Inventiones math. 4, 275—293 (1967)

Über die Verteilung der Approximationszahlen kompakter Operatoren in Sobolev-Besov-Räumen

HANS TRIEBEL (Jena)

In der Arbeit werden Eigenschaften kompakter Operatoren betrachtet, die Sobolev-Besov-Räume W_2^σ, $-\infty<\sigma<\infty$, in Räume des gleichen Typs abbilden.

Im Abschnitt 1 werden die Klassen $\mathfrak{S}_{q,p}$, $0<q<\infty$, $0<p\leqq\infty$, kompakter Operatoren eingeführt, die eine Verfeinerung der bekannten Klassen $\mathfrak{S}_q$, $0<q<\infty$, darstellen, Definition 2. Für $1<q<\infty$, $1\leqq p\leqq\infty$, kann man sich $\mathfrak{S}_{q,p}$ als Interpolationsräume nach dem Verfahren von LIONS-PEETRE [11] aus dem Raum der nuklearen Operatoren $\mathfrak{S}_1$ (mit der nuklearen Norm) und aus dem Raum $\mathfrak{S}_\infty$ sämtlicher kompakter Operatoren (mit der üblichen Operatorennorm) gewonnen denken. In den weiteren Abschnitten werden die Eigenschaften kompakter Operatoren durch die Zugehörigkeit zu den Klassen $\mathfrak{S}_{q,p}$ beschrieben.

Das wesentliche Resultat des Abschnittes 2 besteht darin, daß für ein beschränktes Gebiet des n-dimensionalen reellen euklidischen Raumes R_n mit glattem Rand der Einbettungsoperator von W_2^r in W_2^s, $\infty>r>s>-\infty$, nicht zu $\mathfrak{S}_{n/(r-s),p}$, $0<p<\infty$, wohl aber zu $\mathfrak{S}_{n/(r-s),\infty}$ gehört (Satz 2). r und s brauchen nicht notwendig ganz zu sein. Als Spezialfall ist darin der bekannte Satz enthalten, daß die Einbettung von W_2^{m+k} in W_2^k, m und k nicht negativ und ganz, für $m>n/2$ eine Hilbert-Schmidt-Abbildung ist, [8], S. 379. Gleichzeitig sieht man, daß für $m\leqq n/2$ die Einbettung kein Hilbert-Schmidt-Operator sein kann.

Im Abschnitt 3 werden Operatoren $T\in L(W_2^\sigma, W_2^\tau)$ betrachtet, deren Wertevorrat in W_2^μ, $\mu>\tau$, liegt (Satz 3). Es erweist sich, daß T zu $\mathfrak{S}_{n/(\mu-\tau),\infty}$ gehört, während es Operatoren mit den genannten Eigenschaften gibt, die nicht zu $\mathfrak{S}_{n/(\mu-\tau),p}$, $0<p<\infty$, gehören. Satz 3 verallgemeinert und verschärft Resultate von AGMON [1], S. 137 und PARASKA [10], S. 624.

In zahlreichen Arbeiten werden Abbildungseigenschaften von Integraloperatoren

$$(Gf)(x)=\int_\Omega G(x,y)f(y)\,dy$$

in Abhängigkrit vom Kern $G(x,y)$ untersucht. Zumeist wird G als Element von $L(L_2(\Omega), L_2(\Omega))$ angesehen und aus Differenzierbarkeitsvoraussetzungen des Kernes $G(x,y)$ auf die Verteilung der Approximationszahlen und Eigenwerte geschlossen. Einen kurzen Überblick über die erzielten Ergebnisse und Literaturhinweise findet man in dem Buch von GOCHBERG und KREJN [5], S. 158. Im Abschnitt 4 werden unter anderem die Resultate von KREJN [5], S. 157 und PARASKA [10], S. 625 verschärft und verallgemeinert. Es wird z.B. gezeigt (Satz 4'), daß für $G(x,y) \in W_2^r(\Omega \times \Omega)$, $r \geqq 0$, der obige Integraloperator für jedes ρ, $\rho \in [0,r]$ als Element von $L(W_2^{\rho-r}, W_2^{\rho})$ betrachtet ein Hilbert-Schmidt-Operator ist, während $G \in L(W_2^{\rho-r}, W_2^{\tau})$, $-\infty < \tau \leqq \rho$, zur Klasse $\mathfrak{S}_{\frac{2n}{n+2(\rho-\tau)},2}$ gehört, Satz 5. Ferner wird ein Satz angegeben, der zeigt, daß man dieses Resultat nicht verschärfen kann, Satz 6.

Die in dieser Arbeit entwickelten Sätze gestatten verschiedene Anwendungen. In einer nachfolgenden Arbeit wird gezeigt, wie man Differenzierbarkeitseigenschaften Greenscher Funktionen allgemeiner nicht notwendig selbstadjungierter elliptischer Differentialoperatoren mit den hier entwickelten Methoden beweisen kann. Dabei werden notwendige und hinreichende Kriterien über die Zugehörigkeit der Greenschen Funktionen zu den Räumen $W_2^r(\Omega \times \Omega)$ erzielt, die die entsprechenden Resultate der Arbeit [10] erweitern.

1. Die Klassen $\mathfrak{S}_{q,p}$

In der Theorie der kompakten nicht selbstadjungierten Operatoren im Hilbertraum spielen die Normideale $\mathfrak{S}_p$, $1 \leqq p \leqq \infty$, eine wichtige Rolle [5]. Ist $L(H,H)$ der Ring der beschränkten linearen Operatoren, die einen separablen Hilbertraum H in sich abbilden, so werden für einen kompakten Operator A aus $L(H,H)$ die Approximationszahlen s_j (s-Zahlen im Sinne von GOCHBERG und KREJN), wie folgt definiert:

$$s_{j+1}(A) = \inf_{\substack{K \in L(H,H) \\ \dim R(K) \leqq j}} \|A-K\|, \qquad j=0,1,2,\ldots,$$

wobei $R(K)$ der Wertevorrat von K ist. A gehört genau dann zu $\mathfrak{S}_p$, $1 \leqq p < \infty$, wenn

$$\|A\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A)\right)^{1/p} < \infty$$

gilt. Im Falle $p = \infty$ hat man

$$\|A\|_\infty = \sup_{j=1,2,\ldots} s_j = s_1 = \|A\|$$

zu setzen, so daß $\mathfrak{S}_\infty$ die Gesamtheit der kompakten Operatoren mit der üblichen Operatornorm ist. Bezüglich der Norm $\|A\|_p$ sind die Mengen $\mathfrak{S}_p$ Normideale [5]. Für jedes nichttriviale Normideal $\mathfrak{A}$, ($\mathfrak{A} \neq \{0\}$, $\mathfrak{A} \neq L(H,H)$), gilt

$$\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}_\infty,$$

wobei die Einbettung stetig ist [5], S. 101. Es ist naheliegend, aus $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_\infty$ unter Verwendung konstruktiver Interpolationsverfahren neue Normideale zu gewinnen. Bezeichnet man wie üblich mit $(A_0, A_1)_{\Theta,p}$, $0<\Theta<1$, $1\leqq p\leqq\infty$, die Interpolationsräume von Lions-Peetre [11], so ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition 1. $\mathfrak{S}_{q,p}=(\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_\infty)_{\Theta,p}$ *mit* $1<q<\infty$, $1/q=1-\Theta$ *und* $1\leqq p\leqq\infty$.

