Inventiones math. 4, 118—138 (1967)

# Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes

JACQUES FRISCH (Paris)

## Introduction

Soient $\varphi: Y \to S$ un morphisme d'espaces analytiques[1], $\mathscr{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $Y$. Le but de cet article est de montrer que l'ensemble $Y'$ des points $y \in Y$ où $\mathscr{F}$ n'est pas $\varphi$-plat est analytique (th. IV, 9), ce qui avait été conjecturé dans [2], exposé 13, par GROTHENDIECK. L'énoncé analogue en géométrie algébrique[2] est le théorème 11.1.1 de [4].

Dans la première partie, on montre (th. I, 9) que pour toute partie $K$, compacte et assez régulière d'un espace analytique $S$, l'anneau $\Gamma(K, \mathcal{O}_S)$ est noethérien. Cela permet d'étendre aux faisceaux analytiques cohérents certains théorèmes d'algèbre (lemme D'ARTIN-REES et théorème de platitude générique). On peut alors (propositon III, 6) établir un critère local d'acyclicité pour un complexe de modules libres sur $C^n$ qui dépend d'un paramètre décrivant un espace analytique $S$. On arrive au but dans la quatrième partie, où l'on étudie aussi l'image de $Y'$ par $\varphi$, et où l'on montre que, $y$ étant un point de $Y$, le théorème 11.1.1 de [4] ne s'applique pas au morphisme de schémas: $(\operatorname{spec}(\mathcal{O}_{Y,y}) \to \operatorname{spec}(\mathcal{O}_{S,\varphi(y)})$ défini par $\varphi$.

C'est ADRIEN DOUADY qui m'a donné l'idée de ce travail et qui l'a dirigé. HENRI CARTAN et BERNARD MALGRANGE en ont lu une première version, et m'ont suggéré de nombreuses améliorations. Qu'il veuillent bien trouver ici l'expression de ma reconnaissance.

## I. Anneaux Noetheriens de fonctions analytiques

Le faisceau structural d'un espace analytique réel (resp. complexe) $X$ sera noté $\mathcal{O}_X$. On appelle *sous-ensemble analytique* de $X$ une partie fermée $Y$ de $X$ telle que, pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert $U$ de $y$ dans $X$ et une famille finie $(f_1, \ldots, f_p)$ de fonctions analytiques réelles (resp. complexes) sur $U$, i.e. de fonctions associées à des sections de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de $U$, vérifiant:

$$Y \cap U = \{y \in U; f_1(y) = \cdots = f_p(y) = 0\}.$$

[1] Les espaces analytiques considérés ici ne sont pas supposés réduits.

[2] Cf. note [6] à la fin de l'article, et aussi l'article suivant de KIEHL.

Si $Y$ est un sous-ensemble analytique de $X$, on notera $\mathcal{O}_Y$ le faisceau des fonctions analytiques réelles (resp. complexes) sur $Y$; $\mathcal{I}$ étant le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ formé des sections dont la fonction associée s'annule sur $Y$, on a: $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$. Dans le cas complexe, la notion de sous-ensemble analytique coïncide avec celle de sous-espace analytique réduit.

**Définition (I, 1).** *Etant donnés un espace topologique $E$, un faisceau d'ensembles $\mathcal{F}$ sur $E$ et un point $a$ de $E$, on dit qu'un voisinage $\Omega$ de $a$ est $\mathcal{F}$-privilégié (ou priviligié pour $\mathcal{F}$) si l'application canonique $\Gamma(\Omega, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}_a$ est injective.*

**Remarque (I, 2).** Soit $Y$ un espace analytique complexe réduit. Pour qu'un voisinage ouvert $\Omega$ d'un point $a \in Y$ soit $\mathcal{O}_Y$-privilégié, il suffit que toutes les composantes irréductibles de $Y \cap \Omega$ passent par $a$, (cela résulte de ce que l'ensemble des points lisses d'un ensemble analytique complexe irréductible $Z$ est connexe et partout dense dans $Z$). Si $\Omega$ est DE STEIN, cette condition est aussi nécessaire, (on le voit en appliquant le théorème $A$ à l'idéal défini par une composante irréductible de $Y \cap \Omega$ ne passant pas par $a$).

**Remarque (I, 3).** Soient $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens sur $E$, et $a$ un point de $E$. Si $\Omega$ est un voisinage de $a$ priviligié pour $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$, il l'est pour $\mathcal{F}$ (à cause de l'exactitude à gauche du foncteur $\Gamma$). Si $\Omega$ est un voisinage de $a$ priviligié pour $\mathcal{F}$, il l'est pour $\mathcal{F}'$.

**Proposition (I, 4).** *Soient $X$ un espace analytique complexe, $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $X$ $a$ un point de $X$. Il existe un voisinage $U$ de $a$, et une famille finie $(Y_0, \ldots, Y_m)$ de sous-ensembles analytiques de $X$ passant par $a$ jouissant de la propriété suivante: un voisinage $\Omega$ de $a$ contenu dans $U$ est $\mathcal{F}$-priviligié dès qu'il découpe sur chacun des $Y_i$ un voisinage $\mathcal{O}_{Y_i}$-priviligié de $a$.*

*Démonstration.* a) Soit $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ une suite exacte de faisceaux analytiques cohérents sur $X$. Si la proposition vaut pour $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$, elle vaut aussi pour $\mathcal{F}$. Soient en effet $U'$ (resp. $U''$) le voisinage de $a$, $(Y'_0, \ldots, Y'_{m'})$ (resp. $(Y''_0, \ldots, Y''_{m''})$) la famille de sous-ensembles analytiques de $U'$ (resp. $U''$) associés à $\mathcal{F}'$ (resp. $\mathcal{F}''$) par la proposition. Le voisinage $U = U' \cap U''$ et la famille $(Y'_0 \cap U, \ldots, Y'_{m'} \cap U, \ldots, Y''_{m''} \cap U)$ de sous-ensembles analytiques de $U$ ont la propriété requise: cela résulte de (I, 3).

b) $\mathcal{F}$ étant donné, on peut trouver un voisinage de $a$, et une suite de composition $\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_{m+1}$ de $\mathcal{F}$ au-dessus de ce voisinage, telle que pour $0 \leq i \leq m$, $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i+1}$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_{Y_i}$, où $Y_i$ est un sous-ensemble analytique irréductible de $X$ passant par $a$ (cf. [1], ch. IV, §1, th. 1). La proposition vaut pour chacun des $\mathcal{O}_{Y_i}$ d'après (I, 2), donc pour $\mathcal{F}$ d'après a).

Rappelons quelques définitions et résultats classiques sur les ensembles semi-analytiques (pour plus de précision, cf. [6], §1).

Soit $\Omega$ une partie ouverte d'une variété analytique réelle $M$. On dit qu'une partition $\mathcal{N}$ de $\Omega$ est une *stratification* si $\mathcal{N}$ est une partition finie de $\Omega$ en sous-variétés analytiques connexes localement fermées, et si pour tout élément (ou strate) $\Gamma$ de $\mathcal{N}$, $(\bar{\Gamma}-\Gamma)\cap\Omega$ est une réunion de strates de dimension strictement inférieure.

Pour toute partie ouverte $\omega$ de $\Omega$, notons $\mathcal{N}(\omega)$ la partition de $\omega$ dont les éléments sont les composantes connexes des ensembles $\omega\cap\Gamma$, $\Gamma\in\mathcal{N}$. Un voisinage ouvert $Q$ d'un point $x$ de $\Omega$ sera qualifié de *normal* pour la stratification $\mathcal{N}$, si $\mathcal{N}(Q)$ est une stratification de $Q$, et si $x$ est adhérent à toute strate de $\mathcal{N}(Q)$.

Soit $Q$ un voisinage normal de $x$, et soit $\Gamma$ la strate de $\mathcal{N}(Q)$ contenant $x$. Toute strate de $\mathcal{N}(Q)$ autre que $\Gamma$ a une dimension strictement supérieure à celle de $\Gamma$; $Q$ est connexe, et $\Gamma$ est l'intersection avec $Q$ de la strate de $\mathcal{N}$ passant par $x$.

Une stratification est dite *compatible avec une partie $A$ de $M$* si toute strate est soit contenue dans $A$, soit disjointe de $A$.

Soit $a\in M$. Désignons par $\mathcal{S}_a$ la plus petite famille de germes en $a$ de parties de $M$, stable pour les opérations de réunion et intersection finies, et de passage au complémentaire, et contenant les germes de la forme $\{x\in M; f(x)<0\}_a$, où $f$ est une fonction analytique réelle au voisinage de $a$. On dit qu'une partie $A$ de $M$ est *semi-analytique* si, pour tout point $x$ de $M$, son germe en $x$ est un élément de $\mathcal{S}_x$. Cette notion étant de caractère local, on définit de façon évidente les parties semi-analytiques d'un espace analytique réel. Enfin, une partie d'un espace analytique complexe sera dite semi-analytique si elle l'est pour la structure réelle sous-jacente. Cela dit, voici le résultat que nous utiliserons ([6], ibid.):

*Soient $X$ un espace analytique réel, $a$ un point de $X$ et $(A_0, \ldots, A_m)$ une famille finie de parties semi-analytiques de $X$. Il existe une stratification $\mathcal{N}$ d'un voisinage ouvert $U$ de $a$ compatible avec chacun des $A_i$, telle que tout point $x$ de $U$ possède un système fondamental de voisinages normaux.*

**Propoistion (I, 5).** *Soient $X$ un espace analytique réel, $A$ une partie semi-analytique de $X$, $a$ un point de $A$, et $(Y_0, \ldots, Y_m)$ une famille finie de sous-ensembles analytiques de $X$ passant par $a$. Il existe un système fondamental $\mathfrak{B}$ de voisinages de $a$ dans $A$, dont tout élément $V$ possède lui-*

*même un système fondamental $\mathfrak{W}_V$ de voisinages ouverts dans $X$, tel que tout élément $W \in \mathfrak{W}_V$ découpe sur chacun des $Y_i$ un voisinage $\mathcal{O}_{Y_i}$-privilégié de $a$.*

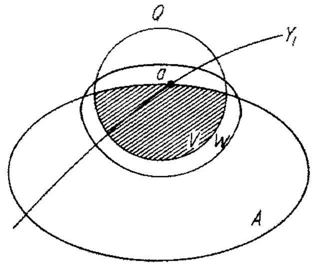


Fig. 1

*Démonstration.* La proposition étant de caractère local, on peut supposer que $X = \boldsymbol{R}^n$. Soit $U$ un voisinage ouvert de $a$ dans $\boldsymbol{R}^n$ muni d'une stratification $\mathcal{N}$ compatible avec $A, Y_0, \ldots, Y_m$, tel que tout point $x \in U$ admette un systéme fondamental $\mathcal{Q}(x)$ de voisinages normaux.

