

Experimentelle und theoretische Untersuchungen von Nichtgleichgewichtseffekten an stationären Heliumplasmen unter Normaldruck

J. UHLENBUSCH, E. FISCHER und J. HACKMANN

I. Physikalisches Institut der RWTH, Aachen

Eingegangen am 23. Juni 1970

Experimental and Theoretical Investigations of Non-Equilibrium-Effects in Stationary Helium Plasmas under Normal Pressure

Measurements and calculations of temperature, densities and field-strength-current-characteristics of cascaded arcs (0.15 and 0.3 cm radius) burning in Helium under normal pressure are reported. It is shown that the evaluation of measured arc data assuming Saha equilibrium is not in agreement with the detailed solution of the balance equations. The temperature of electrons and heavy particles as well as the density of electrons and neutrals must be determined as independent variables from the rate equation for ground state neutrals, from the equation of state, and from the energy balance of the electron gas and of the total plasma. The latter equation can be replaced by relations between measured intensities and the state variables. The deviations from Saha equilibrium are mainly caused by diffusion of neutral particles into the arc core and of charged particles into the opposite direction. The theoretical results derived from the balance equations are compared with spectroscopic line intensity and line width measurements. The agreement is good even if the equilibrium conditions are strongly violated.

I. Einleitung

Zur Erzeugung und Diagnostik von Plasmen unter Normaldruck mit Elektronendichten um $10^{17}/\text{cm}^3$ und Temperaturen um 20000°K hat sich der Maeckersche Kaskadenbogen bewährt^{1,2}. Der Kaskadenbogen ist für diese Untersuchungen deshalb so gut geeignet, weil bei stationärem Betrieb und richtiger Abmessung des Entladungsgefäßes sich ein stabiles Plasma von zylinder-symmetrischer Geometrie ausbildet. Dadurch werden sowohl die Diagnostik als auch die theoretische Beschreibung des Plasmazustandes sehr vereinfacht.

Zur experimentellen Erfassung von Transport- und Strahlungsvorgängen interessiert neben Strom und Feldstärke die Verteilung der

1 Maecker, H.: Z. Naturforsch. **11a**, 457 (1956).

2 Uhlenbusch, J., Hackmann, J.: Report HMP 119, RWTH Aachen (1968).

Zustandsgrößen Dichte und Temperatur. Diese Zustandsgrößen werden am Bogenplasma meistens indirekt gemessen. Das soll hier heißen, daß man eine temperatur- oder dichteabhängige Größe mißt und mit Hilfe bestimmter theoretischer Annahmen zu den Zustandsgrößen selbst übergeht. Die wesentliche Annahme, die den meisten mitgeteilten Messungen zugrunde gelegt wird, ist, daß Saha-Gleichgewicht zur Elektronentemperatur herrscht, d.h. kleine Bereiche der Entladung sind thermodynamische Systeme, und mit Hilfe der Saha-Gleichung läßt sich die Konzentration der verschiedenen Teilchensorten berechnen.

Man findet jedoch in der Literatur³⁻⁸ einige Hinweise dafür, daß diese Annahmen die Verhältnisse zu stark vereinfachen. Im folgenden soll deshalb theoretisch und experimentell untersucht werden, wie große Abweichungen vom Gleichgewichtsverhalten in Heliumbögen auftreten und durch welche detaillierten Prozesse sie bedingt sind. Es wurde eine Heliumentladung gewählt, weil hier die Abweichungen vom Gleichgewicht am größten sind. In einer folgenden Arbeit werden die Gase Neon, Argon und Krypton behandelt, die weniger vom Gleichgewicht abweichen.

Zur Erzeugung des Lichtbogenplasmas wurde ein Kaskadenbogen benutzt, wie er in ⁹ näher beschrieben ist.

II. Physikalische Eigenschaften des Lichtbogenplasmas

Messungen der Strom-Feldstärke-Charakteristik, der Linienintensitäten und der Kontinuumsintensität in Heliumbögen mit verschiedenen Radien unter Normaldruck zeigen Abweichungen vom Ähnlichkeitsverhalten. Wenn man z.B. das Produkt $E \cdot R$ über I/R aufträgt, das für Gleichgewichtsbögen bei fehlender Abstrahlung einem Ähnlichkeitsgesetz gehorchen sollte, so erhält man für Bögen mit unterschiedlichem Radius R drastisch verschiedene Kurven^{2,10,3}. Obwohl diese Bögen nur schwach abstrahlen, ist das Ähnlichkeitsverhalten stark gestört, was man nur durch Abweichungen vom Gleichgewicht deuten kann.

Weitere Hinweise auf Abweichungen vom Gleichgewicht erhält man, wenn man aus absolut gemessenen Linienintensitäten mit Hilfe der

3 Pytte, A., Winsor, N. K.: VII. Int. Conf. on Phenom. in Ionized Gases, Belgrad (1965).

4 Bott, J. F.: Phys. Fluids **9**, 1540 (1966).

5 Krysmanski, K. H.: Ann. Physik **15**, 162 (1965).

6 Mewe, R.: Brit. J. Appl. Phys. **18**, 107 (1967).

7 Petschek, H., Byron, S.: Ann. Phys. (N.Y.) **1**, 270 (1957).

8 Fischer, E., Hackmann, J., Uhlenbusch, J.: Z. Naturforsch. **24a**, 1427 (1969); — IX. Int. Conf. on Phenom. in Ionized Gases, Bukarest (1969).

9 Uhlenbusch, J., Gieres, G.: Z. Angew. Phys. **27**, 66 (1969).

10 Emmons, H. W.: Phys. Fluids **10**, 1125 (1967).

Sahagleichung die Elektronentemperaturverteilung ausrechnet. Es ergibt sich dann eine fast konstante Verteilung der Temperatur über den Radius, die unrealistisch ist.

Schließlich weichen Werte der elektrischen Leitfähigkeit, die aus Feldstärke- und Intensitätsmessungen erhalten wurden, recht erheblich von den als zuverlässig geltenden theoretischen Gleichgewichtswerten ab⁸. Eine weitere Stütze der Nichtgleichgewichtsannahme ist darin zu sehen, daß Elektronendichten, die mit Hilfe der Linienverbreiterungstheorie¹¹ bestimmt wurden, mit den Sahawerten nicht übereinstimmen.