Lemma 1. *Die Räume* $\mathfrak{S}_{q,p}$ *sind Normideale. Für* $1\leqq p<\infty$ *ist*

$$\mathfrak{S}_{q,p}=\left\{A\,|\,A\in\mathfrak{S}_\infty,\ \sum_{i=1}^{\infty}s_i^p(A)\,i^{(p/q)-1}<\infty\right\}.$$

Ferner ist

$$\mathfrak{S}_{q,\infty}=\{A\,|\,A\in\mathfrak{S}_\infty,\ \sup_{i=1,2,\ldots} i^{1/q}s_i(A)<\infty\}.$$

Beweis. Es wird die Bezeichnungsweise von Peetre [11, 12] verwendet. Für $A\in\mathfrak{S}_\infty$ und $0<t<\infty$ ist

$$K(t,A,\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_\infty)=\inf_{\substack{A=A_1+A_\infty\\ A_1\in\mathfrak{S}_1}}\left(\|A_1\|_1+t\,\|A_\infty\|\right).$$

Für $B\in L(H,H)$ und $C\in L(H,H)$ folgt dann aus

$$K(t,BAC,\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_\infty)\leqq\|B\|\cdot\|C\|\,K(t,A,\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_\infty),$$

daß $\mathfrak{S}_{q,p}$ ein Normideal ist.

Sind $s_j=s_j(A)$ die Approximationszahlen des Operators A, so wird die Funktion

$$s(t)=s_i \qquad \text{für } i-1\leqq t<i,\quad i=1,2,\ldots,$$

eingeführt. Für $0<t<\infty$ ist nun

$$K(t,A,\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_\infty)\leqq\int_0^t s(\tau)\,d\tau\leqq 3K(t,A,\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_\infty). \tag{1}$$

Für $0<t\leqq1$ ist die Abschätzung richtig, da für jede Zerlegung $A=A_1+A_\infty$

$$t\,\|A\|\leqq\|A_1\|_1+t\,\|A_\infty\|$$

gilt, woraus

$$K(t,A,\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_\infty)=t\,\|A\|=t\,s_1$$

folgt. Es sei $t>1$. Bezeichnet man mit $\{s_i\}$ die Folge der Zahlen s_i, so ist

$$K(t,\{s_i\},l_1,l_\infty)=\int_0^t s(\tau)\,d\tau,$$

[11], [12], Kap. III, S. 59[1]. Geht man von einer Darstellung des Operators A in der Form

$$A x=\sum_{i=1}^{\infty} s_i(x, e_i) f_i=\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i(x, e_i) f_i+\sum_{i=1}^{\infty}(s_i-\rho_i)(x, e_i) f_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty}|\rho_i|<\infty,$$

aus [5], S. 48, so sieht man sofort, daß

$$K(t, A, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_\infty) \leqq K(t, \{s_i\}, l_1, l_\infty)=\int_0^t s(\tau)\, d\tau$$

ist. Es sei umgekehrt $A=A_1+A_\infty$ mit

$$A_1 x=\sum_{i=1}^{\infty} s_i^{(1)}(x, e_i^{(1)}) f_i^{(1)}$$

und

$$A_\infty x=\sum_{i=1}^{\infty} s_i^{(\infty)}(x, e_i^{(\infty)}) f_i^{(\infty)}.$$

Aus der Abschätzung

$$s_{2j} \leqq s_{2j-1} \leqq s_j^{(1)}+s_j^{(\infty)}, \qquad j=1,2, \ldots,$$

[5], S. 49, ergibt sich

$$\int_0^t s(\tau)\, d\tau \leqq \sum_{i=1}^{\{t/2\}} s_{2i}+\sum_{i=1}^{\{t/2\}} s_{2i-1} \leqq 2 \sum_{i=1}^{\{t/2\}}(s_i^{(1)}+s_i^{(\infty)})$$

$$\leqq 3\left(t \sup_{i=1,2, \ldots} s_i^{(\infty)}+\sum_{i=1}^{\infty} s_i^{(1)}\right)=3(\|A_1\|_1+t\|A_\infty\|).$$

$\{a\}$ ist dabei die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich a ist, a reell. Daraus folgt (1). Somit gehört ein Operator genau dann zu $\mathfrak{S}_{q,p}$, wenn die Folge $\{s_i\}$ zu dem Lorentzfolgenraum $l_{q,p}$ gehört. Dabei ist nach [11], S. 284,

$$\|\{s_i\}\|_{l_{q,p}}=\left(\int_0^{\infty}(t^{1/q} s(t))^p \frac{d t}{t}\right)^{1/p},$$

(mit der für $p=\infty$ üblichen Modifikation). Eine leichte Rechnung zeigt jetzt die Richtigkeit des Lemmas.

Für die späteren Betrachtungen ist es zweckmäßig, die Klassen $\mathfrak{S}_{q,p}$ auch für $0<q\leqq 1$ und für $0<p<1$ zu definieren. Sind H und H' zwei separable Hilberträume, so wird mit $L(H,H')$ der Raum der linearen beschränkten Operatoren bezeichnet, die H in H' abbilden. Für einen Operator A aus $\mathfrak{S}_\infty(H,H')$, dem Unterraum der kompakten Operatoren

[1] Der dort angegebene Beweis benutzt die Voraussetzung, daß das verwendete Maß atomistisch ist. Man kann sich aber leicht überlegen, daß der gleiche Satz auch für Folgenräume richtig ist.

aus $L(H,H')$, führt man die Approximationszahlen

$$s_{j+1}(A) = \inf_{\substack{K \in L(H,H') \\ \dim R(K) \leqq j}} \|A-K\|, \qquad j = 0, 1, 2, \dots,$$

ein. $s_j(A) \to 0$ für $j \to \infty$.

Lemma 1 legt nun nachfolgende Definition nahe.

Definition 2.

$$\mathfrak{S}_{q,p}(H,H') = \left\{ A \,|\, A \in \mathfrak{S}_\infty(H,H'), \sum_{i=1}^{\infty} s_i^p \, i^{(p/q)-1} < \infty \right\},$$

$$0 < q < \infty, \; 0 < p < \infty,$$

und

$$\mathfrak{S}_{q,\infty}(H,H') = \{A \,|\, A \in \mathfrak{S}_\infty(H,H'), \sup_{i=1,2,\dots} i^{1/q} s_i < \infty\}, \quad 0 < q < \infty.$$

Wenn keine Verwechslungsmöglichkeiten bestehen, wird $\mathfrak{S}_{q,p}$ *statt* $\mathfrak{S}_{q,p}(H,H')$ *geschrieben.* $\mathfrak{S}_{q,q}$ *wird mit* $\mathfrak{S}_q$ *bezeichnet.*

Es sollen einige einfache Eigenschaften der Klassen $\mathfrak{S}_{q,p}$ hergeleitet werden.