Prenons $\mathfrak{B} = \{Q \cap A;\, Q \in \mathcal{Q}(a)\}$.

Soit $V \in \mathfrak{B}$; $V$ est de la forme $Q \cap A$, où $Q$ est un voisinage normal de $a$. Pour prouver la proposition, on doit, étant donné un voisinage $\Omega$ de $V$ dans $\boldsymbol{R}^n$, construire un voisinage ouvert $W$ de $V$ dans $\boldsymbol{R}^n$, contenu dans $\Omega$ et découpant sur chaque $Y_i$ un voisinage $\mathcal{O}_{Y_i}$-priviligié. Pour chaque $x \in V$, soit $Q(x)$ un voisinage de $x$ dans $\boldsymbol{R}^n$, normal pour $\mathcal{N}$ et contenu dans $\Omega$. Posons:

$$W = \bigcup_{x \in V} Q(x),$$

et vérifions que $W$ a bien la propriété demandée. Soit $f$ une fonction analytique réelle sur $W$, nulle au voisinage de $a$ sur $Y = Y_i$, où $i$ est fixé entre 0 et $m$: on va montrer que $f$ s'annule alors sur $Y \cap W$. $Y \cap Q$ est une réunion (finie) de strates de $\mathcal{N}(Q)$, lesquelles sont des variétés connexes, adhérentes à $a$, et situées, soit dans $A$, soit hors de $A$. Il est évident que $f$ s'annule sur toute strate contenue dans $A \cap Y \cap Q$, donc sur $A \cap Y \cap Q$. Il est clair aussi que $f$ s'annule sur $Y \cap Q(a)$. Il reste donc à prouver que, si $b$ est un point de $V$ autre que $a$, $f$ est nulle sur $Y \cap Q(b)$, i.e. sur toute strate de $\mathcal{N}(Q(b))$ contenue dans $Y$.

Soit $\gamma$ une strate de $\mathcal{N}(Q(b))$ contenue dans $Y$; $\gamma$ est adhérente à $b$, et c'est une composante connexe de l'intersection avec $Q(b)$ d'une strate $\Gamma$ (contenue dans $Y$) de $\mathcal{N}(Q)$. D'après les remarques précédentes, il suffit de considérer le cas où $b$ est dans la frontière de $A$, et où $\Gamma$ ne rencontre pas $A$.

$A \cap \gamma \cap Q(b)$ est une réunion de strates de $\mathcal{N}(Q(b))$; l'une d'elles, $\lambda$, contient $b$; $\lambda$ est l'intersection avec $Q(b)$ d'une strate $\Lambda$ (nécessairement contenue dans $A$) de $\mathcal{N}(Q)$. Soit $C$ la composante connexe de $\Gamma \cap W$ contenant $\gamma$. Considérons l'ensemble

$$E = \{x \in \Lambda \cap V;\ \Lambda_x \subset \bar{C}_x\},$$

(l'indice $x$ signifie germe en $x$). $E$ contient le point $b$, car $\Lambda \cap Q(b) \subset \bar{\gamma} \cap Q(b) \subset \bar{C} \cap Q(b)$; $E$ est ouvert dans $\Lambda \cap V$ par définition; mais il est aussi fermé. Mieux: si $y \in \bar{E} \cap \Lambda \cap V$, alors $\Lambda \cap Q(y) \subset \bar{C} \cap Q(y)$. En effet, il existe alors un point $x$ dans $E \cap Q(y)$, donc il existe une partie ouverte non vide de $\Lambda \cap Q(y)$ contenue dans $\bar{C} \cap Q(y)$. Mais $\Lambda \cap Q(y)$ est une strate de $\mathcal{N}(Q(y))$ puisque $y \in \Lambda$; d'où l'assertion puisque $\bar{C} \cap Q(y)$ est une réunion de strates de $\mathcal{N}(Q(y))$.

$\Lambda$ étant connexe, on a donc $E = \Lambda \cap V$, d'où $\Lambda \cap V \subset \bar{C} \cap V$, et même $\Lambda \cap W \subset \bar{C} \cap W$. Or, $a \in \bar{\Lambda}$, donc $a \in \bar{C}$, ce qui montre que $f$ s'annule sur une partie ouverte et non vide de $C$ (à savoir $Q(a) \cap C$), donc sur $C$ tout entier, et en particulier sur $\gamma$. C.Q.F.D.

**Proposition (I. 6).** *Soient $X$ un espace analytique réel ou complexe, $A$ une partie semi-analytique de $X$, $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $X$. Tout point $a \in A$ possède dans $A$ un système fondamental de voisinages $\mathcal{F}$-priviligiés.*

*Démonstration*

*a) Cas complexe:* Soient $U$ le voisinage de $a$ et $Y_0, \ldots, Y_m$ la famille de sous-ensembles analytiques complexes de $U$ données par la proposition (I, 4). Soit $\mathfrak{B}$ le système fondamental de voisinages de $a$ dans $A$ fourni par la proposition (I, 5). Tout élément $V$ de $\mathfrak{B}$ contenu dans $U$ est un voisinage $\mathcal{F}$-privilégié de $a$.

En effet, un tel $V$ admet un système fondamental $\mathfrak{W}_V$ de voisinages dans $X$ découpant sur chaque $Y_i$ un voisinage de $a$ privilégié pour le faisceau des fonctions analytiques reelles sur $Y_i$, donc a fortiori $\mathcal{O}_{Y_i}$-privilégié. D'après (I, 4), tout $W \in \mathfrak{W}_V$ est donc voisinage $\mathcal{F}$-privilégié de $a$, et il en est de même de $V$ puisque:

$$\Gamma(V, \mathcal{F}) = \varinjlim_{W \in \mathfrak{W}_V} \Gamma(W, \mathcal{F}).$$

*b) Cas réel:* La proposition étant de caractère local, on peut supposer que $X = \boldsymbol{R}^n$. Considérons $\boldsymbol{R}^n$ comme plongé dans $\boldsymbol{C}^n$ et notons $\mathscr{A}$ (resp. $\mathcal{O}$) le faisceau des fonctions analytiques réelles sur $\boldsymbol{R}^n$ (resp. analytiques complexes sur $\boldsymbol{C}^n$). Le faisceau induit sur $\boldsymbol{R}^n$ par $\mathcal{O}$ s'identifie à $\mathscr{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$. Ainsi, $\mathcal{F} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ est un faisceau $\mathcal{O}$-cohérent défini sur $\boldsymbol{R}^n$ (donc au voisinage de $\boldsymbol{R}^n$). D'après ce qui précède, $a$ possède dans $A$ un système fondamental de voisinages privilégiés pour $\mathcal{F} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$, donc aussi pour $\mathcal{F}$.

Soit $X$ un espace analytique réel ou complexe. On dit qu'une partie $A$ de $X$ est de STEIN si elle admet un système fondamental de voisinages de STEIN. Rappelons que dans le cas réel, cette condition est toujours réalisée.

**Proposition (I, 7).** *Soient $X$ un espace analytique réel ou complexe, $A$ une partie de $X$ semi-analytique et de* STEIN, *$\mathscr{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $A$. Toute famille filtrante croissante $(\mathscr{F}_j)_{j\in J}$ de sous-faisceaux analytiques cohérents de $\mathscr{F}$ est localement stationnaire.*

*Démonstration.* Soit $a$ un point de $A$. L'anneau $\mathcal{O}_{X,a}$ étant noethérien, la suite $\mathscr{F}_{j,a}$ est stationnaire à partir d'un certain rang $j_0$. Soit $W$ un voisinage $\mathscr{F}/\mathscr{F}_{j_0}$-privilégié de $a$ dans $A$ (il en existe d'après I, 6).

Dans le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \Gamma(W, \mathscr{F}_{j_0}) & \longrightarrow & \Gamma(W, \mathscr{F}) & \longrightarrow & \Gamma(W, \mathscr{F}/\mathscr{F}_{j_0}) \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} \\
0 \longrightarrow & \mathscr{F}_{j_0,a} & \longrightarrow & \mathscr{F}_a & \longrightarrow & (\mathscr{F}/\mathscr{F}_{j_0})_a,
\end{array}$$

les lignes sont exactes et l'homomorphisme $\varepsilon$ est injectif. Il en résulte que $\Gamma(W, \mathscr{F}_j) = \Gamma(W, \mathscr{F}_{j_0})$ pour tout $j \geqq j_0$. On a donc pour tout point $b$ de $W$ et tout $j \geqq j_0$:

$$\mathscr{F}_{j,b} = \Gamma(A, \mathscr{F}_j) \cdot \mathcal{O}_{X,b} = \Gamma(W, \mathscr{F}_j) \cdot \mathcal{O}_{X,b} = \Gamma(W, \mathscr{F}_{j_0}) \cdot \mathcal{O}_{X,b},$$

(la première égalité résulte du théorème $A$). Ainsi, la suite $\mathscr{F}_j$ est stationnaire à partir de $j_0$ au-dessus de $W$.

**Corollaire (I, 8).** *Soient $X$ un espace analytique réel ou complexe, $A$ une partie de $X$ semi-analytique et de* STEIN, *$\mathscr{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $X$. Si $E$ est un sous-ensemble de $\Gamma(A, \mathscr{F})$, le sous-faisceau analytique de $\mathscr{F}|_A$ engendré au-dessus de $A$ par $E$ est cohérent.*

*Démonstration.* Pour toute partie finie $E_i$ de $E$, le sous-faisceau $\mathscr{F}_i$ de $\mathscr{F}|_A$ engendré au-dessus de $A$ par les éléments de $E_i$ est cohérent. Comme le sous-faisceau $\mathscr{F}'$ de $\mathscr{F}|_A$ engendré au-dessus de $A$ par $E$ est la réunion de la famille filtrante croissante $(\mathscr{F}_i)$, l'assertion résulte de la proposition (I, 7).

**Théorème (I, 9).** *Soient $X$ un espace analytique réel ou complexe, $A$ une partie de $X$ compacte, semi-analytique et de* STEIN. *L'anneau $\Gamma(A, \mathcal{O}_X)$ est noethérien.*

*Démonstration.* Soit $I$ un idéal de $\Gamma(A, \mathcal{O}_X)$. Le faisceau d'idéaux $\mathscr{I}$ de $\mathcal{O}_X|_A$ engendré au-dessus de $A$ par $I$ est cohérent. Comme $A$ est compact, on peut trouver une famille finie $(f_1, \ldots, f_p)$ d'éléments de $I$ tels que pour tout $x \in A$, $\mathscr{I}_x$ soit engendré sur $\mathcal{O}_{X,x}$ par les germes en $x$ de $f_1, \ldots, f_p$. Le théorème $B$ entraîne alors que $I$ est engendré sur $\Gamma(A, \mathcal{O}_X)$ par $f_1, \ldots, f_p$.

