

Estimation de l'erreur d'interpolation d'Hermite dans \mathbb{R}^n

J.L. Gout

Département de Mathématiques, Université de Pau, BP 290, F-64016 Pau, France

Estimation of the Hermite Interpolation Error in \mathbb{R}^n

Summary. This paper is devoted to study the Hermite interpolation error in an open subset of \mathbb{R}^n .

It follows a previous work of Arcangeli and Gout [1]. Like this one, it is based principally on the paper of Ciarlet and Raviart [7].

We obtain two kinds of the Hermite interpolation error, the first from the Hermite interpolation polynomial, the other from approximation method using the Taylor polynomial.

Finally in the last part we study some numerical examples concerning straight finite element methods: in the first and second examples, we use finite elements which are included in the affine theory, but it is not the case in the last example. However, in this case, it is possible to refer to the affine theory by the way of particular study (cf. Argyris et al. [2]; Ciarlet [6]; Ciarlet and Raviart [7]; Raviart [11]).

Subject Classifications. AMS (Mos): 65D05, 65N30; CR: 5.13, 5.17.

1. Notations et préliminaires

La plupart des notations utilisées ici sont celles de Ciarlet [6], Ciarlet et Raviart [7], Raviart [11] (cf. également Arcangeli-Gout [1]).

Soient n un entier ≥ 1 et Ω un ouvert borné non vide de \mathbb{R}^n . On suppose \mathbb{R}^n muni de la norme euclidienne usuelle, notée $\|\cdot\|$, et on désigne par h le diamètre de Ω .

Rappelons tout d'abord quelques définitions de calcul différentiel. Etant donnés deux espaces vectoriels X et Y sur un même corps de scalaires, et l un entier ≥ 1 , on note $\mathcal{L}_l(X; Y)$ l'espace des applications l -linéaires de X^l dans Y où X^l désigne le produit cartésien, effectué l -fois, de X par lui-même. Quand $l=1$ on écrira $\mathcal{L}(X; Y)$ au lieu de $\mathcal{L}_1(X; Y)$.

Etant donnée une fonction $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, sa $l^{\text{ième}}$ dérivée $D^l u(x)$ en un point x de Ω (lorsqu'elle est définie) est un élément de $\mathcal{L}_l(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. On écrira en particulier:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad D^l u(x) \cdot \underbrace{(\xi, \xi, \dots, \xi)}_{l \text{ fois}} = D^l u(x) \cdot (\xi)^l$$

et pour tout $r < l$:

$$\begin{aligned} \forall \xi_i \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \leq i \leq r, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \\ D^l u(x) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_r, \underbrace{\xi, \dots, \xi}_{(l-r) \text{ fois}}) = D^l u(x) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_r, (\xi)^{l-r}). \end{aligned}$$

La norme de $D^l u(x)$ dans l'espace $\mathcal{L}_l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dont la norme est également notée $\|\cdot\|$, est définie par

$$\|D^l u(x)\| = \sup_{\substack{\|\xi_i\|=1 \\ \xi_i \in \mathbb{R}^n, 1 \leq i \leq l}} |D^l u(x) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_l)|.$$

De plus, pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n},$$

de même pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on définit x^α par:

$$(1-1) \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

et on note

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \quad \text{et} \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!.$$

Enfin si $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ désigne l'ensemble des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n on a:

$$\partial^\alpha u(x) = D^{|\alpha|} u(x) \cdot \underbrace{(e_1, \dots, e_1)}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{(e_i, \dots, e_i)}_{\alpha_i \text{ fois}}, \dots, \underbrace{(e_n, \dots, e_n)}_{\alpha_n \text{ fois}}.$$

D'autre part, soit p un nombre tel que $1 \leq p \leq +\infty$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev des (classes) de fonctions u qui appartient à $L^p(\Omega)$ ainsi que toutes leurs dérivées partielles $\partial^\alpha u$ d'ordre $|\alpha| \leq m$, muni de sa topologie naturelle. On munit également $W^{m,p}(\Omega)$ des semi-normes:

$$|u|_{l,p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \|D^l u(x)\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 \leq l \leq m,$$

lorsque $p < +\infty$, avec la modification habituelle lorsque $p = +\infty$. Toutefois pour K compact de \mathbb{R}^n , on écrira pour simplifier, comme c'est l'usage, $W^{m,p}(K)$ (ou $H^m(K)$ dans le cas $p=2$) au lieu de $W^{m,p}(\overset{\circ}{K})$, $\overset{\circ}{K}$ désignant l'intérieur de K , et $|\cdot|_{l,p,K}$ au lieu de $|\cdot|_{l,p,\overset{\circ}{K}}$.

Soit enfin k un entier ≥ 1 . On désigne par P_k l'espace des polynômes de degré $\leq k$ en les n variables x_1, \dots, x_n .