Lemma 2. (a) *Ist* $0 < p < \infty$ *und* $0 < q < \infty$, *so folgt aus* $A \in \mathfrak{S}_{q,p}$

$$s_j(A) = o(i^{-(1/q)})\ ^2.$$

(b) *Für* $0 < q < \infty$ *und* $0 < p \leqq p' \leqq \infty$ *gilt*

$$\mathfrak{S}_{q,p} \subseteq \mathfrak{S}_{q,p'}.$$

(c) *Für* $0 < q < q' < \infty$ *und* $0 < p \leqq \infty$, $0 < p' \leqq \infty$ *gilt*

$$\mathfrak{S}_{q,p} \subseteq \mathfrak{S}_{q',p'}.$$

Beweis. Es sei $A \in \mathfrak{S}_\infty$ und es existiere ein ε, $\varepsilon > 0$, und eine unbeschränkte Folge natürlicher Zahlen $0 < n_1 < n_2 < \cdots$, so daß für eine geeignete Zahl q

$$s_{n_i}(A) \geqq \varepsilon\, n_i^{-(1/q)}, \qquad 0 < q < \infty,$$

ist. Dann folgt für jede Zahl p mit $0 < p < \infty$

$$\sum_{j=[n_i/2]}^{n_i} s_j^p\, j^{(p/q)-1} \geqq \varepsilon^p\, n_i^{-(p/q)} \sum_{j=[n_i/2]}^{n_i} j^{(p/q)-1} \geqq c_1\, \varepsilon^p$$

mit einer geeigneten von n_i unabhängigen Konstanten $c_1 > 0$. Somit ist $A \notin \mathfrak{S}_{q,p}$, womit die Behauptung (a) bewiesen ist. Für $A \in \mathfrak{S}_{q,p}$ und

[2] „o“ ist das Landausche Symbol.

$p<p'<\infty$ erhält man aus

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i^{p'}\, i^{(p'/q)-1} \leqq \Big(\sup_{i=1,2,\ldots} i^{1/q} s_i\Big)^{p'-p} \sum_{i=1}^{\infty} s_i^p\, i^{(p/q)-1}$$

unter Verwendung der Aussage (a) sofort die Behauptung (b). Die Behauptung (c) folgt unmittelbar aus (a).

2. Die Einbettungsoperatoren $I_{W_2^r \to W_2^s}$, $-\infty<s<r<\infty$

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, die Zugehörigkeit der Einbettungsoperatoren zu den Klassen $\mathfrak{S}_{q,p}(W_2^r, W_2^s)$ zu klären. Dazu sind einige vorbereitende Betrachtungen notwendig.

Sind H und H' zwei separable Hilberträume, die stetig ineinander eingebettet sind, $H' \subseteq H$, so wird der Einbettungsoperator mit $I_{H'\to H}$ bezeichnet. Ist H' dicht im Raum H, so gibt es einen selbstadjungierten, positiv-definiten, im Raum H wirkenden Operator A mit dem Definitionsgebiet $D(A)=H'$ und der Eigenschaft

$$\|A x\|_H = \|x\|_{H'}, \qquad x \in H'.$$

$I_{H'\to H}$ ist bekanntlich dann und nur dann kompakt, wenn A ein Operator mit reinem Punktspektrum ist [9], S. 335[3]. Die Eigenwerte werden mit λ_i bezeichnet, $0<\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots$. Es gilt nun

Lemma 3. *Ist der Operator $I_{H'\to H}$ kompakt und A ein zu H' gehörender positiv-definiter selbstadjungierter Operator mit den Eigenwerten λ_i, so ist*

$$s_i(I_{H'\to H}) = \lambda_i^{-1}, \qquad i=1,2,\ldots.$$

Beweis.

$$s_{i+1}(I_{H'\to H}) = \inf_{\substack{z_r\in H\\ y_r \in H'}} \sup_{\|x\|_{H'}=1} \Big\| x - \sum_{r=1}^{i} (x, y_r)_{H'} z_r \Big\|_H$$

$$= \inf_{\substack{z_r\in H\\ y_r \in H'}} \sup_{\|y\|_{H}=1} \Big\| A^{-1} y - \sum_{r=1}^{i} (y, A^{-1} y_r)_H z_r \Big\|_H = s_{i+1}(A^{-1}),$$

wobei A^{-1} als Operator aus $L(H,H)$ angesehen wird. Das Lemma folgt aus $s_i(A^{-1}) = \lambda_i^{-1}$ [5], S. 46.

Betrachtet man im Intervall $[a,b]$ den Operator

$$B y = (-1)^m y^{(2m)},$$

$$D(B) = W_{2,0}^{2m}[a,b]$$
$$= \{u \mid u \in W_2^{2m}[a,b],\ u^{(j)}(a) = u^{(j)}(b) = 0 \text{ für } j=0,\ldots,m-1\},$$

[3] Ein selbstadjungierter Operator besitzt ein reines Punktspektrum, wenn sein Spektrum nur aus isolierten Eigenwerten endlicher Vielfachheit besteht.

so ist B im Hilbertraum $L_2[a,b]$ selbstadjungiert und positiv-definit, seine der Größe nach geordneten Eigenwerte λ_i genügen der Abschätzung

$$c_2 i^{2m} \leqq \lambda_i \leqq c_3 i^{2m}, \quad c_2 > 0, \quad c_3 > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

[9], S. 56. Damit kann man aber nach bekannten Prinzipien sofort eine entsprechende Aussage für Operatoren in quaderförmigen Gebieten des n-dimensionalen reellen euklidischen Raumes R_n machen. Es sei

$$Q = \{x \mid x \in R_n, a_i < x_i < b_i, i = 1, \ldots, n\}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

und

$$A u = (-1)^m \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_i^{2m}},$$

$$D(A) = W_{2,0}^{2m}(Q) = \{u \mid u \in W_2^{2m}(Q), D^\alpha u|_{\partial Q} = 0 \text{ für } |\alpha| \leqq m-1\},$$

wobei mit ∂Q der Rand des Quaders Q bezeichnet wird. A ist wieder positiv-definit, selbstadjungiert und ein Operator mit reinem Punktspektrum. Nach den obigen Bemerkungen über den Operator B kann man für die Eigenwerte $\lambda_{j_1, \ldots, j_n}$, $1 \leqq j_k < \infty$, des Operators A die Abschätzung

$$c_4 \sum_{i=1}^{n} j_i^{2m} \leqq \lambda_{j_1, \ldots, j_n} \leqq c_5 \sum_{i=1}^{n} j_i^{2m}, \quad c_4 > 0, \quad c_5 > 0,$$

erhalten. Von Interesse ist der Operator $A^{\frac{1}{2}}$. Es ist

$$D(A^{\frac{1}{2}}) = \mathring{W}_2^m(Q) = \{u \mid u \in W_2^m(Q), D^\alpha u|_{\partial Q} = 0 \text{ für } |\alpha| \leqq m-1\}.$$

Die Eigenwerte $\mu_{j_1, \ldots, j_n}$ des Operators $A^{\frac{1}{2}}$ erlauben die Abschätzung

$$\text{(2)} \qquad c_6 \left(\sum_{i=1}^{n} j_i\right)^m \leqq \mu_{j_1, \ldots, j_n} \leqq c_7 \left(\sum_{i=1}^{n} j_i\right)^m$$

mit positiven Konstanten c_6 und c_7. Aus diesen Betrachtungen gewinnt man nun das

