$  de  $V' \cap U_1$ .
- 4)  $V' - V \cap V'$  est non singulier.
- 5)  $V \cap V' \cap U_2$  est non singulier en codimension 2, et

$$\text{codim}(V \cap V' \cap (U_1 - U_2), U_1 - U_2) \geq 1.$$

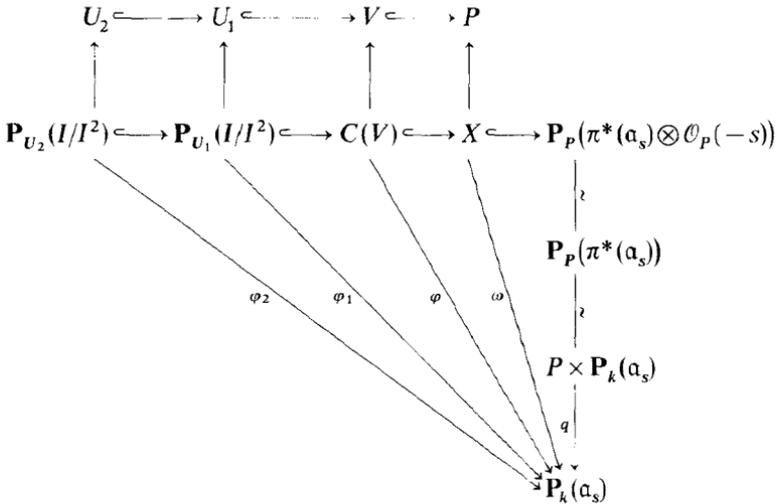
- 6)  $V'$  est non singulier en tout point  $x$  de  $V' \cap U_2$  de codimension  $\leq 3$  dans  $V'$ .

*De plus, pour obtenir les conditions 1), 2), 3) (resp. les conditions 1), 2), 3), 4), 5), 6) si  $k$  est de caractéristique 0), on peut choisir les éléments  $(\alpha_1, \alpha_2)$  de sorte qu'ils appartiennent à un système minimal de générateurs de  $\mathfrak{a}$ . En toutes caractéristiques, on peut prendre les éléments  $\alpha_i$  de degré  $d_i$  pourvu que  $d_1 > \inf\{s, \alpha_s k[X_0, \dots, X_l]\}$  définit le schéma  $V$*

$$d_2 > \inf\{t, \alpha_t(k[X_0, \dots, X_l]/\alpha_1)\} \text{ définit } V \text{ dans } k[X_0, \dots, X_l]/\alpha_1\}.$$

Considérons l'idéal gradué  $\mathfrak{a} = \sum_{i \geq 1} \mathfrak{a}_i$  et soit  $e$  le plus petit entier  $i$  tel que l'idéal gradué  $\mathfrak{a}_i k[X_0, \dots, X_l]$  définisse  $V$ , i.e. tel que le sous-espace vectoriel  $\mathfrak{a}_i$  de  $\Gamma(P, I(i))$  (où  $I$  est le faisceau d'idéaux de  $V$  dans  $P$ ) engendre  $I(i)$ . Remarquons qu'on a  $\mathfrak{a}_e \not\subset (X_0, \dots, X_l)\mathfrak{a}$ . Soit  $s \geq e$ . Notons  $\pi$  le morphisme de structure  $P \rightarrow k$ . La surjection  $\pi^*(\mathfrak{a}_s) \rightarrow I(s) \rightarrow 0$  induit une surjection  $\pi(\mathfrak{a}_s) \otimes_{\mathcal{O}_P} (-s) \rightarrow I \rightarrow 0$ . Alors, si  $X$  est l'éclaté de  $V$  dans  $P$ , et  $C(V)$  le diviseur exceptionnel au-dessus de  $V$  dans  $X$ , on en déduit un

diagramme



Les fibrés projectifs  $\mathbf{P}_{U_1}(I/I^2)$  et  $\mathbf{P}_{U_2}(I/I^2)$  sont les images réciproques dans  $C(V)$  de  $U_1$  et  $U_2$  car  $U_1$  est localement intersection complète dans  $P$ , enfin  $q$  est la projection sur le  $2^{\text{ème}}$  facteur.

Il faut remarquer que si  $s > e$ , les morphismes  $\omega, \varphi, \varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des immersions. Ceci se vérifie en utilisant le morphisme d'immersion de Segre:  $P \times_k \mathbf{P}_k(\alpha_{s-1}) \hookrightarrow \mathbf{P}_k(\Gamma(\mathcal{O}_P(1)) \otimes_k \alpha_{s-1})$  et l'injection naturelle  $\Gamma(\mathcal{O}_P(1)) \otimes \alpha_{s-1} \hookrightarrow \alpha_s$ .

Nous allons étudier parallèlement trois cas:

- A. car  $k=0$  et  $s=e$ ,
- B. car  $k > 0$  et  $s=e$ ,
- C.  $s > e$ .

Soit  $\alpha$  un élément général de  $\alpha_s$ .

(i) Dans les 3 cas, comme l'image de  $\alpha_s$  dans  $\Gamma(I/I^2(s))$  engendre  $I/I^2(s)$ , on sait, d'après le lemme de Serre, que la suite  $(*) 0 \rightarrow \mathcal{O}_{U_1} \xrightarrow{-\alpha} I/I^2(s)/U_1$  est exacte et scindée en codimension 1. Pour la même raison, si  $U_1 - U_2 \neq \emptyset$ , on sait aussi que  $(*)$  est exacte et scindée en tout point de  $U_1 - U_2$  de codimension  $\leq 1$  dans  $U_1 - U_2$ . Autrement dit, si  $H_\alpha$  est l'hyperplan de  $\mathbf{P}_k(\alpha_s)$  correspondant à  $\alpha$ , l'ouvert  $\bar{U}_1$  de  $U_1$  tel que  $\bar{U}_1$  soit isomorphe à son image réciproque dans  $\varphi_1^{-1}(H_\alpha)$  et tel qu'il n'y ait pas de plus grand ouvert ayant cette propriété vérifie les relations suivantes:

$$\text{Codim}(U_1 - \bar{U}_1, U_1) \geq 2 \quad \text{et} \quad \text{Codim}((U_1 - U_2) \cap (U_1 - \bar{U}_1), (U_1 - U_2)) \geq 2.$$

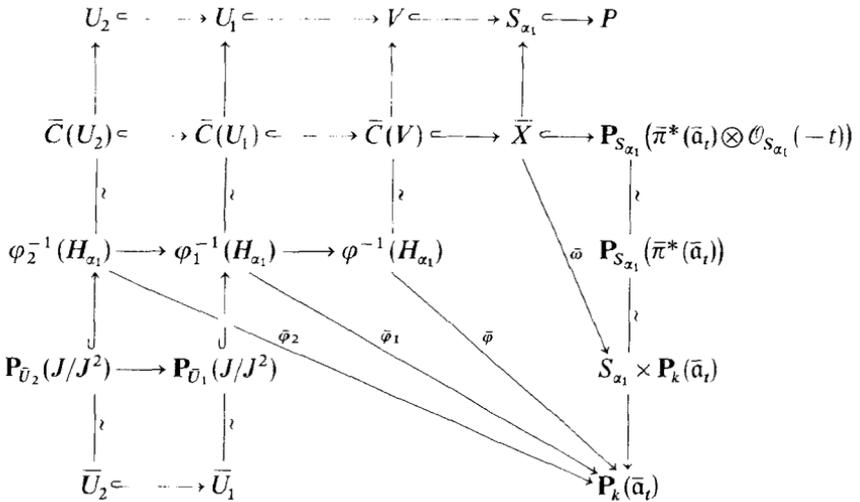
(ii) Dans les cas A et C, on peut appliquer le théorème de Bertini. Soit  $S_\alpha$  l'hypersurface de  $\mathbf{P}_k^l$  définie par  $\alpha$ . On a alors  $S_\alpha - V = \omega^{-1}(H_\alpha) - \varphi^1(H_\alpha)$  non singulier, et  $\varphi_2^{-1}(H_\alpha)$  non-singulier.