**Remarque (I, 10).** Soient $X$ un espace analytique réel ou complexe, $\mathscr{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $X$; tout $x \in X$ possède un système fondamental de voisinages $\mathscr{F}$-provilégiés, compacts, semi-analytiques et de STEIN. (On peut en effet supposer $X = \boldsymbol{C}^n$; on sait alors que $x$ possède un système fondamental de voisinages $\mathscr{F}$-privilégiés qui sont des polydisques compacts[3].)

**Remarque (I, 11).** Le théorème (I, 9) est en général faux si l'on ne suppose pas $A$ semi-analytique. Voici un contre-exemple. Soit $A$ l'ensemble compact des points $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ tels que:

$$0 \leqq x \leqq 1, \qquad \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \sin\frac{1}{x} \leqq y \leqq 10.$$

Cet ensemble n'est pas semi-analytique à l'origine. Les points $M_k$ de coordonnées $(x_k, 0)$, où

$$\frac{1}{x_k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ne sont pas dans $A$. Pour tout entier $k$, la fonction

$$f_k(P) = 1 - \cos(\overrightarrow{M_k P}, \overrightarrow{M_k 0})$$

est donc analytique réelle sur $A$. Comme $f_k(P) = 0$ pour $P \in A \cap \{y=0\} \cap \{x < x_k\}$, et que $f_k(P) = 2$ pour $P \in A \cap \{y=0\} \cap \{x > x_k\}$, la suite des idéaux engendrés dans $\Gamma(A, \mathcal{O}_{\boldsymbol{R}^2})$ par les $f_k$ est croissante, mais non stationnaire.

**Lemme (I, 12).** *Soient $X$ un espace analytique réel ou complexe, $\mathscr{I}$ un faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_X$, $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}''$ deux sous-faisceaux analytiques cohérents d'un faisceau analytique cohérent $\mathscr{F}$ sur $X$. Alors*

(i) $\Gamma(X, \mathscr{E}' \cap \mathscr{E}'') = \Gamma(X, \mathscr{E}') \cap \Gamma(X, \mathscr{E}'')$,

(ii) *si $X$ est de* STEIN, $\Gamma(X, \mathscr{I}\mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{I}) \,.\, \Gamma(X, \mathscr{F})$.

*Démonstration.* (i) est trivial. Quant à (ii), l'inclusion $\supset$ est évidente; d'autre part, le morphisme canonique $\mathscr{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F} \to \mathscr{I}\mathscr{F}$ est par définition surjectif, donc l'homomorphisme canonique:

$$\Gamma(X, \mathscr{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{I}) \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)} \Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X, \mathscr{I}\mathscr{F})$$

l'est aussi en vertu du théorème $B$, d'où l'égalité.

**Proposition (I, 13)** (Lemme d'ARTIN-REES). *Soient $X$ un espace analytique réel ou complexe, $\mathscr{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $X$, $\mathscr{E}$ un sous-faisceau analytique cohérent de $\mathscr{F}$, $\mathscr{I}$ un faisceau cohérent d'idéaux*

[3] Cf. par exemple [3], 7, théorème 1 (où l'on impose des propriétés encore plus fortes aux voisinages), ou même [5], théorème 7, page 32.

*de $\mathcal{O}_X$. Pour tout point $x \in X$, il existe un entier $\lambda_0 \geqq 0$ et un voisinage ouvert $\Omega$ de $x$ au-dessus duquel on ait pour tout entier $\lambda \geqq \lambda_0$:*

$$\mathcal{I}(\mathcal{I}^\lambda \mathcal{F} \cap \mathcal{E}) = \mathcal{I}^{\lambda+1} \mathcal{F} \cap \mathcal{E}.$$

*Démonstration.* Soient $K$ un voisinage compact, semi-analytique et DE STEIN d'un point $x \in X$, et $\Omega$ l'intérieur de $K$. Notons respectivement $A$, $I$, $E$ et $F$ les anneaux et modules de sections sur $K$ de $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$: $A$ est un anneau noethérien (I, 9) et $F$ un $A$-module de type fini. On peut donc appliquer le lemme D'ARTIN-REES ([*1*], ch. III, § 3, corollaire 1 du th. 1): il existe un entier $\lambda_0 \geqq 0$ tel que l'on ait pour tout $\lambda \geqq \lambda_0$:

$$(*) \qquad I(I^\lambda F \cap E) = I^{\lambda+1} F \cap E.$$

Posons pour tout $\lambda \geqq \lambda_0$:

$$\mathcal{G}_\lambda = (\mathcal{I}^{\lambda+1} \mathcal{F} \cap \mathcal{E}) / \mathcal{I} \cdot (\mathcal{I}^\lambda \mathcal{F} \cap \mathcal{E}).$$

On voit grâce au lemme précédent que $(*)$ s'écrit simplement: $\Gamma(K, \mathcal{G}_\lambda) = 0$; $K$ étant de STEIN, les faisceaux analytiques cohérents $\mathcal{G}_\lambda$ sont donc nuls au-dessus de $\Omega$ en vertu du théorème $B$. D'où la proposition.

## II. Platitude générique

Soient $S$ un espace analytique complexe, $U$ une partie ouverte de $\mathbf{C}^n$, $\mathcal{F}$ un faisceau analytique sur $S \times U$. Pour tout $(s, x) \in S \times U$, la projection $S \times U \to S$ fait de $\mathcal{O}_{S \times U, (s, x)}$ une $\mathcal{O}_{S, s}$-algèbre, et de $\mathcal{F}_{(s, x)}$ un $\mathcal{O}_{S, s}$-module; si celui-ci est libre (resp. plat), on dit que $\mathcal{F}$ est $S$-libre (resp. $S$-plat) en $(s, x)$.

**Théorème (II, 1).** *Soient $S$ un espace analytique complexe réduit, $U$ une partie ouverte de $\mathbf{C}^n$, $(s, x)$ un point de $S \times U$, $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux définissant le sous-espace $S \times \{x\}$ de $S \times U$, $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $S \times U$.*

(i) *Il existe un voisinage ouvert $\Omega$ de $s$ dans $S$, et un sous-ensemble analytique strict $T$ de $\Omega$ tels que, pour tout $s' \in \Omega - T$ et tout entier $k \geqq 0$, le faisceau $\mathcal{F}/\mathcal{I}^{k+1}\mathcal{F}$ soit $S$-libre en $(s', x)$.*

(ii) *Si tous les faisceaux $\mathcal{F}/\mathcal{I}^{k+1}\mathcal{F}$ sont $S$-libres au point $(s', x)$, $\mathcal{F}$ est $S$-plat en ce point.*

*Démonstration.* (i). Posons:

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{I}} \mathcal{O}_{S \times U} = \bigoplus_{k \geqq 0} \mathcal{I}^k / \mathcal{I}^{k+1}, \qquad \mathcal{G}^k = \mathcal{I}^k \mathcal{F} / \mathcal{I}^{k+1} \mathcal{F}, \qquad \mathcal{G} = \mathrm{gr}_{\mathcal{I}} \mathcal{F} = \bigoplus_{k \geqq 0} \mathcal{G}^k.$$

Pour chaque $k$, $\mathcal{G}^k$ est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_S$-modules, et il revient évidemment au même de montrer qu'en un point $(s', x)$, tous les $\mathcal{F}/\mathcal{I}^k\mathcal{F}$ sont $S$-libres, ou de montrer qu'en ce point, $\mathcal{G}$ est $S$-libre. On s'appuiera sur le lemme suivant ([*4*], lemme 6.9.2):

*Soient $A$ un anneau intègre noethérien, $B$ une $A$-algèbre de type fini, $G$ un $B$-module de type fini. Il existe $\not{f}\neq 0$ dans $A$ tel que $G_{\not{f}}$ soit un $A_{\not{f}}$-module libre.*

On peut supposer le germe de $S$ en $s$ irréductible (on se ramène facilement à ce cas par récurrence sur le nombre de composantes irréductibles de ce germe). Soit $K$ un voisinage $\mathcal{O}_S$-privilégié de $s$ dans $S$, compact, semi-analytique et de STEIN (remarque I, 10). L'anneau $A=\Gamma(K, \mathcal{O}_S)$ est alors noethérien et intègre. Notons respectivement $O$, $I$, $B$, $F$, $G^k$ et $G$ les anneaux et modules des sections sur $K\times\{x\}$ des faisceaux $\mathcal{O}_{S\times U}, \mathcal{I}$, $\mathrm{gr}_{\mathcal{I}}\, \mathcal{O}_{S\times U}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}^k$ et $\mathcal{G}$; $F$ est un $O$-module de type fini; on a:

$$B=\mathrm{gr}_I\, O\,, \qquad G=\mathrm{gr}_I\, F=\bigoplus_{k\geqq 0} G^k;$$

$B$ est une $A$-algèbre de type fini, $G$ un $B$-module de type fini. D'après le lemme, il existe donc $\not{f}\neq 0$ dans $A$ tel que $G_f$ soit un $A_f$-module libre. Prenons alors pour $\Omega$ l'intérieur de $K$, et pour $T$ le lieu des zéros de $\not{f}$; comme $S$ est réduit, $T$ est un sous-ensemble analytique strict de $\Omega$. Vérifions que pour tout $s'\in\Omega-T$, chaque $\mathcal{G}^k$ est $S$-libre en $(s', x)$. Comme le $\mathcal{O}_S$-module $\mathcal{G}^k$ est cohérent, on a d'après le théorème $B$:

$$\mathcal{G}^k_{(s',x)}=G^k\otimes_A \mathcal{O}_{S,s'},$$

et puisque $f_{s'}$ est un élément inversible de $\mathcal{O}_{S,s'}$, on a même

$$\mathcal{G}^k_{(s',x)}=G^k_{\not{f}}\otimes_{A_{\not{f}}} \mathcal{O}_{S,s'};$$

comme $G^k_{\not{f}}$ est $A_{\not{f}}$-plat (car facteur direct du $A_{\not{f}}$-module libre $G_{\not{f}}$), $\mathcal{G}^k$ est $\mathcal{O}_S$-plat, donc $\mathcal{O}_S$-libre en $(s', x)$.