Man kann alle diese Erscheinungen nur dadurch erklären, daß man neben dem großen Unterschied zwischen der Temperatur der schweren Teilchen und der Elektronen die Diffusion von Elektronen aus dem heißen Bogeninneren zur Bogenwandung hin mit berücksichtigt (s. hierzu auch^{12, 13}). Durch die Diffusion der Elektronen ist die Elektronendichte in der Bogenachse niedriger und in den äußeren Bogenbereichen höher als im Sahagleichgewicht. Ein umgekehrtes Verhalten zeigt die Verteilung der neutralen Atome.

Außer der Störung des Gleichgewichts durch die Diffusion treten Störungen der Besetzungszahlen einzelner Energieniveaus auf. Wegen der vergleichsweise niedrigen Elektronendichte, des geringen Einflusses der Strahlungsprozesse und der kleinen Stoßanregungsquerschnitte ist der Grundzustand der neutralen Atome überbesetzt, und deshalb sind Temperaturbestimmungen, die Teilchendichten aus der Sahaformel heranziehen, mit Fehlern behaftet.

Das vom Gleichgewicht abweichende Elektronendichteprofil führt dazu, daß auch die Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit verändert wird. Deshalb versagt auch eine in⁸ beschriebene Methode zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit in einem Heliumbogen.

Ein quantitatives Verständnis dieser Vorgänge ist nur möglich, wenn man gleichzeitig eine Lösung der Kontinuitätsgleichung, der Zustandsgleichung, der Energiebilanz für das gesamte Plasma und für das Elektronengas allein durchführt. Ehe diese angegeben wird, sollen einige hier benutzte Voraussetzungen zusammengestellt werden.

Wegen der hohen Stoßfrequenz der Elektronen untereinander besitzen die Elektronen eine Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung mit der lokalen Temperatur T_e . In gleicher Weise haben die schweren Teilchen eine lokal definierte Temperatur T_s (s. hierzu die Diskussion in¹⁴, S. 17).

11 Griem, H. R.: Plasma spectroscopy. New York: McGraw-Hill Book Company 1964.

12 Bergstedt, K.: Z. Naturforsch. **24a**, 299 (1969).

13 Drawin, H.-W.: Z. Physik **228**, 99 (1969).

14 Mewe, R.: Rijnhuizen Report 69-50, Rijnhuizen-Jutphaas (1969).

Da der Wirkungsquerschnitt für die Anregung des Atoms vom Grundzustand in höhere Niveaus klein ist, überwiegen abregende Prozesse, d.h. der Grundzustand ist im allgemeinen überbesetzt.

Angeregte Atome stehen dagegen in starker Stoßwechselwirkung mit den freien Elektronen. Für eine Elektronentemperatur von 20000 °K und eine Elektronendichte von ca. $10^{16}/\text{cm}^3$ liefern die bekannten Abschätzungen^{11,13,15,16}, daß bis auf den Grundzustand alle Niveaus des Heliums thermisch populiert sind in bezug auf die nächst höhere Ionisationsstufe. Außerdem sind die Diffusionsquerschnitte der Heliumatome im Grundzustand sehr klein, d.h. Gewinn und Verlust von Atomen durch Diffusion in einem Volumenelement liefern in der Ratengleichung einen großen Beitrag. Gewinn und Verlust von Teilchen im Grundzustand durch Stoß und Strahlung treten dagegen zumindest für Helium in den Hintergrund. Da sich nur wenige Promille der neutralen Atome nicht im Grundzustand befinden, werden die sich einstellenden Dichten im wesentlichen durch das Verhalten der Atome im Grundzustand bestimmt.

In den später verwendeten Energiebilanzen treten Transportkoeffizienten auf, die gesondert berechnet werden müssen. Bereits publizierte Daten kann man nicht benutzen, da sie unter der Annahme thermodynamischen Gleichgewichts hergeleitet wurden. Dieser Fragenkomplex ist in¹⁷ behandelt und soll deshalb hier nicht weiter erörtert werden.

III. Die Grundgleichungen

Während unter der Annahme von lokalem thermodynamischem Gleichgewicht bei gegebenem Druck die Temperatur als einzige Unbekannte auftritt, hat man mit den oben gemachten Voraussetzungen die vier unbekanntten Größen: Temperatur (T_e) und Dichte (n_e) der Elektronen resp. Ionen (T_s, n^+) und der Neutralteilchen (T_s, n_a). Diese Variablen werden durch folgende Gleichungen verknüpft:

a) Die Ratengleichung

Neutrale Heliumatome im Grundzustand können durch folgende Prozesse gebildet oder vernichtet werden:

1. Die Anregung von Heliumatomen im Grundzustand durch Elektronenstoß und der Umkehrprozeß führen zu einer Erzeugungs- bzw.

15 Wilson, R.: Plasma in space and in the laboratory. Proceedings of the Esrin Study Group, Frascati/Rome (1966).

16 McWhirter, R. W. P.: Plasma diagnostic techniques. New York: Huddlestone and Leonard Academic Press 1965.

17 Preuss, E.: Dissertation RWTH Aachen (1970).

Vernichtungsrate von der Größe

$$\sum_{p>0}^{p_{\max}} (n_p \cdot n_e Q_{p0} - n_0 \cdot n_e \cdot Q_{0p}). \quad (3.1)$$

Hierbei bedeuten n_0 und n_p die Neutralteilchendichten im Grundzustand bzw. im Zustand p . Q_{0p} ist der Ratenkoeffizient für Anregung aus dem Grundzustand in den Zustand p . Q_{p0} der Ratenkoeffizient für den Umkehrprozeß. Die Summation erstreckt sich über alle angeregten diskreten Zustände.

2. Ionisierende Stöße und ihr Umkehrprozeß, Dreierstoßrekombination, ergeben eine Nettoproduktion von Atomen im Grundzustand von der Größe

$$n_e^3 Q_{c0} - n_0 n_e Q_{0c}, \quad (3.2)$$

wobei Q_{0c} der Ratenkoeffizient für Ionisation und Q_{c0} der Ratenkoeffizient für die Dreierstoßrekombination ist (für $n_e = n^+$).