(iii) Enfin dans les cas A et B, la section  $\alpha$  de  $\alpha_e$  évitera le sous-espace vectoriel  $(X_0, \dots, X_l) \cap \alpha_e \subsetneq \alpha_e$  donc sera un générateur minimal de  $\alpha$ .

Soit donc  $\alpha_1$  un tel élément, soit  $S_{\alpha_1}$  l'hypersurface qu'il définit et soit  $J$  le faisceau d'idéaux de  $V$  dans  $S_{\alpha_1}$ . Considérons alors l'idéal gradué  $\bar{\alpha} = \alpha/\alpha_1$  de l'anneau gradué  $k[X_0, \dots, X_l]/\alpha_1$ . Soit  $g$  le plus petit  $i$  tel que l'idéal gradué  $\alpha_i(k[X_0, \dots, X_l]/\alpha_1)$  définisse  $V$  dans

$$S_{\alpha_1} = \text{Proj}(k[X_0, \dots, X_l]/\alpha_1),$$

i.e. tel que l'image  $\bar{\alpha}_i$  de  $\alpha_i$  dans  $\Gamma(S_{\alpha_1}, J(i))$  engendre  $I(i)$ . On remarquera que  $\bar{\alpha}_i \notin (X_0, \dots, X_l)\bar{\alpha}$ . Soit alors  $\bar{\pi}$  le morphisme de structure  $S_{\alpha_1} \rightarrow k$ , soit  $\bar{U}_2 = \bar{U}_1 \cap U_2$ , soit  $t$  un entier  $\geq g$ . On montre comme précédemment l'existence du diagramme



où  $\bar{X}$  est l'éclaté de  $V$  dans  $S_{\alpha_1}$ , où  $\bar{C}(V)$  est le diviseur exceptionnel dans  $\bar{X}$ , et où  $\bar{C}(U_1)$  et  $\bar{C}(U_2)$  sont les images réciproques dans  $\bar{C}(V)$  des ouverts  $U_1$  et  $U_2$ . L'isomorphisme  $\bar{C}(V) \simeq \varphi^{-1}(H_{\alpha_1})$ , et les deux autres qui s'en déduisent sont bien connus, enfin la restriction à  $\bar{U}_1$  (a fortiori à  $\bar{U}_2$ ) de  $J/J^2$  étant un fibré vectoriel de rang 1, le reste du diagramme s'explique de lui-même. Comme plus haut, trois cas sont envisagés.

- A. car  $k=0$  et  $t=g$ ,
- B. car  $k>0$  et  $t=g$ ,
- C.  $t>g$ .

Le cas  $t > g$  nous intéresse car on sait qu'alors  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\varphi}_1$  et  $\bar{\varphi}_2$  sont des immersions et on peut appliquer Bertini en toutes caractéristiques.

Considérons alors une section assez générale  $\beta$  de  $\alpha_t$  définissant une hypersurface  $S_\beta$  de  $\mathbf{P}_k^t$  et dont l'image  $\bar{\beta}$  dans  $\bar{\alpha}_t$  définit un hyperplan  $H_\beta$  de  $\mathbf{P}(\bar{\alpha}_t)$ . Dans les trois cas, on aura

(iv)  $S_\beta$  intersecte proprement  $S_{\alpha_1}$ , car  $\bar{\alpha}_t$  engendre  $J(t)$ , et  $J$  définit un fermé de codimension  $> 0$  dans  $S_{\alpha_1}$ .

(v) D'après le lemme de Serre, la suite  $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{U}_1} \xrightarrow{\bar{\beta}} J/J^2(t)$  est exacte et scindée en codimension 0 et aux points génériques de  $\bar{U}_1 - \bar{U}_2$ , i.e. il existe un ouvert dense  $\bar{U}_1$  de  $\bar{U}_1$ , contenant les points génériques de  $\bar{U}_1 - \bar{U}_2$  tel que  $\mathcal{O}_{\bar{U}_1} \xrightarrow{\bar{\beta}} J/J^2(t)/\bar{U}_1$  est un isomorphisme.

(vi) Soit  $F$  le schéma réduit de support  $U_1 - \bar{U}_1$ . On sait que pour tout point  $x$  de  $F$ , on a  $\dim_{k(x)}(k(x) \otimes_{\mathcal{O}_{U_1}} J/J^2) = 2$ . D'après le lemme de Serre, la section  $\bar{\beta}$  est telle que pour tout point  $x$  de codimension  $\leq 1$  dans  $F$ , on ait une injection induite  $k(x) \xrightarrow{\bar{\beta}} (J/J^2(t))(x)$ . Enfin, dans les cas A et C, on aura d'après le théorème de Bertini

(vii)  $\bar{\omega}^{-1}(H_\beta) - \bar{\varphi}^{-1}(H_\beta) = S_2 \cap S_\beta - V$  est non singulier

(viii)  $\bar{\varphi}_2^{-1}(H_\beta)$  est non singulier.

Enfin dans les cas A et B.

(ix) La section  $\bar{\beta}$  est un générateur minimal de  $\bar{\alpha}$  car elle évite  $\bar{\alpha}_t \cap (X_0, \dots, X_t) \bar{\alpha}$  qui est strictement contenu dans  $\bar{\alpha}_t$ .

Soit donc  $\alpha_2$  un élément de  $\alpha_t$  ayant les six propriétés énoncées. Montrons que les hypersurfaces  $S_{\alpha_1}$  et  $S_{\alpha_2}$  vérifient la conclusion du théorème. Posons  $X = S_{\alpha_1} \cap S_{\alpha_2}$ .

Dire que  $V$  et  $V'$  n'ont pas de composante commune, c'est dire que  $V$  et  $V'$  sont géométriquement liées par  $X$ , où de façon équivalente que pour tout point générique  $\eta$  de  $V$ , on a  $\mathcal{O}_{X,\eta} \simeq \mathcal{O}_{V,\eta}$ . Mais on a choisi  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de telle sorte qu'on ait  $\mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathcal{O}_{V,x}$  pour tout point générique  $x$  de  $U_1$ . Or  $V$  est génériquement intersection complète dans  $P$ , donc  $U_1$  est un ouvert dense de  $V$ , ce qui démontre 1). Pour démontrer 2), il suffit de montrer le lemme suivant:

**Lemme 4.2.** Soit  $R$  un anneau local régulier. Soient  $R/\mathfrak{a}$  et  $R/\mathfrak{b}$  des quotients de codimension  $d$  de  $R$  géométriquement liés. Alors si  $R/\mathfrak{a}$  est une intersection complète,  $R/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$  est une intersection complète de codimension  $d + 1$ .

En effet, soit  $R/\mathfrak{x}$  l'intersection complète liant  $R/\mathfrak{a}$  et  $R/\mathfrak{b}$ . On sait que  $\mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{b}/\mathfrak{x} \simeq \text{Ext}_R^d(R/\mathfrak{a}, R) \simeq R/\mathfrak{a}$ . Donc  $(\mathfrak{b} + \mathfrak{a})/\mathfrak{a} \simeq R/\mathfrak{a}$ , ce qui prouve que  $R/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$  est intersection complète de codimension 1 dans  $R/\mathfrak{a}$ , donc une intersection complète de codimension  $d + 1$  dans  $R$ .

