Inventiones math. 14, 143–166 (1971)

Quelques applications des résolvantes de Ray

J. B. Walsh (Lausanne) et P. A. Meyer (Strasbourg)

Le sujet d'étude favori en théorie des processus de Markov était, tout récemment encore, la théorie du potentiel des processus de Hunt et des processus standard, dont une version très élégante, et sans doute presque définitive, figure dans le livre récent de Blumenthal et Getoor [10]. Depuis lors, l'accent a été mis sur d'autres questions. Les méthodes de compactification ont envahi la théorie, au cours des recherches sur la frontière de Martin (Kunita-Watanabe [3], [4]) et sur les chaînes de Markov (Doob [8, 9], Walsh [10], Chung[1]). La portée de ces méthodes a été définitivement établie par un article de Shih [5], qui étend aux processus de Markov continus à droite l'un des résultats les plus difficiles de Blumenthal et Getoor sur les processus standard, avec une démonstration beaucoup plus simple.

Il semble cependant que la puissance des méthodes de compactification, et tout particulièrement de la méthode de Ray et Knight, ne soit pas encore suffisamment reconnue. Nous en faisons ici un exposé d'ensemble, en l'illustrant par quelques applications nouvelles. Les résultats «que tout le monde connaît» sont énoncés et admis. En revanche, nous démontrons complètement ceux sur lesquels on ne peut mettre aucun nom d'auteur (bien qu'ils fassent souvent partie du folklore) ou qui n'ont été publiés que sous la forme d'une carte postale de Doob. Nous avons signalé l'origine des différents résultats chaque fois que nous l'avons pu, mais nous n'avons pas cherché à établir des priorités.

Nous utilisons largement la «théorie générale des processus stochastiques», en nous référant soit au «Guide Gris» (Meyer [14]), soit au livre à paraître de Dellacherie pour les énoncés qui ne figurent pas dans cet article.

§1. Résolvantes de Ray

Nous considérons un espace métrique compact F, et une résolvante $(U_p)_{p>0}$ sur cet espace. Nous supposerons que cette résolvante est

[1] Chung n'a rien publié sur les compactifications: ses méthodes dans [7] sont très différentes. Toutefois, ses idées ont eu une très grande influence sur la théorie, en particulier quant à l'utilisation des temps d'arrêt prévisibles, et les deux auteurs de cet article lui doivent beaucoup.

markovienne:

$$p\,U_p 1 = 1 \quad \text{pour tout } p > 0. \tag{1}$$

On sait que le cas sousmarkovien se ramène au cas markovien par l'addition d'un point supplémentaire ∂, de sorte que (1) ne restreint pas vraiment la généralité. Nous noterons $\mathscr{S}_q$ le cône convexe $\wedge$-stable des fonctions continues q-surmédianes $\big(f \in \mathscr{S}_q \Leftrightarrow (f$ est continue, positive et $p\,U_{p+q} f \leqq f$ pour tout $p>0)\big)$, et $\mathscr{S}_\infty$ le cône $\bigcup_q \mathscr{S}_q$.

Définition. La résolvante (U_p) est une résolvante de Ray si

1) pour tout $p>0$, U_p applique $\mathscr{C}(F)$ dans $\mathscr{C}(F)$,

2) $\mathscr{S}_\infty$ sépare F.

Dans [1], Ray suppose que $\mathscr{S}_1$ sépare F: cette hypothèse est en réalité équivalente à 2). En effet, soient x et y deux points distincts de F, et supposons que $\mathscr{S}_\infty$ les sépare; soit $f \in \mathscr{S}_q$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Si l'on a $q \leqq 1$, on a $f \in \mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_1$ sépare x et y. Si l'on a $q>1$, les fonctions $g = U_1 f$ et $h = f + (q-1)\,U_1 f$ sont 1-surmédianes, et l'une au moins d'entre elles sépare x et y.

D'après le théorème de Stone-Weierstrass, $\mathscr{S}_\infty - \mathscr{S}_\infty$ est dense dans $\mathscr{C}(F)$.

Nous allons maintenant rappeler les résultats «classiques» sur les résolvantes de Ray, sans aucune démonstration (voir les indications bibliographiques à la fin de l'article). Nous commençons par le théorème fondamental de Ray:

Théorème 1. *Il existe un semi-groupe $(P_t)_{t \geqq 0}$ de noyaux markoviens sur F (muni de sa tribu borélienne $\mathscr{B}(F)$), tel que*

1) $U_p = \int_0^\infty e^{-pt} P_t\, dt$.

2) *Pour tout $f \in \mathscr{C}(F)$ et tout x, la fonction $t \mapsto P_t f(x)$ est continue à droite sur $[0, \infty[$.*

Ce semi-groupe est unique[2].

Le noyau P_0 n'est pas égal à I en général: *c'est là ce qui fait tout l'intérêt des résolvantes de Ray.* Nous poserons la définition suivante:

Définition. On appelle points de branchement les points $x \in F$ tels que $\varepsilon_x P_0 \neq \varepsilon_x$. L'ensemble (borélien) des points de branchement est noté B, et son complémentaire est noté D.

---

[2] Il est utile de savoir aussi que toute fonction $f \in \mathscr{S}_q$ est q-surmédiane pour le semi-groupe (P_t): $e^{-qt} P_t f \leqq f$ pour tout t.

Toute fonction $f \in \mathscr{S}_q$ est telle que $e^{-qt} P_t f \leqq f$ pour tout t. En particulier, on a $P_0 f \leqq f$. Comme $P_0 P_0 = P_0$, on montre sans peine que $\varepsilon_x P_0$ est portée par D pour tout $x \in E$. C'est D qui sera le véritable espace d'états pour les processus, les points de branchement servant seulement à décrire leurs limites à gauche. Nous allons énoncer cela, après quelques notations.

Désignons par W l'ensemble de toutes les applications w de $\mathbb{R}_+$ dans D qui sont continues à droite, et admettent en tout point $t \in]0, \infty[$ une limite à gauche dans F. Posons comme d'habitude $Y_t(w) = w(t)$, $Y_{t-}(w) = w(t-)$, $\mathscr{G}^0 = \mathscr{T}(Y_t, t \geqq 0)$, $\mathscr{G}_s^0 = \mathscr{T}(Y_t, 0 \leqq t \leqq s)$ – ces notations désignent les tribus engendrées par les fonctions de la parenthèse.

Théorème 2. *Pour toute loi μ sur F, il existe une loi P^μ sur W et une seule pour laquelle le processus (Y_t) est markovien, admet (P_t) comme semi-groupe de transition et $(\mu P_t)_{t \geqq 0}$ comme loi d'entrée.*

Nous attirons l'attention du lecteur sur deux points très importants, que l'énoncé contient de manière implicite, par la définition même de W: le processus (Y_t) est *à valeurs dans D* et ne rencontre jamais les points de branchement, même pour $t = 0$. D'autre part, sa *loi initiale* n'est pas μ, mais μP_0.

Pour appliquer des résultats de théorie générale des processus, nous compléterons la famille de tribus: $\mathscr{G}^\mu$ sera la complétion de $\mathscr{G}^0$ pour P^μ, $\mathscr{G}_t^\mu$ s'obtiendra en adjoignant à la tribu $\mathscr{G}_t^0$ tous les ensembles P^μ-négligeables.

Théorème 3. *La famille de tribus $(\mathscr{G}_t^\mu)$ est continue à droite, et le processus (Y_t) est fortement markovien par rapport à cette famille. Si f est une fonction q-excessive*[3] *$(q \geqq 0)$ sur F, il existe deux fonctions boréliennes g et h telles que $g \leqq f \leqq h$ et que l'ensemble*

$$\{w \in W\colon \text{ il existe un } t \text{ tel que } g \circ Y_t(w) \neq h \circ Y_t(w)\} \tag{2}$$

soit P^μ-négligeable («f est presque-borélienne»). *Pour P^μ-presque tout $w \in W$, l'application $t \mapsto f \circ Y_t(w)$ est continue à droite sur $[0, \infty[$, et pourvue de limites à gauche sur $]0, \infty[$ (à valeurs dans F).*

Limites à gauche des processus de Ray

A partir de maintenant, nous donnons des démonstrations complètes; en particulier, nous redémontrons les théorèmes établis dans Walsh [6]. Le théorème suivant est l'analogue du théorème de quasi-continuité à gauche pour les processus de Feller – c'est à bien des égards le résultat clef de cette théorie, du point de vue probabiliste. C'est l'extension facile d'un résultat de Doob [8].

---

[3] Cela signifie, rappelons-le, que f est universellement mesurable positive sur F, que $p U_{p+q} f \leqq f$ pour tout $p > 0$, et que $\lim\limits_{p \to \infty} p U_{p+q} f = f$ partout sur F.

Théorème 4. *Soit (T_n) une suite croissante de temps d'arrêt de la famille $(\mathscr{G}_t^\mu)$, et soit T sa limite. Soit $A=\{T<\infty,\ T_n<T$ pour tout $n\}$. Alors, si f est borélienne bornée sur F*

$$E^\mu\big[f\circ Y_T I_{\{T<\infty\}}\big|\bigvee_n \mathscr{G}_{T_n}^\mu\big]=f\circ Y_T I_{\{T<\infty\}} I_{A^c}+P_0 f\circ Y_{T-}\cdot I_A \quad P^\mu\text{-}p.s.^4 \tag{3}$$

Démonstration. Nous commençons par le cas où $f=U_p h$, $h\in\mathscr{C}(F)$, $p>0$. Le processus

$$M_t=e^{-pt} f\circ Y_t+\int_0^t e^{-ps} h\circ Y_s\,ds$$

est une version continue à droite de la martingale $E\left[\int_0^\infty e^{-ps} h\circ Y_s\,ds|\mathscr{G}_t^\mu\right]$ et le théorème de convergence des martingales nous donne

$$E^\mu\big[M_T|\bigvee_n \mathscr{G}_{T_n}^\mu\big]=\lim_n M_{T_n} \qquad P^\mu\text{-p.s.}$$

En tenant compte de la continuité de l'intégrale en t, nous obtenons

$$E^\mu\big[U_p h\circ Y_T I_{\{T<\infty\}}|\bigvee_n \mathscr{G}_{T_n}^\mu\big]=U_p h\circ Y_T\, I_{\{T<\infty\}} I_{A^c}+U_p h\circ Y_{T-}\cdot I_A.$$

Multiplions par p, faisons tendre p vers $+\infty$: $p\,U_p h$ tend partout vers $P_0 h$, et comme Y_T appartient toujours à D, on a $P_0 h\circ Y_T=h\circ Y_T$. Ainsi

$$E^\mu\big[h\circ Y_T I_{\{T<\infty\}}|\bigvee_n \mathscr{G}_{T_n}^\mu\big]=h\circ Y_T I_{\{T<\infty\}} I_{A^c}+P_0 h\circ Y_{T-} I_A.$$

On passe de là au cas d'une fonction borélienne quelconque par un argument de classes monotones.