Donnons maintenant quelques définitions et notations spécifiques à l'interpolation d'Hermite (cf. Ciarlet [6]; Ciarlet et Raviart [7]; Raviart [11]). Etant donné un entier s tel que $1 \leq s \leq k$, on se donne un ensemble fini \sum de N formes linéaires sur $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$, linéairement indépendantes, définies à partir d'un ensemble $\{\alpha_i^0\}_{\substack{0 \leq r \leq s \\ 1 \leq i \leq N_r}}$ de points de $\bar{\Omega}$ (les «noeuds» de l'élément fini), N_r représentant le nombre de noeuds à r fixé:

$$(1-2) \quad \begin{aligned} \phi_i^0: v \mapsto \phi_i^0(v) &= v(\alpha_i^0) & 1 \leq i \leq N_0, \\ \phi_{ij}^r: v \mapsto \phi_{ij}^r(v) &= D^r v(\alpha_i^r) \cdot \zeta_{ij}^r & 1 \leq r \leq s, 1 \leq i \leq N_r, 1 \leq j \leq d_{ir} \end{aligned}$$

où v est une fonction suffisamment régulière sur $\bar{\Omega}$, où d_{ir} désigne le nombre de formes linéaires associées au noeud α_i^r et où les ζ_{ij}^r dépendent de la géométrie de l'ensemble des noeuds. On a ainsi:

$$(1-3) \quad \sum = \{\phi_i^0\}_{1 \leq i \leq N_0} \cup \{\phi_{ij}^r\}_{1 \leq r \leq s, 1 \leq i \leq N_r, 1 \leq j \leq d_{ir}}$$

et

$$N = N_0 + \sum_{r=1}^s \left(\sum_{i=1}^{N_r} d_{ir} \right).$$

D'autre part P étant un espace de fonctions définies sur $\bar{\Omega}$,

on dira que l'ensemble \sum est P -unisolvant si quels que soient les scalaires α_i^0 ($1 \leq i \leq N_0$) et α_i^r ($1 \leq r \leq s, 1 \leq i \leq N_r, 1 \leq j \leq d_{ir}$) donnés, il existe une fonction unique $v \in P$ telle que:

$$(1-4) \quad \begin{aligned} \phi_i^0(v) &= \alpha_i^0, & 1 \leq i \leq N_0 \\ \phi_{ij}^r(v) &= \alpha_{ij}^r, & 1 \leq r \leq s, 1 \leq i \leq N_r, 1 \leq j \leq d_{ir}. \end{aligned}$$

L'ensemble \sum étant P -unisolvant on a $\dim P = N$.

De façon équivalente montrer que \sum est P -unisolvant revient à montrer l'existence d'un ensemble $\mathcal{B} = \{p_i^0\}_{1 \leq i \leq N_0} \cup \{p_{ij}^r\}_{1 \leq r \leq s, 1 \leq i \leq N_r, 1 \leq j \leq d_{ir}}$ de N fonctions de P qui satisfont à :

$$\begin{aligned} \phi_i^0(p_j^0) &= \delta_{ij} & 1 \leq i, j \leq N_0 \\ \phi_i^0(p_{jk}^r) &= 0 & 1 \leq i \leq N_0, 1 \leq r \leq s, 1 \leq j \leq N_r, 1 \leq k \leq d_{ir} \\ \phi_{ij}^r(p_k^0) &= 0 & 1 \leq r \leq s, 1 \leq i \leq N_r, 1 \leq j \leq d_{ir}, 1 \leq k \leq N_0 \\ \phi_{ij}^r(p_{ki}^{r'}) &= \delta_{rr'} \delta_{ik} \delta_{jl} & 1 \leq r, r' \leq s, 1 \leq i \leq N_r, 1 \leq k \leq N_r, 1 \leq j \leq d_{ir}, 1 \leq l \leq d_{ir}. \end{aligned}$$

\mathcal{B} est l'ensemble des fonctions de base de P relativement à \sum . Si on se donne alors une fonction v définie sur $\bar{\Omega}$ suffisamment régulière on définit son P -interpolé d'Hermite relativement à \sum , noté Πv , par:

$$\begin{aligned} \phi_i^0(\Pi v) &= \phi_i^0(v), & 1 \leq i \leq N_0 \\ \phi_{ij}^r(\Pi v) &= \phi_{ij}^r(v), & 1 \leq r \leq s, 1 \leq i \leq N_r, 1 \leq j \leq d_{ir} \end{aligned}$$

soit encore:

$$(1-5) \quad \Pi v = \sum_{i=1}^{N_0} \phi_i^0(v) p_i^0 + \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \phi_{ij}^r(v) p_{ij}^r.$$

On définit ainsi l'opérateur de P -interpolation d'Hermite relativement à Σ .

2. Etude directe de l'erreur d'interpolation

On suppose que

$$(2-1) \quad k+1 > s + \frac{n}{p}$$

(2-2) Ω est un ouvert borné non vide de \mathbb{R}^n , à frontière lipschitzienne, tel que $\bar{\Omega}$ soit étoilé par rapport à chacun des noeuds a_i^r de l'interpolation.

(2-3) Σ est un ensemble P -unisolvant (cf. (1-4)), Σ étant défini par (1-2) et (1-3) et P tel que $P_k \subset P \subset \mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$.