Montrons 3). Soit  $x$  un point de codimension  $\leq 3$  de  $V'$  dans  $U_1$ . Si  $x \in \bar{U}_1$ , alors  $\mathcal{O}_{V',x}$  est une intersection complète de codimension 1 dans  $\mathcal{O}_{S_{\alpha_1},x}$  (car la restriction de  $J/J^2$  à  $\bar{U}_1$  est un fibré vectoriel de rang 1 sur  $\bar{U}_1$ ). Montrons alors que  $\mathcal{O}_{V',x}$  est une intersection complète de codimension 1 dans  $\mathcal{O}_{S_{\alpha_1},x}$ . C'est une conséquence du lemme évident suivant:

**Lemme.** Soit  $R$  un anneau commutatif. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux éléments non diviseurs de 0 de  $R$  tels que  $\alpha R \subset \beta R$ . Alors l'annulateur de  $\beta R/\alpha R$  est un idéal principal engendré par un élément non diviseur de 0.

Si  $x \notin \bar{U}_1$ , alors  $x$  est de codimension  $\leq 1$  dans  $F = U_1 - \bar{U}_1$ . On sait alors d'après (vi) que  $\mathcal{O}_{V',x}$  est une intersection complète de codimension 1 dans  $\mathcal{O}_{S_{\alpha_2},x}$ . On conclut alors par le lemme précédent.

On remarque que 1), 2) et 3) sont vrais dans les cas A, B et C. Donc sans restriction sur  $\text{car } k$ , on peut prendre  $(\alpha_1, \alpha_2)$  se prolongeant en un système minimal de générateurs de  $\mathfrak{a}$ . Pour démontrer 4), 5) et 6) plaçons-nous indifféremment dans les cas A ou C.

4) n'est rien d'autre que (vii).

Pour démontrer 5), remarquons que  $\bar{\varphi}_2^{-1}(H_{\alpha_2})$  est un schéma non singulier de codimension 2 dans  $\mathbf{P}_{U_2}(I/I^2)$  dont l'image dans  $U_2$  est  $V \cap V' \cap U_2$ . Soit  $K$  le faisceau d'idéaux de  $V$  dans  $X$ , et soit  $\bar{K}$  sa restriction à  $U_2$ . On a  $\bar{\varphi}_2^{-1}(H_{\alpha_2}) = \text{Proj}(\sum_{n \geq 0} \bar{K}^n/\bar{K}^{n+1})$ . Soit  $x$  un point de codimension  $\leq 2$  de  $V \cap V' \cap U_2$ . Comme  $V \cap V'$  est de pure codimension 1 dans  $V$  et  $V'$ , le point  $x$  est de codimension  $\leq 3$  dans  $U_1$ . On a vu qu'en un tel point,  $\mathcal{O}_{U_1,x}$  est intersection complète de codimension 1 sur  $\mathcal{O}_{S_{\alpha_1},x}$  ou  $\mathcal{O}_{S_{\alpha_2},x}$ . On en déduit que  $\bar{K}_x$  est monogène, donc que  $\text{Proj}(\sum \bar{K}_x^n/\bar{K}_x^{n+1})$  est isomorphe à son image  $\mathcal{O}_{V \cap V',x}$ . L'inégalité

$$\text{Codim}(V \cap V' \cap (U_1 - U_2), (U_1 - U_2)) \geq 1$$

ne fait que traduire le fait qu'on ait choisi  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de telle sorte que pour tout point générique  $\eta$  de  $(U_1 - U_2)$  on ait  $\mathcal{O}_{V,\eta} = \mathcal{O}_{X,\eta}$ , donc  $\eta \notin V'$ .

Enfin, pour démontrer 6), il suffit de voir que  $V \cap V'$  non singulier en  $x$  entraîne  $V'$  non singulier en  $x$ . C'est le lemme suivant (compte tenu de 3)).

**Lemme 4.3.** Soit  $R$  un anneau local régulier, et soient  $R/\mathfrak{a}$  et  $R/\mathfrak{b}$  deux quotients de  $R$ , géométriquement liés. Si  $R/\mathfrak{a}$  est de Gorenstein, et si  $R/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$  est régulier, alors  $R/\mathfrak{a}$  est régulier.

En effet, on a  $\mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \text{Hom}(R/\mathfrak{a}, R/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})) \simeq \text{Ext}_R^d(R/\mathfrak{a}, R) \simeq R/\mathfrak{a}$  (où  $d$  est la codimension de  $R/\mathfrak{a}$  dans  $R$ ). Donc  $(\mathfrak{b} + \mathfrak{a})/\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$  est principal, et  $R/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$  régulier entraîne  $R/\mathfrak{a}$  régulier.

Bien entendu, on a vu que dans le cas A on peut prendre  $(\alpha_1, \alpha_2)$  se prolongeant en un système minimal de générateurs de  $\mathfrak{a}$ , et le théorème est démontré.

Avant de donner les applications de ce théorème, remarquons une des difficultés qui en découlent: Si  $V$  est une variété localement intersection complète de codimension 2 dans  $\mathbf{P}_k^n$  avec  $n \geq 6$ , on ne peut à priori la lier qu'à une variété  $V'$  localement intersection complète en codimension 3 dans  $V'$ , et localement Cohen-Macaulay ailleurs (cette dernière propriété étant stable par liaison). On donnera des explications sur ce phénomène dans le § 5. Combinant 4.1 et 3.6, on obtient le résultat suivant:

**Théorème 4.4.** *Soit  $V$  un sous-schéma fermé localement intersection complète en codimension 3 (resp. non singulier en codimension 3) de codimension 2 dans l'espace projectif  $\mathbf{P}_k^n$  sur un corps  $k$  (resp. car  $k=0$ ), algébriquement clos. Si  $V$  a un cône projetant de Cohen-Macaulay il existe des sous-schémas fermés  $V_1, \dots, V_s$  de codimension 2 de  $\mathbf{P}_k^n$ , tels que*

a)  $V_i$  est localement intersection complète en codimension 3 (resp. non singulier en codimension 3) à cône projetant de Cohen-Macaulay pour  $i=1, \dots, s$ .

b)  $V_i$  et  $V_{i+1}$  sont géométriquement liés pour  $i < s$

c)  $V_i \cap V_{i+1}$  est localement intersection complète en codimension 2 (resp. non singulier en codimension 2) de codimension 3 dans  $\mathbf{P}_k^n$  à cône projetant de Gorenstein, pour  $i < s$ .

d)  $V = V_1$  et  $V_s$  est une intersection complète.

De plus, le plus petit  $s$  pour lequel on a une telle suite est égal au nombre minimal de générateurs de l'idéal gradué définissant le cône de Cohen-Macaulay de  $V$  diminué de un.

*Remarque.* Si  $s$  est minimal, le nombre minimal de générateurs de l'idéal gradué définissant le cône de Gorenstein de  $V_i \cap V_{i+1}$  est  $2(s-i+1)-1$ . C'est aussi une conséquence de 3.6.

On remarquera qu'on a pas utilisé la Proposition 2.1 dans toute sa généralité, et qu'il suffisait par exemple de supposer  $V$  localement intersection complète en codimension 3 et non singulière en codimension 2 pour obtenir le même résultat en caractéristique 0.