Corollaire. *Les ensembles $\{Y_T=Y_{T-}\}\cap A$ et $\{Y_{T-}\in D\}\cap A$ sont P^μ-p.s. égaux.*

Démonstration. Comme on a $Y_T\in D$, le premier ensemble est contenu dans le second. Désignons par H le second, qui appartient à $\bigvee_n \mathscr{G}_{T_n}$. Soient e et f deux fonctions continues sur F. Nous avons

$$\int_H e(Y_{T-}) f(Y_T)\,dP^\mu=\int_H e(Y_{T-}) P_0 f(Y_{T-})\,dP^\mu=\int_H e(Y_{T-}) f(Y_{T-})\,dP^\mu$$

d'après le théorème 4, $P_0 f$ étant égal à f sur D. Un argument de classes monotones nous donne alors que, pour toute fonction borélienne bornée u sur $F\times F$

$$\int_H u(Y_{T-}, Y_T)\,dP^\mu=\int_H u(Y_{T-}, Y_{T-})\,dP^\mu.$$

---

[4] Ce théorème est lié à la «propriété de Markov modérée» du processus X_{t-}, pour laquelle ou consultera [6].

Prenant pour u l'indicatrice de la diagonale de $F \times F$, on voit que $Y_T = Y_{T-}$ p.s. sur H.

Noter le sens de ce corollaire: on a $Y_{T_n} \to Y_T$ sur $\{T < \infty\}$, à l'exception des trajectoires pour lesquelles $T_n < T$ pour tout n, et pour lesquelles Y_{T-} est un point de branchement. En l'absence de points de branchement, c'est donc exactement la quasi-continuité à gauche classique.

Propriétés de la famille de tribus $\mathcal{G}_t^\mu$

Nous dirons qu'un point de branchement x est *dégénéré* s'il existe un point y (appartenant nécessairement à D) tel que $\varepsilon_x P_0 = \varepsilon_y$. L'ensemble B_d des points de branchements dégénérés est borélien, et l'application de B_d dans D qui à x associe y est borélienne.

L'existence de points de branchement dégénérés *n'est pas* un phénomène pathologique. De tels points de branchement apparaissent de manière naturelle dans beaucoup de questions. Pour prendre un exemple simple, si l'on désigne par (Q_t) le semi-groupe obtenu en tuant un processus de Hunt à sa première entrée dans un ouvert E, et si $x \in E$, on a $\varepsilon_x Q_0 = \varepsilon_\partial$ — autrement dit, x est un point de branchement dégénéré.

Théorème 5. *Soit T un temps d'arrêt prévisible de la famille $(\mathcal{G}_t^\mu)$. On a $\mathcal{G}_T^\mu = \mathcal{G}_{T-}^\mu$ si et seulement si l'ensemble $\{0 < T < \infty,\ Y_{T-} \in B \setminus B_d\}$ est P^μ-négligeable.*

Démonstration. T étant prévisible, choisissons une suite (T_n) de temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{G}_t^\mu)$, croissante, telle que l'on ait

$$T_n < T \text{ pour tout } n \text{ sur } \{T > 0\}, \qquad \lim_n T_n = T.$$

On a d'après le théorème 4

$$E^\mu[f \circ Y_T I_{\{T < \infty\}} | \mathcal{G}_{T-}^\mu] = f \circ Y_0 I_{\{T=0\}} + P_0 f \circ Y_{T-} I_{\{0 < T < \infty\}}.$$

1) Si $\mathcal{G}_{T-}^\mu = \mathcal{G}_T^\mu$, Y_T est $\mathcal{G}_{T-}^\mu$-mesurable, et nous avons donc P^μ-p.s. sur $\{0 < T < \infty\}$ $P_0 f \circ Y_{T-} = f \circ Y_T$, avec la conséquence que, λ désignant la loi de Y_{T-} sur $\{0 < T < \infty\}$

$$P_0(fg) = P_0 f \cdot P_0 g \qquad \lambda\text{-p.p.}$$

si f et g sont boréliennes bornées. Il est bien connu que dans ces conditions $\varepsilon_x P_0$ est une masse unité ε_y pour λ-presque tout x, ce qui signifie que Y_{T-} est P^μ-p.s. un point de $D \cup B_d$.

2) Inversement, notons π l'application borélienne sur $D \cup B_d$ qui associe à x l'unique y tel que $\varepsilon_x P_0 = \varepsilon_y$. Si l'on a P^μ-p.s. $Y_{T-} \in D \cup B_d$ sur $\{0 < T < \infty\}$, on a P^μ-p.s. $Y_T = \pi \circ Y_{T-}$ sur cet ensemble, et Y_T est donc $\mathcal{G}_{T-}^\mu$-mesurable. Nous laissons alors au lecteur le soin de vérifier que pour toute variable aléatoire bornée $\mathcal{G}^0$-mesurable Z on a

$E^\mu[Z|\mathscr{G}_T^\mu]=E^\mu[Z|\mathscr{G}_{T-}^\mu]$ P^μ-p.s. (commencer par des v.a. de la forme $f_1\circ Y_{t_1}\cdots f_n\circ Y_{t_n}$), et d'en déduire que $\mathscr{G}_T^\mu=\mathscr{G}_{T-}^\mu$.

Théorème 6. *L'ensemble $\beta=\{(t,w)\colon t>0,\ Y_{t-}(w)\in B\}$ est P^μ-indistinguable d'une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles.*

Démonstration. Cet ensemble est prévisible, car le processus (Y_{t-}) est prévisible. Il est d'autre part contenu dans $\{(t,w)\colon Y_{t-}(w)\neq Y_t(w)\}$, qui est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt. Il ne reste plus qu'à appliquer un résultat de théorie générale des processus (Dellacherie [13], chap. 5, § 4, ou Meyer [15]).

Théorème 7. *Soit T un temps d'arrêt de la famille $(\mathscr{G}_t^\mu)$.*

a) *La partie totalement inaccessible de T est T_A, où*[5]

$$A=\{0<T<\infty,\ Y_{T-}\in D,\ Y_{T-}\neq Y_T\}.$$

b) *Si l'on a P^μ-p.s. $Y_T=Y_{T-}$ sur $\{0<T<\infty\}$, T est prévisible, et $\mathscr{G}_T^\mu=\mathscr{G}_{T-}^\mu$.*

Démonstration. Nous établirons d'abord l'assertion b), en utilisant le critère suivant:

si pour toute v.a. $Z\in L^1$ la martingale $Z_t=E^\mu[Z|\mathscr{G}_t^\mu]$ (dont on choisit une version continue à droite) est P^μ-p.s. continue à l'instant T sur $\{0<T<\infty\}$, alors T est prévisible et $\mathscr{G}_T^\mu=\mathscr{G}_{T-}^\mu$.

En effet, le processus croissant $A_t=I_{\{t\geqq T\}}$ est alors naturel (Guide Gris n° 303), donc T est prévisible (même réf., 305). Soit alors T_n une suite croissante de temps d'arrêt telle que $\lim_n T_n=T$, $T_n<T$ pour tout n sur $\{T>0\}$; on a $E[Z|\mathscr{G}_{T-}^\mu]=\lim_n E[Z|\mathscr{G}_{T_n}^\mu]=\lim_n Z_{T_n}=Z_T$ d'après l'hypothèse, et $Z_T=E[Z|\mathscr{G}_T^\mu]$, d'où aussitôt l'égalité $\mathscr{G}_T^\mu=\mathscr{G}_{T-}^\mu$.

Pour établir b), il suffit alors de faire cette vérification lorsque Z parcourt un ensemble dense dans $L^1(P^\mu)$, autrement dit, de trouver assez de variables aléatoires Z telles que la martingale Z_t *soit continue là où les trajectoires le sont.* Un tel système figure p. 171 de Blumenthal-Getoor [11] (voir appendice).

Passons à a): tout revient à démontrer que si $Y_{T-}\in D$, $Y_{T-}\neq Y_T$, et $T>0$ P^μ-p.s. sur $\{T<\infty\}$, T est totalement inaccessible, et qu'inversement si sur $\{T<\infty\}$ on a $T=0$ ou $Y_{T-}\in B$, ou $Y_T=Y_{T-}$, T est accessible. La première propriété résulte du théorème 4 et de son corollaire: si une suite (T_n) converge en croissant vers un tel temps d'arrêt T, on a $T_n=T$ pour n grand sur $\{T<\infty\}$, ce qui exprime que T est totalement inaccessible. Pour la seconde, on désigne par J, K, L respectivement les événements $\{T=0\}$, $\{0<T<\infty,\ Y_{T-}\in B\}$, $\{0<T<\infty,\ Y_{T-}=Y_T\}$, et comme $T=T_J\wedge T_K\wedge T_L$ il suffit de montrer que chacun de ces temps d'arrêt est accessible. Pour T_J c'est évident; pour T_L cela résulte de la

[5] On rappelle que pour $A\in\mathscr{G}_T^\mu$, T_A est le temps d'arrêt qui vaut T sur A, $+\infty$ sur A^c.

propriété b) qui vient d'être établie. Pour T_K enfin, cela résulte du théorème 6: le graphe de T_K passe dans β, qui ne rencontre aucun graphe de temps d'arrêt totalement inaccessible.

