

## Fehlerabschätzungen für Gauß-Quadraturformeln

G. Akrivis

Mathematisches Institut der Ludwig-Maximilians-Universität, Theresienstraße 39,  
D-8000 München 2 (Fed. Rep.)

### Error Estimates for Gauss Quadrature Formulae

**Summary.** We consider Gauss quadrature formulae  $Q_n, n \in \mathbb{N}$ , approximating the integral  $I(f) := \int_{-1}^1 w(x)f(x)dx$ ,  $w$  an even weight function. Let  $f(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_{\kappa}^f z^{\kappa}$  be analytic in  $K_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ ,  $r > 1$ , and  $|f|_r := \sup_{\kappa \geq n} \{|\alpha_{2\kappa}^f| r^{2\kappa}\} < \infty$ . The error functional  $R_n := I - Q_n$  is continuous with respect to  $|\cdot|_r$  and the relation  $\|R_n\| = \sum_{\kappa=0}^{\infty} [R_n(q_{2\kappa})/r^{2\kappa}]$ ,  $q_{2\kappa}(x) := x^{2\kappa}$ , holds.

In this paper estimates for  $\|R_n\|$  are given. To this end we first derive two new representations of  $\|R_n\|$  which are essential for our further investigations. Then  $\|R_n\| = r^2 R_n(\varphi)$ , with  $\varphi(x) := 1/(r^2 - x^2)$ , is estimated in various ways by using the best uniform approximation of  $\varphi$  in  $P_{2n-1}$ , and also the expansion of  $\varphi$  with respect to Chebyshev polynomials of the first and second kind. For  $w(x) = (1 - x^2)^{\alpha}$ ,  $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ ,  $\|R_n\|$  is calculated. The asymptotic behaviour, for  $r \rightarrow 1+$ , of  $\|R_n\|$  and of the derived error bounds is also discussed. Finally, we compare different error bounds and give numerical examples.

*Subject Classifications:* AMS (MOS) 65D30; CR 5.16.

### 1. Einleitung

In dieser Arbeit wird das Integral  $I$ ,

$$I(f) = \int_{-1}^1 w(x)f(x)dx, \quad w(-x) = w(x) \geq 0, \quad \|w\|_1 > 0,$$

durch die Gauß-Quadraturformel  $Q_n$ ,

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i),$$

approximiert. Für das Fehlerfunktional  $R_n := I - Q_n$  gilt bekanntlich

$$\bigwedge_{f \in C^{2n}[-1, 1]} \bigvee_{\xi \in (-1, 1)} R_n(f) = \frac{1}{(2n)! \alpha_n^2} f^{(2n)}(\xi), \tag{1.1}$$

(s. z.B. [6; S. 75]). Dabei ist  $\alpha_n > 0$  der Höchstkoeffizient desjenigen Polynoms  $P_n$   $n$ -ten Grades, welches bezüglich  $(\cdot, \cdot)_w$ ,  $(f, g)_w := \int_{-1}^1 w(x) f(x) g(x) dx$ , normiert ist und orthogonal auf  $P_{n-1}$ , dem Raum der Polynome vom Höchstgrad  $n-1$ , steht.

Die sich aus (1.1) ergebende Abschätzung

$$|R_n(f)| \leq \frac{1}{(2n)! \alpha_n^2} \|f^{(2n)}\|_\infty \tag{1.2}$$

ist in vielen Fällen unbefriedigend, da sie die Berechnung hoher Ableitungen erfordert und überdies für wachsende Stützstellenzahl stets neu berechnet werden muß.

Für analytische Integranden lassen sich ableitungsfreie Abschätzungen angeben. Ein geeigneter Zugang dazu wurde in [9] vorgeschlagen. Für  $r > 1$  seien  $K_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ ,

$$X_r := \{f : f \text{ holomorph in } K_r \text{ und } |f|_r < \infty\}.$$

Die Seminorm  $|\cdot|_r$  ist dabei definiert durch

$$|f|_r := \sup_{\kappa \geq n} \{|\alpha_{2\kappa}^f| r^{2\kappa}\}, \tag{1.3}$$

(s. [9]); hierbei sind  $\alpha_\kappa^f$ ,  $\kappa \in \mathbb{N}_0$ , die Koeffizienten der Taylorentwicklung von  $f$  um 0,

$$f(z) = \sum_{\kappa=0}^\infty \alpha_\kappa^f z^\kappa, \quad z \in K_r. \tag{1.4}$$

*Bemerkung.* Für  $\kappa \geq n$  gilt  $R_n(q_{2\kappa}) \geq R_\kappa(q_{2\kappa})$  (vgl. [3]), und nach (1.1) ist  $R_\kappa(q_{2\kappa}) > 0$  mit  $q_\kappa(x) := x^\kappa$ . Damit läßt sich (1.3) auch folgendermaßen schreiben

$$|f|_r = \sup\{|\alpha_\kappa^f| r^\kappa : \kappa \in \mathbb{N}_0 \text{ und } R_n(q_\kappa) \neq 0\}.$$

$R_n$  ist auf  $(C[-1, 1], \|\cdot\|_\infty)$  stetig. Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (1.4) in  $[-1, 1]$  folgt daher  $R_n(f) = \sum_{\kappa=0}^\infty \alpha_\kappa^f R_n(q_\kappa)$ , und damit

$$|R_n(f)| \leq \left( \sum_{\kappa=0}^\infty \frac{|R_n(q_\kappa)|}{r^\kappa} \right) |f|_r.$$

Da für  $\kappa \in \mathbb{N}_0$ ,  $|R_n(q_\kappa)| \leq 2 \|w\|_1$  gilt, konvergiert die Reihe  $\sum_{\kappa=0}^\infty \frac{|R_n(q_\kappa)|}{r^\kappa}$ . Die ungeraden Potenzen werden durch  $Q_n$  exakt integriert, und nach (1.1) gilt

$R_n(q_{2\kappa}) \geq 0$ ; für die durch  $|\cdot|_r$  induzierte Norm des Fehlerfunktionals  $R_n$  gilt also

$$\|R_n\| \leq \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{R_n(q_{2\kappa})}{r^{2\kappa}}.$$

Für  $f(z) := \frac{1}{r-z}$  gilt

$$R_n(f) = \left( \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{R_n(q_{2\kappa})}{r^{2\kappa}} \right) |f|_r.$$

Damit ergibt sich

$$\|R_n\| = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{R_n(q_{2\kappa})}{r^{2\kappa}}. \quad (1.5)$$

*Bemerkung.* In  $(X_r, |\cdot|_r)$  sind Punktfunktionale nicht stetig. Die Seminorm  $|\cdot|_r$  wurde gerade so gewählt, daß  $R_n$  stetig ist.