Lemma 4. *Ist Q der obige Quader, $Q \subset R_n$, so gilt*

$$I_{\mathring{W}_2^m(Q) \to L_2(Q)} \notin \mathfrak{S}_{(n/m), p} \qquad \textit{für } 0 < p < \infty,$$

$$I_{\mathring{W}_2^m(Q) \to L_2(Q)} \in \mathfrak{S}_{(n/m), \infty}.$$

Beweis. Setzt man $H = L_2(Q)$ und $H' = \mathring{W}_2^m(Q)$, so erzeugt der eben konstruierte Operator $A^{\frac{1}{2}}$ den Raum $\mathring{W}_2^m(Q)$. Zusammen mit der Abschätzung (2) zeigt Lemma 3, daß es ausreichend ist,

$$\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} j_i\right)^{-m}\right\}_{1 \leqq j_k < \infty} \notin l_{(n/m), p}, \qquad 0 < p < \infty,$$

und

$$\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} j_i\right)^{-m}\right\}_{1 \leqq j_k < \infty} \in l_{(n/m),\,\infty}$$

zu zeigen. Dabei sind $l_{(n/m),p}$ die entsprechenden „Lorentzfolgenklassen“, die die Zugehörigkeit eines Operators zur Klasse $\mathfrak{S}_{(n/m),p}$ in der Definition 2 beschreiben. Mit $\Phi_n(k)$ wird die Anzahl der Darstellungen der natürlichen Zahl k als Summe von n natürlichen Zahlen unter Berücksichtigung der Anordnung bezeichnet. Aus

$$\Phi_2(k) = k-1$$

und

$$\Phi_n(k) = \sum_{\nu=1}^{k-1} \Phi_{n-1}(\nu)$$

erhält man

$$c_8\, k^{n-1} \leqq \Phi_n(k) \leqq c_9\, k^{n-1}, \qquad k \geqq k_0(n),$$

$$c_{10}\, k^{n} \leqq \sum_{j=1}^{k} \Phi_n(j) \leqq c_{11}\, k^{n}, \qquad k \geqq k_1(n), \tag{3}$$

und

$$c_{12}\, l^{pm-1} \leqq \sum_{\nu=\Phi_n(1)+\cdots+\Phi_n(l-1)+1}^{\Phi_n(1)+\cdots+\Phi_n(l)} \nu^{\frac{pm}{n}-1} \leqq c_{13}\, l^{pm-1}, \tag{4}$$

$$0 < p < \infty\,, \quad l \geqq l_0\,,$$

wobei sämtliche Konstanten $c_8, \ldots, c_{13}$ positiv sind. Bezeichnet man die der Größe nach geordneten Zahlen

$$\left(\sum_{i=1}^{n} j_i\right)^{-m}, \qquad 1 \leqq j_k < \infty\,,$$

mit a_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, so folgt aus der Abschätzung (4) und

$$\sum_{\nu=1}^{N} a_\nu^p\, \nu^{\frac{pm}{n}-1} \geqq \sum_{l=1}^{N(l)} \frac{1}{l^{mp}} \sum_{\nu=\Phi_n(1)+\cdots+\Phi_n(l-1)+1}^{\Phi_n(1)+\cdots+\Phi_n(l)} \nu^{\frac{pm}{n}-1}$$

der erste Teil des Lemmas. Die Abschätzung (3) und

$$\sup_{\nu=1,2,\ldots} a_\nu\, \nu^{m/n} = \sup_{k=n,n+1,\ldots} k^{-m} \left(\sum_{j=1}^{k} \Phi_n(j)\right)^{m/n}$$

zeigen auch die Richtigkeit des zweiten Teils von Lemma 4.

Satz 1. *Ω sei ein beschränktes Gebiet des R_n, dessen Rand $\partial\Omega$ zur Klasse C^∞ gehöre. H sei ein separabler Hilbertraum mit*

$$\mathring{W}_2^m(\Omega) \subset H \subset W_2^m(\Omega)\,,$$

wobei die auftretenden Einbettungen stetig seien. Dann ist

$$I_{H\to L_2(\Omega)} \notin \mathfrak{S}_{(n/m),\,p} \qquad \textit{für } 0<p<\infty$$

und

$$I_{H\to L_2(\Omega)} \in \mathfrak{S}_{(n/m),\,\infty}\,.$$

Dabei ist

$$\mathring{W}_2^m(\Omega)=\{u\mid u\in W_2^m(\Omega), D^\alpha u|_{\partial\Omega}=0 \textit{ für } |\alpha|\leqq m-1\}.$$

Beweis. Q_1 und Q_2 seien zwei Quader mit $\bar{Q}_1\subset\Omega$ und $\bar{\Omega}\subset Q_2$. Jede Funktion u aus H kann man zu einer Funktion $\tilde{u}\in\mathring{W}_2^m(Q_2)$ fortsetzen, so daß

$$\|\tilde{u}\|_{\mathring{W}_2^m(Q_2)}\leqq C_{14}\,\|u\|_H$$

gilt, wobei c_{14} eine von u unabhängige Konstante ist. (Das ist eine Folgerung aus dem Fortsetzungsverfahren von FICHTENHOLZ [4], S. 550.) Bezeichnet man diesen linearen und stetigen Fortsetzungsoperator mit F, so ist

$$I_{H\to L_2(\Omega)}=I_{L_2(Q_2)\to L_2(\Omega)}\,I_{\mathring{W}_2^m(Q_2)\to L_2(Q_2)}\,F.$$

Ferner ist

$$I_{\mathring{W}_2^m(Q_1)\to L_2(Q_1)}=I_{L_2(\Omega)\to L_2(Q_1)}\,I_{H\to L_2(\Omega)}\,I_{\mathring{W}_2^m(Q_1)\to H}\,.$$

Die beiden letzten Gleichungen und Lemma 4 führen nun zum Beweis des Satzes.

Um Satz 1 auf die Operatoren $I_{W_2^r\to W_2^s}$, $\infty>r>s>-\infty$, ausdehnen zu können (r und s brauchen nicht notwendig ganz zu sein), sind noch zwei Vorbereitungen notwendig.

$\{\lambda_i\}_{i=1,2,\ldots}$ sei eine Folge positiver Zahlen, $0<\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\cdots$, $\lambda_i\to\infty$ für $i\to\infty$. Für $-\infty<\Theta<\infty$ wird der Folgenraum

$$f^\Theta=\left\{a\,|\,a=(a_1,a_2,\ldots),\ a_i \text{ komplexe Zahlen, } \sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2\,\lambda_i^{2\Theta}<\infty\right\}$$

eingeführt und in der üblichen Weise normiert, so daß f^Θ ein Hilbertraum wird. Man prüft leicht nach, daß sich das allgemeine lineare Funktional im Raum f^Θ in der Form

$$l(a)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\,\bar{c}_i,\qquad c=(c_1,c_2,\ldots)\in f^{-\Theta},$$

$$\|l\|_{(f^\Theta)'}=\|c\|_{f^{-\Theta}},$$

darstellen läßt. In diesem Sinne ist $(f^\Theta)'=f^{-\Theta}$.

Lemma 5. *Für $\infty>\beta>\alpha>-\infty$ ist der Operator $I_{f^\beta\to f^\alpha}$ kompakt und*

$$s_j(I_{f^\beta\to f^\alpha})=\lambda_j^{\alpha-\beta}.$$

Beweis. Betrachtet man im Raum f^α den positiv-definiten selbstadjungierten Operator A mit

$$A\,a=(\lambda_i^{\beta-\alpha}a_i) \qquad \text{für } a=(a_i)\in f^\beta,\ D(A)=f^\beta,$$

so folgt die Behauptung aus Lemma 3.

Ferner ist noch ein einfacher Satz aus der Theorie der Interpolationsräume notwendig.

Lemma 6. *Für einen positiv-definiten selbstadjungierten Operator A in einem Hilbertraum H ist*

$$(H, D(A))_{\Theta,2}=D(A^\Theta), \qquad 0<\Theta<1,$$

wobei die entsprechenden Normen äquivalent sind[4].