3. Im Falle optisch dünner Strahlung ist die Produktion von Atomen im Grundzustand durch Strahlungsprozesse durch

$$\sum_{p>0}^{p_{\max}} n_p A_{0p} \quad (3.3)$$

gegeben, wo A_{p0} die Übergangswahrscheinlichkeit vom p -ten Niveau in den Grundzustand ist. Die Strahlung wird jedoch absorbiert, und die effektive Besetzungsrate ist kleiner, als aus der Summe (3.3) folgt. Führt man einen Reduktionskoeffizienten g_{0p} mit $0 \leq g_{0p} \leq 1$ ein, dann gilt für die effektive Übergangswahrscheinlichkeit $A_{0p}^* = A_{0p} \cdot g_{0p}$. Der sog. Verdünnungsfaktor g_{0p} wurde in¹⁸ eingeführt, eine Diskussion dieses Problemkreises findet man in¹⁴.

4. Photoionisation und Photorekombination ergeben, wenn man auch hier die Absorption durch einen Verdünnungsfaktor g_{0c} in Rechnung stellt, die effektive Rekombinationsrate

$$n_e^2 \cdot R_{c0} \cdot g_{0c}, \quad (3.4)$$

wo R_{c0} der Ratenkoeffizient für Photorekombination ist.

5. Die Wechselwirkung zwischen neutralen Atomen ist für die Teilchenproduktion im vorliegenden Elektronendichtebereich ohne Bedeutung.

Die zeitliche Änderung der Dichte von Teilchen im Grundzustand durch Stoß und Strahlung lautet jetzt nach Addition der Beiträge (3.1)

¹⁸ Holstein, T.: Phys. Rev. **72**, 1212 (1947); — Phys. Rev. **83**, 1159 (1951).

bis (3.4)

$$\left(\frac{\partial n_0}{\partial t}\right)_{\text{Stoß Strahlung}} = \left\{ \sum_{p>0}^{p_{\max}} Q_{0p} + Q_{0c} \right\} n_e^3 \left\{ \left(\frac{n_{0s}}{n_e^2} - \frac{n_0}{n_e^2} \right) + \frac{A}{n_e} \right\}, \quad (3.5)$$

wobei n_{0s} und n_{es} die Sahawerte der Dichte der Teilchen im Grundzustand und der Elektronendichte bedeuten. Die Ratenkoeffizienten für den Hin- und Rückprozeß wurden in (3.5) mit Hilfe des Prinzips des detaillierten Gleichgewichts miteinander verknüpft. Für A erhält man

$$A = \frac{R_{c0} g_{0c} + \sum_{p>0}^{p_{\max}} B_p A_{0p} g_{0p}}{Q_{0c} + \sum_{p>0}^{p_{\max}} Q_{0p}}, \quad (3.6)$$

wobei B_p gegeben ist durch die Formel

$$B_p = \left(\frac{n_p}{n_e} \right)_{\text{Saha}}. \quad (3.7)$$

Der Quotient A ist somit das Verhältnis der Strahlungsrekombinationsrate zur Stoßanregungsrate.

Die Gesamtproduktionsrate ist mit dem Diffusionsstrom in radialer Richtung (j_{0r}) durch die stationäre Kontinuitätsgleichung

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r j_{0r} = \left(\frac{\partial n_0}{\partial t} \right)_{\text{Stoß Strahlung}} \quad (3.8)$$

verknüpft. Der Diffusionsstrom j_{0r} läßt sich mit Hilfe des Wirkungsquerschnittes für Umladung $Q_{ia}^{(1,1)}(T_s)$ folgendermaßen schreiben¹⁷

$$j_{0r} = - \frac{3k}{8(n_a + n_e)} \frac{\frac{\partial}{\partial r} (n_a T_s)}{Q_{ia}^{(1,1)}(T_s) \sqrt{m_s k T_s / \pi}}. \quad (3.9)$$

Wegen des geringen Unterschiedes zwischen der Gesamtdichte der neutralen Heliumatome n_a und der Dichte der Heliumatome im Grundzustand n_0 kann man n_0 praktisch n_a gleichsetzen. Der genaue Zusammenhang ist gegeben durch

$$n_0 = n_a - n_e^2 (Z-1) B_0; \quad B_0 = \left(\frac{n_0}{n_e} \right)_{\text{Saha}}, \quad (3.10)$$

wobei Z die Zustandssumme des neutralen Heliums ist.

b) Die Zustandsgleichung

Als weitere Beziehung zwischen den Unbekannten T_e , T_s , n_a und n_e steht die Zustandsgleichung in Verbindung mit der Quasineutralitätsbedingung zur Verfügung. Sie lautet

$$\frac{p}{k} = n_a T_s + n_e (T_s + T_e). \quad (3.11)$$

c) Die Energiebilanz des Gesamtplasmas

Unter Berücksichtigung der Ohmschen Aufheizung des Plasmas, des Wärmetransportes, der Abstrahlung sowie der Absorption der Strahlung lautet die Energiebilanz in Polarkoordinaten

$$\sigma E^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r q_r + \iint (\varepsilon_v - \kappa_v I_v) d\nu d\Omega \quad (3.12)$$

(ε_v = Emissionskoeffizient, κ_v = Absorptionskoeffizient, I_v = Intensität). Der radiale Wärmestrom wird durch die Transportkoeffizienten ausgedrückt

$$q_r = -\kappa_K \frac{\partial T_s}{\partial r} + \kappa_D \frac{\partial}{\partial r} (n_a T_s). \quad (3.13)$$

Hier wurde vereinfachend $\partial T_e / \partial r \approx \partial T_s / \partial r$ gesetzt, die Transportkoeffizienten sind in ¹⁷ und ¹⁹ näher erläutert. Sie hängen von allen vier Unbekannten ab.

d) Die Energiebilanz des Elektronengases

Eine weitere Beziehung zwischen den Variablen stellt die Energiebilanz für das Elektronengas dar.