Pour tout $r=0, 1, \dots, s$, pour tout $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$, pour tout $a \in \bar{\Omega}$ tel que $\bar{\Omega}$ soit étoilé par rapport au point a , pour tout $x \in \Omega$, on pose:

$$(2-4) \quad J_r(u, a)(x) = \int_0^1 (1-t)^{k-r} D^{k+1} u[x+t(a-x)] \cdot (a-x)^{k-r+1} dt;$$

ainsi $J_r(u, a)(x) \in \mathcal{L}_r(\mathbb{R}^n, R)$.

Compte tenu de (2-2) et (2-3) l'application à $D^r u$ de la formule de Taylor à l'ordre $k-r$ avec reste intégral, donne, pour tout $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ et pour tout $x \in \Omega$ les relations:

$$(2-5) \quad D^r u(a_i^r) = D^r u(x) + \dots + \frac{1}{(k-r)!} D^k u(x) \cdot (a_i^r - x)^{k-r} + \frac{1}{(k-r)!} J_r(u, a_i^r)(x),$$

avec $0 \leq r \leq s$, $1 \leq i \leq N_r$.

Il vient alors la

Proposition 2-1. On suppose vérifiées les hypothèses (2-1) et (2-2). Alors pour tout $r=0, 1, \dots, s$, pour tout $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ et pour tout $a \in \bar{\Omega}$ tel que $\bar{\Omega}$ soit étoilé par rapport au point a

$$(2-6) \quad \left(\int_{\Omega} \|J_r(u, a)(x)\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{k+1-r-\frac{n}{p}} |u|_{k+1, p, \Omega} h^{k+1-r}$$

Démonstration. Le principe de la démonstration est le même que celui utilisé pour la proposition 1-1 de [1]. On a compte tenu de (2-4):

$$\|J_r(u, a)(x)\| \leq \int_0^1 (1-t)^{k-r} \|D^{k+1} u[x+t(a-x)]\| h^{k+1-r} dt.$$

On prend alors la norme $L^p(\Omega)$ des deux membres considérés comme fonction de x et l'on reprend alors la démonstration de la proposition 1-1 de [1] avec ici $\varepsilon = \frac{1}{q} \left[(k+1-r) - \frac{n}{p} \right]$ et on obtient le résultat compte tenu de l'hypothèse (2-1). \square

Indiquons maintenant quelques notations utilisées dans la démonstration de la proposition suivante. On désignera par Δ_n l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ et pour tout $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \in (\Delta_n)^r$ on notera e_λ^r l'élément de $(\mathbb{N}^n)^r$ défini par

$$e_\lambda^r = (e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_r}), \quad 1 \leq r \leq s,$$

où les $e_{\lambda_i}, 1 \leq i \leq r$, appartiennent à la base canonique de \mathbb{R}^n .

D'autre part, on notera $e_{\lambda,r}$ l'élément de \mathbb{N}^n défini par:

$$e_{\lambda,r} = e_{\lambda_1} + \dots + e_{\lambda_r}.$$

Si on considère alors $x = (x_1, \dots, x_r) \in (\mathbb{R}^n)^r$, on définit $x^{e_\lambda^r}$ par

$$x^{e_\lambda^r} = x_1^{e_{\lambda_1}} \dots x_r^{e_{\lambda_r}},$$

où $x_i^{e_{\lambda_i}}$ est défini par (1-1).

Enfin pour α et $\beta \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ on définit la relation d'ordre α sur \mathbb{N}^n par

$$\alpha \alpha \beta \Leftrightarrow (\alpha_i \leq \beta_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n).$$

On peut alors montrer le résultat suivant (cf. Ciarlet et Raviart [7]):

Proposition 2-2. Les hypothèses (2-1), (2-2) et (2-3) étant supposées vérifiées, pour tout $u \in \mathcal{C}^{k+1}(\bar{\Omega})$ et pour tout $m = 0, 1, \dots, k$ on a pour tout $x \in \Omega$:

$$(2-7) \quad D^m u(x) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \left(\sum_{i=1}^{N_0} [D^i u(x) \cdot (a_i^0 - x)^i] D^m p_i^0(x) \right) + \sum_{r=1}^s \left\{ \sum_{l=r}^k \frac{1}{(l-r)!} \left(\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} [D^i u(x) \cdot ((a_i^r - x)^{l-r}, \xi_{ij}^r)] D^m p_{ij}^r(x) \right) \right\}.$$

Démonstration ¹. Compte tenu de (1-2) et (1-5) le polynôme de P -interpolation d'Hermite relativement à $\sum_r P_r$ est défini par:

$$\Pi u = \sum_{i=1}^{N_0} u(a_i^0) p_i^0 + \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} (D^r u(a_i^r) \cdot \xi_{ij}^r) p_{ij}^r.$$

Si, pour tout $z \in \Omega$, on considère alors l'élément Ψ_z de P_k défini sur Ω par

$$\Psi_z(x) = (x-z)^\alpha \quad \text{avec } |\alpha| \leq k,$$

comme $P \supset P_k$, on a en particulier:

$$(2-8) \quad \Psi_z(x) = \sum_{i=1}^{N_0} \Psi_z(a_i^0) p_i^0(x) + \sum_{r=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} (D^r \Psi_z(a_i^r) \cdot \xi_{ij}^r) p_{ij}^r(x) \right\}.$$