(ii). Supposons que tous les faisceaux $\mathcal{F}/\mathcal{I}^{k+1}\mathcal{F}$ soient $S$-libres en un point $(s', x)$. Posons

$$B=\mathcal{O}_{S\times U,(s',x)}, \qquad I=\mathcal{I}_{(s',x)}, \qquad A=\mathcal{O}_{S,s}=B/I\,, \qquad F=\mathcal{F}_{(s',x)},$$

et

$$F_k=(\mathcal{F}/\mathcal{I}^{k+1}\mathcal{F})_{(s',x)}=F/I^{k+1}F$$

(ces notations sont sans rapport avec celles introduites dans la démonstration de (i)). Il suffit de vérifier que si $\varphi: M\to N$ est un homomorphisme injectif de $A$-modules de type fini, alors

$$\psi=\varphi\otimes 1_F: M\otimes_A F\longrightarrow N\otimes_A F$$

est encore injectif. Pour tout $k\geqq 0$, l'homorphisme

$$\psi_k=\varphi\otimes 1_{F_k}: M\otimes_A F_k\longrightarrow N\otimes_A F_k$$

est injectif, puisque $F_k$ est un $A$-module libre. Il en est donc de même de

$$\varprojlim \psi_k : \widehat{M \otimes_A F} \to \widehat{N \otimes_A F}$$

($\wedge$ signifie séparé-complété pour la topologie $I$-adique). Or dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_A F & \xrightarrow{\psi} & N \otimes_A F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{M \otimes_A F} & \xrightarrow{\varprojlim \psi_k} & \widehat{N \otimes_A F}, \end{array}$$

les applications canoniques verticales sont injectives (car les $B$-modules $M \otimes_A F$ et $N \otimes_A F$ sont de type fini, donc séparés pour la topologie $I$-adique). Par suite, $\psi$ est injective, d'où (ii).

## III. Complexes dependant de paramètres

Soient $S$ un espace analytique complexe, $U$ une partie ouverte de $\boldsymbol{C}^n$. Pour $s \in S$, l'application $i_s$: $U \to S \times U$ qui à $x \in U$ associe $(s, x) \in S \times U$ fait de $\mathcal{O}_U$ une $\mathcal{O}_{S \times U}$-algèbre. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau analytique sur $S \times U$, on posera $\mathscr{F}(s) = i_s^* \mathscr{F}$ ; c'est un faisceau analytique sur $U$, dont on notera $\mathscr{F}_x(s)$ la fibre en $x \in U$. Rappelons que:

$$\mathscr{F}_x(s) = \mathscr{F}_{(s,x)} \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U,(s,x)}} \mathcal{O}_{U,x} = \mathscr{F}_{(s,x)} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \boldsymbol{C}.$$

Cela dit, nous allons utiliser le résultat du numéro précédent pour déduire de la proposition (I, 13) des énoncés analogues, mais relatifs à une famille de faisceaux sur $U$ paramétrée par un espace analytique $S$. Pour $x \in U$, on notera $\mathfrak{M}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{U,x}$.

**Proposition (III, 1).** *Soient $S$ un espace analytique complexe, $U$ une partie ouverte de $\boldsymbol{C}^n$, $(s_0, x_0)$ un point de $S \times U$, $\mathscr{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $S \times U$, $\mathscr{E}$ un sous-faisceau cohérent de $\mathscr{F}$. Il existe un voisinage ouvert $\Omega \times V$ de $(s_0, x_0)$ dans $S \times U$ et un entier $\lambda_0 \geqq 0$ tels que l'on ait pour tout $\lambda \geqq \lambda_0$ et tout $(s, x) \in \Omega \times V$:*

$$\mathfrak{M}_x(\mathfrak{M}_x^\lambda \mathscr{F}_x(s) \cap \tilde{\mathscr{E}}_x(s)) = \mathfrak{M}_x^{\lambda+1} \mathscr{F}_x(s) \cap \tilde{\mathscr{E}}_x(s),$$

*où $\tilde{\mathscr{E}}_x(s)$ désigne l'image canonique de $\mathscr{E}_x(s)$ dans $\mathscr{F}_x(s)$.*

*Démonstration.* 1) Soit $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S\,\mathrm{red}}$, et soit $\mathscr{E}'$ l'image canonique de $\mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S\,\mathrm{red}}$ dans $\mathscr{F}'$; on a $\mathscr{F}'_x(s) = \mathscr{F}_x(s)$ et $\tilde{\mathscr{E}}'_x(s) = \tilde{\mathscr{E}}_x(s)$ pour tout $(s, x) \in S \times U$. On peut donc supposer $S$ réduit.

2) Considérons l'énoncé que voici: Dans les conditions de la proposition (III, 1), il existe un voisinage ouvert $\Omega$ de $S_0$ dans $S$ et un entier $\lambda_0 \geqq 0$ tels que l'on ait tout $\lambda \geqq \lambda_0$ et tout $s \in \Omega$:

$$(*) \qquad \mathfrak{M}_{x_0}(\mathfrak{M}_{x_0}^\lambda \mathscr{F}_{x_0}(s) \cap \tilde{\mathscr{E}}_{x_0}(s)) = \mathfrak{M}_{x_0}^{\lambda+1} \mathscr{F}_{x_0}(s) \cap \tilde{\mathscr{E}}_{x_0}(s).$$

Soient $U' \times W$ un voisinage ouvert de $(x_0, 0)$ dans $U \times C^n$ tel que $U' + W \subset U$ et $\varphi$: $S \times U' \times W \to S \times U$ l'application $(s, x, y) \to (s, x+y)$. Soient $\mathscr{F}' = \varphi^* \mathscr{F}$, et $\mathscr{E}'$ l'image canonique de $\varphi^* \mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}'$. Alors $\mathscr{F}_0'(s, x) = \mathscr{F}_{x_0}(s)$ et $\tilde{\mathscr{E}}_0'(s, x) = \mathscr{E}_x(s)$ pour tout $(s, x) \in S \times U'$. On voit donc que l'énoncé en question, appliqué aux faisceaux $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{F}'$ et au point $((s, x), 0)$ de $(S \times U') \times W$ entraîne la proposition.

3) Démontrons cet énoncé par récurrence sur la dimension $k$, et le nombre de composantes irréductibles du germe de $S$ au point $s_0$. Si $k=0$, il résulte immédiatement du lemme d'ARTIN-REES. Nous pouvons donc supposer $k$ non nul, et l'énoncé établi pour tout sous-ensemble analytique propre $T$ de $S$. Cela étant, notons $\mathscr{I}$ le faisceau d'idéaux défini par le sous-ensemble $S \times \{x_0\}$ de $S \times U$. D'après la proposition (I, 13), il existe un voisinage $\Omega_1 \times U_1$ de $(s_0, x_0)$ dans $S \times U$ et un entier $\lambda_1 \geqq 0$ tels que, pour tout $\lambda \geqq \lambda_1$, on ait au-dessus de $\Omega_1 \times U_1$:

$$(**) \qquad \mathscr{I}(\mathscr{I}^\lambda \mathscr{F} \cap \mathscr{E}) = \mathscr{I}^{\lambda+1} \mathscr{F} \cap \mathscr{E}.$$

**Lemme (III, 2).** *Pour tout entier $\lambda \geqq \lambda_1$, l'égalité $(*)$ est valable en tout point $s \in \Omega_1$ tel que le $\mathcal{O}_{S,s}$-module*

$$\bigoplus_{\lambda \geqq 1} [\mathscr{F}/(\mathscr{I}^\lambda \mathscr{F} + \mathscr{E})]_{(s, x_0)}$$

*soit libre.*

Achevons la démonstration de notre énoncé en admettant le lemme. On a pour tout entier $\lambda \geqq 0$:

$$\mathscr{F}/(\mathscr{I}^\lambda \mathscr{F} + \mathscr{E}) = (\mathscr{F}/\mathscr{E}) \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U}} (\mathcal{O}_{S \times U}/\mathscr{I}^\lambda).$$

Or, en vertu du théorème (II, 1) appliqué au faisceau $\mathscr{F}/\mathscr{E}$, il existe un voisinage ouvert $\Omega_1' \subset \Omega_1$ de $s_0$ dans $S$, et un sous-ensemble analytique propre $T$ de $\Omega_1'$, tels que l'hypothèse du lemme (III, 2) soit vérifiée en tout point $s$ de $\Omega_1' - T$. Il ne reste donc plus qu'à prouver la proposition pour les points de $T$. Mais cela résulte de l'hypothèse de récurrence appliquée à $T$, au faisceau $\mathscr{F}' = (\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U}} \mathcal{O}_{T \times U}))|_{T \times U}$ et à l'image canonique de $(\mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U}} \mathcal{O}_{T \times U})|_{T \times U}$ dans $\mathscr{F}'$.

*Démonstration du lemme.* On a pour tout $\lambda \geqq \lambda_1$:

$$\operatorname{im}(\mathscr{I}^\lambda \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U}} \mathcal{O}_U) \cap \operatorname{im}(\mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U}} \mathcal{O}_U) = \operatorname{im}[(\mathscr{I}^\lambda \mathscr{F} \cap \mathscr{E}) \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U}} \mathcal{O}_U],$$

im signifiant: image canonique dans $(\mathscr{I}^\lambda \mathscr{F} + \mathscr{E}) \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U}} \mathcal{O}_U$. Or, en un point $s \in \Omega_1$ où l'hypothèse du lemme est satisfaite, l'application canonique

$$\Phi\colon (\mathscr{I}^\lambda \mathscr{F} + \mathscr{E})_{(s, x_0)} \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U, (s, x_0)}} \mathcal{O}_{U, x_0} \to \mathscr{F}_{x_0}(s)$$

est injective. On a donc en un tel point:

$$\Phi[\operatorname{im}(\mathscr{I}^\lambda \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_{S\times U}} \mathcal{O}_U)] \cap \Phi[\operatorname{im}(\mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_{S\times U}} \mathcal{O}_U)]$$
$$= \Phi(\operatorname{im}[(\mathscr{I}^\lambda \mathscr{F} \cap \mathscr{E}) \otimes_{\mathcal{O}_{S\times U}} \mathcal{O}_U]),$$

c'est-à-dire:

$$\mathfrak{M}_{x_0}^\lambda \mathscr{F}_{x_0}(s) \cap \tilde{\mathscr{E}}_{x_0}(s) = (\mathscr{I}^\lambda \mathscr{F} \cap \mathscr{E})_{x_0}^{\sim}(s).$$

D'après (**), on a donc pour tout $\lambda \geqq \lambda_1$ et tout point $s \in \Omega_1$ vérifiant l'hypothèse du lemme:

$$\mathfrak{M}_{x_0}(\mathfrak{M}_{x_0}^\lambda \mathscr{F}_{x_0}(s) \cap \tilde{\mathscr{E}}_{x_0}(s)) = [\mathscr{I}(\mathscr{I}^\lambda \mathscr{F} \cap \mathscr{E})]_{x_0}^{\sim}(s)$$
$$= (\mathscr{I}^{\lambda+1} \mathscr{F} \cap \mathscr{E})_{x_0}^{\sim}(s) = \mathfrak{M}_{x_0}^{\lambda+1} \tilde{\mathscr{F}}_{x_0}(s) \cap \tilde{\mathscr{E}}_{x_0}(s),$$

et le lemme est établi.