Le théorème est évidemment plus frappant en caractéristique 0 pour  $n \leq 5$ , c'est pourquoi nous soulignerons ce cas particulier.

**Théorème 4.5.** *Soit  $V$  une sous-variété lisse de codimension 2 à cône projetant de Cohen-Macaulay dans  $\mathbf{P}_k^n$  ( $n \leq 5$ ), où  $k$  est un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Alors il existe des sous-variétés lisses  $V_i$  ( $i=1, \dots, s$ ) de codimension 2 à cônes projetants de Cohen-Macaulay*

dans  $\mathbf{P}_k^n$ , tels que

- a)  $V_i$  et  $V_{i+1}$  sont géométriquement liées pour  $i < s$ ,
- b)  $V_i \cap V_{i+1}$  est lisse de codimension 3, à cône projetant de Gorenstein pour  $i < s$ ,
- c)  $V = V_1$  et  $V_s$  est une intersection complète.

Le plus petit  $s$  pour lequel on a une telle suite est égal au nombre minimal de générateurs de l'idéal gradué définissant le cône de Cohen-Macaulay de  $V$ , diminué de un.

*Exemple 4.6.* Considérons dans  $\mathbf{P}_k^3$  la cubique gauche  $C$  dont l'idéal gradué est  $(X_0 X_3 - X_1 X_2, X_1^2 - X_0 X_2, X_2^2 - X_0 X_3)$ . On sait que le cône projetant intègre de  $C$  est de Cohen-Macaulay. Soit  $L$  la droite d'idéal gradué  $(X_1, X_2)$ . On constate que  $L \cup C$  est l'intersection complète d'idéal gradué  $(X_1^2 - X_0 X_2, X_2^2 - X_1 X_3)$  et que

$$L \cap C = \text{Proj } k[X_0, \dots, X_3]/(X_1, X_2, X_0 X_3).$$

Cet exemple est aussi très explicite du point de vue matriciel, puisque l'idéal premier gradué de  $C$  est engendré par les 2-mineurs de la matrice

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 \\ X_1 & X_2 \\ X_2 & X_3 \end{pmatrix}.$$

Ceci implique que  $C$  est liée à

la droite d'idéal gradué  $(X_0, X_1)$  par l'intersection complète d'idéal gradué  $(X_0 X_3 - X_1 X_2, X_1^2 - X_0 X_2)$ ,

la droite d'idéal gradué  $(X_1, X_2)$  par l'intersection complète d'idéal gradué  $(X_1^2 - X_0 X_2, X_2^2 - X_1 X_3)$ ,

la droite d'idéal gradué  $(X_2, X_3)$  par l'intersection complète d'idéal gradué  $(X_0 X_3 - X_1 X_2, X_2^2 - X_1 X_3)$ ,

mais la seule de ces trois droites qui coupe transversalement  $C$  est la deuxième.

### § 5. Un schéma localement intersection complète, de codimension 2, à cône projetant de Cohen-Macaulay dans $\mathbf{P}_k^n$ ( $n \geq 6$ ) est intersection complète

Comme l'indique le titre de ce paragraphe pour un schéma  $V$ , de codimension 2 à cône projetant de Cohen-Macaulay, dans un espace projectif  $\mathbf{P}_k^n$  ( $n \geq 6$ ) le fait d'être localement intersection complète en codimension 4 (dans  $V$ ) supprime les problèmes que nous avons cherché à résoudre jusqu'ici.

**Théorème 5.1.** *Soit  $V$  un schéma de pure codimension 2 dans  $\mathbf{P}_k^n$ . Si  $V$  est localement intersection complète en codimension 4, et si  $V$  est localement*

*Cohen-Macaulay* alors  $V$  est localement intersection complète. Si de plus,  $V$  a un cône projetant de Cohen-Macaulay et si  $n \geq 6$ , alors  $V$  est intersection complète et on a  $\text{Pic } V = \mathbb{Z}$ .

Une fois qu'on sait que  $V$  est intersection complète, si  $n \geq 5$ , l'anneau local du sommet du cône de  $V$  est parafactoriel. Ceci implique que  $\text{Pic } V = \mathbb{Z}$  et est engendré par  $\mathcal{O}_V(1)$ .

Pour démontrer 5.1, il suffit donc de démontrer le théorème local qui suit

**Théorème 5.2.** *Soit  $R$  un anneau local régulier et soit  $R/\mathfrak{a}$  un quotient de codimension 2 de  $R$  qui est Cohen-Macaulay. Supposons  $\dim R \geq 7$ . Si pour tout idéal premier non maximal  $p$  de  $R$ , l'anneau local  $(R/\mathfrak{a})_p$  est intersection complète dans  $R_p$ , alors  $R/\mathfrak{a}$  est intersection complète dans  $R$ .*

Soit  $m$  le nombre minimal de générateurs de  $\mathfrak{a}$ . Supposons  $m \geq 3$  et montrons que ceci implique  $\dim R < 7$ . Soit  $\varphi$  une matrice  $m \times (m-1)$  telle que  $R/\mathfrak{a}$  admette la résolution minimale suivante :

$$0 \rightarrow R^{m-1} \xrightarrow{\varphi} R^m \rightarrow R \rightarrow R/\mathfrak{a} \rightarrow 0.$$

Dire que pour tout idéal premier non maximal  $p$  de  $R$ , l'anneau local  $(R/\mathfrak{a})_p$  est intersection complète dans  $R_p$ , c'est dire que les  $(m-2)$ -mineurs de  $\varphi$  engendrent un idéal de définition dans  $R$ . Considérons l'anneau de polynômes  $S = R[X_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m-1}}$ . Soit  $f: S \rightarrow R$  l'homomorphisme de  $R$ -algèbres défini par  $f(X_{ij}) = \varphi_{ij}$  où  $(\varphi_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m-1}}$  sont les coefficients de la matrice  $\varphi$ .

Soit  $\mathfrak{q}$  l'idéal engendré dans  $S$  par les  $(m-2)$ -mineurs de la matrice  $\bar{X}$  de coefficients  $X_{ij}$ . On sait que la codimension dans  $S$  de  $S/\mathfrak{q}$  est  $[(m-1) - (m-2) + 1][m - (m-2) + 1] = 6$  (Eagon Northcott). Dire que les  $(m-2)$ -mineurs de  $\varphi$  engendrent un idéal de définition dans  $R$ , c'est dire que  $S/\mathfrak{q} \otimes_S R$  est de longueur finie. On en déduit d'après le théorème sur la dimension d'intersection  $\dim S/\mathfrak{q} + \dim R \leq \dim S$ , ce qui implique  $\dim R \leq \text{codim}(S/\mathfrak{q}, S) = 6$ .

*Remarque 1.* Hartshorne a déjà démontré que toute variété lisse de codimension 2, à cône projetant de Cohen-Macaulay de  $\mathbb{P}_C^n$ , avec  $n \geq 6$  est une intersection complète.

*Remarque 2.* On peut démontrer en suivant le même principe que si  $R/\mathfrak{a}$  est un quotient de Gorenstein de codimension 3 d'un anneau local régulier  $R$ , et si  $R/\mathfrak{a}$  est localement intersection complète, en codimension 13 dans  $\text{Spec } R/\mathfrak{a}$ , alors  $R/\mathfrak{a}$  est une intersection complète. Il suffit de considérer une résolution projective minimale de  $R/\mathfrak{a}$  :

$$0 \rightarrow R \rightarrow R^n \xrightarrow{\varphi} R^n \rightarrow R \rightarrow R/\mathfrak{a} \rightarrow 0. \tag{*}$$

L'assertion se déduit du fait que pour  $n \geq 4$ , les  $(n-3)$ -mineurs de  $\varphi$  définissent un fermé de codimension  $\leq 16$  dans  $\text{Spec } R$ .