¹ On utilise ici une suggestion de J. Meinguet (communication personnelle)

Soit $\beta \in \mathbb{N}^n$. On dérive β fois les deux membres de (2-8) par rapport à x et on obtient :

$$\partial^\beta \Psi_z(x) = \sum_{i=1}^{N_0} \Psi_z(a_i^0) \partial^\beta p_i^0(x) + \sum_{r=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} (D^r \Psi_z(a_i^r) \cdot \zeta_{ij}^r) \partial^\beta p_{ij}^r(x) \right\}.$$

Or, pour $1 \leq r \leq s$,

$$D^r \Psi_z(a_i^r) \cdot \zeta_{ij}^r = \sum_{\substack{|e_{\lambda,r}|=r \\ e_{\lambda,r} \leq \alpha}} \frac{\alpha!}{(\alpha - e_{\lambda,r})!} (a_i^r - z)^{\alpha - e_{\lambda,r}} (\zeta_{ij}^r)^{e_{\lambda,r}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \partial^\beta \Psi_z(x) &= \sum_{i=1}^{N_0} (a_i^0 - z)^\alpha \partial^\beta p_i^0(x) \\ &+ \sum_{r=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \left(\sum_{\substack{|e_{\lambda,r}|=r \\ e_{\lambda,r} \leq \alpha}} \frac{\alpha!}{(\alpha - e_{\lambda,r})!} (a_i^r - z)^{\alpha - e_{\lambda,r}} (\zeta_{ij}^r)^{e_{\lambda,r}} \right) \partial^\beta p_{ij}^r(x) \right\}. \end{aligned}$$

D'où en faisant tendre z vers x :

$$(2-9) \quad \alpha! \delta_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N_0} (a_i^0 - x)^\alpha \partial^\beta p_i^0(x) + \sum_{r=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \left(\sum_{\substack{|e_{\lambda,r}|=r \\ e_{\lambda,r} \leq \alpha}} \frac{\alpha!}{(\alpha - e_{\lambda,r})!} (a_i^r - x)^{\alpha - e_{\lambda,r}} (\zeta_{ij}^r)^{e_{\lambda,r}} \right) \partial^\beta p_{ij}^r(x) \right\},$$

où $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$ et $\delta_{\alpha\beta} = 1$ si $\alpha = \beta$.

Soit alors $0 \leq l \leq k$ et $|\beta| = m \leq k$; de (2-9) on déduit en multipliant les deux membres par $\sum_{|\alpha|=l} \frac{\partial^\alpha u(x)}{\alpha!}$:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=l} \partial^\alpha u(x) \delta_{\alpha\beta} &= \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{|\alpha|=l} \frac{\partial^\alpha u(x)}{\alpha!} (a_i^0 - x)^\alpha \partial^\beta p_i^0(x) \\ &+ \sum_{r=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \left[\sum_{|\alpha|=l} \partial^\alpha u(x) \left(\sum_{\substack{|e_{\lambda,r}|=r \\ e_{\lambda,r} \leq \alpha}} \frac{(a_i^r - x)^{\alpha - e_{\lambda,r}} (\zeta_{ij}^r)^{e_{\lambda,r}}}{(\alpha - e_{\lambda,r})!} \right) \right] \partial^\beta p_{ij}^r(x) \right\}. \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{|\alpha|=l} \frac{\partial^\alpha u(x)}{\alpha!} (a_i^0 - x)^\alpha = \frac{D^l u(x)}{l!} \cdot (a_i^0 - x)^l$$

et

$$\frac{D^l u(x) \cdot ((a_i^r - x)^{l-r}, \zeta_{ij}^r)}{(l-r)!} = \sum_{|\alpha|=l} \partial^\alpha u(x) \left[\sum_{\substack{|e_{\lambda,r}|=r \\ e_{\lambda,r} \leq \alpha}} \frac{(a_i^r - x)^{\alpha - e_{\lambda,r}} (\zeta_{ij}^r)^{e_{\lambda,r}}}{(\alpha - e_{\lambda,r})!} \right].$$

D'où

$$\begin{aligned} \partial^\beta u(x) \delta_{im} = & \sum_{i=1}^{N_0} \left(\frac{D^l u(x) \cdot (a_i^0 - x)^l}{l!} \right) \partial^\beta p_i^0(x) \\ & + \sum_{r=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \left(\frac{D^l u(x) \cdot ((a_i^r - x)^{l-r} \cdot \xi_{ij}^r)}{(l-r)!} \right) \partial^\beta p_{ij}^r(x) \right\}. \end{aligned}$$

Utilisant alors la définition de la dérivée $m^{\text{ième}}$ d'une fonction f en un point $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\forall y_i = (y_{i1}, \dots, y_{in}) \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$D^m f(x) \cdot (y_1, \dots, y_m) = \sum \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{j_m}} f(x) y_{1, j_1} \dots y_{m, j_m},$$

où la sommation est étendue à toutes les suites distinctes $\{j_1, \dots, j_m\}$ d'entiers de $\{1, \dots, n\}$, le résultat suit. \square

On a alors le

Théorème 2-1. On suppose vérifiées les hypothèses (2-1), (2-2) et (2-3). Soient Π l'opérateur de P -interpolation d'Hermite relativement à \sum et \mathcal{B} l'ensemble des fonctions de base de P relativement à \sum (cf. § 1).