Die Abschätzung  $|R_n(f)| \leq \|R_n\| |f|_r$  läßt sich auch mit der Norm  $\|\cdot\|_{(r)}$ ,  $\|f\|_{(r)} := \sup_{\kappa \in \mathbb{N}_0} \{|\alpha_\kappa^f| r^\kappa\}$ , herleiten, da die von  $\|\cdot\|_{(r)}$  und  $|\cdot|_r$  induzierten Normen

von  $R_n$  übereinstimmen. Für gegebenes  $f$ ,  $f(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa^f z^\kappa$ , beachte man, daß mit

$$g(z) := \sum_{\kappa=0}^{2n-1} \alpha_\kappa^f z^\kappa + \sum_{\kappa=n}^{\infty} \alpha_{2\kappa+1}^f z^{2\kappa+1}$$

die Identitäten  $R_n(f) = R_n(f-g)$  und  $\|f-g\|_{(r)} = |f|_r$  gelten. Bezüglich  $\|\cdot\|_{(r)}$  sind Punktfunktionale offensichtlich stetig. Aus (1.5) läßt sich das asymptotische Verhalten von  $\|R_n\|$  für  $r \rightarrow \infty$  ablesen.  $R_n$  verschwindet nämlich auf  $\mathbb{P}_{2n-1}$  und wegen  $R_n(q_{2\kappa}) \leq 2\|w\|_1$ ,  $\kappa \in \mathbb{N}$ , gilt

$$\frac{R_n(q_{2n})}{r^{2n}} \leq \|R_n\| \leq \frac{R_n(q_{2n})}{r^{2n}} + 2\|w\|_1 \frac{1}{r^{2n}(r^2-1)},$$

also

$$\|R_n\| \cong \frac{R_n(q_{2n})}{r^{2n}} \quad \text{für } r \rightarrow \infty, \quad \text{d.h.} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\|R_n\| r^{2n}}{R_n(q_{2n})} = 1.$$

Für Gauß-Legendre-Quadraturformeln, also Gauß-Formeln zur Gewichtsfunktion  $w(x) = 1$ , wurde in [9] die Abschätzung

$$\|R_n\| \leq \sigma_n^H(r) \quad (1.6)$$

mit

$$\sigma_n^H(r) := \frac{2^{2n}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} (2n-1)! r \left\{ \frac{1}{(r-1)^{2n}} - \frac{1}{(r+1)^{2n}} \right\}$$

angegeben. Da  $X_\rho \subset X_r$  für  $r \leq \rho$  ist, erhält man aus (1.6) für  $f \in X_\rho$  die Abschätzung

$$|R_n(f)| \leq \inf_{1 < r \leq \rho} (\sigma_n^H(r) |f|_r). \quad (1.7)$$

Der Definition von  $\sigma_n^H$  entnimmt man

$$\sigma_n^H(r) \cong \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^2} \frac{1}{r^{2n}} = \frac{R_n(q_{2n})}{r^{2n}} \quad \text{für } r \rightarrow \infty;$$

damit gilt

$$\|R_n\| \cong \sigma_n^H \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

$\sigma_n^H$  gibt also das richtige asymptotische Verhalten von  $\|R_n\|$  für  $r \rightarrow \infty$  wieder. Dies ist äquivalent dazu, daß in (1.7) für  $f = q_{2n}$  ( $\rho = \infty$ ) Gleichheit gilt. In diesem Sinne ist die Abschätzung (1.6) optimal.

Für  $r \rightarrow 1+$  ist  $\sigma_n^H$  asymptotisch proportional zu  $1/(r-1)^{2n}$ , abkürzend

$$\sigma_n^H(r) \sim 1/(r-1)^{2n} \quad \text{für } r \rightarrow 1+, \quad \text{d.h. } \lim_{r \rightarrow 1+} [\sigma_n^H(r)(r-1)^{2n}] = \delta_n \neq 0.$$

Andererseits gilt für das Fehlerfunktional im Falle konstanter Gewichtsfunktion (s. (5.4))

$$\|R_n\| \cong \ln \frac{1}{r-1} \quad \text{für } r \rightarrow 1+.$$

$\|R_n\|$  wird also durch  $\sigma_n^H$  für kleines  $r$  deutlich überschätzt.

Bisher untersuchten wir für eine feste Quadraturformel das asymptotische Verhalten von  $\|R_n\|$  und  $\sigma_n^H$  für  $r \rightarrow \infty$  und  $r \rightarrow 1+$ . Nun wird bei festem  $r$  das asymptotische Verhalten von  $\|R_n\|$  und  $\sigma_n^H$  für  $n \rightarrow \infty$  diskutiert.

Mit der Stirlingschen Formel ergibt sich

$$\sigma_n^H(r) \geq \frac{\pi r}{8(n+1)} \left\{ \frac{1}{(2r-2)^{2n}} - \frac{1}{(2r+2)^{2n}} \right\};$$

daraus folgt

$$\sigma_n^H(r) \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \quad r \in (1, 1.5). \quad (1.9)$$

Aus (1.5) ergibt sich andererseits

$$\|R_n\| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \quad r \in (1, \infty). \quad (1.10)$$

Das asymptotische Verhalten von  $\sigma_n^H(r)$  für  $n \rightarrow \infty$  hat zur Folge, daß z.B. für  $f(z) := \frac{1}{\rho - z}$  mit  $1 < \rho < 1.5$  die rechte Seite in (1.7) für  $n \rightarrow \infty$  bestimmt divergiert, während die linke eine Nullfolge ist.

In dieser Arbeit leiten wir Abschätzungen für  $\|R_n\|$  her, welche sich bei festem  $n$  für  $r \rightarrow 1+$  wie  $1/(r-1)$  verhalten oder das asymptotische Verhalten von  $\|R_n\|$  wiedergeben, für  $r \rightarrow \infty$  asymptotisch gleich bzw. asymptotisch proportional  $\|R_n\|$  sind und bei festem  $r$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null konvergieren. Darüber hinaus wird für  $w(x) = (1-x^2)^\alpha$ ,  $\alpha > -1$ , das asymptotische Verhalten von  $\|R_n\|$  für  $r \rightarrow 1+$  bestimmt, und  $\|R_n\|$  wird für  $\alpha = \pm \frac{1}{2}$  durch einen einfachen, geschlossenen Ausdruck explizit angegeben.

## 2. Einfache Darstellungen für $\|R_n\|$

Grundlage der weiteren Untersuchungen bilden zwei einfache Darstellungen für  $\|R_n\|$ , welche hier hergeleitet werden.

Auf  $(C[-1, 1], \|\cdot\|_\infty)$  ist  $R_n$  stetig, und die Reihe  $\sum_{\kappa=0}^\infty \frac{q_{2\kappa}}{r^{2\kappa}}$  konvergiert gleichmäßig in  $[-1, 1]$ . Damit folgt aus (1.5)

$$\|R_n\| = R_n \left( \sum_{\kappa=0}^\infty \frac{q_{2\kappa}}{r^{2\kappa}} \right),$$

also

$$\|R_n\| = r^2 R_n(\varphi) \quad \text{mit } \varphi(x) := 1/(r^2 - x^2). \tag{2.1}$$

Da die Gewichtsfunktion gerade ist, werden die ungeraden Potenzen durch  $Q_n$  exakt integriert, (1.5) läßt sich also folgendermaßen schreiben

$$\|R_n\| = \sum_{\kappa=0}^\infty \frac{R_n(q_\kappa)}{r^\kappa}, \quad \text{d.h. } \|R_n\| = r R_n(\psi) \quad \text{mit } \psi(x) := 1/(r-x).$$

Durch  $Q_n$  werden Polynome vom Grad kleiner  $n$  exakt integriert, wegen der Linearität von  $R_n$  gilt also  $R_n(\psi) = R_n(\psi - p)$ ,  $p \in \mathbf{P}_{n-1}$ . Wählt man speziell dasjenige Polynom  $\pi_{n-1}$ , welches  $\psi$  in den Knoten  $x_1, \dots, x_n$  von  $Q_n$  interpoliert, so gilt  $Q_n(\psi - \pi_{n-1}) = 0$ . Daraus erhält man eine Integraldarstellung für  $\|R_n\|$ . Dazu sei  $\Pi_n(x) := (x - x_1) \dots (x - x_n)$ . Dann gilt

$$\psi(x) - \pi_{n-1}(x) = \gamma_n \frac{\Pi_n(x)}{r - x},$$

da die linke Seite in  $x_1, \dots, x_n$  verschwindet. Multiplikation mit  $r - x$  und Grenzübergang  $x \rightarrow r$  liefert  $\gamma_n = 1/\Pi_n(r)$  (vgl. [2; S. 71 f]). Somit gilt

$$\|R_n\| = \frac{r}{\Pi_n(r)} \int_{-1}^1 w(x) \frac{\Pi_n(x)}{r - x} dx \quad \text{mit } \Pi_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i). \tag{2.2}$$

*Bemerkung.* Schätzt man im Falle  $w(x) = 1$   $R_n(\varphi)$  nach [2; Satz 84] ab, so erhält man aus (2.1) die Abschätzung (1.6).