Toujours dans la même situation, considérons un morphisme $v\colon \mathcal{O}_{S\times U}^q \to \mathcal{O}_{S\times U}^r$. Pour $(s, x) \in S \times U$, soit $v_{(s,x)}$ le germe de $v$ au point $(s, x)$. On posera:

$$v_x(s) = v_{(s,x)} \otimes 1_{\mathcal{O}_{U,x}}\colon \mathcal{O}_{U,x}^q \to \mathcal{O}_{U,x}^r.$$

On a évidemment $(\widetilde{\operatorname{Im}}\, v)_x(s) = \operatorname{Im} v_x(s)$. La proposition (III, 1) entraîne donc:

**Corollaire (III, 3).** *Soient $S$ un espace analytique complexe, $U$ une partie ouverte de $\mathbf{C}^n$, $(s_0, x_0)$ un point de $S \times U$, $v$ un morphisme $\mathcal{O}_{S\times U}^q \to \mathcal{O}_{S\times U}^r$. Il existe un voisinage ouvert $\Omega \times V$ de $(s_0, x_0)$ dans $S \times U$ et un entier $\lambda_0 \geqq 0$ tels que l'on ait pour tout $\lambda \geqq \lambda_0$ et tout $(s, x) \in \Omega \times V$:*

$$\mathfrak{M}_x(\mathfrak{M}_x^\lambda \mathcal{O}_{U,x}^r \cap \operatorname{Im} v_x(s)) = \mathfrak{M}_x^{\lambda+1} \mathcal{O}_{U,x}^r \cap \operatorname{Im} v_x(s).$$

Bien qu'il soit en général faux que $(\widetilde{\operatorname{Ker}}\, v)_x(s) = \operatorname{Ker} v_x(s)$, nous allons établir un résultat analogue pour Ker $v$. Pour tout $f \in \mathcal{O}_{S\times U,(s,x)}^q$, notons $f_x(s)$ son image canonique dans $\mathcal{O}_{S\times U,x}^q(s) = \mathcal{O}_{S,x}^q$.

**Lemme (III, 4).** *Soient $S$ un espace analytique complexe réduit, $U$ une partie ouverte de $\mathbf{C}^n$, $(s_0, x_0)$ un point de $S \times U$, $v$ un morphisme $\mathcal{O}_{S\times U}^q \to \mathcal{O}_{S\times U}^r$. Il existe un voisinage $\Omega$ de $s_0$ dans $S$ et une famille finie $(f^i)_{i\in I}$ de sections de $\mathcal{O}_{S\times U}^q$ au-dessus de $\Omega \times \{x_0\}$, tels que, pour tout $s \in S$, ceux des $f_{x_0}^i(s)$ qui appartiennent à* Ker $v_{x_0}(s)$ *engendrent ce $\mathcal{O}_{U,x_0}$-module.*

*Démonstration.* L'assertion étant de caractère local, on peut, par récurrence sur la dimension et le nombre de composantes irréductibles du germe de $S$ au point $s_0$, supposer le lemme établi pour tout sous-ensemble analytique propre $T$ de $S$. Cela dit, appliquons le théorème (II, 1) au faisceau $\mathscr{F} = \operatorname{Coker} v$: il existe un voisinage $\Omega'$ de $s_0$ dans $S$ et un sous-ensemble analytique propre $T$ de $\Omega'$ tels que, pour tout $s \in \Omega' - T$, $\mathscr{F}_{(s,x_0)}$

soit un $\mathcal{O}_{S,s}$-module plat. Quitte à restreindre $\Omega'$, on peut trouver une famille finie $(g^j)_{j\in J}$ de sections de Ker $v$ au-dessus de $\Omega'\times\{x_0\}$ telle que, pour tout $s\in\Omega'$, les $g^j_{(s,x_0)}$ engendrent le $\mathcal{O}_{S\times U,(s,x_0)}$-module Ker $v_{x_0}(s)$. Cela prouve le lemme si $T$ ne passe pas par $s_0$.

Si $T$ passe par $s_0$, soit $\check{v}=v\otimes_{\mathcal{O}_{S\times U}}1_{\mathcal{O}_{T\times U}}$: $\mathcal{O}^q_{T\times U}\to\mathcal{O}^r_{T\times U}$. Par hypothèse de récurrence, il existe un voisinage $\check{\Omega}$ de $s_0$ dans $T$ et une famille finie $(\check{h}^k)_{k\in K}$ de sections de $\mathcal{O}^q_{T\times U}$ au-dessus de $\check{\Omega}\times\{x_0\}$ tels que, pour tout $s\in\check{\Omega}$, les $\check{h}^k_{x_0}(s)$ appartenant à Ker $\check{v}_{x_0}(s)$ engendrent ce $\mathcal{O}_{U,x_0}$-module. On peut trouver un voisinage $\Omega$ de $s_0$ dans $S$, contenu dans $\Omega'$, tel que $\Omega\cap T=\check{\Omega}$, et que, pour tout $k\in K$, $\check{h}^k$ soit la trace sur $T\times\{x_0\}$ d'une section $h^k$ de $\mathcal{O}^q_{T\times U}$ au-dessus de $\Omega$. Or, on a pour tout $s\in\Omega\cap T$: $v_{x_0}(s)=\check{v}_{x_0}(s)$, et $h^k_{x_0}(s)=\check{h}^k_{x_0}(s)$ quel que soit $k\in K$. Posons alors $I=J\cup K$, $f^i=g^i|_\Omega$ pour $i\in I$, et $f^k=h^k$ pour $k\in K$. Le voisinage $\Omega$ et la famille $(f^i)_{i\in I}$ ont les propriétés requises.

**Proposition (III, 5).** *Soient $S$ un espace analytique complexe, $U$ une partie ouverte de $\mathbf{C}^n$, $(s_0,x_0)$ un point de $S\times U$, $v$ un morphisme $\mathcal{O}^q_{S\times U}\to\mathcal{O}^r_{S\times U}$. Il existe un voisinage $\Omega\times V$ de $(s_0,x_0)$ dans $S\times U$ et un entier $\mu_0\geqq 0$ tels que l'on ait pour tout entier $\mu\geqq\mu_0$ et tout point $(s,x)\in\Omega\times V$:*

$$\mathfrak{M}_x(\mathfrak{M}^\mu_x\mathcal{O}^q_{U,x}\cap \operatorname{Ker} v_x(s))=\mathfrak{M}^{\mu+1}_x\mathcal{O}^q_{U,x}\cap \operatorname{Ker} v_x(s).$$

*Démonstration.* a) Il suffit de la faire dans le cas où $S$ est réduit.

b) Prouvons d'abord qu'il existe un voisinage $\Omega$ de $s_0$ dans $S$ et un entier $\mu_0\geqq 0$ tels que l'égalité de la proposition soit vraie pour tout $\mu\geqq\mu_0$ et tout point $(s,x_0)\in\Omega\times\{x_0\}$. Soient $\Omega$ et $(f^i)_{i\in I}$ comme dans le lemme (III, 4). Pour toute partie $\sigma$ de $I$, notons $\mathscr{F}_\sigma$ le faisceau sur $\Omega\times\{x_0\}$ engendré par les $f^i$, $i\in\sigma$. Pour tout $s\in\Omega$, il existe, d'après le lemme (III, 4) une partie $\sigma$ de $I$ telle que Ker $v_{x_0}(s)=\tilde{\mathscr{F}}_{\sigma,x_0}(s)$. L'ensemble $I$ étant fini, l'assertion résulte de la proposition (III, 1).

c) Démontrons maintenant la proposition. Soient $U'\times W$ un voisinage ouvert de $(x_0,0)$ dans $U\times\mathbf{C}^n$ tel que $U'+W\subset U$, et $\varphi$ l'application de $S\times U'\times W$ dans $S\times W$ définie par $\varphi(s,x,y)=(s,x+y)$.

Soit $v'=\varphi^* v$: $\mathcal{O}^q_{S\times U'\times W}\to\mathcal{O}^r_{S\times U'\times W}$.

On a pour tout $(s,x)\in S\times U'$: $v'_0(s,x)=v_x(s)$. La proposition résulte donc de b), où l'on remplace $S$ par $S\times U'$, $U$ par $W$, $s_0$ par $(s_0,x_0)$, $x_0$ par 0 et $v$ par $v'$.

Encore quelques notations. Soit $x$ un point d'une partie ouverte $U$ de $\mathbf{C}^n$. Pour tout entier $\alpha\geqq 0$, notons $\pi_\alpha$ la projection canonique $\mathcal{O}_{U,x}\to\mathcal{O}_{U,x}/\mathfrak{M}^{\alpha+1}_x$; si $\varphi$ est un homomorphisme $\mathcal{O}^i_{U,x}\to\mathcal{O}^j_{U,x}$, soit $[\varphi]_\alpha$ l'homomorphisme $(\mathcal{O}_{U,x}/\mathfrak{M}^{\alpha+1}_x)^i\to(\mathcal{O}_{U,x}/\mathfrak{M}^{\alpha+1}_x)^j$ qui s'en déduit. Enfin, si $\beta$ est un entier $\geqq\alpha$, designons par $\pi^\beta_\alpha$ la projection canonique $\mathcal{O}_{U,x}/\mathfrak{M}^{\beta+1}_x\to\mathcal{O}_{U,x}/\mathfrak{M}^{\alpha+1}_x$.

**Proposition (III, 6).** *Soient $S$ un espace analytique complexe, $U$ une partie ouverte de $\mathbf{C}^n$, $(s_0, x_0)$ un point de $S \times U$, $\mathscr{C}$ un complexe*

$$\mathcal{O}^p_{S\times U} \xrightarrow{u} \mathcal{O}^q_{S\times U} \xrightarrow{v} \mathcal{O}^r_{S\times U}.$$

*Il existe un voisinage $\Omega \times V$ de $(s_0, x_0)$ dans $S \times U$ et deux entiers positifs $\alpha$ et $\beta$ tels que pour tout $(s, x) \in \Omega \times V$, les deux conditions suivantes soient équivalentes:*

(i) *le complexe*

$$\mathscr{C}_x(s):\ \mathcal{O}^p_{U,x} \xrightarrow{u_x(s)} \mathcal{O}^q_{U,x} \xrightarrow{v_x(s)} \mathcal{O}^r_{U,x}$$

*est acyclique;*

(ii) $\operatorname{Im}[u_x(s)]_\alpha = \pi^{\alpha+\beta}_\alpha(\operatorname{Ker}[v_x(s)]_{\alpha+\beta})$.