Alors pour tout $u \in W^{k+1, p}(\Omega)$ et pour tout $m = 0, 1, \dots, k$, on a :

$$\begin{aligned} (2-10) \quad |u - \Pi u|_{m, p, \Omega} \leq & \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1 - \frac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N_0} |p_i^0|_{m, \infty, \Omega} \right) |u|_{k+1, p, \Omega} h^{k+1} \\ & + \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \frac{1}{k+1-r - \frac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} |p_{ij}^r|_{m, \infty, \Omega} [\xi_{ij}^r] \right) |u|_{k+1, p, \Omega} h^{k+1-r}, \end{aligned}$$

$$\text{où } [\xi_{ij}^r] = \|\xi_{ij,1}^r\| \dots \|\xi_{ij,r}^r\| \quad \text{avec} \quad \xi_{ij}^r = (\xi_{ij,1}^r, \dots, \xi_{ij,r}^r) \in (\mathbb{R}^n)^r.$$

Démonstration. 1. On montre d'abord (2-10) pour $u \in \mathcal{C}^{k+1}(\bar{\Omega})$ et $p < +\infty$.

On reprend la démonstration du théorème 3 de Ciarlet et Raviart [7]. On a

$$\Pi u = \sum_{i=1}^{N_0} u(a_i^0) p_i^0 + \sum_{r=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} (D^r u(a_i^r) \cdot \xi_{ij}^r) p_{ij}^r \right\},$$

d'où sur Ω pour tout $m = 0, 1, \dots, k$

$$(2-11) \quad D^m \Pi u = \sum_{i=1}^{N_0} u(a_i^0) D^m p_i^0 + \sum_{r=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} (D^r u(a_i^r) \cdot \xi_{ij}^r) D^m p_{ij}^r \right\}.$$

Appliquant alors la formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre $k-r$, à $D^r u$ aux points a_i^r on obtient compte tenu de (2-4) les relations

$$D^r u(a_i^r) = D^r u(x) + \dots + \frac{1}{(k-r)!} D^k u(x) \cdot (a_i^r - x)^{k-r} + \frac{1}{(k-r)!} J_r(u, a_i^r)(x),$$

avec $0 \leq r \leq s, 1 \leq i \leq N_r$.

A partir de (2-11) il vient pour tout $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned} D^m \Pi u(x) &= \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \left[\sum_{j=1}^{N_0} (D^i u(x) \cdot (a_i^0 - x)^j) D^m p_i^0(x) \right] \\ &+ \sum_{r=1}^s \left\{ \sum_{i=r}^k \frac{1}{(k-r)!} \left[\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} (D^i u(x) \cdot ((a_i^r - x)^{i-r}, \zeta_{ij}^r)) D^m p_{ij}^r(x) \right] \right\} \\ &+ \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{N_0} [J_0(u, a_i^0)(x) D^m p_i^0(x)] + \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} (J_r(u, a_i^r)(x) \cdot \zeta_{ij}^r) D^m p_{ij}^r(x) \right\}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 2-2 on a pour tout $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned} D^m \Pi u(x) - D^m u(x) &= \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{N_0} [J_0(u, a_i^0)(x) D^m p_i^0(x)] \\ &+ \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} (J_r(u, a_i^r)(x) \cdot \zeta_{ij}^r) D^m p_{ij}^r(x) \right\}, \end{aligned}$$

ce qui donne, compte tenu de ce que $[\zeta_{ij}^r] = \|\zeta_{ij,1}^r\| \cdots \|\zeta_{ij,r}^r\|$,

$$\begin{aligned} \|D^m(u - \Pi u)(x)\| &\leq \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{N_0} \|J_0(u, a_i^0)(x)\| \|D^m p_i^0(x)\| \\ &+ \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \|J_r(u, a_i^r)(x)\| [\zeta_{ij}^r] \|D^m p_{ij}^r(x)\| \right\}. \end{aligned}$$

Après avoir majoré $\|D^m p_{ij}^r(x)\|$ par $|p_{ij}^r|_{m, \infty, \Omega}$, si on prend les normes $L^p(\Omega)$ des deux membres considérés comme fonctions de x on obtient:

$$\begin{aligned} |u - \Pi u|_{m, p, \Omega} &\leq \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{N_0} \left(\int_{\Omega} \|J_0(u, a_i^0)(x)\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |p_i^0|_{m, \infty, \Omega} \\ &+ \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \left(\int_{\Omega} \|J_r(u, a_i^r)(x)\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} [\zeta_{ij}^r] |p_{ij}^r|_{m, \infty, \Omega} \right\}, \end{aligned}$$

d'où le résultat, en utilisant la proposition 2-1.