$$\frac{E^2 e^2}{m_e (v_{\text{elast}} + v_{\text{inelast}})} = \frac{2 m_e}{m_s} \frac{3}{2} k (T_e - T_s) v_{\text{elast}} - \frac{E_i}{n_e} \left(\frac{\partial n_0}{\partial t} \right)_{\text{Stoß Strahlung}}. \quad (3.14)$$

Die Wärmeleitung der Elektronen ist hier vernachlässigt, da dieser Prozeß im vorliegenden Bereich keine Rolle spielt¹⁷. Außerdem ist vereinfachend angenommen worden, daß bei jedem inelastischen Stoß genau die Ionisationsenergie vom Elektron auf das Atom übertragen wird. Da die Linienstrahlung in den Grundzustand zur Besetzungsdichte praktisch nichts beiträgt, ist die Änderung der Anzahl der Neutralteilchen im Grundzustand (s. Gl. (3.5)) dem Betrag nach gleich der Anzahl der

¹⁹ Uhlenbusch, J.: Report HMP 125, RWTH Aachen (1969).

pro Zeiteinheit inelastisch stoßenden Elektronen, also

$$v_{\text{inelast}} \cdot n_e \approx - \left(\frac{\partial n_0}{\partial t} \right)_{\substack{\text{Stoß} \\ \text{Strahlung}}} \quad (3.15)$$

Die in den Abschnitten a bis d hergeleiteten Formeln bilden ein vollständiges Gleichungssystem zur Ermittlung der Temperaturen und Dichten im Bogen. Man kann mit ihrer Hilfe neben der radialen Temperatur- und Dichteverteilung auch die elektrische Feldstärke ermitteln sowie die Intensität der Linien- und der Kontinuumsstrahlung. Falls man jedoch die komplizierte Energiebilanz umgehen will, kann man an ihrer Stelle eine andere Temperatur-Dichte-Beziehung benutzen. Hierfür kommen vor allem experimentell ermittelte Verteilungen der Elektronendichte oder gemessene Absolutintensitäten von Spektrallinien in Betracht. Die Linienintensität ist nach der Gleichung

$$i_L = \frac{A_{qp}}{4\pi} l h v_{qp} n_p \quad (3.16)$$

der Dichte der angeregten Atome im oberen Zustand p proportional und durch Gl. (3.7) mit der Elektronentemperatur und der Elektronendichte verknüpft. In dieser Formel ist A_{qp} die Übergangswahrscheinlichkeit für einen Strahlungsübergang vom Niveau p zum Niveau q , l ist die Dicke der vom Licht durchlaufenen Plasmastrecke und v_{qp} die beim Übergang abgestrahlte Frequenz.

Eine gleichzeitige Lösung der Gleichungssysteme (3.8), (3.11), (3.12), (3.14) und (3.8), (3.11), (3.14), (3.16) und ein Vergleich der Ergebnisse wurde bis jetzt nur für Heliumbögen durchgeführt. Die Edelgase Neon, Argon und Krypton wurden nur nach der zweiten Methode untersucht²⁰, da die Transportkoeffizienten für Nichtgleichgewicht noch nicht vorliegen.

Die numerischen Werte der verschiedenen Querschnitte und Ratenkoeffizienten wurden durch Mittelung mit Hilfe einer Maxwellverteilung erhalten. Zahlenwerte findet man in¹⁷ und²⁰.

Der Wirkungsquerschnitt für Anregung und Ionisation von Heliumatomen im Grundzustand durch Elektronenstoß ist aus zahlreichen experimentellen Arbeiten bekannt²¹⁻²⁶.

20 Uhlenbusch, J., Fischer, E., Hackmann, J.: Report HMP 128, RWTH Aachen (1970).

21 Maier-Leibnitz, H.: Z. Physik **95**, 499 (1935).

22 Fleming, R. J., Higginson, G. S.: Proc. Phys. Soc. (London) **84**, 531 (1964).

23 Schulz, G. J., Fox, R. E.: Phys. Rev. **106**, 41 (1957).

24 Schulz, G. J.: Phys. Rev. **112**, 150 (1958); — Phys. Rev. **116**, 1141 (1959).

25 Schaper, M., Scheibner, H.: Beitr. zur Plasmaphysik **9**, 45 (1969).

26 Lotz, W.: Report IPP 1/50, Inst. f. Plasmaphys. Garching (1966).

Messungen des Absorptionsquerschnitts für die Edelgase findet man in²⁷. Geht man vom Absorptionsquerschnitt zum Rekombinationsquerschnitt über, so erhält man speziell für Helium in guter Näherung

$$R_{c0}(T_e) = \frac{1,791 \cdot 10^{-11}}{T_e^{1/2}} \left[\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}} \right]. \quad (3.17)$$

In die Ratengleichung geht weiterhin der Wirkungsquerschnitt für Umladung ein. Der energieabhängige Wirkungsquerschnitt ist in²⁸⁻³⁰ mitgeteilt. Nach Mittelung mit einer Maxwellverteilung der neutralen Atome erhält man den temperaturabhängigen Querschnitt²⁰.

Ein wesentlich mühsamerer Weg ist die Berechnung der zahlreichen Transportquerschnitte, die man zur Bestimmung der Transportkoeffizienten benötigt. Für ein Gleichgewichtsplasma findet man diese Rechnungen in³¹. Hier wurden die Ergebnisse für ein Zwei-Temperatur-Plasma benutzt (vgl. hierzu¹⁷) mit Teilchendichten, die von der Sahabesetzung abweichen.