Beweis. Es wird wieder die Bezeichnung von PEETRE verwendet [12]. Ist $G(t)$ die durch den Operator A erzeugte Halbgruppe, so gehört ein Element $u\in H$ genau dann zu $(H, D(A))_{\Theta,2}$, wenn

$$L=\int_0^\infty t^{-2\Theta}\,\|G(t)\,u-u\|_H^2\,\frac{dt}{t}<\infty$$

ist. Setzt man

$$A=\int_0^\infty \lambda\,dE_\lambda,$$

so ist

$$\|G(t)\,u-u\|_H^2=\int_0^\infty |e^{i\lambda t}-1|^2\,d(E_\lambda u,u)$$

und somit

$$L=\int_0^\infty \lambda^{2\Theta}\left(\int_0^\infty \frac{|e^{i\lambda t}-1|^2}{(\lambda t)^{2\Theta}}\,\frac{dt}{t}\right)d(E_\lambda u,u)=c_{15}\,\|A^\Theta u\|_H^2,$$

woraus die Behauptung folgt.

Für $r>0$, r nicht notwendig ganz, werden die Sobolev-Besov-Räume $W_2^r(\Omega)$ betrachtet [7]. Für $r>[r]$ ist W_2^r die Vervollständigung von $C^\infty(\bar\Omega)$ in der Norm $\|u\|_{W_2^r}$ mit

$$\|u\|_{W_2^r}^2=\|u\|_{W_2^{[r]}}^2+\sum_{|\alpha|=[r]}\int_{\Omega\times\Omega}\frac{|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2(r-[r])}}\,dx\,dy.$$

Dabei ist Ω ein beschränktes Gebiet, dessen Rand zur Klasse C^∞ gehört. Es sei $u(x)\in W_2^m(\Omega)$, $m=[m]>0$. Mit $U\subset W_2^m(R_n)$ wird die Menge derjenigen Funktionen aus $W_2^m(R_n)$ bezeichnet, deren Einschränkung auf Ω mit $u(x)$ zusammenfällt. Ist wie üblich $K(t,u,L_2,W_2^m)$ die für das Interpolationsverfahren von LIONS-PEETRE charakteristische Funktion,

[4] Ein entsprechender Satz gilt für das Verfahren von CALDERON.

so folgt aus dem schon benutzten Fortsetzungsverfahren (Operator F aus dem Beweis von Satz 1)

$$c_{16} \inf_{v \in U} K(t, v, L_2(R_n), W_2^m(R_n)) \leqq K(t, u, L_2(\Omega), W_2^m(\Omega))$$
$$\leqq \inf_{v \in U} K(t, v, L_2(R_n), W_2^m(R_n)), \qquad c_{16} > 0.$$

Daraus folgt, daß eine Funktion $u(x)$ genau dann zu $(L_2(\Omega), W_2^m(\Omega))_{\Theta,2}$ gehört, wenn sie die Einschränkung einer Funktion

$$v(x) \in (L_2(R_n), W_2^m(R_n))_{\Theta,2} = W_2^{m\Theta}(R_n)$$

ist. Dabei wurden die bekannten Interpolationseigenschaften der Räume $W_2^k(R_n)$ verwendet [11]. Das erwähnte Fortsetzungsverfahren und die Normierung der Räume $W_2^r(\Omega)$ führen dann zu

$$(5) \qquad (L_2(\Omega), W_2^m(\Omega))_{\Theta,2} = W_2^{m\Theta}(\Omega).$$

Die Räume $W_2^r(\Omega)$ mit $r<0$ werden nach dem Prinzip von LAX eingeführt [14], S. 98: Auf dem Raum $W_2^s(\Omega)$, $s \geqq 0$, wird für eine Funktion $v(x) \in L_2(\Omega)$ das lineare Funktional

$$l(u) = \int_\Omega u(x)\, \overline{v(x)}\, dx$$

betrachtet. Es wird

$$\| v \|_{W_2^{-s}(\Omega)} = \| l \|_{(W_2^s(\Omega))'} \qquad (\leqq \| v \|_{L_2(\Omega)})$$

gesetzt und anschließend $L_2(\Omega)$ in dieser Norm vervollständigt. In diesem Sinne ist

$$W_2^{-s} = (W_2^s)', \qquad s \geqq 0,$$

und nach Identifizierung der Räume L_2 und L_2'

$$W_2^s \subseteq W_2^r \qquad \text{für } -\infty < s \leqq r < +\infty.$$

Es erweist sich nun, daß man mit den bereitgestellten Hilfsmitteln Satz 1 erweitern kann.

Satz 2. *Ist $\Omega \subset R_n$ ein beschränktes Gebiet, $\partial\Omega \in C^\infty$, und $\infty > r > s > -\infty$, so gilt*

$$I_{W_2^r \to W_2^s} \notin \mathfrak{S}_{n/(r-s),\, p} \qquad \textit{für } 0 < p < \infty$$

und

$$I_{W_2^r \to W_2^s} \in \mathfrak{S}_{n/(r-s),\, \infty}.$$

Beweis. m sei eine solche natürliche Zahl, so daß $|r| < m$ und $|s| < m$ ist. Θ und Θ' werden so bestimmt, daß $r = \Theta m$ und $s = \Theta' m$ gilt. Ist A

ein positiv-definiter selbstadjungierter Operator, der den Raum $W_2^m(\Omega)$ erzeugt (A wird als Operator im Raum $L_2(\Omega)$ betrachtet), so zeigen Formel (5) und Lemma 6, daß es ausreicht, den Operator

$$I_{D(A^\Theta)\to D(A^{\Theta'})}, \qquad -1<\Theta'<\Theta<1,$$

zu betrachten. Hierbei wurde im Falle negativer Werte von Θ' oder Θ analog zu den früheren Überlegungen $D(A^\Theta)=(D(A^{-\Theta}))'$ gesetzt. A ist ein Operator mit reinem Punktspektrum, seine Eigenwerte seien λ_i und seine Eigenfunktionen $u_i(x)$. Für $u\in L_2(\Omega)$ sei $a=\{a_i\}$ mit $a_i=(u, u_i)_{L_2}$. Da die Funktionen u_i zu $W_2^m(\Omega)=D(A)$ gehören, kann man nach den obigen Überlegungen durch Grenzübergang jedem Element aus $D(A^\Theta)$, $|\Theta|\leqq 1$, eine Zahlenfolge a zuordnen. Man erhält auf diese Weise eine unitäre Abbildung von $D(A^\Theta)$ auf f^Θ, $|\Theta|\leqq 1$. Dabei sind f^Θ die früher eingeführten Folgenräume. Da somit die Approximationszahlen der Operatoren $I_{D(A^\Theta)\to D(A^{\Theta'})}$ und $I_{f^\Theta\to f^{\Theta'}}$ übereinstimmen, folgt aus den Lemmata 3 und 5

$$s_j(I_{W_2^r\to W_2^s})=\lambda_j^{\Theta'-\Theta}=\lambda_j^{-(1/m)(r-s)}=[s_j(I_{W_2^m\to L_2})]^{(r-s)/m}.$$

Satz 2 erhält man nun aus Satz 1.

Folgerungen. Bezeichnet man wie üblich einen Operator als Hilbert-Schmidt-Operator, wenn er zu $\mathfrak{S}_{2,2}=\mathfrak{S}_2$ gehört und als nuklearen Operator, wenn er zu $\mathfrak{S}_{1,1}=\mathfrak{S}_1$ gehört, so zeigen Satz 2 und Lemma 2, daß $I_{W_2^r\to W_2^s}$ dann und nur dann ein Hilbert-Schmidt-Operator ist, wenn $r-s>n/2$ ist, während $I_{W_2^r\to W_2^s}$ dann und nur dann nuklear ist, wenn $r-s>n$ ist. Daß die Einbettung von W_2^r in W_2^s für ganzzahlige nichtnegative Werte von r und s mit $r-s>n/2$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist, wurde von MAURIN bewiesen [8], S. 379. Man vergleiche auch mit [2], S. 67 und mit [3], wo unter anderem die Einbettung von W_2^r in L_2 unter zusätzlichen Voraussetzungen betrachtet wird.