2. On en déduit le cas général en distinguant les cas $p < +\infty$ et $p = +\infty$ comme dans la démonstration du théorème 1-1 de [1] en remarquant qu'ici $W^{k+1, p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^s(\bar{\Omega})$ et que P étant de dimension finie on a toujours

$$\Pi \in \mathcal{L}(W^{k+1, p}(\Omega), W^{m, p}(\Omega)).$$

Remarque 2-1. Plaçons-nous dans le cadre de la «théorie affine» (cf. Ciarlet [6]; Ciarlet et Raviart [7]; Raviart [11]): on exclut donc ici le cas où l'ensemble $\bar{\Sigma}$ contient des formes linéaires faisant intervenir des dérivées normales. On peut alors reprendre les résultats de la remarque 1-1 de [1].

On constate encore que le théorème 2-1 s'applique à la méthode des éléments finis droits et que lorsque $\bar{\Omega}$ est un élément quelconque K d'une triangulation \mathcal{T}_h , élément d'une suite régulière de triangulation (\mathcal{T}_h) d'un ouvert polyédrique de \mathbb{R}^n (cf. Ciarlet [6]; Ciarlet et Raviart [7]; Raviart [11]), la formule (2-10) conduit à des majorations uniformes de l'erreur d'interpolation (il faut entendre par là que ces majorations sont de la forme

$$|u - \Pi u|_{m, p, K} \leq \mathcal{C}(n, k, m, p, s) |u|_{k+1, p, K} h^{k+1-m},$$

où $\mathcal{C}(n, k, m, p, s)$ ne dépend pas de \sum et de K). Il suffit pour le vérifier, d'utiliser un changement de variables qui ramène le calcul des $|p_i^0|_{m, \infty, \Omega}$ et des $|p_{ij}^r|_{m, \infty, \Omega}$ à un calcul dans un n -simplexe de référence et de tenir compte de résultats de Ciarlet et Raviart [7] pour l'expression des $[\xi_{ij}^r]$. En particulier lorsque, comme c'est souvent le cas dans les applications, les ξ_{ij}^r ont pour différentes composantes des vecteurs dont l'origine et l'extrémité sont des nœuds a_i^r (donc dans K) on a alors pour tout $r = 1, \dots, s$:

$$(2-12) \quad [\xi_{ij}^r] \leq h^r, \quad 1 \leq i \leq N_r \text{ et } 1 \leq j \leq d_{ir},$$

d'où (2-10) devient:

$$(2-13) \quad |u - \Pi u|_{m, p, K} \leq \left\{ \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} \sum_{i=1}^{N_0} |p_i^0|_{m, \infty, \Omega} + \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \frac{1}{k+1-r-\frac{n}{p}} \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} |p_{ij}^r|_{m, \infty, K} \right\} \cdot |u|_{k+1, p, K} h^{k+1}.$$

Remarque 2-2 (toujours dans le cadre de la théorie affine). Ici également on peut reprendre les résultats de la remarque 1-2 de [1]. En effet on peut calculer effectivement à partir des relations (2-10) des majorations de l'erreur d'interpolation d'Hermite dans la méthode des éléments finis droits. $K = \bar{\Omega}$ et (\mathcal{T}_h) étant définis comme dans la remarque 2-1, et les ξ_{ij}^r vérifiant (2-12), si les fonctions de base p_i^0 et p_{ij}^r sont explicitées sous la forme

$$p_i^0(x) = f_i^0(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)) \quad 1 \leq i \leq N_0,$$

$$p_{ij}^r(x) = f_{ij}^r(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)) \quad 1 \leq r \leq s, 1 \leq i \leq N_r, 1 \leq j \leq d_{ir},$$

où les fonctions f_i^0 et f_{ij}^r sont de classe C^k et indépendantes de \sum et de K et où $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)$ désignent les coordonnées barycentriques de x par rapport aux sommets du n -simplexe K , on obtient des résultats analogues à ceux de la remarque 1-2 de [1], soient pour tout $m = 0, 1, \dots, k$:

$$(2-14) \quad |u - \Pi u|_{m, p, K} \leq C(n, k, m, p, s, K) |u|_{k+1, p, K} \frac{h^{k+1}}{\rho^m},$$

avec

$$(2-15) \quad C(n, k, m, p, s, K) = \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} \sum_{i=1}^{N_0} \left[\max_{x \in K} \left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^\alpha f_i^0(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x))| \right) \right] + \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \frac{1}{k+1-r-\frac{n}{p}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \max_{x \in K} \left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^\alpha f_{ij}^r(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x))| \right) \right]$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$.

La relation (2-15) permet de vérifier à nouveau, la suite (\mathcal{F}_h) étant régulière, que les majorations (2-14) sont uniformes. En effet le second membre de (2-15) est en fait independant de K puisque, dans le cadre de la théorie affine et de par l'utilisation des coordonnées barycentriques, il ne dépend que d'un n -simplexe fixe. On retrouve ainsi le théorème 6 de Ciarlet et Raviart [7].