Fonctions excessives régulières

Soit g une fonction p-excessive bornée $(p>0)$. Nous dirons que g est *μ-régulière* si la surmartingale $(e^{-pt} g \circ Y_t)$ est régulière pour la loi P^μ, au sens attribué à ce terme en théorie des martingales. Autrement dit, si pour toute suite croissante de temps d'arrêt T_n de la famille $(\mathscr{G}_t^\mu)$ on a, en posant $T = \lim_n T_n$

$$E^\mu[e^{-pT_n} g \circ Y_{T_n}] = E^\mu[e^{-pT} g \circ Y_T].$$

Nous dirons que g est *régulière* si elle est μ-régulière pour toute loi μ. Cela revient à dire que la fonctionnelle additive prévisible qui l'engendre est continue.

Il convient de distinguer soigneusement les deux processus $g \circ Y_{t-}$ (valeur de g au point $Y_{t-}(w)$), et $(g \circ Y_t)_-$ (limite à gauche de $g \circ Y_\bullet$ à l'instant t). On a entre ces deux processus les relations suivantes.

Théorème 8. *Soit g une fonction p-excessive bornée* $(p>0)$.

1) *On a pour P^μ-presque tout w*

$$\begin{aligned} &(g \circ Y_t)_-(w) \geqq g \circ Y_{t-}(w) \quad \text{pour tout } t>0, \\ &\text{avec l'égalité si } Y_{t-}(w) \in D \quad \text{et} \quad Y_{t-}(w) \neq Y_t(w). \end{aligned} \tag{4}$$

2) *La fonction g est μ-régulière si et seulement si l'on a, pour P^μ-presque tout w*

$$(g \circ Y_t)_-(w) = g \circ Y_{t-}(w) \quad \text{pour tout } t. \tag{5}$$

Remarque. La propriété (4), s'étend en fait à toute fonction p-excessive, bornée ou non. Quant à (5), elle montre que la μ-régularité ne dépend pas du paramètre p, et elle permet de définir cette notion pour des fonctions excessives non nécessairement bornées.

Démonstration. Considérons les ensembles

$$U = \{(t, w):\ t>0, (g \circ Y_t)_-(w) < g \circ Y_{t-}(w)\}$$

$$U' = \{(t, w):\ t>0, (g \circ Y_t)_-(w) \neq g \circ Y_{t-}(w)\}.$$

Nous voulons montrer que U est P^μ-évanescent, et que U' est P^μ-évanescent si g est régulière. Or les processus $(g \circ Y_t)_-$ et (Y_{t-}) sont prévisibles par continuité à gauche, donc $(g \circ Y_{t-})$ est aussi prévisible puisque g est presque-borélienne. D'après le théorème de section des ensembles prévisibles (Guide gris, n° 207), il suffit de démontrer que pour tout temps d'arrêt prévisible T, la probabilité que le graphe de T

rencontre U (resp. U') est nulle. Nous pouvons supposer que $T>0$ et $T<\infty$ P^μ-p.s.

Soit (T_n) une suite croissante de temps d'arrêt telle que $\lim_n T_n = T$, $T_n < T$ pour tout n. Les variables aléatoires $e^{-pT_n} g \circ Y_{T_n}$, $e^{-pT} g \circ Y_T$ forment une surmartingale (indexée par $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$). Il est est alors de même des variables aléatoires $e^{-pT_n} g \circ Y_{T_n}$ et $e^{-pT} E[g \circ Y_T | \mathcal{G}^\mu_{T-}]$; celle ci vaut $e^{-pT} P_0(Y_{T-}, g)$ (th. 4), ou encore $e^{-pT} g \circ Y_{T-}$ puisque $P_0 g = g$, g étant p-excessive. Faisons tendre n vers $+\infty$, et appliquons le théorème de convergence des surmartingales, il vient que les deux variables aléatoires $e^{-pT}(g \circ Y_T)_-$ et $e^{-pT} g \circ Y_{T-}$ forment une surmartingale — mais comme elles sont toutes deux $\mathcal{G}^\mu_{T-}$-mesurables, on a simplement

$$e^{-pT}(g \circ Y_T)_- \geqq e^{-pT} g \circ Y_{T-} \qquad P^\mu\text{-p.s.}$$

Autrement dit, le graphe de T ne peut rencontrer U avec probabilité positive. Si g est μ-régulière, les espérances des deux membres sont égales, ceux-ci sont donc eux même égaux, et le graphe ne rencontre pas U'.

On remarquera qu'inversement, si (5) a lieu

$$\lim_n E^\mu[e^{-pT_n} g \circ Y_{T_n}] = E[e^{-pT} g \circ Y_{T-}] = E[e^{-pT} P_0 g \circ Y_T].$$

On peut remplacer $P_0 g$ par g puisque g est excessive, et g est bien régulière (nous avons en fait été un peu négligents, en imposant à T d'être fini p.s., mais le lecteur y pourvoira).

Pour étendre (4) à toutes les fonctions p-excessives, on remarque que toute fonction p-excessive g est limite d'une suite croissante de p-potentiels bornés, c'est à dire de fonctions p-excessives régulières, auxquelles on peut appliquer (5). L'inégalité (4) s'obtient alors par passage à la limite. L'égalité aux points où $Y_{t-} \in D$, $Y_{t-} \neq Y_t$ résulte du fait que l'ensemble $\{(t, \omega): Y_t(\omega) \neq Y_{t-}(\omega),\ Y_{t-}(\omega) \in D\}$ est une réunion de graphes de temps d'arrêt totalement inaccessibles (th. 7), tandis que $\{(t, \omega): g \circ Y_{t-}(\omega) \neq (g \circ Y_t)_-(\omega)\}$ est une réunion de graphes de temps d'arrêt prévisibles.

Remarque. Pour éviter des confusions avec le théorème 13 du §3, on notera que si g et h sont deux fonctions p-excessives régulières, la fonction $g \wedge h$ satisfait encore à (5), *mais n'est pas p-excessive en général* (elle n'est que p-surmédiane).

Lois d'entrée bornées

La fin de ce paragraphe est une digression, et peut être omise sans inconvénient pour la suite. Elle présente pourtant un certain intérêt: historiquement, c'est comme «frontières d'entrée» que les compactifications de Ray-Knight ont fait leur apparition, et le théorème 9 ci-dessous emprunté à l'article [4], explique ce rôle.

Rappelons qu'on appelle *loi d'entrée* pour le semi-groupe (P_t) une famille $(\mu_t)_{t>0}$ de mesures positives telle que $\mu_t P_s = \mu_{s+t}$ pour tout couple (s, t). Comme nous avons supposé que les noyaux P_t sont markoviens, les mesures μ_t ont toutes la même masse. Nous supposerons dans la suite que cette masse est finie, et en fait qu'elle est égale à 1.

Théorème 9. *Il existe une loi de probabilité unique μ portée par D telle que $\mu P_t = \mu_t$ pour tout $t > 0$.*

Démonstration. Si $f \in \mathscr{S}_q$, la fonction $t \mapsto e^{-qt} \langle \mu_t, f \rangle$ est décroissante. Elle a donc une limite lorsque $t - > 0$. Il en est de même de la fonction $t \mapsto \langle \mu_t, f \rangle$; q étant arbitraire, et $\mathscr{S}_\infty$ étant total dans $\mathscr{C}(F)$, on voit que les mesures μ_t ont une limite vague μ lorsque $t \to 0$.

La relation $\mu_t P_s = \mu_{t+s}$ nous donne, après multiplication par e^{-ps} et intégration

$$\langle \mu_t, U_p f \rangle = \int_0^\infty e^{-ps} \langle \mu_{t+s}, f \rangle \, ds \qquad (f \in \mathscr{C}(F)).$$

En faisant tendre t vers 0, en utilisant le fait que $U_p f \in \mathscr{C}(F)$ dans le membre de gauche et le théorème de Lebesgue dans celui de droite, il vient que $\langle \mu, U_p f \rangle = \int_0^\infty e^{-ps} \langle \mu_s, f \rangle \, ds$. En inversant la transformation de Laplace, cela donne $\mu P_t = \mu_t$, le résultat cherché.

En construisant la loi P^μ, on voit que μ_t converge vaguement aussi vers μP_0. Donc $\mu = \mu P_0$, et μ est donc portée par D. L'unicité est évidente.

§2. Compactification de Ray-Knight

Après avoir étudié les résolvantes et les processus de Ray, nous montrons dans ce paragraphe pourquoi «ce qui est vrai pour les processus de Ray est vrai pour tous les processus de Markov».

Considérons un espace topologique E, *lusinien et métrisable*: cela signifie tout simplement que E peut être plongé dans un espace métrique compact $\hat{E}$, et que E est *borélien* dans $\hat{E}$. Nous choisirons une fois pour toutes un tel espace $\hat{E}$, et nous désignerons par $\mathscr{C}$ l'ensemble des restrictions à E des fonctions continues sur $\hat{E}$: muni de la norme de la convergence uniforme, c'est un espace de Banach séparable.

Considérons sur E un semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$ de noyaux *markoviens*: s'il était sousmarkovien au départ, nous adjoignons un point absorbant ∂ avant toute autre opération, et nous englobons ∂ dans E. Nous n'exigeons pas que ce semi-groupe soit borélien: il transforme les fonctions boréliennes en fonctions universellement mesurables. Cela nous compliquera l'existence, mais c'est indispensable pour les applications. Nous supposerons que le semi-groupe satisfait aux deux *hypothèses droites*, dont voici la première.