IV. Zur mathematischen Behandlung des Problems

Die Lösung der Gln. (3.8), (3.11), (3.12), (3.14) resp. (3.8), (3.11), (3.14), (3.16) führt mathematisch gesehen auf ein kompliziertes nicht-lineares Randwertproblem. Betrachtet wird zuerst das Gleichungssystem (3.8), (3.11), (3.12), (3.14). Eine Integration von Gl. (3.8) von der Achse bis zu einem Aufpunkt r liefert den Diffusionsstrom. Mit Hilfe von Gl. (3.9) und der Zustandsgleichung kann man nach einer weiteren Integration, die jetzt jedoch vom Rand des Bogens $r=R$ bis zum Aufpunkt führt, die Beziehung herleiten

$$n_e(\rho) = n_e(1) \frac{T_s(1) + T_e(1)}{T_s(\rho) + T_e(\rho)} + \frac{8}{3} \sqrt{\frac{m_s}{\pi \cdot k}} \frac{R^2}{T_s(\rho) + T_e(\rho)} \cdot \int_1^\rho \frac{Q_{ia}^{(1,1)}(T_s)}{\sqrt{T_e}} \left(\frac{p}{k} - n_e T_e \right) \frac{d\rho''}{\rho''} \int_0^{\rho''} \left(\frac{\partial n_0}{\partial t} \right)_{\substack{\text{Stoß} \\ \text{Strahlung}}} \rho' d\rho', \quad (4.1)$$

wobei $\rho = r/R$ der reduzierte Bogenradius ist. $n_e(1)$, $T_s(1)$ und $T_e(1)$ sind die Wandwerte der Elektronendichte, der Temperatur der schweren Teilchen

27 Marr, G. V.: Photoionisation processes in gases. New York-London: Academic Press 1967.

28 Dalgarno, A.: Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **250**, 426 (1958).

29 McDaniel, E. W.: Collision phenom. in ionized gases. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1964.

30 Firsov, O.: Soviet Phys. JETP **21**, 1001 (1951).

31 Devoto, R. S., Li, C. P.: J. Plasma Physics **2**, 17 (1968).

und der Temperatur der Elektronen. Für die mathematische Auswertung dieser Formel ist es sinnvoll, den Bogenradius R zu eliminieren, indem man den Wert der Elektronendichte in der Achse, $n_e(0)$, einführt. Dann folgt die Beziehung

$$n_e(\rho) = \left\{ n_e(1) \cdot [T_s(1) + T_e(1)] + [n_e(0) \cdot (T_s(0) + T_e(0)) - n_e(1) \cdot (T_s(1) + T_e(1))] \cdot \frac{\int_0^1 \frac{Q_{ia}^{(1,1)}(T_s)}{\sqrt{T_s}} \left(\frac{p}{k} - n_e T_e \right) \frac{d\rho}{\rho} \int_0^\rho \left(\frac{\partial n_0}{\partial t} \right)_{\text{Stoß Strahlung}} \rho' d\rho'}{\int_0^1 \frac{Q_{ia}^{(1,1)}(T_s)}{\sqrt{T_s}} \left(\frac{p}{k} - n_e T_e \right) \frac{d\rho}{\rho} \int_0^\rho \left(\frac{\partial n_0}{\partial t} \right)_{\text{Stoß Strahlung}} \rho' d\rho'} \right\} \cdot \frac{1}{T_e(\rho) + T_s(\rho)}. \quad (4.2)$$

Der Bogenradius ergibt sich zu

$$R^2 = \frac{n_e(0) \cdot [T_s(0) + T_e(0)] - n_e(1) \cdot [T_s(1) + T_e(1)]}{\frac{8}{3} \sqrt{\frac{m_s}{\pi \cdot k}} \int_0^1 \frac{Q_{ia}^{(1,1)}(T_s)}{\sqrt{T_s}} \left(\frac{p}{k} - n_e T_e \right) \frac{d\rho}{\rho} \int_0^\rho \left(\frac{\partial n_0}{\partial t} \right)_{\text{Stoß Strahlung}} \rho' d\rho'}. \quad (4.3)$$

Der zweite Schritt besteht darin, daß man von der Achse her die Energiebilanz einmal integriert. Wieder in dimensionslosen Koordinaten angeschrieben erhält man dann aus (3.12)

$$-\rho \kappa_K \frac{\partial T_s}{\partial \rho} + \rho \kappa_D \frac{\partial(n_a T_s)}{\partial \rho} = E^2 R^2 \int_0^\rho \sigma \rho' d\rho' - R^2 \int_0^\rho u \rho' d\rho' \quad (4.4)$$

unter der Annahme, daß die Strahlung aus optisch dünner Schicht kommt, d. h. $\kappa_v = 0$. Der Diffusionsstrom läßt sich nach (3.8) und (3.9) ausdrücken durch

$$\rho \kappa_D \frac{\partial(n_a T_s)}{\partial \rho} = -\rho \kappa_D \frac{8}{3} R^2 \sqrt{\frac{m_s}{\pi k}} \frac{Q_{ia}^{(1,1)}(T_s)}{\sqrt{T_s}} \left(\frac{p}{k} - n_e T_e \right) \cdot \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \left(\frac{\partial n_0}{\partial t} \right)_{\text{Stoß Strahlung}} \rho' d\rho'. \quad (4.5)$$

Die Integration liefert damit für die Temperatur der schweren Teilchen

$$\begin{aligned}
 T_s(\rho) = T_s(1) - R^2 \left\{ E^2 \int_1^\rho \frac{d\rho'}{\rho' \kappa_K} \int_0^{\rho'} \sigma \rho'' d\rho'' - \int_1^\rho \frac{d\rho'}{\rho' \kappa_K} \int_0^{\rho'} u \rho'' d\rho'' \right. \\
 + \frac{8}{3} \sqrt{\frac{m_s}{\pi k}} \int_1^\rho \frac{\kappa_D}{\kappa_K} \frac{Q_{ia}^{(1,1)}(T_s)}{\sqrt{T_s}} \left(\frac{p}{k} - n_e T_e \right) \\
 \left. \cdot \frac{d\rho'}{\rho'} \int_0^{\rho'} \left(\frac{\partial n_0}{\partial t} \right)_{\text{Stoß}} \rho'' d\rho'' \right\}. \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Die Integration wurde hier vom Rande her ausgeführt. Deshalb taucht der Wandwert der Temperatur der schweren Teilchen $T_s(1)$ auf. Die in dieser Formel auftretende Unbekannte E , die elektrische Feldstärke, läßt sich in Analogie zur Formel (4.1) eliminieren, indem man den Achswert der Temperatur der schweren Teilchen einführt. Man erhält so

$$\begin{aligned}
 R^2 E^2 = \frac{T_s(1) - T_s(0) + R^2 \int_1^\rho \frac{d\rho}{\rho \kappa_K} \int_0^\rho u \rho' d\rho' - R^2 \frac{8}{3} \sqrt{\frac{m_s}{\pi k}} \cdot \int_1^\rho \frac{1}{\rho \kappa_K}} \\
 \cdot \frac{\int_1^\rho \frac{\kappa_D}{\kappa_K} \frac{Q_{ia}^{(1,1)}(T_s)}{\sqrt{T_s}} \left(\frac{p}{k} - n_e T_e \right) \frac{d\rho}{\rho} \int_0^\rho \left(\frac{\partial n_0}{\partial t} \right)_{\text{Stoß}} \rho' d\rho'}{\int_0^\rho \sigma \rho' d\rho' d\rho}. \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