3. Etude basée sur l'approximation

Soient toujours n, k, p, s, Ω et h définis comme dans le paragraphe 1. Pour tout $u \in W^{k+1, p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$ et pour presque tout $a \in \Omega$, on note $\Psi_T(u, a)$ le « polynôme de Taylor à l'ordre k de u au point a » défini par :

$$(3-1) \quad \forall x \in \Omega, \quad \Psi_T(u, a)(x) = \sum_{l=0}^k \frac{D^l u(a) \cdot (x-a)^l}{l!},$$

et $D^m \Psi_T(u, a)(x)$ la dérivée $m^{\text{ième}}$ de l'application $x \mapsto \Psi_T(u, a)(x)$.

On vérifie que l'application $(x, a) \mapsto \|D^m \Psi_T(u, a)(x)\|$ appartient à $L^p(\Omega \times \Omega)$. Utilisant alors la proposition 2-1 de [1] il vient le

Théorème 3-1. On suppose que les hypothèses (2-1), (2-2) et (2-3) sont vérifiées, que de plus Ω est convexe et que Π est l'opérateur de P -interpolation d'Hermite relativement à Σ . Alors pour tout $u \in W^{k+1, p}(\Omega)$, pour tout entier $m \geq 0$ tel que $k+1 > m + \frac{n}{p}$ et pour tout $q \geq 1$, on a :

$$(3-2) \quad |u - \Pi u|_{m, q, \Omega} \leq (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \frac{1}{(k-m)!} \frac{1}{k+1-m-\frac{n}{p}} |u|_{k+1, p, \Omega} h^{k+1-m} \\ + \frac{1}{(\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n_0} |p_i^0|_{m, q, \Omega} \right) |u|_{k+1, p, \Omega} h^{k+1} + \frac{1}{(\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}}} \\ \cdot \left\{ \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \frac{1}{k+1-r-\frac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} |p_{ij}^r|_{m, q, \Omega} [\xi_{ij}^r] \right) h^{k+1-r} \right\} |u|_{k+1, p, \Omega}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$, le cas général s'obtenant en raisonnant par densité lorsque $p < +\infty$ et en passant à la limite sur p pour $p = +\infty$. Soit donc $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$.

Pour tout $\Psi \in P$ on a

$$\Pi \Psi = \Psi$$

en particulier, pour $\Psi = \Psi_T(u, a)$. Il vient alors :

$$u - \Pi u = u - \Psi_T(u, a) + \Pi(u - \Psi_T(u, a))$$

et pour tout $x \in \Omega$

$$(3-3) \quad D^m(u - \Pi u)(x) = D^m(u - \Psi_T(u, a))(x) + D^m \Pi(u - \Psi_T(u, a))(x).$$

Or

$$D^m \Pi(u - \Psi_T(u, a))(x) = \sum_{i=1}^{N_0} (u - \Psi_T(u, a))(a_i^0) D^m p_i^0(x) + \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} D^r (u - \Psi_T(u, a))(a_i^r) \cdot \xi_{ij}^r D^m p_{ij}^r(x).$$

D'où

$$\|D^m \Pi(u - \Psi_T(u, a))(x)\| \leq \sum_{i=1}^{N_0} \frac{1}{k!} |J_0(u, a_i^0)(a)| \|D^m p_i^0(x)\| + \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \frac{1}{(k-r)!} \|J_r(u, a_i^r)(a)\| [\xi_{ij}^r] \|D^m p_{ij}^r(x)\|.$$

D'après (3-3) on a donc:

$$(3-4) \quad \|D^m(u - \Pi u)(x)\| \leq \|D^m(u - \Psi_T(u, a))(x)\| + \sum_{i=1}^{N_0} \frac{1}{k!} |J_0(u, a_i^0)(a)| \|D^m p_i^0(x)\| + \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \frac{1}{(k-r)!} \|J_r(u, a_i^r)(a)\| [\xi_{ij}^r] \|D^m p_{ij}^r(x)\|.$$

Prenant alors les normes $L^p(\Omega)$ des deux membres de (3-4) considérés comme fonction de a et utilisant la proposition 2-1 de [1] et les majorations (2-6) de la proposition 2-1 il vient:

$$(\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}} \|D^m(u - \Pi u)(x)\| \leq \frac{1}{(k-m)!} \frac{1}{k+1-m-\frac{n}{p}} |u|_{k+1, p, \Omega} h^{k+1-m} + \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N_0} \|D^m p_i^0(x)\| \right) |u|_{k+1, p, \Omega} h^{k+1} + \sum_{r=1}^s \left\{ \frac{1}{(k-r)!} \frac{1}{k+1-r-\frac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \|D^m p_{ij}^r(x)\| [\xi_{ij}^r] \right) h^{k+1-r} \right\} |u|_{k+1, p, \Omega}.$$

Prenant alors les normes $L^q(\Omega)$ des deux membres par rapport à x on obtient

$$|u - \Pi u|_{m, q, \Omega} \leq (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \frac{1}{(k-m)!} \frac{1}{k+1-m-\frac{n}{p}} |u|_{k+1, p, \Omega} h^{k+1-m} + \frac{1}{(\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N_0} |p_i^0|_{m, q, \Omega} \right) |u|_{k+1, p, \Omega} h^{k+1} + \frac{1}{(\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}}} \sum_{r=1}^s \left\{ \frac{1}{(k-r)!} \frac{1}{k+1-r-\frac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} |p_{ij}^r|_{m, q, \Omega} [\xi_{ij}^r] \right) h^{k+1-r} \right\} \cdot |u|_{k+1, p, \Omega}.$$

Le résultat suit compte tenu du fait que $W^{k+1, p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m, q}(\bar{\Omega})$ puisque $k+1 > m + \frac{n}{p}$ et que Ω est borné.