## 3. Abschätzung von $\|R_n\|$ mit Hilfe der besten Approximierenden an $\varphi$

Ausgehend von der Darstellung (2.1) wird nun mit Hilfe der besten Tschebyscheff-Approximierenden aus  $\mathbf{P}_{2n-1}$  an  $\varphi$  eine Abschätzung für  $\|R_n\|$  hergeleitet, welche für  $r \rightarrow 1+$  asymptotisch proportional zu  $1/(r-1)$  und für  $r \rightarrow \infty$  asymptotisch proportional zu  $\|R_n\|$  ist. Diese Abschätzung gilt für jede gerade Gewichtsfunktion.

Sei  $p_{2n-1}^*$  die beste Approximierende an  $\varphi$  aus  $\mathbf{P}_{2n-1}$ . Die Koeffizienten von  $p_{2n-1}^*$  und der Minimalabstand der Funktion  $\varphi$  von  $\mathbf{P}_{2n-1}$  lassen sich explizit angeben.

**Lemma** (s. [10]). Seien  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $\mu, \nu \in \mathbb{N}_0$ ,  $\mu > 0$  und

$$f = b + a \sum_{j=0}^{\infty} c^j T_{\mu j + \nu} \quad \text{in } (C[-1, 1], \|\cdot\|_{\infty}) \quad (3.1)$$

mit  $|c| < 1$ . Dann gilt

$$f = \frac{b(1+c^2) - 2bcT_{\mu} + aT_{\nu} - acT_{|\mu-\nu|}}{1+c^2-2cT_{\mu}}. \quad (3.2)$$

Ist  $q_d^*$  die beste Tschebyscheff-Approximierende an  $f$  aus  $\mathbb{P}_d$  und  $\mu\kappa + \nu \leq d < \mu(\kappa+1) + \nu$ , so gilt

$$q_d^* = b + a \sum_{j=0}^{\kappa-1} c^j T_{\mu j + \nu} + a \frac{c^{\kappa}}{1-c^2} T_{\mu\kappa + \nu} \quad (3.3)$$

und für den Minimalabstand

$$E_d(f) := \|f - q_d^*\|_{\infty} = |a| |c|^{\kappa+1} / (1-c^2). \quad (3.4)$$

$T_i$  ist hierbei das  $i$ -te Tschebyscheff-Polynom erster Art.

Sei  $\tau := r - \sqrt{r^2 - 1}$ ,  $r > 1$ . Mit  $c := \tau^2$  und  $\mu := 2$ ,  $\nu := 0$ ,  $a := 8\tau^2 / (1 - \tau^4)$  und  $b := -a/2$  ergibt sich aus (3.2)  $f(x) = 1/(r^2 - x^2)$ , also  $f = \varphi$ . Aus dem Lemma folgt nun:

$$p_{2n-1}^* = \frac{8\tau^2}{1-\tau^4} \sum_{j=0}^{n-2} \tau^{2j} T_{2j} + \frac{8\tau^{2n}}{(1-\tau^4)^2} T_{2n-2} \quad (3.5)$$

– der Strich beim Summationszeichen bedeutet, wie üblich, Halbierung des ersten Summanden – und

$$E_{2n-1}(\varphi) = \|\varphi - p_{2n-1}^*\|_{\infty} = 8\tau^{2n+2} / (1-\tau^4)^2. \quad (3.6)$$

Wegen  $R_n(p_{2n-1}^*) = 0$  gilt nach (2.1)

$$\begin{aligned} \|R_n\| &= r^2 R_n(\varphi - p_{2n-1}^*) \\ &\leq r^2 \left\{ \left| \int_{-1}^1 w(x) [\varphi(x) - p_{2n-1}^*(x)] dx \right| + \sum_{i=1}^n w_i |\varphi(x_i) - p_{2n-1}^*(x_i)| \right\} \\ &\leq 2r^2 \|w\|_1 \|\varphi - p_{2n-1}^*\|_{\infty} \end{aligned} \quad (3.7)$$

oder

$$\|R_n\| \leq \|w\|_1 \tau^{2n-2} / (r^2 - 1). \quad (3.8)$$

Schätzt man in (3.7)  $J_{2n-1}(\varphi) := \int_{-1}^1 w(x) [\varphi(x) - p_{2n-1}^*(x)] dx$  besser ab, so erhält man eine genauere Schranke als (3.8). Mit den oben angegebenen Parameterwerten ergibt sich aus (3.1) und (3.5)

$$\varphi - p_{2n-1}^* = -\frac{8\tau^{2n+4}}{(1-\tau^4)^2} T_{2n-2} + \frac{8\tau^2}{1-\tau^4} \sum_{j=n}^{\infty} \tau^{2j} T_{2j}. \quad (3.9)$$

Die Orthogonalität der Tschebyscheff-Polynome erster Art bezüglich der Gewichtsfunktion  $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$  ergibt für dieses  $w$  für  $n > 1$   $J_{2n-1}(\varphi) = 0$  und damit

$$\|R_n\| \leq \frac{\pi \tau^{2n-2}}{2(r^2-1)}. \tag{3.10}$$

Für  $w(x) = 1$  gilt

$$J_{2n-1}(\varphi) = \frac{16\tau^{2n+4}}{(2n-1)(2n-3)(1-\tau^4)^2} - \frac{16\tau^2}{1-\tau^4} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\tau^{2j}}{4j^2-1},$$

und damit für  $n > 2$

$$\begin{aligned} |J_{2n-1}(\varphi)| &\leq \max \left\{ \frac{16\tau^{2n+4}}{(2n-1)(2n-3)(1-\tau^4)^2}, \frac{16\tau^2}{1-\tau^4} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\tau^{2j}}{4j^2-1} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \frac{16\tau^{2n+4}}{(2n-1)(2n-3)(1-\tau^4)^2}, \frac{16\tau^2}{(4n^2-1)(1-\tau^4)} \sum_{j=n}^{\infty} \tau^{2j} \right\} \\ &\leq \frac{8\tau^{2n+2}}{n(2n-1)(1-\tau^4)(1-\tau^2)}, \end{aligned}$$

also

$$\|R_n\| \leq \frac{\tau^{2n-2}}{r^2-1} \left[ \frac{r\tau}{n(2n-1)} + 1 \right] =: \sigma_n^A(r)^1. \tag{3.11}$$

$\sigma_n^H$  wird durch  $\sigma_n^A$  für kleines  $r$  wesentlich verbessert.