HD1: *pour toute loi μ sur E, il existe un processus de Markov admettant (P_t) comme semi-groupe de transition, μ comme loi initiale, et dont les trajectoires sont continues à droite.*

Nous construisons alors la *réalisation continue à droite canonique* du semi-groupe (P_t): Ω désignant l'ensemble de toutes les applications continues à droite de $\mathbb{R}_+$ dans E, X_t l'application coordonnée d'indice t sur Ω, $\mathscr{F}^0$, $\mathscr{F}_t^0$ désignant les tribus engendrées sur Ω par les applications X_s, resp. X_s, $s \leqq t$ à valeurs dans $(E, \mathscr{B}(E))$, nous munirons Ω des mesures P^μ pour lesquelles le processus (X_t) est markovien, admet (P_t) comme semi-groupe de transition et μ comme loi initiale. Les complétions usuelles nous permettrons de définir ensuite les tribus $\mathscr{F}^\mu$, $\mathscr{F}_t^\mu$.

L'hypothèse HD1 entraîne évidemment la continuité à droite du semi-groupe, et l'on peut donc définir sa résolvante U_p.

Nous passons à la seconde hypothèse. Celle-ci entraîne la propriété de Markov forte, et lui serait équivalente si le semi-groupe était borélien.

HD2: *Soit f une fonction p-excessive. Alors f est presque-borélienne, et pour P^μ-presque tout $\omega \in \Omega$ l'application $t \mapsto f \circ X_t(\omega)$ est continue à droite sur $\mathbb{R}_+$.*

Nous n'exigeons rien d'autre – en particulier, nous n'exigeons rien quant à l'existence de limites à gauche. Si la limite à gauche de la trajectoire ω existe (dans E et pour la topologie de E) à l'instant $t > 0$, nous la désignerons par $X_{t-}^*(\omega)$, pour la distinguer de la limite à gauche dans le compactifié F, qui sera notée $X_{t-}(\omega)$ par la suite.

L'hypothèse HD2 entraîne que la famille de tribus $\mathscr{F}_t^\mu$ est continue à droite.

Compactification

Soit $\mathscr{S}$ le plus petit cône convexe $\wedge$-stable, stable par la résolvante $(U_p(\mathscr{S}) \subset \mathscr{S}$ si $p > 0)$, contenant toutes les fonctions $U_p f$, $f \in \mathscr{C}^+$. Toute fonction $s \in \mathscr{S}$ est positive bornée, q-excessive pour un $q > 0$, donc presque-borélienne et finement continue. Le cône $\mathscr{S}$ contient les constantes positives (car $p U_p 1 = 1$), et sépare les points de E (car $\mathscr{C}^+$ sépare E, et si $f \in \mathscr{C}^+$ on a $\lim_{p \to \infty} p U_p f = f$). De plus, *$\mathscr{S}$ est séparable pour la topologie de la convergence uniforme*. Ce résultat très simple constitue le «lemme de Knight» (Knight [2]): c'est l'œuf de Christophe Colomb de la théorie de la compactification.

Rappelons brièvement la construction de $\mathscr{S}$. Si $\mathscr{H}$ est un cône convexe de fonctions positives bornées, posons

$$\mathscr{R}(\mathscr{H})=\{U_{p_1}f_1+\cdots+U_{p_n}f_n;\ n\in\mathbf{N},\, p_1,\ldots,p_n\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\}, f_1,\ldots,f_n\in\mathscr{H}\}$$

$$\Lambda(\mathscr{H})=\{g_1\wedge g_2\cdots\wedge g_n;\ n\in\mathbf{N},\, g_1,\ldots,g_n\in\mathscr{H}\}.$$

$\mathscr{R}(\mathscr{H})$ est un cône convexe, séparable si $\mathscr{H}$ est séparable (car on obtient un ensemble dense dans $\mathscr{R}(\mathscr{H})$ en prenant des p_i rationnels, et en faisant parcourir aux f_i un ensemble dense dans $\mathscr{H}$). $\Lambda(\mathscr{H})$ est un cône convexe, comme on le voit en applicant de manière répétée la formule $f+(g\wedge h)=(f+g)\wedge(f+h)$; de plus, il est évidemment séparable si $\mathscr{H}$ est séparable. Noter que $\Lambda(\mathscr{H})$ contient $\mathscr{H}$. Posons maintenant, par récurrence

$$\mathscr{S}_0=\mathscr{R}(\mathscr{C})$$

$$\mathscr{S}_{n+1}=\Lambda(\mathscr{S}_n\cup\mathscr{R}(\mathscr{S}_n))$$

alors $\mathscr{S}_n$ croît avec n, et $\mathscr{S}=\bigcup_n \mathscr{S}_n$.

Il faut bien noter que $\mathscr{S}$ ne contient pas $\mathscr{C}$ mais seulement $\mathscr{R}(\mathscr{C})$. Tout élément de $\mathscr{S}$ est comme finie de fonctions de la forme $U_{p_1}f_1\wedge U_{p_2}f_2\wedge\cdots\wedge U_{p_n}f_n$, où $f_1,\ldots,f_n$ appartiennent à $\mathscr{C}$ ou à $\mathscr{S}$. Mais on remarquera que si $f\in\mathscr{C}$, U_pf est limite *uniforme* des fonctions $U_p(qU_qf)$ lorsque $q\to\infty$, et que qU_qf appartient à $\mathscr{S}$. Ainsi

Les fonctions de la forme $U_{p_1}f_1\wedge\cdots\wedge U_{p_n}f_n$ $(p_1,\ldots,p_n>0, f_1,\ldots,f_n\in\mathscr{S})$, forment un ensemble total dans $\mathscr{S}$.

On établit maintenant sans peine le résultat suivant:

Il existe un espace métrique compact F, admettant E comme sous-ensemble dense (non comme sous-espace!) *tel que toute fonction $f\in\mathscr{S}$ soit la restriction à E d'une fonction unique $\bar f\in\mathscr{C}(F)$, et que les fonctions $\bar f$ $(f\in\mathscr{S})$ séparent F. Cet espace (unique à isomorphisme près) est appelé le compactifié de Ray-Knight de E.*

Cette terminologie n'est pas tout à fait correcte. On utilise parfois d'autres compactifications de Ray (relatives à des cônes $\mathscr{S}$ différents), et celle-ci n'est même pas canonique, puisqu'elle dépend de $\hat{E}$. Ce n'est pas un inconvénient grave.

Nous noterons $\bar{\mathscr{S}}$ l'ensemble des $\bar f$, pour $f\in\mathscr{S}$; $\bar{\mathscr{S}}$ est un cône convexe $\wedge$-stable de fonctions continues sur F, contenant les constantes positives et séparant: $\bar{\mathscr{S}}-\bar{\mathscr{S}}$ est donc dense dans $\mathscr{C}(F)$ (théorème de Stone-Weierstrass). Pour toute fonction $g\in\mathscr{S}$, la fonction U_pg appartient aussi à $\mathscr{S}$, et admet donc un prolongement par continuité à F, $\overline{U_pg}$. Nous avons ainsi une application $\bar U_p$: $\bar g\to g\to U_pg\to\overline{U_pg}$ de $\bar{\mathscr{S}}$ dans $\mathscr{C}(F)$. On vérifie très facilement qu'elle est linéaire et croissante sur $\bar{\mathscr{S}}$, et que $p\bar U_p 1_F=1_F$. On peut alors prolonger par linéarité, puis par continuité, $\bar U_p$ en une application positive de $\mathscr{C}(F)$ dans $\mathscr{C}(F)$, i.e. un noyau. Nous laissons au lecteur la vérification du fait que $(\bar{U}_p)_{p>0}$ est une résolvante markovienne.

Pour montrer que $(\bar{U}_p)$ est une résolvante de Ray, on remarque que pour toute fonction $f \in \mathscr{S}$, il existe un $q>0$ tel que f soit q-surmédiane pour la résolvante U_p: autrement dit, $p\,U_{p+q} f \leqq f$ sur E pour tout $p>0$. En prolongeant cette relation à F par continuité, on voit que $\bar{f}$ est q-surmédiane sur F pour la résolvante $(\bar{U}_p)$. Les fonctions $\bar{f}$ séparent donc F, et nous pouvons appliquer la théorie du paragraphe 1. Nous conserverons les notations de ce paragraphe, en notant simplement $\bar{P}_t$ le semi-groupe, et $\bar{P}^\mu$ les lois de probabilité sur W pour éviter des confusions.

D'après la manière même dont cette résolvante a été construite, elle possède une propriété spéciale:

Lemme 1. *L'ensemble des points de branchement dégénérés est vide.*

Démonstration. Nous avons vu que les fonctions $U_{p_1} f_1 \wedge \cdots \wedge U_{p_n} f_n$ forment un ensemble total dans $\mathscr{S}$, lorsque $f_1, \ldots, f_n$ parcourent $\mathscr{S}$. Leurs prolongements $\bar{U}_{p_1} \bar{f}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{U}_{p_n} \bar{f}_n$ forment donc un ensemble total dans $\mathscr{C}(F)$, et les fonctions $\bar{U}_p \bar{f}$ $(p>0, f \in \mathscr{S})$ séparent donc F. Ainsi, la relation $\varepsilon_x \bar{U}_p = \varepsilon_y \bar{U}_p$ pour tout p entraîne $x=y$. En particulier, la relation $\varepsilon_x \bar{P}_0 = \varepsilon_y$ entraîne $x=y$, et il n'y a pas de points de branchement dégénérés.

Il nous reste à faire la partie la plus importante du travail, qui consiste à comparer les processus associés à (P_t) et à $(\bar{P}_t)$.