$\mathring{W}_2^r(\Omega)$ sei die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ in der entsprechenden Norm. (Für Gebiete mit glattem Rand, etwa $\partial\Omega\in C^\infty$, stimmt diese Definition von $\mathring{W}_2^m(\Omega)$ mit der früher gegebenen überein.) Im Sinne der früheren Betrachtungen wird für $r<0$ $\mathring{W}_2^r=(\mathring{W}_2^{-r})'$ gesetzt. Analog zu Satz 2 gewinnt man

Satz 2'. *Ist $\Omega\subset R_n$ ein beschränktes Gebiet (über dessen Rand keinerlei Glattheitsvoraussetzungen notwendig sind) und $\infty>r>s>-\infty$, so gilt*

$$I_{\mathring{W}_2^r\to\mathring{W}_2^s}\notin\mathfrak{S}_{n/(r-s),p} \qquad \textit{für } 0<p<\infty$$

und

$$I_{\mathring{W}_2^r\to W_2^s}\in\mathfrak{S}_{n/(r-s),\infty}.$$

3. Approximationszahlen spezieller Operatoren

In diesem Abschnitt sollen Resultate von AGMON [1], S. 137 und PARASKA [10], S. 624 verallgemeinert und verschärft werden.

Es sei $T \in L(W_2^\sigma, W_2^\tau)$ ein Operator, dessen Wertevorrat $R(T)$ in einem Raum W_2^μ liegt, $R(T) \subset W_2^\mu$, mit $\mu > \tau$. Dabei ist $W_2^\sigma = W_2^\sigma(\Omega)$, wobei $\Omega \subset R_n$ ein beschränktes Gebiet ist, $\partial\Omega \in C^\infty$. Bezeichnet man mit $\tilde{T}$ die durch den Operator vermittelte Abbildung von W_2^σ in W_2^μ, so ist $\tilde{T}$ abgeschlossen. Da $D(\tilde{T}) = W_2^\sigma$ ein Raum ist, so ist nach einem Satz von BANACH $\tilde{T} \in L(W_2^\sigma, W_2^\mu)$ [14], S. 79. Dehnt man die Definition der Approximationszahlen auf beschränkte Operatoren aus, so gilt

Satz 3. (a) *Es ist*

$$s_{2j}(T) \leqq s_{2j-1}(T) \leqq C \cdot j^{-(\mu-\tau)/n} s_j(\tilde{T}).$$

Insbesondere ist also

$$T \in \mathfrak{S}_{n/(\mu-\tau), \infty}.$$

(b) *Die Aussage* (a) *ist insofern nicht verschärfbar, als es einen Operator T mit den genannten Eigenschaften gibt, so daß für jede Zahl p, $0 < p < \infty$,*

$$T \notin \mathfrak{S}_{n/(\mu-\tau), p}$$

ist.

Beweis. Es ist

$$T = I_{W_2^\mu \to W_2^\tau} \tilde{T}.$$

Die Behauptung (a) folgt nach Satz 2 aus der Abschätzung

$$s_{2j}(T) \leqq s_{2j-1}(T) \leqq s_j(I_{W_2^\mu \to W_2^\tau}) \, s_j(\tilde{T}).$$

Die Richtigkeit der Aussage (b) folgt ebenfalls aus Satz 2, wenn man

$$T = I_{W_2^\mu \to W_2^\tau} U$$

setzt, wobei U eine unitäre Abbildung von W_2^σ auf W_2^μ ist.

4. Approximationszahlen von Integraloperatoren

In der Literatur gibt es zahlreiche Arbeiten, welche aus Glattheitseigenschaften des Kerns $G(x,y)$ eines Integraloperators

$$(Gf)(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y) \, dy$$

Rückschlüsse auf die Verteilung der zugehörigen Approximationszahlen (Eigenwerte, singuläre Zahlen) ziehen. (Literaturangaben und einen kurzen Überblick über die erzielten Resultate findet man in dem Buch von GOCHBERG und KREJN [5], S. 158.) Es ist das Ziel dieses Abschnittes, die Ergebnisse von KREJN [5], S. 157 und PARASKA [10], S. 625 zu verschärfen und zu verallgemeinern. Dazu sind einige vorbereitende Betrachtungen über die Räume $W_{2,2}^{r,s}(\Omega\times\Omega)$ notwendig.

Definition 3. *$\Omega\subset R_n$ sei ein beschränktes Gebiet. Es wird für $-\infty<r<\infty$, $-\infty<s<\infty$*

$$W_{2,2}^{r,s}(\Omega\times\Omega)=W_2^r(\Omega)\,\hat{\otimes}\,L_2(\Omega)\cap L_2(\Omega)\,\hat{\otimes}\,W_2^s(\Omega)$$

gesetzt, wobei die für Funktionenräume übliche Identifizierung

$$u(x)\otimes v(y)=u(x)\,v(y), \qquad x\in\Omega,\ y\in\Omega,$$

vorgenommen wird[5].

Verwendet man die von BEREZANSKIJ [2], S. 54 angegebene Definition des Tensorproduktes zweier separabler Hilberträume, so kann man leicht einige Eigenschaften der Räume $W_{2,2}^{r,s}$ angeben. Dazu wird in Zukunft wieder vorausgesetzt, daß der Rand von Ω hinreichend glatt ist, etwa $\partial\Omega\in C^\infty$. Es sei $|r|<m$ und $|s|<m$, wobei m eine natürliche Zahl ist. A sei ein bezüglich $L_2(\Omega)$ positiv-definiter selbstadjungierter Operator, der $W_2^m(\Omega)$ erzeugt. Seine orthonormierten Eigenfunktionen und Eigenwerte seien $u_i(x)$ bzw. λ_i, $i=1,2,\ldots$. Formel (5), Lemma 6 und die Definition eines Tensorproduktes zeigen nun, daß $W_2^r(\Omega)\,\hat{\otimes}\,L_2(\Omega)$ die Vervollständigung der linearen Hülle der Funktionen $u_i(x)\cdot u_j(y)$, $1\leqq i,j<\infty$, in der Norm

$$\left(\sum_{i,j}^{1,2,\ldots}\lambda_i^{2(r/m)}\left|\left(u,u_i(x)\,u_j(y)\right)_{L_2(\Omega\times\Omega)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist. Man kann nachträglich die lineare Hülle der Funktionen $u_i(x)\,u_j(y)$ durch $C^\infty(\overline{\Omega\times\Omega})$ ersetzen. Somit ist $W_{2,2}^{r,s}(\Omega\times\Omega)$ die Vervollständigung von $C^\infty(\overline{\Omega\times\Omega})$ in der Norm

$$\left(\sum_{i,j}^{1,2,\ldots}\left(\lambda_i^{2(r/m)}+\lambda_j^{2(s/m)}\right)\left|\left(u,u_i(x)\,u_j(y)\right)_{L_2(\Omega\times\Omega)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Da man bei der Definition des Raumes $W_2^m(\Omega\times\Omega)$ auf gemischte Ableitungen verzichten kann [6], so zeigt die letzte Formel, daß

$$W_{2,2}^{m,m}(\Omega\times\Omega)=W_2^m(\Omega\times\Omega)$$

ist und $W_2^m(\Omega\times\Omega)$ von dem Operator

$$B=A\otimes E+E\otimes A$$

[5] $W_{2,2}^{r,s}(\Omega\times\Omega)$ stimmt im allgemeinen nicht mit $W_2^r(\Omega)\,\hat{\otimes}\,W_2^s(\Omega)$ überein.