Par la même méthode, en utilisant leur théorème de structure ([4]), D. Buchsbaum et D. Eisenbud montrent qu'il suffit que  $R/\mathfrak{a}$  soit localement intersection complète en codimension  $\leq 8$  (cf. ([16])).

*Remarque 3.* On ne sait pas résoudre la question suivante: Soit  $V$  une variété localement intersection complète de pure codimension 2 dans  $\mathbf{P}_k^n$  ou  $n \geq 6$  (on ne suppose rien sur le cône projetant de  $V$ ).

Alors  $V$  est elle une intersection complète?

On ne sait pas la résoudre non plus lorsque  $V$  est lisse ([8]).

*Remarque 4.* Le Théorème 5.1 est évidemment le meilleur qu'on puisse obtenir du point de vue dimensionnel. En effet, la variété  $\mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^2$  plongée dans  $\mathbf{P}_k^5$  par le morphisme de Segré a un cône projetant de Cohen-Macaulay dont l'idéal gradué est engendré par les 2-mineurs de la matrice

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_3 \\ X_1 & X_4 \\ X_2 & X_5 \end{pmatrix}.$$

Ce qui prouve bien que  $\mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^2$  n'est pas intersection complète dans  $\mathbf{P}_k^5$ .

### § 6. Déformation «universelle» des variétés de codimension 2, à cône de Cohen-Macaulay de $\mathbf{P}_k^n$ ( $n \leq 5$ ) sur un corps algébriquement clos $k$

Soit  $V$  un sous-schéma fermé de codimension 2, à cône de Cohen-Macaulay dans  $\mathbf{P}_k^n$ . On a vu qu'on pouvait associer à  $V$  une famille d'entiers:  $m, n_j$  ( $j=1, \dots, m-1$ ),  $d_i$  ( $i=1, \dots, m$ ), vérifiant l'égalité  $\sum_{j=1}^{m-1} n_j = \sum_{i=1}^m d_i$ , provenant d'une résolution projective minimale de  $\mathcal{O}_V$ :

$$0 \rightarrow \sum_{j=1}^{m-1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-n_j) \xrightarrow{\varphi} \sum_{i=1}^m \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-d_i) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_V \rightarrow 0. \quad (*)$$

**Proposition 6.1.** Les entiers  $m, n_j$  et  $d_i$  sont uniquement déterminés par  $V$  et le faisceau très ample  $\mathcal{O}_V(1)$ .

Pour  $m$  c'est évident. Pour les  $d_i$  et les  $n_j$ , on fait une récurrence sur  $m$ . Si  $m=2$ , i.e. si  $V$  est une intersection complète, soit  $\mathfrak{a}(V)$  le faisceau d'idéaux définissant  $V$ , alors

$$\inf(d_i) = \inf \{s, \mathfrak{a}(V)(s) \text{ a une section}\},$$

$$\sup(d_i) = \inf \{s, \mathfrak{a}(V)(s) \text{ est unengendré par ses sections}\},$$

$$n_1 = d_1 + d_2.$$

Si  $m \geq 3$ , soient  $F$  et  $G$ , deux éléments homogènes appartenant à un système minimal de générateurs de l'idéal gradué maximal définissant  $V$ , et formant une suite régulière dans  $k[X_0, \dots, X_n]$ . Soit  $V'$  le schéma lié à  $V$  par l'intersection complète définie par  $F$  et  $G$ . Comme l'idéal gradué maximal définissant  $V'$  est engendré par  $(m-1)$  éléments, on sait par hypothèse de récurrence, que les entiers associés à  $V'$ , soient  $D_i$  ( $i=1, \dots, m-1$ ) et  $N_j$  ( $j=1, \dots, m-2$ ) sont uniquement déterminés par  $V'$ . Si  $f$  et  $g$  sont les degrés de  $F$  et  $G$ , on a vu (§ 3, formules (ii)) qu'on avait nécessairement

$$\begin{aligned} n_j &= f + g - D_j \quad \text{pour } j = 1, \dots, m-1, \\ d_i &= f + g - N_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-2, \quad d_{m-1} = g \quad \text{et} \quad d_m = f; \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

Réciproquement, soit  $m, n_j$  ( $j=1, \dots, m-1$ ),  $d_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) une telle famille d'entiers. Existe-t-il un schéma du type étudié qui la représente 3 et si oui, quel est-il? Le théorème suivant répond complètement à la question lorsque  $n_i - d_j > 0$  pour tous  $i, j$ . Cette restriction n'est pas arbitraire. En effet, considérons la résolution minimale (\*) de  $\mathcal{O}_V$ , alors on sait que si  $\varphi$  est représenté par la matrice  $(\varphi_{ij})$  on a  $d^0 \varphi_{ij} = n_j - d_i$ , donc  $n_j - d_i \leq 0$  implique  $\varphi_{ij} = 0$  (car la résolution est minimale). On verra plus loin, par un contre-exemple que le théorème qui suit n'est pas vérifié lorsqu'on ne fait pas la restriction  $n_j - d_i > 0$  pour tous  $i, j$ .

**6.2. Théorème de déformation.** Soient  $m \geq 2$ ,  $n_j$  ( $j=1, \dots, m-1$ ) et  $d_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) des entiers strictement positifs tels que  $\sum_1^{m-1} n_j = \sum_1^m d_i$  et  $n_j - d_i > 0$  pour tous  $i, j$ . Soit  $e$  un entier tel que  $3 \leq e \leq 5$ . Il existe alors un schéma  $S$  sur  $k$  qui est un ouvert dense d'un espace projectif sur  $k$  et un sous-schéma  $X$  de codimension 2 dans  $\mathbf{P}_S^e$ , plat sur  $S$  tel que

a) le fermé  $X$  de  $\mathbf{P}_S$  possède la résolution projective suivante :

$$0 \rightarrow \sum_1^{m-1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}_S^e}(-n_j) \rightarrow \sum_1^m \mathcal{O}_{\mathbf{P}_S^e}(-d_i) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_S^e} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0. \quad (*)_S$$

b) Pour tout point fermé  $s$  de  $S$ , la fibre  $X(s)$  est un sous-schéma de codimension 2 dans  $\mathbf{P}_k^e$  à cône de Cohen-Macaulay dont  $(*)_S \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s)$  est une résolution projective minimale.

c) Pour tout sous-schéma fermé  $V$  de codimension 2 à cône de Cohen-Macaulay dans  $\mathbf{P}_k^e$ , muni d'une résolution projective minimale

$$0 \rightarrow \sum_1^{m-1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^e}(-n_j) \rightarrow \sum_1^m \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^e}(-d_i) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^e} \rightarrow \mathcal{O}_V \rightarrow 0 \quad (*)$$

il existe un point fermé unique  $s$  de  $S$  tel que  $V = X(s)$  et que  $(*) = (*)_S \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s)$ .

De plus, les sous-ensembles suivants de  $S$  sont des ouverts denses de  $S$ .

$$S_I = \{s \in S \text{ tels que } X(s) \text{ est lisse}\},$$

$$S_I = \{s \in S \text{ tels que } X(s) \text{ est localement intersection complète}\}.$$

Soit  $\varphi$  la matrice  $m \times (m-1)$  dont le coefficient  $\varphi_{ij}$  est un poly-môme homogène de degré  $n_j - d_i$ , à coefficients indéterminés en les variables  $T_0, \dots, T_e$ . Le nombre d'indéterminés ainsi introduites est  $N+1 = \sum_{i,j} \binom{n_j - d_i + e}{e}$ .