#### 4. Abschätzung von $\|R_n\|$ durch Entwicklung von $\varphi$ nach Tschebyscheff-Polynomen

Mit Hilfe der Darstellung (2.1) leiten wir durch Entwicklung von  $\varphi$  nach Tschebyscheff-Polynomen Abschätzungen für  $\|R_n\|$  her, welche für  $r \rightarrow 1+$  asymptotisch proportional zu  $1/(r-1)$  und für  $r \rightarrow \infty$  asymptotisch gleich  $\|R_n\|$  sind. Für  $w(x) = (1-x^2)^\alpha$ ,  $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ , wird  $\|R_n\|$  berechnet.

Nach (3.1) gilt

$$\varphi = \frac{2}{r\sqrt{r^2-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \tau^{2j} T_{2j} \quad \text{in } (C[-1, 1], \|\cdot\|_{\infty}). \tag{4.1}$$

$R_n$  verschwindet auf  $P_{2n-1}$  und ist in  $(C[-1, 1], \|\cdot\|_{\infty})$  stetig. Damit ergibt sich aus (2.1) und (4.1)

$$\|R_n\| = \frac{2r}{\sqrt{r^2-1}} \sum_{j=n}^{\infty} \tau^{2j} R_n(T_{2j}). \tag{4.2}$$

Durch Berechnung von  $R_n(T_{2n})$ ,  $R_n(T_{2n+2})$  und Abschätzung von  $R_n(T_{2j})$ ,  $j \geq n+2$ , werden aus (4.2) im folgenden Schranken für  $\|R_n\|$  gewonnen.

<sup>1</sup> Der Index „A“ soll an die Herleitung dieser Abschätzung mit Hilfe der „besten Approximierenden“ erinnern

Aus (1.1) und

$$T_k(x) = 2^{k-1} x^k - k 2^{k-3} x^{k-2} + \dots, \quad k \in \mathbb{N},$$

(s. [11; S. 31f]) folgt

$$R_n(T_{2n}) = 2^{2n-1} / \alpha_n^2. \quad (4.3)$$

Um  $R_n(T_{2n+2})$  zu berechnen, benötigen wir  $R_n(q_{2n+2})$ , zu dessen Berechnung wir wie in [2; S. 157] vorgehen; in [2] wird der Spezialfall der Gauß-Legendre-Formeln behandelt. Die Polynome  $p_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,

$$p_k(x) = \alpha_k x^k + \beta_k x^{k-2} + \dots, \quad \alpha_k > 0,$$

(w gerade!) seien bezüglich  $(\cdot, \cdot)_w$  orthonormiert. Aus

$$p_{n+2}(x) p_n(x) = \alpha_{n+2} \alpha_n x^{2n+2} + (\alpha_{n+2} \beta_n + \alpha_n \beta_{n+2}) x^{2n} + \dots$$

ergibt sich unter Beachtung von  $(p_{n+2}, p_n)_w = 0$  und  $Q_n(p_{n+2} p_n) = 0$

$$R_n(q_{2n+2}) = C_n R_n(q_{2n}) \quad \text{mit} \quad C_n := -\beta_n / \alpha_n - \beta_{n+2} / \alpha_{n+2}.$$

Aus

$$R_n(T_{2n+2}) = 2^{2n+1} R_n(q_{2n+2}) - (2n+2) 2^{2n-1} R_n(q_{2n})$$

erhält man somit

$$R_n(T_{2n+2}) = 2^{2n} (2C_n - n - 1) / \alpha_n^2. \quad (4.4)$$

Mit (4.3), (4.4) und  $|R_n(T_{2j})| \leq 2 \|w\|_1$  folgt dann aus (4.2) die Abschätzung

$$\|R_n\| \leq \frac{2r\tau^{2n}}{\sqrt{r^2-1}} \left\{ \frac{2^{2n-1}}{\alpha_n^2} |1 + 2\tau^2(2C_n - n - 1)| + \frac{\tau^3}{\sqrt{r^2-1}} \|w\|_1 \right\}. \quad (4.5)$$

Für den wichtigen Spezialfall der Gauß-Gegenbauer-Formeln, also für  $w(x) = (1-x^2)^\alpha$ ,  $\alpha > -1$ , geben wir die Schranke in (4.5) explizit an. Dazu einige Vorbereitungen. Die Gegenbauer-Polynome  $P_k^{(\alpha, \alpha)}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,

$$P_k^{(\alpha, \alpha)}(x) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} (1-x^2)^{-\alpha} \frac{d^k}{dx^k} (1-x^2)^{k+\alpha},$$

bilden bezüglich  $w(x) = (1-x^2)^\alpha$ ,  $\alpha > -1$ , ein Orthogonalsystem. Bezeichnen wir mit  $p_k^\alpha$  die durch  $(p_k^\alpha, p_k^\alpha)_w = 1$  normierten Gegenbauer-Polynome, so besteht zwischen  $p_k^\alpha$  und  $P_k^{(\alpha, \alpha)}$  die Beziehung

$$p_k^\alpha = \gamma_k^\alpha P_k^{(\alpha, \alpha)}$$

mit

$$\gamma_k^\alpha := \frac{1}{2^\alpha \Gamma(k+\alpha+1)} \left[ \frac{2k+2\alpha+1}{2} k! \Gamma(k+2\alpha+1) \right]^{1/2}$$

(s. [12; Formeln (4.3.1) und (4.3.4)]). Ferner gilt

$$P_k^{(\alpha, \alpha)}(x) = \frac{\Gamma(2\alpha+1) \Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\alpha+\frac{1}{2}) \Gamma(k+2\alpha+1)} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^j \frac{\Gamma(k-j+\alpha+\frac{1}{2})}{j!(k-2j)!} (2x)^{k-2j}$$

(s. [12; Formeln (4.7.1) und (4.7.31)]). Für die Koeffizienten  $\alpha_k, \beta_k$  der orthonormierten Polynome  $p_k^\alpha$  gilt also

$$\alpha_k = \gamma_k^\alpha \binom{2k+2\alpha}{k} / 2^k, \quad \beta_k = -(k+\alpha) \gamma_k^\alpha \binom{2k+2\alpha-2}{k-2} / 2^k;$$

dabei wurde  $\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \Gamma(2x)/2^{2x-1}$  verwendet. Somit gilt für  $w(x) = (1-x^2)^\alpha$  (mit  $C_n^\alpha$  statt  $C_n$ )

$$C_n^\alpha = \frac{(n+\alpha) \binom{2n+2\alpha-2}{n-2}}{\binom{2n+2\alpha}{n}} + \frac{(n+\alpha+2) \binom{2n+2\alpha+2}{n}}{\binom{2n+2\alpha+4}{n+2}},$$

und mit

$$D_n^\alpha := \frac{2^{2n-1}}{\alpha_n^2} = \frac{2^{4n+2} n! \Gamma(n+2\alpha+1) [\Gamma(n+\alpha+1)]^2}{(2n+2\alpha+1) [\Gamma(2n+2\alpha+1)]^2}$$

und

$$d_\alpha := \|w\|_1 = 2^{2\alpha+1} [\Gamma(\alpha+1)]^2 / \Gamma(2\alpha+2)$$

schreibt sich (4.5) als

$$\|R_n\| \leq \frac{2r\tau^{2n}}{\sqrt{r^2-1}} \left\{ D_n^\alpha |1 + 2\tau^2(2C_n^\alpha - n - 1)| + \frac{\tau^3}{\sqrt{r^2-1}} d_\alpha \right\}. \tag{4.6}$$