Comparaison des processus

Nous commençons par jeter hors de Ω les ω tels que pour un $f \in \mathscr{S}$ au moins, l'application $f \circ X_\bullet(\omega)$ ne soit pas continue à droite et pourvue de limites à gauche. Comme $\mathscr{S}$ est séparable, nous ne rejetons ainsi qu'un ensemble de trajectoires qui est négligeable pour toute loi P^μ sur Ω. Les trajectoires restantes sont continues à droite lorsque E est muni de la topologie induite par F, et admettent des limites à gauche X_{t-} dans F.

Ensuite, fixons une loi initiale μ sur E. A toute fonction $f \in \mathscr{S}$ associons deux fonctions boréliennes f' et f'' boréliennes sur E telles que l'on ait $f' \leqq f \leqq f''$, et $P^\mu\,\{\omega$: il existe $t \geqq 0$ tel que $f' \circ X_t(\omega) < f'' \circ X_t(\omega)\} = 0$. Notons H_f l'ensemble $\{f' = f''\}$, et E_μ l'intersection des H_f, f parcourant un ensemble dénombrable dense dans $\mathscr{S}$. Les ensembles H_f et E_μ sont boréliens dans E, E_μ porte μ, et on a pour P^μ-presque tout ω $X_t(\omega) \in E_\mu$ pour tout t.

L'introduction de E_μ est nécessaire pour la raison suivante: rien ne permet d'affirmer que E soit universellement mesurable dans F. En revanche, E_μ est borélien dans E, et la restriction à E_μ de toute $f \in \bar{\mathscr{S}}$ (donc de toute $f \in \mathscr{C}(F)$) est borélienne sur E_μ. Autrement dit, l'injection de E_μ dans F est borélienne. Comme E_μ est un espace lusinien, un célèbre et difficile théorème de Lusin affirme que E_μ est *borélien dans* F [6]. Nous pouvons identifier μ, portée par E_μ, à sa mesure image dans F, qui est une loi sur F portée par E_μ, donc par E, et nous pouvons en particulier construire sur W la mesure $\bar{P}^\mu$.

Considérons le processus (X_t), pour la mesure P^μ, comme un processus à valeurs dans E_μ. Soit $f\in\mathscr{S}$; le processus

$$e^{-pt}U_p f\circ X_t + \int_0^t e^{-ps} f\circ X_s\,ds$$

est une martingale continue à doite. Mais cela peut s'énoncer autrement: pour toute $\bar{f}\in\bar{\mathscr{S}}$, le processus

$$e^{-pt}\bar{U}_p \bar{f}\circ X_t + \int_0^t e^{-ps} \bar{f}\circ X_s\,ds$$

est une martingale continue à droite. Le processus (X_t) étant continu à droite pour la topologie induite par F sur E_μ, une inversion de transformation de Laplace nous donne le résultat suivant:

Lorsque Ω est muni de la loi P^μ, le processus (X_t), considéré comme processus à valeurs dans F, est markovien, admet $(\bar{P}_t)$ comme semi-groupe de transition et μ comme loi initiale.

Munissons W de la loi $\bar{P}^\mu$. Notons H_μ le sous-ensemble, à la fois de Ω et de W, formé des applications de $\mathbb{R}_+$ dans E_μ qui sont continues à droite pour la topologie de E et pour la topologie de F, et admettent des limites à gauche dans F pour la topologie de F. Sur H_μ on a $X_t = Y_t$ pour tout t, et les tribus $\mathscr{F}^0$ et $\mathscr{G}^0$ coïncident (car E et F induisent la même tribu borélienne sur E_μ). D'autre part, H_μ porte P^μ, ce qui signifie que H_μ contient un ensemble A $\mathscr{F}^0$ mesurable tel que $P^\mu(A)=1$. Les processus (X_t) et (Y_t) ayant même loi, on a aussi $\bar{P}^\mu(A)=1$, et les lois P^μ et $\bar{P}^\mu$ induisent la même loi sur H_μ qui les porte toutes deux.

On a ainsi un moyen de transporter sur Ω, pour la mesure P^μ, tous les résultats établis au §1 *pour le processus (Y_t) et la mesure $\bar{P}^\mu$.*

Nous ne parlerons plus désormais que du processus (X_t) et des mesures P^μ. Rappelons que les limites à gauche dans F sont notées X_{t-}, et les limites à gauche dans E X^*_{t-} (si elles existent).

Signalons tout de suite une conséquence, qui n'était pas évidente a priori: si $x\in E$, les mesures $\bar{U}_p(x,\cdot)$, $\bar{P}_t(x,\cdot)$ sont portées par E, et induisent sur E les mesures $U_p(x,\cdot)$, $P_t(x,\cdot)$. D'autre part la continuité à droite

[6] L'énoncé usuel de ce théorème (par exemple, Bourbaki [17], chap. 9, § 6, n° 7, corollaire du théorème 3) est le suivant: si L est un espace lusinien, M un espace separé, et si f est continue et injective de L dans M, alors $f(L)$ est borélien dans M. Alors, si M est aussi lusinien, on a le même résultat pour une fonction f *borélienne* injective (le graphe L' de f dans $L\times M$ est borélien, donc lusinien, la projection p de L' sur $f(L)$ est continue, donc $f(M)=p$ (M) est borélien).

du processus (X_t) à l'instant 0 pour la topologie de F, lorsque Ω est muni de la loi P^x, signifie que $x \notin B$. Ainsi $B \cap E = \emptyset$.

Parties inutiles

Nous dirons qu'une partie A de F est *μ-inutile* (μ désignant toujours une loi sur E) si elle n'est P^μ-p.s. rencontrée, ni par le processus (X_t), ni par le processus (X_{t-}). Si A est μ-inutile pour toute loi μ sur E, nous dirons simplement que A est inutile. Le théorème suivant montre que tous les points «utiles» de F sont des points d'entrée dans E.

Théorème 10. *L'ensemble des $x \in F$ tels que $\varepsilon_x \bar{P}_0$ ne soit pas portée par E est inutile.*

Démonstration. Comme cet ensemble est contenu dans $F \setminus E$, il n'est pas rencontré par le processus (X_t), qui prend ses valeurs dans E. Soit ensuite H_μ l'ensemble borélien dans F

$$\{x \in F\colon \ \varepsilon_x \bar{P}_0 \text{ n'est pas portée par } E_\mu\}.$$

Il nous suffit de montrer que le processus (X_{t-}) ne rencontre P^μ-p.s. pas H_μ, ou encore que pour tout temps d'arrêt prévisible T tel que $0 < T < \infty$ P^μ-p.s., on a $P^\mu\{X_{T-} \in H_\mu\} = 0$. Or on a d'après le théorème 4

$$0 = P^\mu\{X_T \in E_\mu^c\} = E^\mu[P^\mu\{X_T \in E_\mu^c | \mathscr{F}_{T-}^\mu\}] = E^\mu[\bar{P}_0(X_{T-}, E_\mu^c)].$$

Ainsi on a bien $X_{T-} \notin H_\mu$ P^μ-p.s.

Corollaire 1. *L'ensemble des $x \notin E$ qui ne sont pas des points de branchement est inutile.*

En effet, pour un tel x la mesure $\varepsilon_x \bar{P}_0 = \varepsilon_x$ n'est pas portée par E.

Corollaire 2. *L'ensemble des $x \in F$ tels que les mesures $\varepsilon_x \bar{U}_p$ ne soient pas portées par E est inutile.*

En effet, si $\varepsilon_x \bar{P}_0$ est portée par E, il en est de même de $\varepsilon_x \bar{U}_p$ pour tout p. On peut même dire mieux: si $\varepsilon_x \bar{P}_0 = \lambda$ est portée par E, $F \setminus E$ est polaire pour la mesure $P^\lambda = \bar{P}^x$.

Corollaire 3. *Si pour tout $x \in E$, $U_p(x, \cdot)$ est absolument continue par rapport à une mesure ξ, l'ensemble des $x \in F$ tels que $\bar{U}_p(x, \cdot)$ ne soit pas absolument continue par rapport à ξ est inutile.*

En effet, si $\varepsilon_x \bar{P}_0$ est portée par E, $\varepsilon_x \bar{U}_p = \varepsilon_x \bar{P}_0 U_p$ est absolument continue par rapport à ξ.

§3. Applications de la théorie de Ray

Citons d'abord, pour mémoire, l'important théorème de Shih [5]. Les méthodes développées ici permettent de l'étendre à des semi-groupes non boréliens, ce qui est bien commode.

Théorème 11. *Soit A un ensemble presque-borélien dans E. Supposons que la loi μ ne charge pas l'ensemble des points de A irréguliers pour A. Il existe alors une suite décroissante (G_n) d'ensembles finement ouverts presque boréliens contenant A, telle que $T_{G_n} \uparrow T_A$ P^μ-p.s.*

Un résultat d'accessibilité

Getoor a démontré récemment le théorème suivant: si le processus (X_t) est standard, et si T est un temps d'arrêt de la famille $(\mathscr{F}_t^\mu)$, tel que $T<\zeta$ et $X_{T-}^*=X_T$ P^μ-p.s.[7], alors T est accessible. Nous démontrons un résultat analogue pour des processus qui ne sont pas standard.

Théorème 12. *Soit μ une loi sur E, et soit T un temps d'arrêt de la famille $(\mathscr{F}_t^\mu)$, tel que pour P^μ-presque tout $\omega \in \{0<T<\infty\}$, ou bien $X_{T-}^*(\omega)$ n'existe pas, ou bien $X_{T-}^*(\omega)=X_T(\omega)$. Alors T est accessible.*

Démonstration. Nous prouvons d'abord un lemme:

Lemme 2. *L'ensemble $H=\{(t,\omega)$: $t>0$, $X_{t-}^*(\omega)$ n'existe pas ou $X_{t-}^*(\omega) \neq X_{t-}(\omega)\}$ est P^μ-indistinguable d'une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles.*

Démonstration. L'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue à droite dans E et F à la fois. Les deux espaces étant métriques, l'ensemble $J(\omega)$ des t qui sont des points de discontinuité dans l'un des espaces est dénombrable, et il contient la coupe $H(\omega)$. Supposons qu'on ait montré que H est un ensemble prévisible. La conclusion découle alors d'un théorème de Dellacherie ([13], chap. 5, § 4) sur les ensembles à coupes dénombrables. Il n'y a donc que ce point à établir.

