Über die dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Tetraeder*

Von

Helmut Groemer, Corvallis, Ore. USA

(*Eingegangen am 15. Februar 1961*)

Das Problem, die Dichte δ einer dichtesten gitterförmigen Lagerung kongruenter Tetraeder zu finden, wurde bereits von *Minkowski* [1] behandelt. *Minkowskis* Ergebnis ist

$$\delta = \frac{9}{38} = 0{,}236 \ldots. \tag{1}$$

Im folgenden soll gezeigt werden, daß (1) nicht richtig ist und jedenfalls

$$\delta \geq \frac{18}{49} = 0{,}367 \ldots \tag{2}$$

gelten muß. Ist T ein Tetraeder, so läuft die Aufgabe δ zu finden darauf hinaus, die kritische Determinante Δ des Vektorkörpers $D(T)$ von T zu bestimmen. Es gilt nämlich, wie man aus [1] entnehmen kann

$$\delta = \frac{V(T)}{\Delta}. \tag{3}$$

$V(T)$ bedeutet dabei das Volumen von T.

Um für $D(T)$ eine einfache Darstellung zu gewinnen werde angenommen, daß in einem Cartesischen Koordinatensystem das Tetraeder T die Eckpunkte

$$(1, 1, -1),\ (1, -1, 1),\ (-1, 1, 1),\ (-1, -1, -1)$$

hat. Berechnet man die Ebenen, die durch je drei dieser Punkte gehen, so ergibt sich, daß T als die Menge aller Punkte (x, y, z) definiert werden kann, für die

* Die Ausführung dieser Arbeit wurde durch einen Research Grant (NSF-G 14233) der National Science Foundation unterstützt.

$$\begin{aligned} x + y + z &\leq 1 \\ -x - y + z &\leq 1 \\ x - y - z &\leq 1 \\ -x + y - z &\leq 1 \end{aligned} \tag{4}$$

gilt. Es soll nun zunächst gezeigt werden, daß $D(T)$ durch die Ungleichung

$$\max(2|x|, 2|y|, 2|z|, |x| + |y| + |z|) \leq 4 \tag{5}$$

definiert wird. $D(T)$ ist also ein Kubooktaeder und der Fehler in der Herleitung von (1) beruht darauf, daß dort angenommen wird, $D(T)$ sei ein Oktaeder. Bezeichnet man für den Augenblick den durch (5) definierten Körper mit K, so ist

$$D(T) = K \tag{6}$$

zu zeigen. Ist $(x_1, y_1, z_1) \in T$, $(x_2, y_2, z_2) \in T$, so ergibt sich, wenn man in je zwei der Ungleichungen (4) x_1, y_1, z_1 und in die zwei restlichen x_2, y_2, z_2 einsetzt und jedesmal alle vier Ungleichungen addiert

$$|x_1 - x_2| \leq 2, \; |y_1 - y_2| \leq 2, \; |z_1 - z_2| \leq 2. \tag{7}$$

Setzt man hingegen in nur eine der Ungleichungen (4) x_1, y_1, z_1 oder x_2, y_2, z_2 ein und in die drei verbleibenden x_2, y_2, z_2 bzw. x_1, y_1, z_1, so erhält man durch Addition

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \leq 4 \tag{8}$$

Der Punkt $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ genügt also (5) und damit ist

$$D(T) \subset K \tag{9}$$

bewiesen. Berechnet man nun die Volumina von T und K, so findet man

$$V(T) = \frac{8}{3} \tag{10}$$

$$V(K) = \frac{160}{3}. \tag{11}$$

Andererseits gilt bekanntlich (*W. Süß* [2], *Th. Estermann* [3] oder *C. A. Rogers* und *G. C. Shephard* [4])

$$V(D(T)) = 20\, V(T). \tag{12}$$

Aus (10), (11), (12) folgt

$$V(D(T)) = V(K),$$

woraus man zusammen mit (9) die zu beweisende Beziehung (6) erhält.

Es soll jetzt

$$\Delta \leq \frac{196}{27} \tag{13}$$

bewiesen werden. Dazu genügt es, ein Gitter Γ der Determinante $\frac{196}{27}$ anzugeben, das für $D(T)$ zulässig ist. Ein Gitter dieser Eigenschaft wird erzeugt, wenn man als Basisvektoren von Γ die Vektoren

$$A = \left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad B = \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), \quad C = \left(-\frac{1}{3}, -2, \frac{1}{3}\right) \tag{14}$$

nimmt. Man hat jedenfalls, vorausgesetzt, daß Γ für $D(T)$ zulässig ist,

$$\Delta \leq \operatorname{Det}(A, B, C) = \frac{196}{27}.$$

Die sechs Punkte $\pm A$, $\pm B$, $\pm C$ bilden die Ecken eines „Gitteroktaeders erster Art" (*Minkowski* [1]). Dafür daß kein Punkt Γ im Innern von $D(T)$ liegt, ist es daher hinreichend nachzuweisen, daß keiner der Punkte $A, B, C, A \pm B, A \pm C, B \pm C, A \pm B \pm C, 2\,A \pm B \pm C, A \pm 2\,B \pm C, A \pm B \pm 2\,C$ ein innerer Punkt von $D(T)$ ist. Berechnet man für diese Punkte die Koordinaten und setzt sie in (5) ein, so ergibt sich sofort, daß keiner dieser Gitterpunkte im Innern von $D(T)$ liegt. Γ ist also für $D(T)$ zulässig. Aus (13) und (3) erhält man unmittelbar die zu beweisende Behauptung (2).

Bemerkenswert ist, daß die 14 Punkte $\pm A$, $\pm B$, $\pm C$, $\pm (A + B)$, $\pm (A + C)$, $\pm (B + C)$, $\pm (A + B + C)$, die die Ecken eines (affin transformierten) Rhombendodekaeders bilden, auf der Oberfläche von $D(T)$ liegen. Es handelt sich also um eine Konfiguration, die nach *Minkowski* [1] dann möglich ist, wenn ein kritisches Gitter vorliegt. Diese Tatsache zusammen mit der hier nicht dargelegten Methode, wie die Ausdrücke (14) als Punkte, die gewisse Extremaleigenschaften haben, gefunden wurden, lassen vermuten, daß in (2) das Gleichheitszeichen gilt. δ kann jedenfalls nicht wesentlich größer als die durch (2) gegebene Schranke sein, da man aus (3), (12) und dem Minkowskischen Gitterpunktsatz $\left(\Delta \geq \frac{V(D(T))}{8}\right)$ die Ungleichung

$$\delta \leq \frac{2}{5}$$

erhält.

Literatur

[1] *H. Minkowski*: Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper, Ges. Abh. Bd. 2, 1—42, Leipzig u. Berlin 1911.

[2] *W. Süß*: Über den Vektorenbereich eines Eikörpers, Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. 37, 87—90 (1928).

[3] *Th. Estermann*: Über den Vektorenbereich eines konvexen Körpers, Math. Z. **28**, 471—475 (1928).

[4] *C. A. Rogers, G. C. Shephard*: The difference body of a convex body, Arch. der Math. **8**, 220—233 (1957).