erzeugt wird. Formel (5)[6] und Lemma 6 zeigen dann, daß auch

$$W_2^{\Theta m}(\Omega\times\Omega)=W_{2,2}^{\Theta m,\Theta m}(\Omega\times\Omega)=W_2^{\Theta m}\hat{\otimes} L_2\cap L_2\hat{\otimes} W_2^{\Theta m},$$

$|\Theta|\leqq 1$ ist. Somit ist

$$W_{2,2}^{r,r}(\Omega\times\Omega)=W_2^r(\Omega\times\Omega).$$

Formel (6) zeigt ferner, daß

$$W_{2,2}^{r,s}=W_{2,2}^{r,0}\qquad \text{für } r\geqq 0 \text{ und } s\leqq 0$$

ist (entsprechend für $r\leqq 0$ und $s\geqq 0$), so daß nur die Räume $W_{2,2}^{r,s}$ mit ($r\geqq 0$, $s\geqq 0$) und ($r\leqq 0$, $s\leqq 0$) von Interesse sind. Ab jetzt wird somit $rs\geqq 0$ vorausgesetzt.

Haben m, A, λ_i und $u_i(x)$ die gleiche Bedeutung wie früher, so wird mit $L=L(u_i(x)\,u_j(y))$ die lineare Hülle der Funktionen $u_i(x)\,u_j(y)$, $1\leqq i,j<\infty$, bezeichnet. Es sei

$$\sigma s\geqq 0,\qquad \rho r\geqq 0\quad \text{und}\quad \frac{\rho}{r}+\frac{\sigma}{s}=\frac{1}{m},$$

(im Falle $r=0$ hat man $\sigma=s/m$ und im Falle $s=0$ $\rho=r/m$ zu setzen). Für $u\in L$,

$$u=\sum_{i,j}^{1,\dots,N} a_{ij}\,u_i(x)\,u_j(y)$$

ist dann

$$\begin{aligned}\|(A^\rho\otimes E)(E\otimes A^\sigma)\,u(x,y)\|^2_{L_2(\Omega\times\Omega)}&=\sum_{i,j}|a_{ij}|^2\lambda_i^{2\rho}\lambda_j^{2\sigma}\\ &\leqq c_{17}\sum_{i,j}|(u,u_i(x)\,u_j(y))_{L_2(\Omega\times\Omega)}|^2\,(\lambda_i^{2(r/m)}+\lambda_j^{2(s/m)})\qquad (7)\\ &=c_{17}\,\|u\|^2_{W_{2,2}^{r,s}(\Omega\times\Omega)}.\end{aligned}$$

Damit sind die notwendigen Vorbereitungen abgeschlossen.

Es sei $G(x,y)\in L(u_i(x)\,u_j(y))$ und $f(y)\in L(u_i(y))$, wobei $L(\cdot)$ die lineare Hülle der entsprechenden Funktionen ist. Die Funktionen $u_i(x)$, sowie A, r, s und m haben die gleiche Bedeutung wie oben. Es wird

$$(Gf)(x)=\int_\Omega G(x,y)\,f(y)\,dy$$

gesetzt. ρ und σ seien jetzt Konstanten mit

$$\rho r\geqq 0,\qquad \sigma s\geqq 0\quad \text{und}\quad \frac{\rho}{r}+\frac{\sigma}{s}=1,$$

---

[6] $\partial(\Omega\times\Omega)$ gehört nicht zur Klasse C^∞. Da das Fortsetzungsverfahren von FICHTENHOLZ aber auch für Gebiete $\Omega\times\Omega$ mit $\partial\Omega\in C^\infty$ gültig bleibt, ist (5) auch für diese Gebiete richtig.

(wobei man $\sigma = s$ im Falle $r=0$ und $\rho = r$ im Falle $s=0$ zu setzen hat). Dann ist

$$A^{\rho/m}(Gf)(x) = \int_\Omega (A^{\rho/m} \otimes E)\, G(x,y) \cdot f(y)\, dy$$
$$= \int_\Omega (A^{\rho/m} \otimes E)(E \otimes A^{\sigma/m})\, G(x,y) \cdot (A^{-(\sigma/m)} f)\, dy .$$

Setzt man $f_k(x) = \lambda_k^{\sigma/m} u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, so folgt, daß $\{f_k\}$ im Raum $W_2^{-\sigma}$ ein vollständiges, orthonormiertes System ist. Aus der letzten Gleichung folgt auf Grund der Parsevalschen Formel

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A^{\rho/m}(G f_k)(x)|^2 = \int_\Omega |(A^{\rho/m} \otimes E)(E \otimes A^{\sigma/m})\, G(x,y)|^2\, dy .$$

Ersetzt man in der Formel (7) ρ durch ρ/m und σ durch σ/m, so erhält man aus

$$\|Gf\|_{W_2^\rho} = \|A^{\rho/m}(Gf)\|_{L_2}$$

die Abschätzungen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|G f_k\|^2_{W_2^\rho} \leqq c_{18}\, \|G\|^2_{W_{2,2}^{r,s}} \tag{8}$$

und

$$\|Gf\|_{W_2^\rho} \leqq c_{19}\, \|G\|_{W_{2,2}^{r,s}} \|f\|_{W_2^{-\rho}}, \qquad f \in L(u_i(y)). \tag{9}$$

Diese Abschätzungen rechtfertigen folgende

Definition 4. *Es sei $G(x,y) \in W_{2,2}^{r,s}(\Omega \times \Omega)$, $rs \geqq 0$. Dabei ist $\Omega \subset R_n$ ein beschränktes Gebiet, $\partial\Omega \in C^\infty$. Ferner seien ρ und σ zwei Konstanten mit $\rho\, r \geqq 0$, $\sigma\, s \geqq 0$ und*

$$\frac{\rho}{r} + \frac{\sigma}{s} = 1$$

($\sigma = s$ im Falle $r = 0$ und $\rho = r$ im Falle $s = 0$). $G_j(x,y) \in L(u_l(x)\, u_k(y))$ konvergiere im Raum $W_{2,2}^{r,s}(\Omega \times \Omega)$ gegen $G(x,y)$. $f_l(x) \in L(u_i(x))$ konvergiere im Raum $W_2^{-\sigma}(\Omega)$ gegen $f \in W_2^{-\sigma}$. Dann wird

$$Gf = \int_\Omega G(x,y)\, f(y)\, dy = \lim_{\substack{j\to\infty \\ l\to\infty}} \int_\Omega G_j(x,y)\, f_l(y)\, dy$$

gesetzt, wobei der Limes in der Norm W_2^ρ zu bilden ist.

Die vorangegangenen Betrachtungen, insbesondere Formel (9), zeigen, daß diese Definition sinnvoll ist. $G \in L(W_2^{-\sigma}, W_2^\rho)$.

Durch einen entsprechenden Grenzübergang in der Formel (8) erkennt man, daß G sogar ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. Somit gilt

Satz 4. *Es sei $G(x,y) \in W_{2,2}^{r,s}(\Omega \times \Omega)$, $rs \geqq 0$. Dann ist für*

$$\frac{\rho}{r} + \frac{\sigma}{s} = 1, \qquad \rho\, r \geqq 0,\ \sigma\, s \geqq 0,$$

($\sigma=s$, falls $r=0$ und $\rho=r$, falls $s=0$), der Operator G, $G\in L(W_2^{-\sigma}, W_2^{\varrho})$,

$$(G f)(x)=\int_{\Omega} G(x,y)\, f(y)\, dy,$$

ein Hilbert-Schmidt-Operator.