Plongeons E dans le cube $[0,1]^{\mathbf{N}}$, et notons c_n les coordonnées. Il résulte d'un théorème de la «théorie générale des processus» que les processus $(I_t^n)_{t>0}$, $(S_t^n)_{t>0}$ définis par

$$I_t^n(\omega)=\liminf_{s\to t,\, s<t} c_n \circ X_s(\omega), \qquad S_t^n(\omega)=\limsup_{s\to t,\, s<t} c_n \circ X_s(\omega)$$

sont prévisibles (Dellacherie [13], chap. 5, § 1). Notons I_t et S_t les points de $[0,1]^{\mathbf{N}}$ dont les coordonnées sont I_t^n, S_t^n. Ces deux processus sont prévisibles, et l'ensemble K des (t,ω) tels que $X_{t-}^*(\omega)$ n'existe pas est la réunion des deux ensembles prévisibles

$$K_1=\{(t,\omega)\colon t>0,\ I_t(\omega) \neq S_t(\omega)\},$$

$$K_2=\{(t,\omega)\colon t>0,\ S_t(\omega) \notin E\}.$$

Il faut encore montrer que $H \cap K^c$ est prévisible. On remarque d'abord que sur K^c le processus (X_{t-}^*) est bien défini, égal à (S_t), et donc pré-

[7] Il n'est sûrement pas inutile de rappeler que X_{t-}^* est la limite à gauche dans la topologie usuelle de E.

visible. Ensuite, que $H \cap K^c$ est la réunion des ensembles prévisibles

$$H_f = \{(t, \omega) \colon t > 0, (t, \omega) \in K^c, f \circ X^*_{t-}(\omega) \neq (f \circ X_t)_-(\omega)\}$$

où f parcourt une suite dense dans $\mathscr{S}$. Finalement, H est bien prévisible et le lemme est démontré.

La démonstration du théorème 12 est alors très courte. Soit R un temps d'arrêt totalement inaccessible; son graphe ne peut rencontrer H, donc X^*_{R-} existe P^μ-p.s. sur $\{R < \infty\}$ et vaut X_{R-}. Or $X_{R-} \neq X_R$ P^μ-p.s. sur $\{R < \infty\}$ d'après le théorème 7, d'où finalement $X^*_{R-} \neq X_R$. Ainsi les graphes de R et de T sont disjoints. Comme R est arbitraire, T est accessible.

Sur la quasi-continuité à gauche

Il est bien connu que les processus standard «spéciaux», i.e. les processus standard dont la famille de tribus canonique ne possède pas de temps de discontinuité, possèdent des propriétés très voisines de celles des processus de Hunt. Le théorème suivant explique pourquoi il en est ainsi: *tout* processus dont la famille de tribus canonique est dépourvue de temps de discontinuité *devient un processus de Hunt*, si l'on remplace la topologie initiale de E par la topologie induite par F sur E. L'ensemble des points de branchement est en effet inutile d'après le théorème suivant, donc (remarque précédente) E^c est inutile, ni le processus (X_t) ni ses limites à gauche ne sortent de E, et la quasi-continuité à gauche a lieu dans E d'après le théorème 4.

Théorème 13. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1) *Quelle que soit la loi μ sur E, la famille $(\mathscr{F}_t^\mu)$ est dépourvue de temps de discontinuité.*

2) *Quels que soient le nombre $p > 0$, et les fonctions p-excessives f et g régulières bornées* sur E, *la fonction p-excessive $f \wedge g$* sur E *est régulière.*

3) *L'ensemble B (et donc E^c) est inutile.*

Démonstration. Supposons que la famille $(\mathscr{F}_t^\mu)$ soit dépourvue de temps de discontinuité. Une surmartingale (S_t) pour cette famille est alors régulière si et seulement si elle n'a pas de sauts prévisibles[8]. Il est alors évident que si (S_t) et (S'_t) sont régulières, il en est de même de $(S_t \wedge S'_t)$. En appliquant cela aux surmartingales $(e^{-pt} f \circ X_t)$ et $(e^{-pt} g \circ X_t)$, on voit que 1) $\Rightarrow$ 2). Il faut noter que la condition 2) ne concerne que E, et que f et g ne sont pas nécessairement les restrictions à E de fonctions excessives *régulières sur F*.

Pour montrer que 2) $\Rightarrow$ 3), nous rappelons que les fonctions $f \in \mathscr{S}$ de la forme $f = U_{p_1} f_1 \wedge U_{p_2} f_2 \cdots \wedge U_{p_n} f_n$, où $f_1, \ldots, f_n$ appartiennent à $\mathscr{S}$,

[8] Meyer [12], chap. VII, n° 51.

forment un ensemble total dans $\mathscr{S}$. Leurs prolongements $\bar{f}$ forment donc un ensemble total dans $\mathscr{C}(F)$. D'autre part, si 2) a lieu et si p est le plus grand des p_i, f est p-excessive régulière sur E. D'après un argument déjà utilisé dans la démonstration du théorème 8, si T est un temps d'arrêt prévisible tel que $0<T<\infty$ P^μ-p.s., on a

$$E^\mu[e^{-pT} f\circ X_T|\mathscr{F}^\mu_{T-}]=e^{-pT}(f\circ X_T)_- \qquad P^\mu\text{-p.s.}$$

Faisons disparaître le coefficient e^{-pT} qui est $\mathscr{F}^\mu_{T-}$-mesurable, et remplaçons $(f\circ X_T)_-$ par $\bar{f}\circ X_{T-}$, grâce à la continuité de $\bar{f}$ sur F. Nous pouvons aussi remplacer $f\circ X_T$ par $\bar{f}\circ X_T$. Et maintenant, comme les fonctions $\bar{f}$ forment un ensemble total dans $\mathscr{C}(F)$, il vient que

$$E^\mu[v\circ X_T|\mathscr{F}^\mu_{T-}]=v\circ X_{T-} \qquad P^\mu\text{-p.s.}$$

pour toute fonction $v\in\mathscr{C}(F)$. Par conséquent, si $u\in\mathscr{C}(F)$ il vient que

$$E^\mu[u\circ X_{T-}\, v\circ X_T]=E^\mu[u\circ X_{T-}\, v\circ X_{T-}].$$

Nous avons déjà vu dans la démonstration du corollaire du théorème 4 que cela entraîne $X_T=X_{T-}$ P^μ-p.s., donc $X_{T-}\in E$ P^μ-p.s. L'ensemble prévisible $\{(t,\omega)\colon t>0,\ X_{t-}(\omega)\notin E\}$ n'a donc pas de sections, et cela entraîne que $F\setminus E$, donc aussi B, est μ-inutile.

Enfin, 3) entraîne que $\mathscr{F}^\mu_T=\mathscr{F}^\mu_{T-}$ pour tout temps d'arrêt prévisible T (th. 5), ce qui est équivalent à l'absence de temps de discontinuité de la famille $(\mathscr{F}^\mu_t)$ (Dellacherie [13], chap. 2, § 2).

Interprétation du caractère standard

Nous allons supposer maintenant que le processus (X_t) est *standard* pour la topologie initiale. Nous distinguons donc un point absorbant $\partial\in E$, nous désignons par ζ le temps d'entrée dans l'ensemble $\{\partial\}$, et nous faisons l'hypothèse de quasi-continuité à gauche avant ζ:

si les T_n sont des temps d'arrêt de la famille $(\mathscr{F}^\mu_t)$, qui tendent en croissant vers T, X_{T_n} tend P^μ-p.s. vers X_T dans la topologie de E sur $\{T<\zeta\}$.

Cela pour toute loi initiale μ sur E. Nous allons voir ce que cela signifie pour le processus (X_t) considéré dans la topologie de F, i.e. pour le processus de Ray correspondant. Le modèle le plus simple de processus standard que l'on rencontre dans la nature, et qui ne soit pas «standard spécial», consiste à prendre un processus de translation uniforme sur la droite ou sur le cercle, dont les particules sont tuées avec probabilité $p>0$ à leur passage par l'origine. Il est assez surprenant qu'une description de ce genre soit valable pour *tous* les processus standard.

Appelons *fourche* un point de branchement x qui possède la propriété suivante: il existe un point $y\in E$ et un coefficient $p(x)\in]0,1[$

tel que

$$\varepsilon_x P_0 = p(x)\,\varepsilon_\partial + (1-p(x))\,\varepsilon_y.$$

L'ensemble des fourches sera noté Π. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que Π est borélien dans F, et que les fonctions p: $x \mapsto p(x)$ et π: $x \mapsto y$ sont boréliennes sur Π.