Soit  $Y$  le sous-schéma fermé de  $\mathbf{P}_{\mathbf{P}_k^N}^N = Z$  défini par l'annulation des  $(m-1)$ -mineurs de la matrice  $\varphi$ . Soit  $\mathcal{O}_Z(1)$  le faisceau très ample sur  $Z$  définissant le morphisme projectif  $Z \rightarrow \mathbf{P}_k^N$ . On a un complexe

$$0 \rightarrow \sum_1^{m-1} \mathcal{O}_Z(-n_j) \xrightarrow{\varphi} \sum_1^m \mathcal{O}_Z(-d_i) \xrightarrow{\wedge^{m-1} \varphi} \mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0. \quad (**)$$

Soient  $S$  l'ensemble des points  $s$  de  $\mathbf{P}_k^N$  tels que  $(**) \otimes_{\mathcal{O}_s} k(s)$  est exacte, et  $X$  l'image réciproque de  $S$  dans  $Z$ . Soient  $S_I$  et  $S_I$  les sous-ensembles de  $S$  définis dans l'énoncé du théorème. On veut montrer que  $S$ ,  $S_I$  et  $S_I$  sont des ouverts non vides de  $\mathbf{P}_k^N$ , et que  $X$  est plat sur  $S$ . Montrons d'abord que  $S$ ,  $S_I$  et  $S_I$  sont ouverts. C'est une conséquence du lemme suivant :

**Lemme 6.3.** Soit  $f: Y \rightarrow X$  un morphisme propre et plat de schémas algébriques sur un corps  $k$ . Soit  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  un complexe de  $\mathcal{O}_Y$ -modules cohérents localement libres. L'ensemble des points  $x$  de  $X$  tels que le complexe de  $\mathcal{O}_{f^{-1}(x)}$ -modules,  $\mathcal{E}(x) \rightarrow \mathcal{F}(x) \rightarrow \mathcal{G}(x)$  soit exact est un ouvert de  $X$ .

On sait (E.G.A. IV 9.4.2) que cet ensemble est constructible. Il suffit donc de montrer qu'il est stable par généralisation. On se ramène immédiatement au cas où  $X$  est le spectre d'un anneau de valuation discrète  $R$ , de point générique  $\eta$  et de point fermé  $x$ . Soit  $\delta$  un point de  $f^{-1}(\eta)$ . Comme  $f$  est propre, il existe une spécialisation  $y$  de  $\delta$  dans la fibre spéciale  $f^{-1}(x)$ . Considérons le complexe de  $\mathcal{O}_{Y,y}$ -modules de type fini :

$$\mathcal{E}_y \rightarrow \mathcal{F}_y \rightarrow \mathcal{G}_y.$$

Soit  $t$  une uniformisante de  $R$ . L'hypothèse est que le complexe

$$\mathcal{E}_y/t\mathcal{E}_y \rightarrow \mathcal{F}_y/t\mathcal{F}_y \rightarrow \mathcal{G}_y/t\mathcal{G}_y$$

est exact. Comme  $Y$  est plat sur  $X$ , l'élément  $t$  est régulier dans  $\mathcal{O}_{Y,y}$ . On en déduit par le théorème des Tors que le complexe  $\mathcal{E}_y \rightarrow \mathcal{F}_y \rightarrow \mathcal{G}_y$  est exact, donc que le complexe  $\mathcal{E}_\delta \rightarrow \mathcal{F}_\delta \rightarrow \mathcal{G}_\delta$  est exact, et le lemme est démontré.

Vu la définition de  $S$ , ce lemme démontre bien que  $S$  est ouvert. Donnons maintenant des caractérisations de  $S_i$  et  $S_j$  en terme d'exactitude de complexe qui permettent de conclure que  $S_i$  et  $S_j$  sont ouverts grâce au lemme précédent.

Dire que  $X(s)$  est localement intersection complète, c'est dire que l'idéal de  $k(s)[T_0, \dots, T_e]$  engendré par les  $(m-2)$ -mineurs de  $\varphi(s)$  est primaire pour l'idéal  $(T_0, \dots, T_e)$ . Considérons le complexe de Koszul  $K.$  construit sur  $Z$  à partir des  $(m-2)$ -mineurs de  $\varphi$ . Alors  $S_i$  est formé des points  $s$  de  $S$  tels que les  $(e+1)$  premiers termes à gauche du complexe  $K.(s)$  forment un complexe exact.

Dire que  $X(s)$  est lisse, c'est dire que l'idéal engendré par les 2-mineurs de la matrice jacobienne de  $X(s)$  sur  $k(s)$  et les équations de  $X(s)$  dans  $k(s)[T_0, \dots, T_e]$  définit un fermé de  $k(s)[T_0, \dots, T_e]$  ne contenant pas d'autres idéaux gradué que  $(T_0, \dots, T_e)$ . Considérons le complexe  $\bar{K}.$  de Koszul construit sur  $Z$  à partir des  $(m-1)$ -mineurs de  $\varphi$  et des 2-mineurs de la matrice jacobienne de  $X$  sur  $S$ . Alors  $S_j$  est formé des points  $s$  de  $S$  tels que les  $(e+1)$  premiers termes à gauche du complexe de Koszul  $\bar{K}.(s)$  forment un complexe exact.

Montrons que  $X$  est plat sur  $S$ . Soit  $s$  un point fermé de  $S$ . Il suffit de montrer que  $X_s$  est plat sur  $\mathcal{O}_{S,s}$ . Il suffit alors de montrer que l'anneau local  $A$  du sommet du cône projetant de  $X_s$  est plat sur  $\mathcal{O}_{S,s}$ . Soit  $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  un système régulier de paramètres de  $\mathcal{O}_{S,s}$ . On vérifie immédiatement que  $\underline{\alpha}$  est une suite  $A$ -régulière (car  $A$  est Cohen-Macaulay et  $\dim A/\underline{\alpha} = \dim A - d$ ), ce qui prouve bien que  $A$  est plat sur  $S$ . Pour terminer la démonstration du théorème, il suffit de montrer que  $S_j$  est non vide puisqu'on a évidemment  $S \supset S_1 \supset S_j$ . Pour ceci, on fera une récurrence sur  $m$ . Le résultat est bien vrai pour  $m=2$ , c'est le théorème de Bertini. Posons alors  $g = d_{m-1}$  et  $f = d_m$  et définissons les entiers  $N_j$  ( $j=1, \dots, m-2$ ) et  $D_i$  ( $i=1, \dots, m-1$ ) par :

$$n_i = f + g - D_i \quad (i=1, \dots, m-1) \quad \text{et} \quad d_j = f + g - N_j \quad (j=1, \dots, m-2).$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_1^{m-1} D_i &= (m-1)(f+g) - \sum_1^{m-1} n_i \\ &= (m-1)(f+g) - \sum_1^m d_j \\ &= (m-2)(f+g) - \sum_1^{m-2} d_j = \sum_1^{m-2} N_j. \end{aligned}$$

On a aussi  $N_j - D_i = f + g - d_j - (f + g - n_i) = n_i - d_j > 0$ . Par hypothèse de récurrence il existe  $V$ , une variété lisse, de codimension 2, à cône de Cohen-Macaulay de  $\mathbf{P}_k^e$  dont la famille d'entiers associés est  $(m-1)$ ,  $N_j$  ( $j=1, \dots, m-2$ ) et  $D_i$  ( $i=1, \dots, m-1$ ). Remarquons que  $n_i - f > 0$  et

$n_i - g > 0$  pour tout  $i = 1, \dots, m-1$  entraîne  $g > D_i$  et  $f > D_i$  pour tout  $i = 1, \dots, m-1$ .