In (4.5) wurde  $R_n(T_{2j}), j \geq n+2$ , durch  $2\|w\|_1$  abgeschätzt. Für  $w(x) = 1$  schätzen wir  $R_n(T_{2j})$  besser ab und erhalten eine genauere Schranke. Dazu verwenden wir

$$\int_{-1}^1 T_{2j}(x) dx = -2/(4j^2 - 1)$$

und erhalten

$$|R_n(T_{2j})| \leq \frac{2}{4j^2-1} + \|T_{2j}\|_\infty \sum_{i=1}^n w_i = 8j^2/(4j^2-1).$$

Somit gilt

$$\sum_{j=n+2}^\infty \tau^{2j} |R_n(T_{2j})| \leq \frac{8(n+2)^2}{4(n+2)^2-1} \sum_{j=n+2}^\infty \tau^{2j} = \frac{4(n+2)^2}{4(n+2)^2-1} \frac{\tau^{2n+3}}{\sqrt{r^2-1}},$$

und mit (4.3) und (4.4) ergibt sich aus (4.2)

$$\begin{aligned} \|R_n\| &\leq \frac{2r\tau^{2n}}{\sqrt{r^2-1}} \left\{ D_n^\alpha \left| 1 - \left[ 1 + \frac{2n+1}{(2n-1)(2n+3)} \right] \tau^2 \right| + \frac{4(n+2)^2}{4(n+2)^2-1} \frac{\tau^3}{\sqrt{r^2-1}} \right\} \\ &=: \sigma_n^T(r) \end{aligned} \tag{4.7}$$

mit

$$D_n^0 = \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^2}.$$

Aus der Entwicklung der Funktion  $\varphi$  nach Tschebyscheff-Polynomen zweiter Art  $U_j$ , d.h. aus

$$\varphi = \frac{2\tau}{r} \sum_{j=0}^{\infty} \tau^{2j} U_{2j}, \quad (4.8)$$

erhält man analog die Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \|R_n\| \leq & 2r\tau^{2n+1} \left\{ \frac{2^{2n}}{\alpha_n^2} |1 + \tau^2(4C_n - 2n - 1)| \right. \\ & \left. + \tau^2 \frac{(2n+5) - (2n+3)\tau^2}{2(r^2 - 1)} \|w\|_1 \right\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

für eine beliebige gerade Gewichtsfunktion  $w$ ,

$$\begin{aligned} \|R_n\| \leq & 2r\tau^{2n+1} \left\{ 2D_n^\alpha |1 + \tau^2(4C_n^\alpha - 2n - 1)| \right. \\ & \left. + \tau^2 \frac{(2n+5) - (2n+3)\tau^2}{2(r^2 - 1)} d_\alpha \right\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

für  $w(x) = (1-x^2)^\alpha$ ,  $\alpha > -1$ , und

$$\begin{aligned} \|R_n\| \leq & 2r\tau^{2n+1} \left\{ 2D_n^0 \left[ 1 - \frac{2n+1}{(2n-1)(2n+3)} \tau^2 \right] \right. \\ & \left. + \left[ 2 + \left( 2n+3 + \frac{1}{2n+5} \right) (1-\tau^2) \right] \frac{\tau^2}{2(r^2 - 1)} \right\} =: \sigma_n^U(r) \end{aligned} \quad (4.11)$$

für  $w(x) = 1$ .

*Bemerkung.* Abschätzungen für  $\|R_n\|$ , die für  $r \rightarrow \infty$  asymptotisch gleich  $\|R_n\|$  und für  $r \rightarrow 1+$  asymptotisch proportional  $1/(r-1)$  sind, lassen sich auch direkt aus (1.5) gewinnen. Dies führen wir für die Gauß-Legendre-Formeln aus.

Wir schätzen zunächst  $R_n(q_{2\kappa})$ ,  $\kappa \geq n+2$ , ab. Aus  $Q_n(q_{2\kappa}) \geq 0$  folgt  $R_n(q_{2\kappa}) \leq \int_{-1}^1 q_{2\kappa}(x) dx = 2/(2\kappa+1)$  und damit

$$\sum_{\kappa=n+2}^{\infty} \frac{R_n(q_{2\kappa})}{r^{2\kappa}} \leq \frac{2}{2n+5} \sum_{\kappa=n+2}^{\infty} \frac{1}{r^{2\kappa}} = \frac{2}{2n+5} \frac{1}{r^{2n+2}(r^2-1)}.$$

Mit den exakten Werten von  $R_n(q_{2n})$  und  $R_n(q_{2n+2})$  ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \|R_n\| \leq & \frac{D_n^0}{2^{2n-1}r^{2n}} \left[ 1 + \frac{(2n+1)(n^2+n-1)}{(2n-1)(2n+3)} \frac{1}{r^2} \right] \\ & + \frac{2}{2n+5} \frac{1}{r^{2n+2}(r^2-1)} =: \sigma_n^*(r). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Berechnung von  $\|R_n\|$  für  $w(x)=(1-x^2)^\alpha$ ,  $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ :

Sei zunächst  $\alpha = -1/2$ . Mit

$$R_n(T_j) = \begin{cases} (-1)^{m+1} \pi & \text{für } j=2nm, m \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(s. [4]) ergibt sich aus (4.2)

$$\|R_n\| = \frac{2\pi r}{\sqrt{r^2-1}} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \tau^{2jn},$$

also

$$\|R_n\| = \frac{2\pi r}{\sqrt{r^2-1} [(r+\sqrt{r^2-1})^{2n+1} + 1]} \quad \text{für } w(x)=1/\sqrt{1-x^2}. \quad (4.13)$$

Für  $\alpha = 1/2$  gilt ebenfalls nach [4] für  $m \in \mathbb{N}$

$$R_n(U_j) = \begin{cases} \pi/2 & \text{für } j=(2n+2)m-2 \\ -\pi/2 & \text{für } j=(2n+2)m \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

damit folgt aus (2.1) und (4.8)

$$\|R_n\| = \frac{2\pi r \sqrt{r^2-1}}{(r+\sqrt{r^2-1})^{2n+2}-1} \quad \text{für } w(x)=\sqrt{1-x^2}. \quad (4.14)$$

### 5. Asymptotisches Verhalten von $\|R_n\|$ für $r \rightarrow 1+$ für $w(x)=(1-x^2)^\alpha$ , $\alpha > -1$ , und asymptotisch optimale Abschätzungen für $\alpha \geq 0$

Da die Knoten der Gauß-Quadraturformeln im Inneren des Integrationsintervalls liegen, ergibt sich aus  $\|R_n\| = rR_n(\psi)$

$$\|R_n\| \sim \int_{-1}^1 \frac{w(x)}{r-x} dx \quad \text{für } r \rightarrow 1+. \quad (5.1)$$

Für Gauß-Gegenbauer-Quadraturformeln geben wir dieses Verhalten explizit an. Stützstellen der Gauß-Formel  $Q_n$  zur Gewichtsfunktion  $w(x)=(1-x^2)^\alpha$ ,  $\alpha > -1$ , sind die Nullstellen von  $P_n^{(\alpha, \alpha)}$ . In diesem Fall hat (2.2) also die Form

$$\|R_n\| = \frac{r}{P_n^{(\alpha, \alpha)}(r)} \int_{-1}^1 (1-x^2)^\alpha \frac{P_n^{(\alpha, \alpha)}(x)}{r-x} dx. \quad (5.2)$$