Die Integralgleichungen (4.2) und (4.6) bilden zusammen mit den algebraischen Beziehungen, die aus der Zustandsgleichung und der Energiebilanz der Elektronen folgen, ein vollständiges Gleichungssystem. Das benutzte Lösungsverfahren ist in^{19,20} näher beschrieben.

Der Rechenaufwand ist sehr groß. Für die Berechnung von etwa 20 Punkten auf der Charakteristik bei vorgegebenem Bogenradius benötigte eine CD 6400 etwa eine halbe Stunde*.

Im Prinzip einfacher erweist sich die Lösung der Gln. (3.8), (3.11), (3.14), (3.16) mit Hilfe der schon angegebenen Umformung. Nach formaler Integration und Einschluß der Randbedingungen hat man die Gln. (4.2) und (4.3) zu lösen. Die in Gl. (3.16) eingehende Linienintensität wurde dem Experiment entnommen. Die Übergangswahrscheinlichkeiten findet man in³². Zur Auflösung des Gleichungssystems wurde ein Iterationsverfahren angewandt.

* Wir danken dem Rechenzentrum der Technischen Hochschule Aachen für die Bereitstellung von Maschinenzeit.

32 NBS-Monograph, NSRDS-NBS 4, Vol. 1.

V. Vergleich von experimentellen und theoretischen Ergebnissen

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse mitgeteilt, die für Heliumbögen mit unterschiedlichem Durchmesser und unterschiedlichen Stromstärken als rein theoretische Daten aus den Gln. (3.8), (3.11), (3.12), (3.14) resultieren, und solche, die aus experimentellen Daten nach den Gln. (3.8), (3.11), (3.14), (3.16) berechnet wurden. Zur näheren Erläuterung der bildlichen Darstellung sind im folgenden Lösungen des ersten Gleichungssystems mit „Energiebilanz“ bezeichnet, die nach der zweiten Methode berechneten Ergebnisse tragen dagegen die Bezeichnung „experimentell“. Zur Kontrolle wurde zusätzlich in einigen Fällen die Breite der Wasserstofflinie H_β ausgemessen und nach¹¹ in Elektronendichten umgerechnet. Zur Bestimmung der Linienbreite wurde eine geringe Menge Wasserstoff dem Arbeitsgas beigemischt. Die aus diesen Messungen resultierenden Ergebnisse tragen die Bezeichnung „Linienbreite“.

Fig. 1 zeigt radiale Verteilungen der Elektronen- und Gastemperatur für Heliumbögen mit Stromstärken von 100 und 400 A für einen Bogen-

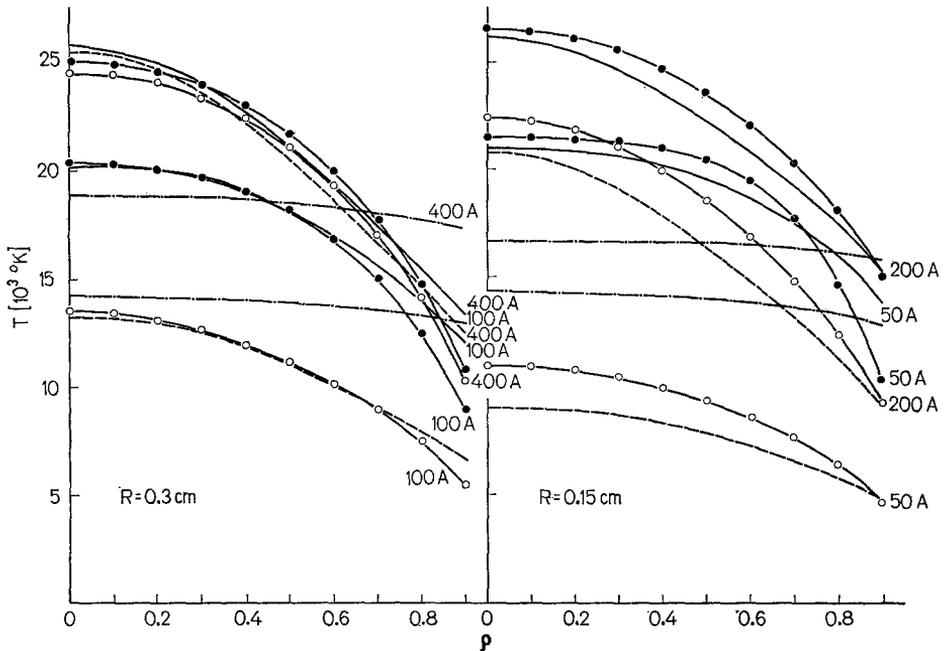


Fig. 1. Temperaturverteilungen in Heliumbögen. --- Saha; —●— T_e , —○— T_s nach Energiebilanz; ——— T_e , - - - - T_s nach Experiment (aus He I 4713 Å für $R=0,15$ cm, $I=50$ und 200 A, $R=0,3$ cm, $I=100$ A; He I 5015 Å für $R=0,3$ cm $I=400$ A)