On applique alors la Proposition 4.1. Comme  $V$  est lisse de pure codimension 2, plongée dans  $\mathbf{P}_k$ , avec  $e \leq 5$ , et comme  $f$  et  $g$  sont strictement supérieurs aux degrés d'un système minimal de générateurs d'un idéal gradué  $\alpha$  définissant  $V$  dans  $k[X_0, \dots, X_e]$  on sait qu'il existe des polynômes homogènes  $F$  et  $G$  contenus dans  $\alpha$ , de degrés  $f$  et  $g$ , définissant une intersection complète  $X$  telle que  $X = V \cup V'$  où  $V' = V \cap V'$  est non singulier et où  $V'$  est non singulier en tout point de  $V \cap V'$ , de codimension  $\leq 3$  dans  $V'$ . Cela entraîne bien que  $V'$  est non singulier, donc lisse, et on conclut, car en vertu des formules (ii) du § 3, la famille d'entiers associés à  $V'$  est  $m, n_j$  et  $d_i$ .

*Contre-exemple 6.4.* Montrons que l'hypothèse  $n_j - d_i > 0$  ne peut pas être supprimée dans 6.2. Pour cela, considérons la courbe  $C$  définie dans  $\mathbf{P}_k^3$  (car  $k \neq 2, 3$ ) par les 2-mineurs de la matrice

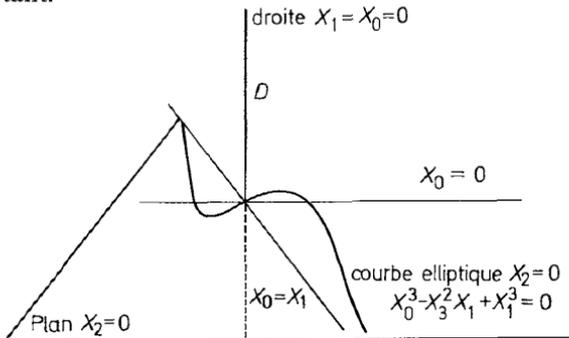
$$\varphi = \begin{pmatrix} X_0^2 & X_1 \\ X_2 & 0 \\ X_3^2 - X_1^2 & X_0 \end{pmatrix}.$$

Les entiers associés à  $C$  sont :

$$m=3; \quad d_1=2, \quad d_2=3, \quad d_3=2; \quad n_1=3, \quad n_2=4.$$

On remarque que  $C$  est la réunion de la droite d'idéal gradué  $(X_1, X_0)$  et de la courbe elliptique plane d'idéal gradué  $(X_2, X_0^3 - X_1 X_3^2 + X_1^3)$ .

Appliquant les formules de l'énoncé 3.1, on trouve que le degré de  $C$  est 4 est que son genre arithmétique est 1. Si  $C$  avait une déformation lisse  $E$  (au sens défini dans 6.2), cette courbe serait arithmétiquement normale de genre géométrique 1. Son faisceau des différentielles  $\omega_E$  étant trivial, il est facile de voir que le cône de  $E$  serait de Gorenstein, donc que  $E$  serait intersection complète. Ceci est contradictoire car le nombre de générateurs de l'idéal gradué définissant une déformation de  $C$  dans  $\mathbf{P}^3$  est constant.



*Exemple 6.5.* A partir de l'exemple précédent, on peut construire une courbe arithmétiquement normale de  $\mathbf{P}_k^3$  dont l'idéal premier gradué est engendré par 4 éléments, mais telles que les  $n_j$  et  $d_i$  qui lui sont associés ne vérifient pas  $n_j - d_i > 0$  pour tous  $i, j$ . En effet, considérons la courbe  $C$  de l'exemple précédent.  $C$  est localement intersection complète et ses singularités sont isolées. Soient  $f$  et  $g$  deux entiers  $> 3$ . D'après la Proposition 4.1, il existe des éléments homogènes  $F$  et  $G$  de degrés  $f$  et  $g$ , dans l'idéal gradué de  $C$ , tels que  $F$  et  $G$  définissent une courbe intersection complète  $X$  telle que  $X = C \cup C'$ , où  $C' - (C \cap C')$  est non singulière, où  $C'$  est non singulière en tout point de  $C' \cap (C - LS(C))$  [ $LS(C)$  désigne ici le lieu singulier de  $C$ ] et où enfin,

$$\text{codim}(C \cap C' \cap LS(C), LS(C)) \geq 1.$$

Comme cette dernière condition implique  $C' \cap LS(C) = \emptyset$ , on constate que  $C'$  est arithmétiquement normale. Maintenant si  $N_1, \dots, N_3$  et  $D_1, \dots, D_4$  sont les entiers attachés à  $C'$ , on sait (formules (ii) du § 3) qu'on a  $N_2 = f + g - 3$  et  $D_1 = f + g - 3$ , donc  $N_2 - D_1 = 0$ .

*Remarque 6.6.* Dans le Théorème 6.1, pour avoir la déformation lisse, on s'est restreint aux sous-schémas de  $\mathbf{P}_k^e$  avec  $e \leq 5$ , mais on a un théorème de déformation en toute dimension. Tout schéma de codimension 2, à cône de Cohen-Macaulay de  $\mathbf{P}_k$  (avec  $n_j - d_i > 0$  pour les entiers associés) se déforme en un schéma vérifiant la condition  $R_3$ , donc a fortiori (puisqu'il est Cohen-Macaulay) en un schéma normal.

### § 7. Existence de courbes lisses de l'espace projectif qui ne sont pas intersections de 3 surfaces

Soit  $k$  un corps. On dit qu'une variété  $V$  de  $\mathbf{P}_k^n$  (resp.  $A_k^n$ ) est idéalement l'intersection des surfaces  $S_1, \dots, S_d$ , d'équations  $f_1, \dots, f_d$  si on a

$$V = \text{Proj } k[X_0, \dots, X_n]/(f_1, \dots, f_d)$$

$$(\text{resp. } V = \text{Spec } k[X_1, \dots, X_n]/(f_1, \dots, f_d)).$$

Rappelons qu'Abyankhar a prouvé ([1]) que toute courbe non singulière de l'espace affine  $A_k^3$  est idéalement l'intersection de 3 surfaces. Nous nous proposons de montrer ici qu'il n'en est pas de même dans l'espace projectif.