Théorème 14. *Supposons que (X_t) soit standard, et soit μ une loi sur E.*

1) *Pour P^μ-presque tout ω, on a pour tout $t<\zeta(\omega)$ ou bien $X^*_{t-}(\omega) = X_{t-}(\omega)$, ou bien $X_{t-}(\omega) \in B$ et $X^*_{t-}(\omega) = X_t(\omega)$.*

2) *L'ensemble $B \setminus \Pi$ est inutile (et on peut remplacer B par Π dans la relation précédente).*

Démonstration. Considérons l'ensemble

$$H = \{(t,\omega):\ 0<t<\zeta(\omega),\ X^*_{t-}(\omega) \neq X_{t-}(\omega),\ X_{t-}(\omega) \notin B\}.$$

H est contenu dans $\{(t,\omega):\ 0<t,\ X^*_{t-}(\omega)$ n'existe pas ou $X^*_{t-}(\omega) \neq X_{t-}(\omega)\}$ (lemme 2), qui est réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles. D'autre part, si T est un temps d'arrêt prévisible

$$X_{T-} \notin B \Rightarrow X_{T-} = X_T \quad \text{sur } \{0<T<\infty\} \quad \text{(th. 4)},$$

$$T<\zeta \Rightarrow X^*_{T-} = X_T \quad \text{sur } \{0<T\} \quad \text{(caractère standard)}.$$

Le graphe de T ne peut donc rencontrer H, qui est donc évanescent. Autrement dit, $(0<t<\zeta,\ X^*_{t-} \neq X_{t-}) \Rightarrow (X_{t-} \in B)$. Mais l'ensemble $\{(t,\omega):\ X_{t-}(\omega) \in B\}$ est réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles (th. 6), et en vertu du caractère standard

$$(X_{t-} \in B,\ 0<t<\zeta) \Rightarrow (X^*_{t-} = X_t).$$

Donc finalement $(0<t<\zeta,\ X^*_{t-} \neq X_{t-}) \Rightarrow (X_{t-} \in B,\ X^*_{t-} = X_t)$, c'est à dire la première assertion de l'énoncé. Elle signifie si l'on veut que le processus standard (X_t) est «plus continu» dans la topologie de E que dans celle de F.

Passons à la seconde assertion. Nous allons démontrer d'abord le résultat suivant:

Soit T un temps d'arrêt prévisible tel que $T>0$ P^μ-p.s., et que $X_{T-} \in B$ sur $\{T<\infty\}$. Alors on a $X_{T-} \in \Pi$ P^μ-p.s. sur $\{T<\zeta\}$.

Soit λ la mesure sur F, portée par B

$$\lambda(A) = P^\mu\{X_{T-} \in A,\ T<\zeta\}.$$

Soit l l'indicatrice de $F \setminus \{\partial\}$; soit $L = \{T<\zeta\}$, et soit Φ la tribu engendrée par $\mathscr{F}^\mu_{T-}$ et L. Nous avons d'après le théorème 4, si f est borélienne bornée sur F

$$E^\mu[f \circ X_T I_{\{T<\infty\}} | \mathscr{F}^\mu_{T-}] = P_0 f \circ X_{T-} I_{\{T<\infty\}}.$$

On a, en convenant que $0/0=0$

$$E^\mu[f\circ X_T I_{\{T<\infty\}}|\Phi]=\frac{E^\mu[f\circ X_T, T<\infty, L|\mathscr{F}^\mu_{T-}]}{P^\mu[L, T<\infty|\mathscr{F}^\mu_{T-}]}I_L$$
$$+\frac{E^\mu[f\circ X_T, T<\infty, L^c|\mathscr{F}^\mu_{T-}]}{P^\mu[L^c, T<\infty|\mathscr{F}^\mu_{T-}]}I_{L^c}.$$

Nous supposerons f nulle au point ∂. Le dernier terme est nul. D'autre part, T étant prévisible, on a $X_T=X^*_{T-}$ sur $\{T<\zeta\}$, donc $f\circ X_T I_{\{T<\infty\}}=f\circ X^*_{T-}I_L$, qui est Φ-mesurable. En définitive, il reste

$$f\circ X_T I_{\{T<\zeta\}}=\frac{P_0(X_{T-}, fl)}{P_0(X_{T-}, l)}I_{\{T<\zeta\}}.$$

Posons $Q(x,f)=\dfrac{P_0(x,fl)}{P_0(x,l)}$ si le dénominateur n'est pas nul, 0 s'il est nul. La formule précédente s'étend aussitôt à toute f borélienne bornée, même non nulle en ∂, et elle entraîne

$$Q(X_{T-}, fg)=Q(X_{T-}, f)\,Q(X_{T-}, g)\qquad P^\mu\text{-p.s.}\quad\text{sur } \{T<\zeta\}.$$

En faisant parcourir à f et g une partie dénombrable dense dans $\mathscr{C}(F)$, on voit que

pour λ-presque tout x, $Q(x,\cdot)$ est une masse unité, ou 0.

Autrement dit, pour λ-presque tout x, $P_0(x,\cdot)$ est de la forme

$$p(x)\,\varepsilon_\partial+(1-p(x))\,\varepsilon_y\qquad (y\in E)$$

mais les éventualités $p(x)=0$, ou $y=\partial$ (auquel cas $p(x)$ est indéterminé) ne sont pas exclues a priori. Elles le sont pourtant, car ce sont des cas de branchement dégénérés (vers y ou vers ∂), et l'ensemble des points de branchement dégénérés est vide (lemme 1).

Nous pouvons maintenant conclure: l'ensemble prévisible

$$J=\{(t,\omega):\ t>0,\ X_{t-}(\omega)\in B\setminus\Pi\}$$

est réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles T_n. Mais nous venons de voir que $X_{T_n-}\in\Pi$ sur $\{T_n<\zeta\}$. Ainsi, J est contenu dans le graphe de ζ. J est alors le graphe d'un temps d'arrêt prévisible S tel que, sur $\{S<\infty\}$, on ait P^μ-p.s. $X_{S-}\in B$, $X_S=\partial$.

On en déduit aussitôt que $P_0(X_{S-}, \{\partial\})=1$ sur $\{S<\infty\}$. L'ensemble des points de branchement dégénérés étant vide, on a $S=\infty$ P^μ-p.s., et le théorème de section entraîne que J est P^μ-évanescent.

Remarque. Considérons l'ensemble prévisible

$$G=\{(t,\omega):\ 0<t<\infty,\ X^*_{t-}(\omega) \text{ n'existe pas dans } E,\ X_{t-}(\omega)\in B\}.$$

G est le graphe d'un temps d'arrêt S prévisible, tel que sur $\{S<\infty\}$ on ait $X_S=\partial$, $X_{S-}\in B$ — en effet, la *seule* valeur de t pour laquelle $X^*_{t-}(\omega)$ puisse ne pas exister est $\zeta(\omega)$. Nous venons de voir que cela entraîne $S=\infty$ p.s. Autrement dit

$$(X^*_{t-} \text{ n'existe pas, } 0<t<\infty) \Rightarrow (X_{t-}\notin B) \Rightarrow (X_t=X_{t-}) \Rightarrow (X_{t-}=\partial).$$

On peut montrer[9] que le processus standard (X_t) sur E est subordonné à un processus standard spécial $(\tilde{X}_t)$ sur E, dont la construction peut se décrire intuitivement de la manière suivante: à l'instant ζ, on examine la limite $X^*_{\zeta-}$; si elle n'existe pas, on ne modifie pas la trajectoire. Mais si elle existe, au lieu de jeter la particule au point ∂, on la ressuscite au point $X^*_{\zeta-}$, à partir duquel elle reprend son évolution suivant (P_t). On itère transfiniment cette construction, de sorte que le processus $(\tilde{X}_t)$ obtenu par recollement transfini est tel que $\tilde{X}^*_{\tilde{\zeta}-}$ n'existe pas dans E sur $\{\tilde{\zeta}<\infty\}$.

Il est facile de montrer que le processus $(\tilde{X}_t)$ est (p.s.) continu à droite pour la topologie de F, et pourvu de limites à gauche dans F sur l'intervalle $]0,\infty[$: en effet les fonctions de $\mathcal{S}$ sont des différences de fonctions p-excessives pour le semi-groupe $(\tilde{P}_t)$. La limite à gauche $\tilde{X}_{t-}$ ne diffère de $\tilde{X}^*_{t-}$ qu'en des points t tels que $\tilde{X}^*_{t-}=\tilde{X}_t$, tandis que $\tilde{X}_{t-}\in\Pi$, et le théorème 14 nous dit exactement quelle est la fonctionnelle multiplicative qui permet de passer du processus $(\tilde{X}_t)$ au sous-processus (X_t): c'est

$$M_t=\prod_{\substack{s\leq t\\ \tilde{X}_{s-}\in\Pi}}(1-p(\tilde{X}_{t-})).$$

Nous nous abstenons de démontrer ces résultats: nos lecteurs pourront ainsi en faire de bons problèmes d'examen.

Une application du critère d'accessibilité

Nous allons, dans cette dernière partie, oublier complètement F, et travailler uniquement sur le processus (X_t) considéré dans E. Les mots *compact*, *ouvert*, etc, sont relatifs à la topologie de E. Nous supposons que le semi-groupe (P_t) satisfait à l'hypothèse suivante (hypothèse (B) de Hunt):

pour tout ensemble presque-borélien A, tout ouvert G contenant A et tout $p>0$, on a $P^p_G P^p_A = P^p_A$.

---

[9] Meyer. Les relations entre diverses propriétés des processus de Markov. Inventiones math. **1**, 59–100 (1966).

Nous allons utiliser le théorème 12 pour établir la conséquence suivante de l'hypothèse (B), qui est, elle, indépendante de la topologie de E:

Théorème 15. *Supposons que l'hypothèse* (B) *soit satisfaite, et soit T un temps d'arrêt totalement inaccessible de la famille $(\mathscr{F}_t^\mu)$. La loi μP_T ne charge pas les ensembles semi-polaires.*

Démonstration. Nous n'utiliserons pas le fait que T est totalement inaccessible, mais seulement la conclusion du théorème 12: X_{T-}^* existe P^μ-p.s. sur $\{T<\infty\}$, et $X_{T-}^* \neq X_T$ P^μ-p.s. Quitte à modifier légèrement T, nous pouvons supposer que c'est un temps d'arrêt de la famille $(\mathscr{F}_t)$ (et non $\mathscr{F}_t^\mu$), et qu'il satisfait sans ensemble exceptionnel à la propriété

$$\text{sur } \{T<\infty\}, \text{ on a } T>0, X_{T-}^* \text{ existe dans } E, \text{ et } X_{T-}^* \neq X_T.$$

Supposons que μP_T charge un compact totalement effilé K. Soit d une distance définissant la topologie de $\hat{E}$. Si ε est assez petit, la répartition $\mu P_{T'}$ charge K, où

$$T'=T \quad \text{si} \quad d(X_{T-}, X_T)>4\varepsilon, \qquad T'=\infty \qquad \text{sinon}.$$

On peut alors trouver un compact $L\subset K$, de diamètre $\leqq\varepsilon$, tel que la répartition $\mu P_{T'}$ charge L. Posons

$$T''=T' \quad \text{si} \quad X_{T'}\in L, \qquad T''=\infty \qquad \text{sinon}$$

et soit G le voisinage d'ordre ε de L: sur $T''<\infty$, nous avons $X_{T''}\in L$ et $X_{T''-}\notin G$. Si ω est telle que $T''(\omega)<\infty$, et si r rationnel est $<T''(\omega)$, assez près de $T''(\omega)$, nous avons alors

$$T''(\omega)=r+T_G(\theta_r\,\omega), \qquad X_{T_G}(\theta_r\,\omega)\in L.$$

Donc si r est bien choisi, et si λ est la mesure μP_r, nous avons

$$P^\lambda\{X_{T_G-}^* \text{ existe dans } E, X_{T_G}\in L\}>0.$$

Mais L est un compact totalement effilé, et cela entraîne $P^\lambda\{T_L\circ\theta_{T_G}>T_L\}>0$, d'où $P_G^p P_L^p \neq P_L^p$ pour $p>0$, en contradiction avec l'hypothèse (B).