Mit der Jacobi-Funktion zweiter Art  $Q_n^{(\alpha, \alpha)}$ ,

$$Q_n^{(\alpha, \alpha)}(r) := \frac{1}{2}(r^2-1)^{-\alpha} \int_{-1}^1 (1-x^2)^\alpha \frac{P_n^{(\alpha, \alpha)}(x)}{r-x} dx$$

(s. [12; S. 73 ff]), läßt sich (5.2) folgendermaßen schreiben

$$\|R_n\| = 2r(r^2 - 1)^\alpha Q_n^{(\alpha, \alpha)}(r)/P_n^{(\alpha, \alpha)}(r). \quad (5.3)$$

Für  $r \rightarrow 1 +$  gilt (s. [12; S. 77])

$$Q_n^{(\alpha, \alpha)}(r) \begin{cases} \cong -[\ln(r-1)]/2 & \text{für } \alpha = 0 \\ \cong 2^{\alpha-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+2\alpha+1)} (r-1)^{-\alpha} & \text{für } \alpha > 0 \\ \sim 1 & \text{für } \alpha < 0. \end{cases}$$

Damit ergibt sich aus (5.3) wegen  $P_n^{(\alpha, \alpha)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$  (s. [12; S. 57])

$$\|R_n\| \begin{cases} \cong -\ln(r-1) & \text{für } \alpha = 0 \\ \cong 2^{2\alpha} \alpha \frac{[\Gamma(\alpha)]^2 n!}{\Gamma(n+2\alpha+1)} & \text{für } \alpha > 0 \\ \sim (r-1)^\alpha & \text{für } \alpha < 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

für  $r \rightarrow 1 +$ .

*Bemerkung.* Sei  $\tilde{X}_1 := \{f: f \text{ holomorph in } K_1 \text{ und } |f|_1 < \infty\}$  mit  $K_1 := \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$  und  $|f|_1 = \sup_{\kappa \geq n} |\alpha_{2\kappa}^f|$ . (5.4) entnimmt man, daß das Fehlerfunktional einer Gauß-Gegenbauer-Formel für  $\alpha > 0$  auf  $(\tilde{X}_1, |\cdot|_1)$  stetig ist. Damit gilt insbesondere für  $r=1$   $\|R_n\| = \sum_{\kappa=n}^{\infty} R_n(q_{2\kappa})$ .

*Asymptotisch optimale Abschätzungen von  $\|R_n\|$  für  $w(x) = (1-x^2)^\alpha$ ,  $\alpha \geq 0$*

Für  $\alpha \geq 0$  wird eine Abschätzung von  $\|R_n\|$  angegeben, die für  $r \rightarrow 1 +$  asymptotisch gleich  $\|R_n\|$  ist.

Sei zunächst  $\alpha > 0$ . Aus (5.4) und obiger Bemerkung folgt

$$\sum_{\kappa=n}^{\infty} R_n(q_{2\kappa}) = 2^{2\alpha} \alpha [\Gamma(\alpha)]^2 n! / \Gamma(n+2\alpha+1) \quad (r=1, \alpha > 0),$$

und mit

$$\begin{aligned} \|R_n\| &= \frac{R_n(q_{2n})}{r^{2n}} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{R_n(q_{2n})}{r^{2n+2}} + \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \frac{R_n(q_{2\kappa})}{r^{2\kappa}} \\ &\leq \frac{R_n(q_{2n})}{r^{2n}} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^{2n+2}} \sum_{\kappa=n}^{\infty} R_n(q_{2\kappa}) \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\|R_n\| \leq \frac{R_n(q_{2n})}{r^{2n}} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2^{2\alpha} \alpha [\Gamma(\alpha)]^2 n!}{\Gamma(n+2\alpha+1)} \frac{1}{r^{2n+2}}. \quad (5.5)$$

Für  $\alpha=0$  gehen wir von  $\|R_n\| = 2rQ_n(r)/P_n(r)$  mit  $Q_n := Q_n^{(0,0)}$  und  $P_n := P_n^{(0,0)}$  aus und schätzen die Legendre-Funktion zweiter Art  $Q_n$  nach oben und das Legendre-Polynom  $P_n$  nach unten ab. Für  $Q_n$  gilt (s. [5; S. 290 f])

$$Q_n(r) = \int_0^a \chi(\theta) d\theta, \quad \chi(\theta) := (r - \sqrt{r^2 - 1} \cosh \theta)^n,$$

mit  $a := \frac{1}{2} \ln \frac{r+1}{r-1}$ ,  $r > 1$ . Da  $\chi$  in  $[0, a]$  fallend ist, läßt sich das Integral mit Hilfe der linken Rechteckregel nach oben abschätzen. Wir wählen die Schnittweite  $h := a/2$ , um eine einfache Schranke zu erhalten. Es gilt also

$$Q_n(r) \leq \frac{1}{4} \ln \frac{r+1}{r-1} \left\{ \tau^n + \left[ r - \frac{\sqrt[4]{r^2-1}}{2} (\sqrt{r+1} + \sqrt{r-1}) \right]^n \right\}. \tag{5.6}$$

Für die Jacobi-Polynome  $P_k^{(\alpha, \beta)}$ ,  $\alpha, \beta > -1$ , gilt

$$P_k^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k+\alpha}{k-j} \binom{k+\beta}{j} \left(\frac{x-1}{2}\right)^j \left(\frac{x+1}{2}\right)^{k-j}$$

(s. [12; S. 67]); daraus folgt unmittelbar

$$P_k^{(0, \beta)}(x) \geq \left(\frac{x+1}{2}\right)^k, \quad x \geq 1. \tag{5.7}$$

Ferner gilt (s. [12; S. 58])

$$P_{2k}(x) = P_k^{(0, -1/2)}(2x^2 - 1), \quad P_{2k+1}(x) = x P_k^{(0, 1/2)}(2x^2 - 1);$$

damit ergibt sich aus (5.7)

$$P_n(r) \geq r^n.$$

Insgesamt erhält man somit die Abschätzung

$$\|R_n\| \leq \frac{1}{2r^{n-1}} \ln \frac{r+1}{r-1} \left\{ \tau^n + \left[ r - \frac{\sqrt[4]{r^2-1}}{2} (\sqrt{r+1} + \sqrt{r-1}) \right]^n \right\} =: \sigma_n^L(r). \tag{5.8}$$

*Bemerkung.* Stützstellen der Gauß-Quadraturformel  $Q_n$  zur Gewichtsfunktion  $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$  sind die Nullstellen von  $T_n$ . Nach (2.2) gilt also

$$\|R_n\| = \frac{r}{T_n(r)} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{T_n(x)}{r-x} dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite läßt sich elementar berechnen:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{T_n(x)}{r-x} dx &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\cos(n \arccos x)}{r-x} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{\cos(ny)}{r - \cos y} dy = \frac{\pi \tau^n}{\sqrt{r^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Die erste Gleichheit gilt wegen  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  für  $x \in [-1, 1]$ , die zweite folgt durch Variablensubstitution und die dritte wurde [7; S. 112] entnommen. Wegen

$$T_n(r) = \frac{1}{2} [(r - \sqrt{r^2 - 1})^n + (r + \sqrt{r^2 - 1})^n]$$

(s. [11; S. 5]) ergibt sich dann

$$\|R_n\| = \frac{2\pi r}{\sqrt{r^2 - 1} [(r + \sqrt{r^2 - 1})^{2n} + 1]}$$

d.h. (4.13). Auch (4.14) läßt sich analog aus

$$\|R_n\| = \frac{r}{U_n(r)} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \frac{U_n(x)}{r-x} dx$$

herleiten.