*Démonstration.* Soit $\Omega \times V$ un voisinage de $(s_0, x_0)$ dans $S \times U$ satisfaisant aux conditions du corollaire (III, 3) et de la proposition (III, 5).

Prenons pour $\alpha$ l'entier $\mu_0$ de la proposition (III, 5). On a pour tout entier $\mu \geqq \alpha$ et tout $(s, x) \in \Omega \times V$:

$$\mathfrak{M}_x(\mathfrak{M}^\mu_x \mathcal{O}^q_{U,x} \cap \operatorname{Ker} v_x(s)) = \mathfrak{M}^{\mu+1}_x \mathcal{O}^q_{U,x} \cap \operatorname{Ker} v_x(s),$$

d'où:

$$\mathfrak{M}^{\alpha+1}_x \mathcal{O}^q_{U,x} \cap \operatorname{Ker} v_x(s) \subset \mathfrak{M}_x \operatorname{Ker} v_x(s).$$

Cela implique que tout sous $\mathcal{O}_{U,x}$-module $M$ de $\operatorname{Ker} v_x(s)$ tel que $\operatorname{Ker} v_x(s) \subset M + \mathfrak{M}^{\alpha+1}_x \mathcal{O}^q_{U,x}$ est égal à $\operatorname{Ker} v_x(s)$, car pour un tel $M$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} v_x(s) &\subset (M + \mathfrak{M}^{\alpha+1}_x \mathcal{O}^q_{U,x}) \cap \operatorname{Ker} v_x(s)\\ &= M + (\mathfrak{M}^{\alpha+1}_x \mathcal{O}^q_{U,x} \cap \operatorname{Ker} v_x(s)) \subset M + \mathfrak{M}_x \operatorname{Ker} v_x(s),\end{aligned}$$

ce qui entraîne $M = \operatorname{Ker} v_x(s)$ en vertu du lemme de NAKAYAMA. Appliquant cela à $M = \operatorname{Im} u_x(s)$, on trouve déjà que (i) équivaut à la condition (iii) que voici:

(iii) $$\operatorname{Im}[u_x(s)]_\alpha = \pi_\alpha(\operatorname{Ker} v_x(s)).$$

Pour établir l'équivalence de (ii) et (iii), il suffit d'établir l'existence d'un entier $\beta \geqq 0$ tel que pour tout $(s, x) \in \Omega \times V$, on ait:

$$\pi^{\alpha+\beta}_\alpha(\operatorname{Ker}[v_x(s)]_{\alpha+\beta}) = \pi_\alpha(\operatorname{Ker} v_x(s)),$$

i.e.

$$\mathfrak{M}^{\alpha+\beta+1}_x \mathcal{O}^r_{U,x} \cap \operatorname{Im} v_x(s) \subset \mathfrak{M}^{\alpha+1}_x \operatorname{Im} v_x(s)$$

(l'inclusion opposée étant toujours vraie). Prenons pour $\beta$ l'entier $\lambda_0$ du corollaire (III, 3).

D'après ce corollaire, on a pour tout $(s, x) \in S \times U$ et tout $\lambda \geqq \beta$:

$$\mathfrak{M}_x(\mathfrak{M}^\lambda \mathcal{O}^r_{U,x} \cap \operatorname{Im} v_x(s)) = \mathfrak{M}^{\lambda+1}_x \mathcal{O}^r_{U,x} \cap \operatorname{Im} v_x(s),$$

d'où (par récurrence) pour tout entier $\nu \geqq 0$:

$$\mathfrak{M}_x^{\nu+\beta}\, \mathcal{O}_{U,x}^r \cap \operatorname{Im} v_x(s) \subset \mathfrak{M}_x^{\nu} \operatorname{Im} v_x(s).$$

On a donc l'inclusion voulue pour $\nu = \alpha + 1$, et la proposition est démontrée.

## IV. Points de non-platitude d'un morphisme d'espaces analytiques

**Définition (IV, 1).** *Soit $X$ un espace analytique complexe. Une partie $E$ de $X$ est dite constructible si c'est un élément de la plus petite famille de parties de $X$ stable par réunion finie, intersection finie et passage au complémentaire, et contenant les sous-ensembles analytiques de $X$.*

**Remarque (IV, 2).** On voit sans peine qu'une partie constructible $E$ de $X$ peut toujours se mettre sous la forme:

$$E = \bigcup_{i \in I} (A_i - B_i),$$

où $(A_i, B_i)_{i \in I}$ est une famille finie de couples de sous-ensembles analytiques de $X$.

**Remarque (IV, 3).** Contrairement à ce qui se passe en géométrie algébrique, si $Y$ est un sous-ensemble analytique de $X$, et si $E$ est une partie constructible de $X - Y$, $E$ *n'est pas* en général constructible dans $X$.

**Lemme (IV, 4).** *Soient $X$ un espace analytique complexe, $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie sur* $\mathbf{C}$, *$v$ une application analytique de $X$ dans $\mathbf{L}(E, F)$, $\delta$ un entier $\geqq 0$. Les ensembles* $\{x \in X;\ \dim \operatorname{Im} v(x) = \delta)\}$ *et* $\{x \in X;\ \dim \operatorname{Ker} v(x) = \delta\}$ *sont constructibles.*

*Démonstration.* Évident.

**Lemme (IV, 5).** *Soient $X$ un espace analytique complexe, $E, F, G, H$ quatre espaces vectoriels de dimension finie sur* $\mathbf{C}$, *$u$ et $v$ deux applications analytiques de $X$ dans $\mathbf{L}(E, F)$ et $\mathbf{L}(G, H)$ respectivement, $\pi$ une application linéaire de $G$ sur $F$. L'ensemble* $\{x \in X;\ \dim \operatorname{Im} u(x) = \dim \pi(\operatorname{Ker} v(x))\}$ *est constructible.*

*Démonstration.* Il suffit de vérifier que, $\delta$ étant entier $\geqq 0$, les ensembles $\{x \in X;\ \dim \operatorname{Im} u(x) = \delta\}$ et $\{x \in X;\ \dim \pi \operatorname{Ker} v(x)) = \delta\}$ sont constructibles. Pour le premier, cela résulte de (IV, 4); quant au second, il s'écrit:

$$\bigcup_{d \geqq \delta} \left(\{x \in X;\ \dim \operatorname{Ker} v(x) = d\} \cap \{x \in X;\ \dim(\operatorname{Ker} v(x) \cap N) = d - \delta\}\right),$$

où $N$ désigne le noyau de $\pi$. Mais $\{x \in X;\ \dim \operatorname{Ker} v(x) = d\}$ est constructible d'après (IV, 4) et $\{x \in X;\ \dim \operatorname{Ker} v(x) \cap N = d - \delta\}$ l'est pour la même raison, car $\operatorname{Ker} v(x) \cap N$ est le noyau de l'application $(v(x), \pi)$: $G \to H \times F$.

**Définition (IV, 6).** *On dira qu'une partie $E$ d'un espace analytique $X$ est localement constructible si tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert $\Omega$ tel que $\Omega \cap E$ soit une partie constructible de $\Omega$.*

**Lemme (IV, 7).** *Une partie $E$ d'un espace analytique complexe $X$ localement constructible et fermée est analytique.*

*Démonstration.* La question étant locale, on peut supposer $E$ constructible dans $X$, i.e. de la forme

$$\bigcup_{i \in I} (A_i - B_i),$$

où $(A_i, B_i)_{i \in I}$ est une famille finie de couples de sous-ensembles analytiques de $X$. L'hypothèse entraîne que

$$E = \bigcup_{i \in I} \overline{(A_i - B_i)}.$$

Or, si $A$ et $B$ sont deux sous-ensembles analytiques de $X$, l'adhérence $\overline{A - B}$ de $A - B$ dans $X$ en est un sous-ensemble analytique, d'où le lemme.

Soit $\varphi \colon Y \to S$ un morphisme d'espaces analytiques complexes, $\mathscr{E}$ un faisceau analytique cohérent sur $Y$. Pour étudier localement (sur $Y$) cette situation, on peut toujours supposer que $Y$ est un sous-espace de $S \times U$ où $U$ est un sous-espace ouvert de $\boldsymbol{C}^n$, que $\varphi$ est la composée de l'injection $i \colon Y \to S \times U$ et de la projection $\pi \colon S \times U \to S$, et que $\mathscr{E}$ est l'image réciproque par $i$ d'un faisceau analytique sur $S \times U$, nul en dehors de $Y$, et noté encore $\mathscr{E}$.

**Définition (IV, 8).** *On dit que $\mathscr{E}$ est $\varphi$-plat en un point $y \in Y$ si $\mathscr{E}_y$ est un $\mathcal{O}_{S, \varphi(y)}$-module plat. En particulier, on dit que $\varphi$ est plat en $y$ si $\mathcal{O}_Y$ est $\varphi$-plat en $y$. (On dit aussi $S$-plat au lieu de $\varphi$-plat lorsque cela n'entraîne pas de confusion.)*

**Théorème (IV, 9).** *Soient $\varphi \colon Y \to S$ un morphisme d'espaces analytiques complexes, $\mathscr{E}$ un faisceau analytique cohérent sur $Y$. L'ensemble des points $y \in Y$ en lesquels $\mathscr{E}$ n'est pas $\varphi$-plat est analytique.*

*Démonstration.* La question étant locale, on peut supposer que $Y = S \times U$, que $\varphi = \pi$ et que $\mathscr{E}$ admet un début de résolution:

$$\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow 0$$

$$\mathscr{C} = \mathcal{O}_{S \times U}^p \xrightarrow{u} \mathcal{O}_{S \times U}^q \xrightarrow{v} \mathcal{O}_{S \times U}^r.$$

Soit $(s, x)$ un point de $S \times U$. En vertu du critère de platitude de [1], chap. III, § 5, th. 1 (l'hypothèse «idéalement séparé» étant satisfaite en vertu de loc. cit. prop. 2), pour que le $\mathcal{O}_{S,s}$-modlule $\mathscr{E}_{(s,x)}$ soit plat, il faut et il suffit que $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S,s}}(\mathscr{E}_{(s,x)}, \boldsymbol{C})$ soit nul, i.e. que le complexe

$$\mathscr{C}_x(s) \colon \mathcal{O}_{U,x}^p \xrightarrow{u_x(s)} \mathcal{O}_{U,x}^q \xrightarrow{v_x(s)} \mathcal{O}_{U,x}^r$$

soit acyclique. Or, il résulte de la proposition (III, 6) et du lemme (IV, 5) que l'ensemble des points $(s, x) \in S \times U$ où cela n'est pas vrai est localement constructible. D'après le lemme (IV, 7), l'assertion résulte donc du lemme suivant, dû à DOUADY:

**Lemme (IV, 10).** *L'ensemble des points $(s, x) \in S \times U$ en lesquels le* complexe $\mathscr{C}_x(s)$ *est acyclique est ouvert dans $S \times U$.*

*Démonstration.* Les notations sont celles de [3]. Soient $(s_0, x_0)$ un point de $S \times U$, $K \subset U$ un polycylindre $\mathscr{E}(s_0)$-privilégié[4] contenant $x_0$ à son intérieur. $\mathscr{C}$ définit un complexe de fibrés vectoriels de base $S$

$$B(K, \mathscr{C}) \colon\; B(K, \mathcal{O}^p_{S \times U}) \to B(K, \mathcal{O}^q_{S \times U}) \to B(K, \mathcal{O}^r_{S \times U}).$$

Si le complexe $\mathscr{C}_{x_0}(s_0)$ est acyclique et si $K$ est assez petit, $B(K, \mathscr{C})$ est exact direct au point $s_0$, donc aussi au voisinage de $s_0$.