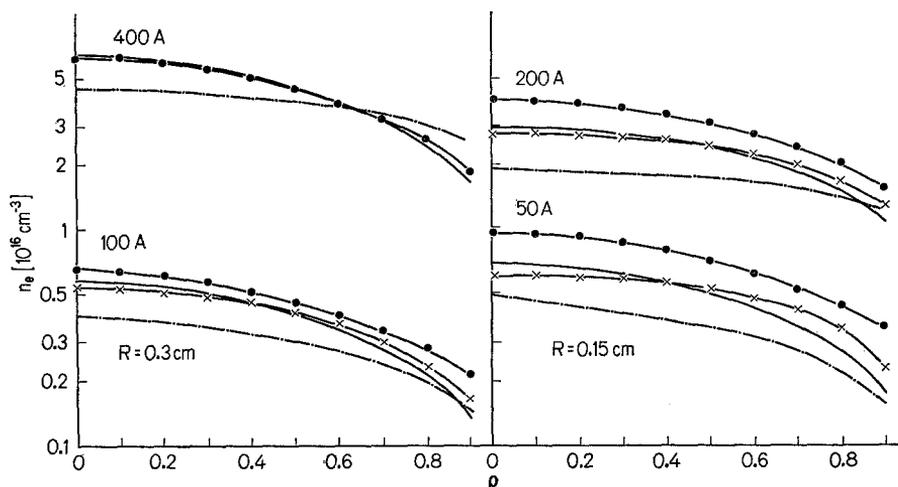


Fig. 2. Elektronendichteprofil in Heliumbögen. $\cdots\cdot$ Saha; $\bullet\text{---}$ Energiebilanz; --- Experiment; $\text{---}\times\text{---}$ aus Linienbreite H_{β}

radius von 0,3 cm und von 50 und 200 A für 0,15 cm Radius. Auffällig ist, daß im niederen Strombereich der Unterschied zwischen den beiden Temperaturprofilen erheblich ist. Mit wachsender Stromstärke nähern sich diese Temperaturen immer mehr einander an. Zum Vergleich sind Temperaturprofile angegeben, die mit Hilfe der üblichen Sahaauswertung erhalten wurden. Sie stimmen in keiner Weise mit den Werten überein, die sich nach den hier beschriebenen Methoden ergeben. Dagegen unterscheiden sich die aus der Energiebilanz und aus dem Experiment erhaltenen Daten nur wenig.

Eine ähnlich gute Übereinstimmung erzielt man, wenn man die radiale Verteilung der Elektronendichte aufzeichnet für die in Fig. 1 gewählten Stromstärken und für die gleichen Bögen. Zur Kontrolle wurden hier (Fig. 2) zusätzlich Werte eingezeichnet, die sich aus der Verbreiterungstheorie ergaben und in guter Übereinstimmung mit Lösungen der Energiebilanz und der experimentellen Methode sind. Geht man dagegen mit Hilfe der in Fig. 1 dargestellten Sahatemperatur zu den Sahawerten der Elektronendichte über, so folgen stark abweichende Verteilungen.

Durch Umzeichnung der Fig. 1 und 2 erhält man ein Diagramm Elektronendichte über Elektronentemperatur (Fig. 3). Diese Darstellung erlaubt einen Vergleich mit den aus der Sahagleichung erhaltenen Werten. Weiterhin ist eine Kurve eingezeichnet, die man als Lösung der

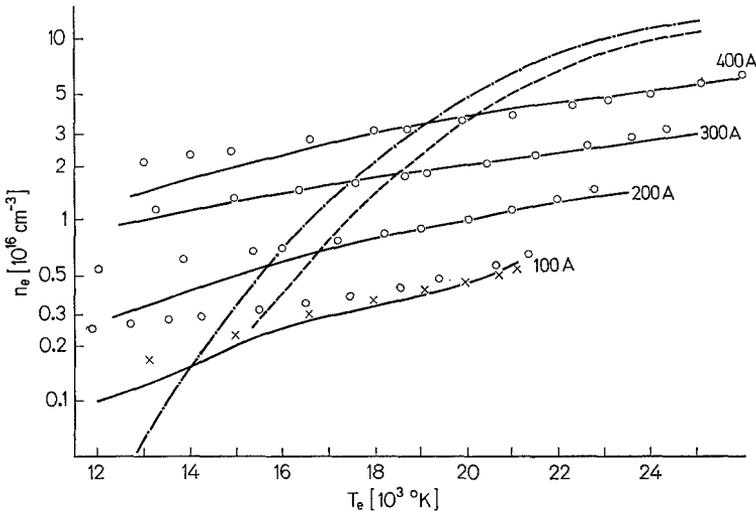


Fig. 3. Elektronendichte als Funktion der Elektronentemperatur (Bogenradius $R=0,3$ cm). --- Saha; — Experiment; \circ Energiebilanz; \times Linienbreite H_β ; ---- Ratengleichung ohne Diffusion

Ratengleichung (3.8) ohne Diffusion ($Q_{ia}^{(1,1)} \rightarrow \infty$) erhält. Man erkennt, daß das Gebiet um die Bogenachse, d. h. der Bereich hoher Temperaturen, gemessen an den Gleichgewichtswerten an Elektronen verarmt. Am Bogenrand ist die Elektronendichte dagegen höher, als nach Saha zu erwarten wäre, da Elektronen an den Rand diffundiert sind. Für die niedrigen Stromstärken ergeben sich in der Bogenmitte Abweichungen von den Sahawerten um fast eine Zehnerpotenz. Mit zunehmender Stromstärke werden jedoch die Gleichgewichtswerte immer besser approximiert.

Wie Fig. 1 zeigt, ist der Unterschied zwischen der Elektronen- und Gastemperatur bei ähnlichen Stromstärken im Bogen mit $0,15$ cm Radius größer als bei $R=0,3$ cm, was auf die höhere Feldstärke zurückzuführen ist. Ein Vergleich der radialen Elektronendichteverteilung aus der theoretischen Rechnung mit den Ergebnissen aus Messungen der Linienintensität zeigt, daß die Elektronendichte sich aus der Energiebilanz systematisch etwas zu hoch ergibt, wohingegen die experimentellen Daten mit den aus der Linienbreite von H_β gewonnenen gut übereinstimmen. Inwieweit die beobachteten Abweichungen auf Fehler in der Intensitätsmessung oder den Einfluß der metastabilen Niveaus zurückzuführen ist, konnte noch nicht geklärt werden.