### 6. Vergleich der Abschätzungen

Am repräsentativen Spezialfall der Gauß-Legendre-Quadraturformeln werden die hergeleiteten Abschätzungen verglichen. Dazu wird zunächst das asymptotische Verhalten der Abschätzungen untereinander untersucht, und zwar für  $r \rightarrow \infty$  und  $r \rightarrow 1+$  bei festem  $n$  und für  $n \rightarrow \infty$  bei festem  $r$ .

Der Tabelle 1 ist das asymptotische Verhalten der Quotienten je zweier Abschätzungen für  $r \rightarrow 1+$ , der Tabelle 2 jenes für  $r \rightarrow \infty$  bei festem  $n$  zu entnehmen.

Tabelle 1

$\sigma_n^*$	$\infty$				
$\sigma_n^U$	$\infty$	$2n+5$			
$\sigma_n^T$	$\infty$	$\zeta_n^*$	$\zeta_n/2$		
$\sigma_n^A$	$\infty$	$\frac{2n+5}{2} \eta_n$	$\eta_n/2$	$\frac{\eta_n}{\zeta_n}$	
$\sigma_n^H$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
Zähler Nenner	$\sigma_n^T$	$\sigma_n^*$	$\sigma_n^U$	$\sigma_n^T$	$\sigma_n^A$

Tabelle 2

$\sigma_n^*$	$\zeta_n$				
$\sigma_n^U$	$\zeta_n$	1			
$\sigma_n^T$	$\zeta_n$	1	1		
$\sigma_n^A$	$\zeta_n \zeta_n^*$	$\zeta_n^*$	$\zeta_n^*$	$\zeta_n^*$	
$\sigma_n^H$	$\zeta_n$	1	1	1	$1/\zeta_n^*$
Zähler Nenner	$\sigma_n^L$	$\sigma_n^*$	$\sigma_n^U$	$\sigma_n^T$	$\sigma_n^A$

Hierbei sind

$$\zeta_n := \frac{8(n+2)^2}{4(n+2)^2 - 1}, \quad \zeta_n^* := \frac{4(n+2)^2(2n+5)}{4(n+2)^2 - 1}, \quad \eta_n := 1 + \frac{1}{n(2n-1)},$$

$$\xi_n := 2^{n+1} D_n^0 / (3^n + 4^n) \quad \text{und} \quad \xi_n^* := 2 \left[ 1 + \frac{1}{2n(2n-1)} \right] / D_n^0.$$

Sei nun  $r$  fest. In Tabelle 3 wird das asymptotische Verhalten der Quotienten je zweier Abschätzungen für  $n \rightarrow \infty$  angegeben.

Tabelle 3

$\sigma_n^*$	$\infty$				
$\sigma_n^U$	0	0			
$\sigma_n^T$	0	0	0		
$\sigma_n^A$	0	0	0	$c_r(A, T)$	
$\sigma_n^H$	$0, r > c$ $\infty, r < c$	$0, r > 2$ $\infty, r < 2$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
Zähler Nenner	$\sigma_n^L$	$\sigma_n^*$	$\sigma_n^U$	$\sigma_n^T$	$\sigma_n^A$

Hierbei sind

$$c_r(A, T) := \frac{1}{2r\tau^3 [\pi(r^2 - 1) + \tau^2]}$$

und  $c := 3.32062837$ .

Sei  $R_3$  das Fehlerfunktional der Gauß-Legendre-Quadraturformel mit drei Stützstellen. In den anschließenden sechs Diagrammen wird der Logarithmus von  $\|R_3\|$  zusammen mit dem Logarithmus einer der obigen Abschätzungen dargestellt.  $\|R_3\|$  läßt sich dabei aus (2.1) bestimmen.

*Beispiele.* 1. Sei  $f(x) := \exp(x^2)$  mit der holomorphen Ergänzung  $f(z) = \exp(z^2)$ ,  $f \in X_\infty$ . Der exakte Fehler bei der Approximation von  $\int_{-1}^1 \exp(x^2) dx$  mit der Gauß-Legendre-Quadraturformel  $Q_3$  ist  $1.18 \cdot 10^{-2}$ . Die herkömmliche Abschätzung (1.2) liefert als Fehlerschranke  $2.39 \cdot 10^{-1}$ . Aus

$$|R_3(f)| \leq \inf_{r > 1} (\sigma_3(r) |f|_r) \quad \text{bzw.} \quad |R_3(f)| \leq \inf_{r > 1} (\sigma_3(r) \sup_{|z|=r} |f(z)|)$$

(s. [9]) mit  $\sigma_3 \in \{\sigma_3^H, \sigma_3^A, \sigma_3^T, \sigma_3^U, \sigma_3^*, \sigma_3^L\}$  erhält man die in Tabelle 4 dargestellten Abschätzungen (das Minimum wird jeweils für  $r = r_0$  angenommen).