**Théorème 7.1.** *Soit  $V$  une variété fermée de dimension  $d \geq 1$  dans l'espace projectif  $\mathbf{P}_k^n$ . Supposons que  $V$  est génériquement une intersection complète de codimension  $n - d$  et que  $V$  admette un cône projetant de Cohen-Macaulay  $k[X_0, \dots, X_n]/a$ . Supposons que  $k$  est infini. Alors si  $V$  est idéalement l'intersection de  $n - d + 1$  hypersurfaces de  $\mathbf{P}_k^n$ , l'idéal gradué  $a$  est engendré par  $n - d + 1$  équations au plus.*

Soient  $f_1, \dots, f_{n-d+1}$  les équations homogènes telles que

$$V = \text{Proj}(k[X_0, \dots, X_n]/(f_1, \dots, f_{n-d+1})).$$

Remarquons que d'après 3.7, on peut choisir  $(f_1, \dots, f_{n-d+1})$  telles que  $\underline{f} = (f_1, \dots, f_{n-d})$  définisse une intersection complète

$$V' = \text{Proj}(k[X_0, \dots, X_n]/\underline{f})$$

telle que l'immersion  $V \rightarrow V'$  induise un isomorphisme d'un ouvert dense de  $V$  sur son image. Soit alors  $X$  le sous-schéma fermé de  $\mathbf{P}_k^n$  géométriquement lié à  $V$  par  $V'$ . Soit  $\mathfrak{b}$  l'idéal gradué tel que  $k[X_0, \dots, X_n]/\mathfrak{b}$  est le cône projetant de Cohen-Macaulay de  $X$ . Posons  $R = k[X_0, \dots, X_n]$ , et montrons que  $\text{Hom}_R(R/(\underline{f}, f_{n-d+1}), R/\underline{f}) = \mathfrak{b}/\underline{f}$ . Soit  $\alpha$  un élément de  $R$  tel que  $\alpha f_{n-d+1} \in \underline{f}$ . Comme  $(\underline{f}, f_{n-d+1})$  définit idéalement  $V$ , on sait que  $\alpha/(\underline{f}, f_{n-d+1})$  est un  $R$ -module de longueur finie à support réduit au point  $(X_0, \dots, X_n)$ . Ceci implique qu'il existe  $s$  tel que  $\alpha^s \subset (\underline{f}, f_{n-d+1})$ , donc  $\alpha \alpha^s \subset \underline{f}$  et a fortiori  $\alpha(\alpha^s + \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{b}$ . Comme  $V(\alpha + \mathfrak{b})$  est de codimension 1 dans  $V(\mathfrak{b})$ , et comme  $R/\mathfrak{b}$  n'a pas de composante immergée, on en déduit bien  $\alpha \in \mathfrak{b}$ . Considérons alors la suite exacte

$$0 \rightarrow R/\mathfrak{b} \xrightarrow{f_{n-d+1}} \alpha/\underline{f} \rightarrow \alpha/(\underline{f}, f_{n-d+1}) \rightarrow 0.$$

Comme  $R/\mathfrak{b}$  et  $\alpha/\underline{f}$  sont des  $R$ -modules de Cohen-Macaulay de dimension  $\geq 2$ , on en déduit que  $\text{Hom}_R(k, \alpha/(\underline{f}, f_{n-d+1})) = 0$  (où  $k$  est le  $R$ -module  $R/(X_0, \dots, X_n)$ ). Comme  $\alpha/(\underline{f}, f_{n-d+1})$  a son support réduit au point  $(X_0, \dots, X_n)$ , ceci implique évidemment  $\alpha = (\underline{f}, f_{n-d+1})$  et le théorème est démontré.

**Corollaire 7.2.** *Soit  $k$  un corps algébriquement clos. Il existe des courbes lisses connexes de  $\mathbf{P}_k^3$  qui ne sont pas intersections de 3 surfaces.*

Il suffit de montrer qu'il existe une courbe lisse  $C$  de  $\mathbf{P}_k^3$  à cône de Cohen-Macaulay (ce qui entraîne la connexité de  $C$ ) dont l'idéal premier gradué n'est pas engendré par  $\leq 3$  éléments. Ce fait est bien connu: on montre par exemple en utilisant 4.1 et le théorème de liaison que si  $C_1$  est une courbe lisse à cône de Cohen-Macaulay  $k[X_0, \dots, X_3]/\mathfrak{p}_1$  où  $\mathfrak{p}_1$  est engendré par  $n$  éléments et pas par moins, on peut trouver deux éléments homogènes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de  $(X_0, \dots, X_3)_{\mathfrak{p}_1}$  définissant une intersection complète  $X$  telle que  $X = C_1 \cup C_2$  où  $C_2$  est une courbe lisse à cône de Cohen-Macaulay dont l'idéal premier gradué  $\mathfrak{p}_2$  est engendré par  $(n+1)$  éléments et pas par moins.

*Remarque.* On montre facilement que toute courbe lisse de  $\mathbf{P}_k^3$  est idéalement l'intersection de quatre surfaces, et plus généralement que

toute variété localement intersection complète de  $\mathbf{P}_k^n$  est idéalement l'intersection de  $(n + 1)$  hypersurfaces.

*Problème 7.3.* Existe-t-il une courbe lisse, non arithmétiquement normale de  $\mathbf{P}_k^3$  qui n'est pas idéalement l'intersection de 3 surfaces?

### Bibliographie

1. Abhyankar, S.: Algebraic space curves. Presses de l'Université de Montréal 1970
2. Apéry, R.: Sur certains caractères numériques d'un idéal sans composant impropre. C.R.A.S. **220**, 234–236 (1945). «Sur les courbes de première espèce de l'espace à trois dimensions». C.R.A.S. **220**, 271–272 (1945)
3. Artin, M., Nagata, M.: Residual intersections in Cohen-Macaulay rings. J. Math. Kyoto Univ. **12**, 307–323 (1972)
4. Buchsbaum, D., Eisenbud, D.: Gorenstein ideals of height 3. A paraître.
5. Eagon, J. A., Northcott, D. C.: Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them. Proc. Royal. Soc. A. **269**, 188–204 (1962)
6. Hartshorne, R.: Ample subvarieties of Algebraic varieties. Lecture Notes in Mathematics. 156. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970
7. Hironaka, H.: Smoothing of Algebraic Cycles. Amer. J. of Math. **90**, 1–54 (1968)
8. Horrocks, C., Mumford, D.: A rank 2 vector bundle on  $\mathbf{P}^4$  with 15000 symmetries. Topology. **12**, 63–81 (1973)
9. Gaeta, F.: Quelques progrès récents dans la classification des variétés algébriques d'un espace projectif. Deuxième Colloque de Géométrie Algébrique Liège. C.B.R.M., 145–181 (1952)
10. Grothendieck, A.: Cohomologie locale des faisceaux cohérents et Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux. Advanced Studies in Pure Mathematics. Masson-North Holland 1962
11. Grothendieck, A.: Eléments de Géométrie Algébrique IV. Publications de l'I.H.E.S. N° 28. 1966
12. Macaulay, F. S.: Algebraic theory of modular systems. Cambridge tracts n° 19. 1916
13. Peskine, C., Szpiro, L.: Dimension projective finie et cohomologie locale. Publications de l'I.H.E.S., **42**, 47–119 (1973)
14. Samuel, P.: Séminaire d'Algèbre commutative 1966/67. Anneaux de Gorenstein. Secrétariat mathématique. 11, rue P. Curie, Paris 5°
15. Dubreil, P.: Quelques propriétés des variétés algébriques. Actualités Scientifiques et Industrielles **210**. Paris: Hermann 1935
16. Hartshorne, R., Ogus, A.: On the factoriality of local rings of small embedding codimension. A paraître
17. Noether, M.: Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven. Crellé Journale **93**, 271–318 (1882)
18. Schaps, M.: Non-singular deformations of space curves using determinantal schemes. Thesis, Harvard (1972)

Christian Peskine  
 Institut de recherche mathématique avancée  
 Laboratoire Associé au C.N.R.S.  
 7, rue René Descartes  
 F-67084 Strasbourg Cédex, France

Lucien Szpiro  
 3, rue de la Butte aux Cailles  
 F-75 Paris 13<sup>e</sup>, France

(Reçu le 1 octobre 1973/11 mars 1974)

*Note ajoutée dans les épreuves.* On doit noter que les déformations étudiées au § 6, sont les déformations des résolutions projectives minimales de sous schémas fermés de  $\mathbf{IP}_k^n$ .