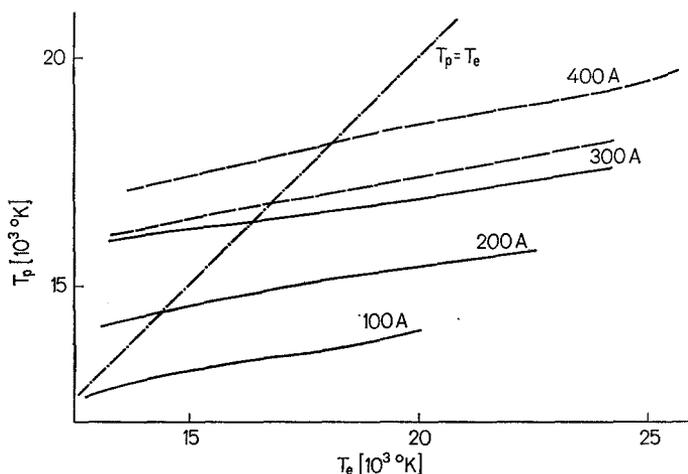


Fig. 4. Anregungstemperatur als Funktion der Elektronentemperatur (Bogenradius $R=0,3$ cm) für die He I-Linien $\lambda=4713$ Å (—) und $\lambda=5015$ Å (-----)

Man kann das Nicht-Gleichgewichtsverhalten durch eine andere Darstellung verdeutlichen. Dazu trägt man die Besetzungstemperatur

$$T_p = \frac{E_p}{k} \ln \frac{g_p n_0}{C g_0 i_L}, \quad (5.1)$$

wie sie sich formal aus dem Boltzmannfaktor ergibt, über der Elektronentemperatur auf. Besetzungsgleichgewicht, auch in bezug auf den Grundzustand der Atome, ist erreicht, wenn diese Anregungstemperatur mit der Elektronentemperatur übereinstimmt. Fig. 4 zeigt, daß in Heliumbögen unter den hier untersuchten Bedingungen kein lokales thermodynamisches Gleichgewicht vorliegt, die relativen Abweichungen werden jedoch mit zunehmendem Bogenstrom geringer. Auffällig ist, daß am Bogenrand die Anregungstemperatur über der Sahatemperatur liegt. Als Erklärung bietet sich an, daß die durch den Diffusionsprozeß überhöhte Elektronendichte eine höhere Stoßrate herbeiführt, als sich bei der wirklich vorhandenen Elektronentemperatur unter Gleichgewichtannahme einstellen würde.

Es gibt eine weitere Kontrolle, die die hier entwickelte Theorie stützen kann. Dazu werden in Fig. 5 berechnete und gemessene Stromfeldstärke-Charakteristiken miteinander verglichen, und zwar wiederum für Bögen mit dem Radius $R=0,15$ und $0,3$ cm. Die Auswertung der Bilder zeigt, daß die beste Übereinstimmung mit den Experimenten durch

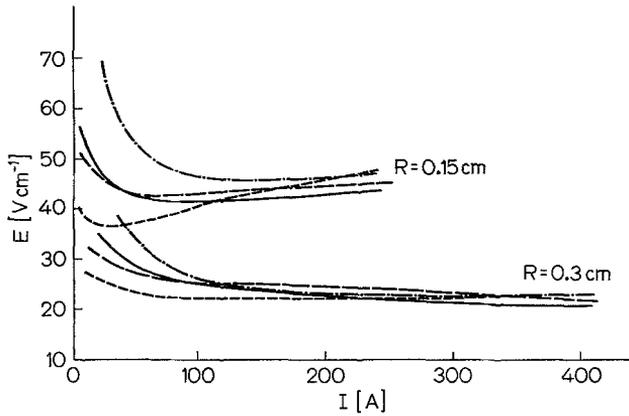


Fig. 5. Strom-Feldstärke-Charakteristiken von Heliumbögen. — Experiment; Energiebilanz: --- mit Diffusion, ---- $T_e \neq T_s$ ohne Diffusion, - · - · Saha-Gleichgewicht

Berücksichtigung der Diffusion erzielt werden konnte. Feldstärkewerte, die unter der Annahme vollständigen Gleichgewichts berechnet wurden, sowie Daten, die ohne Diffusion hergeleitet wurden, zeigen besonders für kleinere Stromstärken erhebliche Abweichungen. Es sei noch darauf hingewiesen, daß man durch Berücksichtigung der inelastischen Stöße, besonders für den kleineren Bogenradius, die Ergebnisse der Rechnung verbessert. Im allgemeinen wird die Strom-Feldstärke-Charakteristik jedoch nicht sehr stark durch die hier diskutierten Effekte beeinflusst.

VI. Zusammenfassung

Die Auswertung der experimentellen Ergebnisse hat gezeigt, daß die Annahme von lokalem thermodynamischem Gleichgewicht für Heliumbögen im hier betrachteten Parameterbereich zu nichtkonsistenten Resultaten führt. Einmal ergeben verschiedene Meßmethoden unterschiedliche Temperatur- und Dichteprofile, zum anderen führt die Auswertung von Messungen an Bögen mit zwei verschiedenen Radien zu stark differierenden Werten der Transportkoeffizienten. Außerdem lassen sich mit den von der Gleichgewichtstheorie her bekannten Materialfunktionen weder die gemessenen Temperatur- und Dichteprofile noch die Strom-Feldstärke-Charakteristiken richtig ausrechnen. Alle diese Diskrepanzen können weitgehend beseitigt werden, wenn man die Diffusion von Neutralteilchen zur Bogenmitte und entsprechend von Elektronen und Ionen zum Rand berücksichtigt. Im allgemeinen genügt

es, wenn man nur für die Atome im Grundzustand eine vom Gleichgewicht abweichende Besetzungsdichte annimmt, die sich aus einer Ratengleichung unter Berücksichtigung der Diffusion ermitteln läßt. Die angeregten Zustände des Atoms befinden sich dagegen mit den Ionen und Elektronen im Gleichgewicht. Diese Abweichungen müssen auch bei der Berechnung der Transportkoeffizienten berücksichtigt werden.

Wir danken Frau Dr. L. Detloff für ihre Hilfe bei den numerischen Rechnungen.

Prof. Dr. J. Uhlenbusch
Dr. E. Fischer
Dipl. Phys. J. Hackmann
I. Physikalisches Institut der RWTH
D-5100 Aachen, Templergraben 55