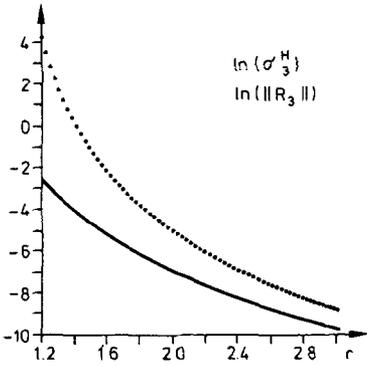


Abb. 1

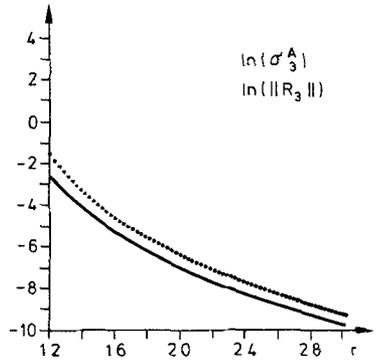


Abb. 2

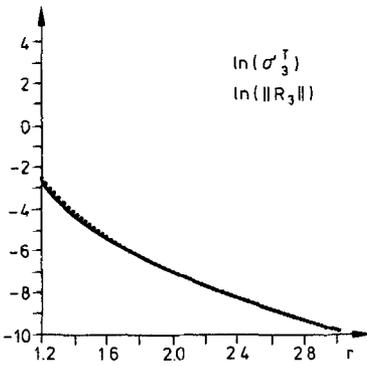


Abb. 3

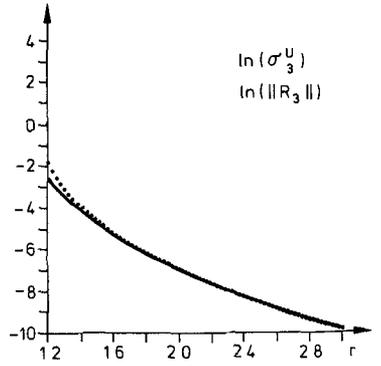


Abb. 4

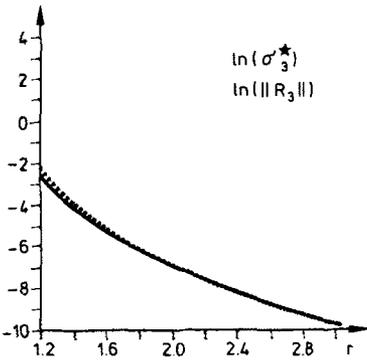


Abb. 5

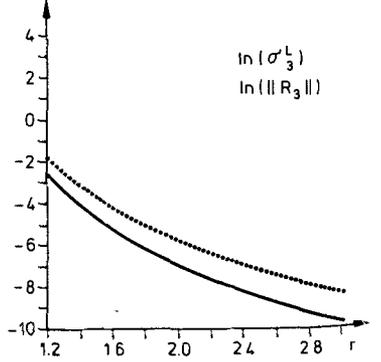


Abb. 6

Tabelle 4

$ f _r \leq \sigma_3 =$	$\sigma_3^H$	$\sigma_3^A$	$\sigma_3^T$	$\sigma_3^U$	$\sigma_3^*$	$\sigma_3^L$
$ f _r$	$5.80 \cdot 10^{-2}$	$1.89 \cdot 10^{-2}$	$1.23 \cdot 10^{-2}$	$1.27 \cdot 10^{-2}$	$1.34 \cdot 10^{-2}$	$4.03 \cdot 10^{-2}$
	$r_0=2.325$	$r_0=2$	$r_0=2$	$r_0=2$	$r_0=2$	$r_0=2$
$\sup_{ z =r}  f(z) $	$3.54 \cdot 10^{-1}$	$9.54 \cdot 10^{-2}$	$6.17 \cdot 10^{-2}$	$6.44 \cdot 10^{-2}$	$6.79 \cdot 10^{-2}$	$1.96 \cdot 10^{-1}$
	$r_0=2.25$	$r_0=1.92$	$r_0=1.9$	$r_0=1.925$	$r_0=1.95$	$r_0=1.85$

2. Sei  $f(x) := \log\left(1 + \frac{x}{2}\right)$  mit der holomorphen Ergänzung  $f(z) = \log\left(1 + \frac{z}{2}\right)$ ,  $f \in X_2$ . Approximiert man  $\int_{-1}^1 \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) dx$  mit der Gauß-Legendre-Formel  $Q_3$ , so beträgt der exakte Fehler  $1.69 \cdot 10^{-4}$ . Die herkömmliche Abschätzung liefert die Fehlerschranke  $1.14 \cdot 10^{-2}$ .  $|f|_r$ ,  $r \in (1, 2]$ , läßt sich durch  $\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \|f\|_{2,2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left( \int_{|z|=2} |f(z)|^2 |dz| \right)^{1/2} = \pi/\sqrt{6} = 1.24$  (s. [9]) abschätzen. Ferner gilt  $|f|_r = |g|_r$  mit

$$g(z) := f(z) - \left\{ \frac{z}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{2}\right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \frac{1}{5} \left(\frac{z}{2}\right)^5 \right\},$$

da  $Q_3$  Exaktheitsgrad 5 hat. Für  $g$  gilt (s. [8])

$$\|g\|_{2,2}^2 = \|f\|_{2,2}^2 - 4\pi \left\{ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \right\},$$

also  $\|g\|_{2,2} = 4.26 \cdot 10^{-1}$ .

Aus

$$|R_3(f)| \leq \inf_{r \in (1, 2]} (\sigma_3(r) |f|_r), \quad |R_3(f)| \leq \sigma_3(2) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \|f\|_{2,2},$$

$$|R_3(f)| \leq \sigma_3(2) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \|g\|_{2,2}$$

mit  $\sigma_3 \in \{\sigma_3^H, \sigma_3^A, \sigma_3^T, \sigma_3^U, \sigma_3^*, \sigma_3^L\}$  erhält man die in Tabelle 5 dargestellten Abschätzungen.

Tabelle 5

$ f _r \leq \sigma_3 =$	$\sigma_3^H$	$\sigma_3^A$	$\sigma_3^J$	$\sigma_3^U$	$\sigma_3^*$	$\sigma_3^L$
$ f _r$	$1.27 \cdot 10^{-3}$	$2.95 \cdot 10^{-4}$	$1.93 \cdot 10^{-4}$	$1.99 \cdot 10^{-4}$	$2.09 \cdot 10^{-4}$	$6.29 \cdot 10^{-4}$
	$r_0=2$	$r_0=2$	$r_0=2$	$r_0=2$	$r_0=2$	$r_0=2$
$\frac{\ f\ _{2,2}}{\sqrt{4\pi}}$	$9.76 \cdot 10^{-3}$	$2.28 \cdot 10^{-3}$	$1.48 \cdot 10^{-3}$	$1.53 \cdot 10^{-3}$	$1.61 \cdot 10^{-3}$	$4.84 \cdot 10^{-3}$
$\frac{\ g\ _{2,2}}{\sqrt{4\pi}}$	$3.24 \cdot 10^{-3}$	$7.56 \cdot 10^{-4}$	$4.92 \cdot 10^{-4}$	$5.09 \cdot 10^{-4}$	$5.35 \cdot 10^{-4}$	$1.61 \cdot 10^{-3}$

Diese Arbeit ist eine gekürzte Fassung des ersten Teils meiner Dissertation [1]. Herrn Prof. Dr. G. Hämmerlin danke ich herzlich für seine Unterstützung während deren Anfertigung. Mein Dank gilt auch der Alexander S. Onassis-Stiftung, die mich während der ersten beiden Jahre meines Promotionsstudiums mit einem Stipendium unterstützte.

## Literatur

1. Akrivis, G.: Fehlerabschätzungen bei der numerischen Integration in einer und mehreren Dimensionen. Dissertation, Universität München 1983
2. Braß, H.: Quadraturverfahren. Göttingen, Zürich: Vandenhoeck und Ruprecht 1977
3. Braß, H.: Monotonie bei den Quadraturverfahren von Gauß und Newton-Cotes. Numer. Math. **30**, 349–354 (1978)
4. Chawla, M.M.: On Davis's method for the estimation of errors of Gauss-Chebyshev quadratures. SIAM J. Numer. Anal. **6**, 108–117 (1969)
5. Copson, E.T.: An Introduction to the theory of functions of a complex variable. Oxford: Clarendon Press 1935
6. Davis, P.J., Rabinowitz, P.: Methods of numerical integration. New York, San Francisco, London: Academic Press 1975
7. Gröbner, W., Hofreiter, N. (Hrsg.): Integraltafel. II. Teil, 3., verb. Aufl. Wien: Springer 1961
8. Hämmerlin, G.: Über ableitungsfreie Schranken für Quadraturfehler. II. Ergänzungen und Möglichkeiten zur Verbesserung. Numer. Math. **7**, 232–237 (1965)
9. Hämmerlin, G.: Fehlerabschätzungen bei numerischer Integration nach Gauß. In: Methoden und Verfahren der mathematischen Physik, Bd. 6 (B. Brosowski, E. Martensen, Hrsg.), S. 153–163. Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut 1972
10. Rivlin, T.J.: Polynomials of the best uniform approximation to certain rational functions. Numer. Math. **4**, 345–349 (1962)
11. Rivlin, T.J.: The Chebyshev polynomials. New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley and Sons 1974
12. Szegő, G.: Orthogonal polynomials. New York: Amer. Math. Soc. 1939

Eingegangen am: 28. Juli 1983 / 27. Dezember 1983