Von besonderem Interesse ist der Fall $r=s$. Dann muß $-\sigma=\rho-r$ sein, und man bekommt als unmittelbare Folge aus Satz 4

Satz 4'. *Für $G(x,y)\in W_2^r(\Omega\times\Omega)$ ist der Operator G, $G\in L(W_2^{\varrho-r}, W_2^{\varrho})$,*

$$(G f)(x)=\int_{\Omega} G(x,y)\, f(y)\, dy,$$

ein Hilbert-Schmidt-Operator. Dabei muß ρ für $r\geqq 0$ aus dem Intervall $[0,r]$ und für $r\leqq 0$ aus dem Intervall $[r,0]$ sein.

Kombiniert man die Sätze 2 und 4, so erhält man

Satz 5. *Betrachtet man für $-\infty<\tau\leqq\rho$ den im Satz 4 beschriebenen Integraloperator als Element von $L(W_2^{-\sigma}, W_2^{\tau})$, so ist*

$$G\in\mathfrak{S}_{\frac{2n}{n+2(\rho-\tau)},2}.$$

Beweis. G als Element von $L(W_2^{-\sigma}, W_2^{\tau})$ betrachtet wird vorübergehend mit G_τ bezeichnet, entsprechend G_ρ. Dann ist

$$G_\tau=I_{W_2^{\varrho}\to W_2^{\tau}}\, G_\rho.$$

Es gilt

$$s_{2i}(G_\tau)\leqq s_{2i-1}(G_\tau)\leqq s_i(G_\rho)\, s_i(I_{W_2^{\varrho}\to W_2^{\tau}}).$$

Nach Satz 2 ist

$$s_i(I_{W_2^{\varrho}\to W_2^{\tau}})\leqq c_{20}\, i^{-\frac{\rho-\tau}{n}}.$$

Mit

$$q=\frac{2n}{n+2(\rho-\tau)}$$

erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(G_\tau)\, i^{(2/q)-1} &\leqq c_{21}+c_{22}\sum_{i=1}^{\infty} s_{2i}^2(G_\tau)\, i^{(2/q)-1}\\ &\leqq c_{21}+c_{22}\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(G_\rho)\, s_i^2(I_{W_2^{\varrho}\to W_2^{\tau}})\, i^{(2/q)-1}\\ &\leqq c_{21}+c_{23}\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(G_\rho)<\infty.\end{aligned}$$

Dabei wurde Satz 4 benutzt. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Bemerkung. Satz 5 enthält die Sätze von KREJN [5], S. 157 und PARASKA [10], S. 625 als Spezialfälle. In der hier verwendeten Bezeichnungsweise bedeutet die Voraussetzung von PARASKA

$$G(x,y)\in W_{2,2}^{l,0}(\Omega\times\Omega),$$

wobei l eine natürliche Zahl ist. Betrachtet man noch G als Element von $L(L_2,L_2)$, dem entspricht $\tau=0$ und $\rho=l$ im Satz 5, so erhält man

$$G\in\mathfrak{S}_{\frac{2n}{n+2l},2},$$

woraus nach Lemma 2(a)

$$s_j(G)=o(j^{-r})$$

für

$$r=\frac{n+2l}{2n}\ [7]$$

folgt.

Es entsteht die Frage, ob Satz 5 verschärfbar ist. Es erweist sich, daß das zumindest im Fall $r=s>0$ nicht möglich ist. Es gilt

Satz 6. *Es sei $\Omega\subset R_n$ ein beschränktes Gebiet, $\partial\Omega\in C^\infty$. Dann gibt es für jedes ε, $\varepsilon>0$, und jedes r, $r>0$, eine Funktion*

$$G^{(\varepsilon)}(x,y)\in W_2^r(\Omega\times\Omega)=W_{2,2}^{r,r}(\Omega\times\Omega),$$

so daß der Operator $G^{(\varepsilon)}$, $G^{(\varepsilon)}\in L(W_2^{-\sigma},W_2^{\tau})$,

$$(G^{(\varepsilon)}f)(x)=\int_\Omega G^{(\varepsilon)}(x,y)\,f(y)\,dy,$$

nicht zu

$$\mathfrak{S}_{\frac{2n}{n+2(\rho-\tau)+\varepsilon},p},\qquad 0<p\leqq\infty,$$

gehört. (Dabei haben ρ, σ, τ, r und $s=r$ die gleiche Bedeutung wie in den Sätzen 4 und 5.)

Um die Richtigkeit der Behauptung nachzuprüfen, benötigt man Hilfsmittel aus der Theorie der elliptischen Differentialoperatoren. Der Satz wird in einer nachfolgenden Arbeit über Greensche Funktionen elliptischer Differentialoperatoren bewiesen.

---

[7] Theorem 3, [10], S. 625 enthält einen Druckfehler. Statt $r=\frac{2n}{n+2l}$ muß es dort $r=\frac{n+2l}{2n}$ heißen.

Literatur

1. AGMON, S.: On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems. Comm. pure appl. math. **15**, 119—147 (1962).
2. BEREZANSKIJ, JU. M.: Zerlegung nach Eigenfunktionen selbstadjungierter Operatoren. Kiev: Izd. Naukova dumka 1965. [Russisch.]
3. BIRMAN, M. Š., u. M. Z. SOLOMJAK: Über die Approximation von Funktionen der Klassen W_p^α durch stückweise Polynomfunktionen. Dokl. ak. nauk SSSR **171**, 5, 1015—1018 (1966). [Russisch.]
4. FICHTENHOLZ, G. M.: Differential- und Integralrechnung I. Berlin: Deutsch. Verl. Wiss. 1964.
5. GOCHBERG, J. C., u. M. G. KREJN: Einführung in die Theorie der nichtselbstadjungierten Operatoren. Moskva: Izd. Nauka 1965. [Russisch.]
6. IL'IN, V. P.: Eigenschaften einiger Klassen differenzierbarer Funktionen mehrerer Veränderlicher, die in einem n-dimensionalen Gebiet gegeben sind. Trudy mat. inst. Steklova **65**, 227—362 (1962). [Russisch.]
7. MAGENES, E.: Interpolationsräume und partielle Differentialgleichungen. Usp. mat. nauk **21**, 2, 169—218 (1966). [Russisch.]
8. MAURIN, K.: Hilbertraummethoden. Moskva: Izd. Mir 1965. [Russisch.]
9. NEUMARK, M. A.: Lineare Differentialoperatoren. Berlin: Akademie-Verlag 1963.
10. PARASKA, V. I.: Über die Asymptotik von Eigenwerten und singulären Zahlen linearer Operatoren, die Glattheitseigenschaften besitzen. Mat. Sbornik **68**, 623—631 (1965). [Russisch.]
11. PEETRE, J.: Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff. Ann. Inst. Fourier **16**, 1, 279—317 (1966).
12. — Inledning till interpolation, Föreläsningar 1964—1966, Lund.
13. TRIEBEL, H.: Differenzierbarkeiteigenschaften Greenscher Funktionen elliptischer Differentialoperatoren. Math. Zeitschr. **90**, 325—338 (1965).
14. YOSIDA, K.: Functional analysis. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1965.

Mathematisches Institut der Universität
69 Jena, Helmholtzweg 1

(Eingegangen am 29. Mai 1967)