Mais (loc. cit. 8, lemme 1) si $B(K, \mathscr{C})$ est exact en $s \in S$, le complexe de faisceaux $\mathscr{C}(s)$ est une suite exacte au-dessus de l'intérieur de $K$, d'où le lemme et le théorème.

Soient $S$ un espace analytique complexe, $S'$ l'ensemble des points lisses de $S_{\mathrm{red}}$; on sait que $S'$ est ouvert et partout dense dans $S$, et que son complémentaire est analytique.

**Définition (IV, 11).** *On dira qu'une partie $A$ de $S$ est négligeable si $A \cap S'$ est une réunion dénombrable de sous-variétés analytiques de $S'$, localement fermées et d'intérieur vide.*

**Remarque (IV, 12).** (i) Toute réunion dénombrable de parties négligeables de $S$ est négligeable.

(ii) Toute partie négligeable de $S$ est maigre (car l'adhérence d'une partie localement fermée et d'intérieur vide de $S$ est d'intérieur vide). Comme $S$ est un espace de BAIRE, une partie négligeable est d'intérieur vide et son complémentaire est partout dense.

**Lemme (IV, 13).** *Soit $\varphi \colon X \to S$ un morphisme d'espaces analytiques. On suppose la topologie de $X$ à base dénombrable, et $S$ réduit. Pour que $\varphi(X)$ soit négligeable dans $S$, il faut et il suffit que $\varphi$ n'admette de section $\sigma \colon \Omega \to X$ sur aucun ouvert non vide $\Omega$ de $S$.*

*Démonstration.* On peut évidemment supposer $S$ lisse et $X$ réduit. $X$ est alors réunion localement finie, donc dénombrable, de sous-variétés analytiques localement fermées $X_i$, telles que le rang de $\varphi|_{X_i}$ soit constant. On peut donc, (IV, 12), se ramener au cas où $X$ est lisse, et $\varphi$ de rang constant. Localement, $\varphi$ est alors la composée d'une submersion et d'une immersion. De nouveau d'après (IV, 12), on peut supposer que $\varphi(X)$ est une sous-variété de $S$, et $\varphi$ une submersion de $X$ sur $\varphi(X)$. Dire que

[4] Au sens de loc. cit. 7, définition 1.

$\varphi(X)$ n'est pas négligeable équivaut alors à dire que l'intérieur de $\varphi(X)$ n'est pas vide, i.e. qu'il existe un point $x \in X$ où $\varphi: X \to S$ est une submersion, ce qui signifie que $\varphi$ admet une section $\sigma$ au voisinage de $\varphi(x)$.

**Proposition (IV, 14).** *Soit $\varphi: Y \to S$ un morphisme d'espace analytiques complexes, $\mathscr{E}$ un faisceau analytique cohérent sur $Y$, $Z$ l'ensemble des points de $Y$ où $\mathscr{E}$ n'est pas $\varphi$-plat. On suppose $S$ réduit, et les topologies de $S$ et de $Y$ à base dénombrable. Alors l'image de $Z$ dans $S$ est négligeable.*

*Démonstration.* La question étant locale, on peut supposer que $Y = S \times U$, $U$ ouvert dans $\boldsymbol{C}^n$, et que $\varphi$ est la projection $S \times U \to S$. On peut d'autre part supposer $S$ lisse. D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que si $\Omega$ est un ouvert de $S$, et $f$ un morphisme $\Omega \to U$, le graphe $F$ de $f$ ne peut être contenu dans $Z$. Comme $F$ est une variété, on peut trouver un $\Omega$-isomorphisme $\alpha: \Omega \times U \to \Omega \times V$, ($V$ ouvert dans $\boldsymbol{C}^n$), transformant $F \cap (\Omega \times U)$ en $\Omega \times \{x\}$, $x \in V$. D'après le théorème (II, 1), l'ensemble des points $s \in \Omega$ où $\alpha_*(\mathscr{E}|_{\Omega \times V})$ est $\Omega$-plat et dense dans $\Omega \times \{x\}$. Ainsi $F$ n'est pas contenu dans $Z$, et la proposition est démontrée.

Soient $\varphi: Y \to S$ un morphisme d'espaces analytiques complexes, $\mathscr{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $Y$, $y$ un point de $Y$, $s$ son image par $\varphi$; $\varphi$ définit un morphisme de schemas $\tilde{\varphi}$: $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}) \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$, et $\mathscr{F}_y$ définit un faisceau cohérent $\tilde{\mathscr{F}}_y$ sur $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$. Cherchons les points de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$ où $\tilde{\mathscr{F}}_y$ est $\tilde{\varphi}$-plat.

La question étant locale, on peut supposer $Y = S \times U$, ($U$ ouvert dans $\boldsymbol{C}^n$), $\varphi = \pi: S \times U \to S$, $y = (s, x) \in S \times U$. Soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$; $\mathfrak{p}$ définit au voisinage de $(s, x)$ un sous-ensemble analytique $Z \subset S \times U$ dont le germe $Z_{(s,x)}$ en $(s, x)$ est irréductible. Soit $\mathfrak{q} = \tilde{\pi}(\mathfrak{p}) \in \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$; $\mathfrak{q}$ définit au voisinage de $s$ un sous-ensemble analytique $T \subset S$, dont le germe $T_s$ en $s$ est irréductible; $T_s$ est le plus petit germe en $s$ de sous-ensemble analytique de $S$ contenant $\pi(Z_{(s,x)})$, (qui en général *n'est pas* analytique). Il s'agit de savoir à quelle condition sur $\mathfrak{p}$ le $(\mathcal{O}_{S,s})_{\mathfrak{q}}$-module $(\mathscr{F}_{(s,x)})_{\mathfrak{p}}$ est plat. Notons $\kappa(\mathfrak{q})$ le corps résiduel de l'anneau local $(\mathcal{O}_{S,s})_{\mathfrak{q}}$, et $\mathfrak{p}'$ l'image canonique de l'idéal $\mathfrak{p}$ dans $\mathcal{O}_{T \times U, (s,x)}$ ($\mathfrak{p}'$ est l'idéal de $Z_{(s,x)}$ considéré comme germe de sous-ensemble analytique de $T \times U$). On a:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{O}_{S \times U, (s,x)})_{\mathfrak{p}} \otimes_{(\mathcal{O}_{S,s})_{\mathfrak{q}}} \kappa(\mathfrak{q}) &= (\mathcal{O}_{S \times U, (s,x)})_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} (\mathcal{O}_{S,s})_{\mathfrak{q}} \\
&= (\mathcal{O}_{S \times U, (s,x)})_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U, (s,x)}} \mathcal{O}_{T \times U, (s,x)} \\
&= (\mathcal{O}_{T \times U, (s,x)})_{\mathfrak{p}'}.
\end{aligned}$$

**Lemme (IV, 15).** *Pour que le $(\mathcal{O}_{S,s})_{\mathfrak{q}}$-module $(\mathscr{F}_{(s,x)})_{\mathfrak{p}}$ soit plat, il faut et il suffit que* $\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S \times U, (s,x)}}(\mathscr{F}_{(s,x)}, (\mathcal{O}_{T \times U, (s,x)})_{\mathfrak{p}'}) = 0$.

*Démonstration.* Soit $\mathscr{C}$: $\mathcal{O}_{S \times U}^{\alpha} \to \mathcal{O}_{S \times U}^{\beta} \to \mathcal{O}_{S \times U}^{\gamma}$ un début de résolution de $\mathscr{F}$ au voisinage de $(s, x)$. Comme le $\mathcal{O}_{S \times U, (s,x)}$-module $(\mathcal{O}_{S \times U, (s,x)})_{\mathfrak{p}}$

est plat, $(\mathscr{C}_{(s,x)})_{\mathfrak{p}}$ est un début de résolution libre du $(\mathcal{O}_{S\times U,(s,x)})_{\mathfrak{p}}$-module $(\mathscr{F}_{(s,x)})_{\mathfrak{p}}$. D'après un critère ([1], ch. III, §5, th. 1) déjà utilisé, $(\mathscr{F}_{(s,x)})_{\mathfrak{p}}$ est $(\mathcal{O}_{S,s})_{\mathfrak{q}}$-plat si et seulement si $\mathrm{Tor}_1^{(\mathcal{O}_{S,s})_{\mathfrak{q}}}((\mathscr{F}_{(s,x)})_{\mathfrak{p}}, \kappa(\mathfrak{q}))=0$. Ce Tor s'identifie à l'homologie du complexe $(\mathscr{C}_{(s,x)})_{\mathfrak{p}} \otimes_{(\mathcal{O}_{S,s})_{\mathfrak{q}}} \kappa(\mathfrak{q})$, lequel, en posant $\mathscr{C}_T = \mathscr{C} \otimes_{\mathcal{O}_{S\times U}} \mathcal{O}_{T\times U}$, n'est autre que $(\mathscr{C}_{T,(s,x)})_{\mathfrak{p}'}$. L'homologie de ce complexe étant $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S\times U,(s,x)}}(\mathscr{F}_{(s,x)}, (\mathcal{O}_{T\times U,(s,x)})_{\mathfrak{p}'})$, le lemme est établi.