Nous déduisons maintenant du théorème 15 l'amélioration suivante du théorème fondamental de convergence de la théorie du potentiel:

Théorème 16. *Soit (v_n) une suite décroissante de fonctions p-excessives bornées, soit v sa limite, et soit $\hat{v}$ la régularisée de v. Si $\hat{v}$ est régulière, et si l'hypothèse* (B) *est satisfaite, on a $v=\hat{v}$* quasi-partout.

Démonstration. Pour simplifier les notations, nous supposerons que $p=0$. Considérons l'ensemble $H=\{(t,\omega)\colon v\circ X_t(\omega)>\hat{v}\circ X_t(\omega)\}$. L'ensemble $\{v>\hat{v}\}$ étant semi-polaire, il ne passe dans H aucun graphe de temps d'arrêt totalement inaccessible (th. 15). Il nous suffit donc de montrer que, pour tout temps d'arrêt prévisible $T>0$ borné, le graphe de T est p.s. contenu dans H^c: c'est ce que nous allons faire à présent.

Nous commençons par remarquer que la fonction v, enveloppe inférieure d'une suite décroissante de fonctions excessives, satisfait aux inégalités de Doob sur les nombres de montées et de descentes. Il en résulte que la surmartingale $(v \circ X_t)$, bien que non séparable a priori, est pourvue de limites à droite et à gauche. L'ensemble $K_\varepsilon(\omega)=\{t\colon v \circ X_t(\omega) \geqq \hat{v} \circ X_t(\omega)+\varepsilon\}$ est donc pour presque tout ω un ensemble discret dans $\mathbb{R}_+$, quel que soit $\varepsilon>0$. Ces faits sont bien connus – ils étaient à la base de la première démonstration, par Doob, du fait que $\{v>\hat{v}\}$ est semi-polaire.

Soit T_n une suite de temps d'arrêt telle que $T_n \uparrow T$, $T_n<T$ pour tout n. Comme $K_\varepsilon(\omega)$ est isolé pour presque tout ω, on a

$$\lim_n v \circ X_{T_n} = \lim_n \hat{v} \circ X_{T_n} \qquad \text{p.s.}$$

et par conséquent, les fonctions étant bornées et $\hat{v}$ régulière,

$$\lim_n E[v \circ X_{T_n}] = \lim_n E[\hat{v} \circ X_{T_n}] = E[\hat{v} \circ X_T].$$

Mais d'autre part v satisfait au théorème d'arrêt, et la première limite vaut donc au moins $E[v \circ X_T]$, d'où finalement

$$E[v \circ X_T] \leqq E[\hat{v} \circ X_T].$$

Mais on a $\hat{v} \leqq v$, donc $v \circ X_T = \hat{v} \circ X_T$ p.s., ce qui achève la démonstration.

L'hypothèse suivant laquelle v est bornée n'est là que pour simplifier la démonstration: dans les cas usuels, on s'en débarrasse aisément par troncation.

Appendice

Nous nous apercevons lors de la correction des épreuves que la référence à Blumenthal-Getoor [11] dans la démonstration du théorème 7 est insuffisante. Blumenthal et Getoor montrent que les variables aléatoires de la forme

$$Z=\int_0^\infty e^{-p_1 t} f_1 \circ X_t\, dt \dots \int_0^\infty e^{-p_n t} f_n \circ X_t\, dt$$

où n est entier, $p_1, \dots, p_n$ sont >0, et $f_1, \dots, f_n$ sont continues sur F, forment un ensemble total dans $L^1(P^\mu)$. Nous voulons montrer que les martingales $E[Z|\mathscr{F}_t^\mu]$ sont continues là où les trajectoires sont continues. Il résulte du calcul explicite de ces martingales donné par Blumenthal et Getoor que *cela revient à prouver que les fonctions* $x \mapsto E^x[Z]$ *sont continues sur* F.

Ce point n'est pas évident, et nous nous bornerons ici au principe de la démonstration, qui (bien que facile) est un peu longue, et paraîtra dans le volume VI du séminaire de probabilités de Strasbourg. On munit l'ensemble de toutes les applications continues à droite et pourvues de limites à gauche de $\mathbb{R}_+$ dans F de la topologie de la convergence en mesure sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}_+$, définie par les écarts

$$d(\omega,\omega')=\int_0^\infty e^{-pt}\,|f\circ X_t(\omega)-f\circ X_t(\omega')|\,dt$$

($p>0$, f continue sur F). Les fonctions $Z(\omega)$ étant alors continues, il suffit de montrer le résultat (intéressant par lui même) que l'application $x\mapsto P^x$ est *étroitement continue.* Cela se fait en deux étapes: construire des compacts portant toutes les lois P^x à ε près (condition de Prokhorov), au moyen des inégalités de Doob sur les nombres de montées et de descentes des surmartingales, qui valent uniformément en x. Puis montrer que si des x_n convergent vers x, les P^{x_n} convergeant étroitement vers une loi Q, on a $Q=P^x$.

Bibliographie

A. Voici d'abord les articles «sources» de cette théorie:

1. Ray, D.: Resolvents, transition functions, and strongly markovian processes. Ann. Math. **70**, 43–75 (1959).
2. Knight, F.: Note on regularisation of Markov processes. Ill. J. Math. **9**, 548–552 (1965).
3. Kunita, H., Watanabe, T.: Markov processes and Martin boundaries. Ill. J. Math. **9**, 485–526 (1965).
4. – – Some theorems concerning resolvents over locally compact spaces. Proc. 5th Berkeley Symp. **II**, 131–164 (1967).
5. Shih, C.T.: On extending potential theory to all strong Markov processes. Ann. Inst. Fourier **20**, 303–315 (1970).
6. Walsh, J.B.: Two footnotes to a theorem of Ray. Séminaire de Probabilités V, Université de Strasbourg, 1971, 283–289. Lecture Notes in Mathematics **191**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971.

Du côté des chaines de Markov, il faut citer:

7. Chung, K.L.: On the boundary theory for Markov chains I, II. Acta Math. **110**, 19–77 (1963) et **115**, 111–163 (1966).
8. Doob, J.L.: State spaces for Markov chains. Trans. Amer. Math. Soc. **149**, 111–121 (1970).
9. – Compactification of the discrete state space of a Markov process. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **10**, 236–251 (1968).
10. Walsh, J.B.: The Martin boundary and completion of Markov chains. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **14**, 169–188 (1970).

B. Nos références de base sont, pour les processus de Markov et les martingales

11. Blumenthal, R.M., Getoor, R.K.: Markov processes and potential theory. New York: Academic Press 1968.

12. Meyer, P.A.: Probability et potentiels. Paris: Hermann et Boston: Blaisdell 1966.

et pour la théorie générale des processus:

13. Dellacherie, C.: La théorie générale des processus (Erg. der Math., Berlin-Heidelberg-New York: Springer, à paraître).

En attendant ce livre, on pourra se reporter à:

14. Meyer, P.A.: Guide détaillé de la théorie générale des processus. Séminaire de probabilités II, Université de Strasbourg, 1968. Lecture Notes in Mathematics **51**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer.
15. — Un résultat élémentaire sur les temps d'arrêt. Séminaire de probabilités III, 1969. Lecture Notes in Mathematics **88**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1969.
16. Dellacherie, C.: Ensembles aléatoires. Séminaire de Probabilités III, Université de Strasbourg, 1969. Lecture Notes in Mathematics **88**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1969.

Enfin, pour les ensembles lusiniens, etc., notre référence est:

17. Bourbaki, N.: Topologie Générale, chap. IX (utilisation des nombres réels en topologie générale). Paris: Hermann 1958 (Act. Sci. Ind. 1045).

C. En ce qui concerne les trois «théorèmes classiques» du début de cet article, il n'existe guère de référence donnant exactement les formes souhaitées, sans aucun travail de la part du lecteur. Pour le théorème 1, voir [12], chap. X, n^{os} 17–19. Pour le reste, la meilleure référence est sans doute [4]. Le travail suivant donne exactement les énoncés voulus, mais à partir d'hypothèses un peu différentes.

18. Meyer, P.A.: Compactifications associées à une résolvante. Séminaire de Probabilités II, Université de Strasbourg, 1968. Lecture Notes in Mathematics **51**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968.

P.A. Meyer
Université de Strasbourg
z. Z. Math. Institut der Universität
BRD-7800 Freiburg i. Br.
Hermann-Herder-Str. 10
Allemagne

J.B. Walsh
Départment de Mathématique
Ecole Polytechnique Fédérale
26 avenue de Cour
CH-1007 Lausanne
Suisse

(Reçu le 10 juin 1971)