**Lemme (IV, 16).** *Soient $X$ un espace analytique réduit, $\mathscr{Q}$: $\mathcal{O}_X^\alpha \xrightarrow{u} \mathcal{O}_X^\beta \xrightarrow{v} \mathcal{O}_X^\gamma$ un complexe sur $X$, $x$ un point de $X$, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathcal{O}_{X,x}$, définissant au voisinage de $x$ un sous-ensemble analytique $Z$, $X'$ l'ensemble (analytique) des points de $X$ où $\mathscr{Q}$ n'est pas acyclique. On suppose $X$ irréductible en $x$. Pour que $(\mathscr{Q}_x)_{\mathfrak{a}} = \mathscr{Q}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} (\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{a}}$ soit acyclique, il faut et il suffit que $Z_x$ ne soit pas contenu dans $X'_x$.*

*Démonstration.* Soient $f^i$, $i=1, \ldots, m$, des sections de $\mathcal{O}_X^\beta$ au voisinage de $x$, dont les germes $f_x^i$ en $x$ engendrent $\operatorname{Ker} v_x$. Pour que $(\mathscr{Q}_x)_{\mathfrak{a}}$ soit acyclique, il faut et il suffit que les $f_x^i$ soient dans $\operatorname{Im}(u_x)_{\mathfrak{a}}$, i.e. qu'il existe au voisinage de $x$ une section $g$ de $\mathcal{O}_X$ telle que $g_x \notin \mathfrak{a}$ et que $f_x^i g_x \in \operatorname{Im} u_x$, $i=1, \ldots, m$, ce qui signifie qu'au voisinage de $x$, on a l'inclusion de faisceaux $g.\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Im} u$. Or, si une telle section $g$ existe, $g_x \notin \mathfrak{a}$ entraîne $\{g=0\}_x \not\supset Z_x$, et par suite $x$ est adhérent à $Z - \{g=0\}$; mais en un point $x'$ où $g$ ne s'annule pas, $g_{x'}$ est inversible, et l'on a: $(\operatorname{Ker} v)_{x'} = (g.\operatorname{Ker} v)_{x'} \subset (\operatorname{Im} u)_{x'}$, donc $x' \in X - X'$: la condition est nécessaire.

Réciproquement, cette condition implique que $X'_x$ et $(Z \cap X')_x$ sont des sous-germes stricts de $X_x$ et $Z_x$ respectivement. On peut alors trouver au voisinage de $x$ une section de $\mathcal{O}_Z$ nulle sur $Z \cap X'$, mais non identiquement nulle sur $Z$; d'où une section $g$ de $\mathcal{O}_X$ nulle sur $X'$, et telle que $g_x \notin \mathfrak{a}$. Comme $\operatorname{Ker} v/\operatorname{Im} u$ est porté par $X'$, il existe $k$ tel que $g^k(\operatorname{Ker} v/\operatorname{Im} u)=0$ au voisinage de $x$, i.e. $g^k \operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Im} u$: la condition est suffisante.

Appliquons ce lemme à la situation précédente, en prenant $X = T\times U$, $\mathscr{Q} = \mathscr{C}_T$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}'$. Compte tenu de (IV, 15), il vient:

**Proposition (IV, 17).** *Pour que $(\mathscr{F}_{(s,x)})_{\mathfrak{p}}$ soit un $(\mathcal{O}_{S,s})_{\mathfrak{q}}$-module plat, il faut et il suffit que $(s, x)$ soit adhérent à l'ensemble des points $(s', x')$ de $Z$ en lesquels* $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S\times U,(s',x')}}(\mathscr{F}_{(s',x')}, \mathcal{O}_{T\times U,(s',x')})=0$.

Soit $R$ le sous-ensemble analytique de $S\times U$ où $\mathscr{F}$ n'est pas $S$-plat. Si $Z_{(s,x)}$ n'est par contenu dans $R_{(s,x)}$, $(s, x)$ est adhérent à l'ensemble des points $(s', x')$ de $Z$ où la condition de la proposition est satisfaite. Ainsi, en reprenant les notations du début de ce paragraphe:

**Corollaire (IV, 18).** *Soit* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$, *et soit $Z$ le sous-ensemble analytique de $Y$ défini par $\mathfrak{p}$ au voisinage de $y$. Si $Z$ contient des points où $\mathscr{F}$ est $S$-plat, alors $\mathscr{F}_y$ est* $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{S,\varphi(y)})$*-plat en* $\mathfrak{p}$.

Hélas, *la réciproque est fausse*, voici un contre-exemple. Prenons $S=C^3$ (variables $x, y, z$), $U=C^2$ (variables $u, v$). Soit $R$ le sous-espace de $C^5$ défini par l'idéal:

$$(x-z\,u,\, y-z\,v,\, u-\sin v).$$

Prenons $\mathscr{F}=\mathcal{O}_R$: l'ensemble de non-$S$-platitude de $\mathscr{F}$ est exactement $R$. En effet, il est évidemment contenu dans $R$; d'autre part ,en un point $a$ de $R$ ne se projetant pas à l'origine, $\pi(R)$ est défini par l'équation:

$$(*) \qquad \frac{x}{z}-\sin\frac{y}{z}=0,$$

donc est de codimension 1, et par suite $\mathscr{F}$ n'est pas $S$-plat en $a$[5]; ainsi, l'ensemble de non-$S$-platitude de $\mathscr{F}$ est dense dans $R$, donc égal à $R$, car fermé.

Prenons pour $\mathfrak{p}$ l'idéal de $R$ à l'origine: $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{S\times U,(0,0)}$; la projection de $R$, définie par l'équation $(*)$, n'est pas analytique à l'origine, et n'est contenue dans aucun sous-germe analytique strict de $S$ à l'origine. Par suite $\mathfrak{q}=0$ et $T=S$. La condition du critère (IV, 16) est donc satisfaite. $(\mathscr{F}_{(0,0)})_{\mathfrak{p}}$ est $(\mathcal{O}_{S,0})_{\mathfrak{q}}$-plat, bien que $\mathscr{F}$ ne soit $S$-plat en aucun point de $Z=R$.

*Remarquons que, dans cet exemple, l'ensemble E des points de* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S\times U,(0,0)})$ *où* $\tilde{\mathscr{F}}_{(0,0)}$ *n'est pas* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,0})$*-plat n'est pas fermé dans* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S\times U,(0,0)})$. En effet, pour tout nombre réel $\alpha$, soit $\mathfrak{p}_\alpha$ l'idéal

$$(x-z\,u,\, y-z\,v,\, u-\sin v,\, y-\alpha\,z).$$

Le sous-ensemble $Z_\alpha$ défini par $\mathfrak{p}_\alpha$ se projette suivant la droite $T_\alpha$ définie par l'idéal

$$\mathfrak{q}_\alpha=(y-\alpha\,z,\, x-(\sin\alpha)\,z).$$

Cela dit, voici un début de résolution $\mathscr{C}$ de $\mathscr{F}$ au voisinage de l'origine:

$$\mathcal{O}^3_{S\times U}\xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & -(u-\sin v) & (y-z\,v)\\ -(u-\sin v) & 0 & -(x-z\,u)\\ (y-z\,v) & (x-z\,u) & 0\end{pmatrix}}\mathcal{O}^3_{S\times U}\xrightarrow{(x-z\,u,\, y-z\,v,\, u-\sin v)}\mathcal{O}_{S\times U}.$$

On en déduit $\mathscr{C}_{T_\alpha}$:

$$\mathcal{O}^3_{T_\alpha\times U}\xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & -(u-\sin v) & (\alpha-v)\,z\\ -(u-\sin v) & 0 & -(\sin\alpha-u)\,z\\ (\alpha-v)\,z & (\sin\alpha-u)\,z & 0\end{pmatrix}}\mathcal{O}^3_{T_\alpha\times U}\xrightarrow{((\sin\alpha-u)\,z,\,(\alpha-v)\,z,\, u-\sin v)}\mathcal{O}_{T_\alpha\times U}.$$

[5] Cela résulte, par exemple, de [3], page 68, note 13.

$\mathscr{C}_{T_\alpha}$ n'est acyclique en aucun point de $Z_\alpha$: la section

$$\left(1, \frac{\sin\alpha - \sin v}{v-\alpha}, z\right)$$

de $\mathcal{O}^3_{T_\alpha \times U}$ est un cycle sans être un bord. D'après (IV, 16), $(\mathscr{F}_{(0,\,0)})_{\mathfrak{p}_\alpha}$ n'est donc pas $(\mathcal{O}_{S,\,0})_{\mathfrak{p}_\alpha}$-plat; ainsi $\mathfrak{p}_\alpha \in E$ pour tout $\alpha$ réel. Or

$$\mathfrak{p} = \bigcap_\alpha \mathfrak{p}_\alpha$$

est adhérent à l'ensemble des $\mathfrak{p}_\alpha$, sans être dans $E$: $E$ n'est donc pas fermé dans $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S\times U,\,(0,\,0)})$.

On notera que le théorème 11.1.1 de [4][6], suppose le morphisme localement de type fini, hypothèse qui n'est bien sûr pas satisfaite ici. On voit qu'en ce qui concerne la platitude, le point de vue des schémas locaux définis par les espaces analytiques ne coïncide pas avec celui de la géométrie analytique. Néanmoins, on trouvera dans l'article de KIEHL qui suit, une démonstration très rapide et très élégante du théorèm IV, 9 a partir du théorème 11.1.1 de [4].

## Bibliographie

[1] BOURBAKI, N.: Eléments de mathématique, Algèbre commutative. Paris: Hermann 1961.

[2] Séminaire H. CARTAN 1960—61: Familles d'espaces complexes ... (Secrétariat mathématique de l'E.N.S. 11 rue Pierre Curie, Paris 5ème).

[3] DOUADY, A.: Le Problème des modules pour les sous-esapces analytiques compacts d'un espace analytique donné. Ann. Inst. Fourier, Grenoble **16**, 1 (1966).

[4] GROTHENDIECK, A.: Eléments de géométrie algébrique, chapitre IV, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., n° 28. Essonne, France: Bures-sur-Yvette 1966.

[5] HERVÉ, M.: Several complex variables, Tata Institute, Bombay. Oxford University Press 1963.

[6] ŁOJASIEWICZ, S.: Triangulation of semi-analytic sets, Ann. Sc. Norm. Pisa, série III, **18**, Fasc. IV (1964).

[6] Voici son énoncé: *Soient $Y$ un schéma localement noethérien, $f: X \to Y$ un morphisme localement de type fini, $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. Alors l'ensemble des points $x \in X$ où $\mathscr{F}$ est $f$-plat est ouvert dans $X$.*

4 rue Paul Léautaud
92 Fontenay-aux-Roses

*(Reçu le 12 Juin 1967)*