Remarque 3-1. Comme dans la remarque 2-1 on se place dans le cadre de la théorie affine. Le théorème 3-1 s'applique, comme le théorème 2-1, à la méthode des éléments finis droits. Lorsque la suite de triangulations est régulière, pour les mêmes raisons que celles indiquées dans la remarque 2-1 la formule (3-2) fournit des majorations uniformes de l'erreur d'interpolation dans un n -simplexe. De même, moyennant (2-12), on obtient une formule analogue à (2-13). En effet (3-2) devient:

$$(3-5) \quad |u - \Pi u|_{m, q, K} \leq (\text{mes } K)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \frac{1}{(k-m)!} \frac{1}{k+1-m-\frac{n}{p}} |u|_{k+1, p, K} h^{k+1-m} \\ + \frac{1}{(\text{mes } K)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N_0} |p_i^0|_{m, q, K} \right) \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \frac{1}{k+1-r-\frac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} |p_{ij}^r|_{m, q, K} \right) \right\} \\ \cdot |u|_{k+1, p, K} h^k.$$

Remarque 3-2 (toujours dans le cadre de la théorie affine). Supposant réalisées les conditions indiquées dans la remarque 2-2 en particulier pour l'expression des fonctions de base, il vient pour tout $u \in W^{k+1, p}(K)$, pour tout entier $m \geq 0$ tel que $k+1 > m + \frac{n}{p}$ et pour tout $q \geq 1$:

$$(3-6) \quad |u - \Pi u|_{m, q, K} \\ \leq \left\{ (\text{mes } K)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \frac{1}{(k-m)!} \frac{1}{k+1-m-\frac{n}{p}} + \mathcal{C}'(n, k, m, p, q, s, K) \left(\frac{h}{\rho} \right)^m \right\} \\ \cdot |u|_{k+1, p, K} h^{k+1-m}$$

où

$$(3-7) \quad \mathcal{C}'(n, k, m, p, q, s, K) = \frac{1}{(\text{mes } K)^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} \\ \cdot \sum_{i=1}^{N_0} \left\{ \int \left[\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^\alpha f_i^0(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x))| \right]^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \\ + \frac{1}{(\text{mes } K)^{\frac{1}{p}}} \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \frac{1}{k+1-r-\frac{n}{p}} \\ \cdot \left(\sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \left\{ \int \left[\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^\alpha f_{ij}^r(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x))| \right]^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \right).$$

Pour calculer les constantes définies par (3-7) on peut utiliser les formules de Zienkiewicz [13] données dans la remarque 2-2 de [1].

La relation (3-7) permet de vérifier également ici que, la suite (\mathcal{T}_h) étant régulière, les majorations (3-6) sont uniformes pour des raisons analogues à celles indiquées dans la remarque 2-2; il suffit de remarquer que

$$(\text{mes } K)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \leq h^{q(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})}.$$

D'autre part on doit noter que le théorème 3-1, en raison de l'hypothèse $k + 1 > m + \frac{n}{p}$, peut n'avoir lieu que pour $m = 0, 1, \dots, s$ alors que le théorème 2-1 est toujours valable pour $m = 0, 1, \dots, k$.

4. Exemples numériques

Exemple 1: Triangle d'Hermite de type (3)

Soit K un triangle quelconque de \mathbb{R}^2 , de diamètre h et soit ρ le diamètre du cercle inscrit dans K .

L'ensemble des nœuds de l'élément fini est formé des trois sommets a_1, a_2, a_3 et du barycentre a_4 du triangle.

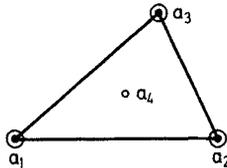
L'ensemble \sum des degrés de liberté de l'élément fini est défini par:

$$\sum = \{\phi_i^0\}_{1 \leq i \leq 4} \cup \{\phi_{ij}^1\}_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2}$$

où les ϕ_i^0 et les ϕ_{ij}^1 sont définies par les formules (1-2) avec ici

$$a_i^0 = a_i^1 = a_i \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$a_4^0 = a_4$$



et

$$\xi_{ij}^1 = a_j - a_i \quad 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j.$$

L'ensemble \sum étant P_3 -unisolvant on peut successivement appliquer les théorèmes 2-1 et 3-1 avec $P = P_3$ et par exemple $p = q = 2$. De plus on se trouve bien ici dans le cadre de la théorie affine.

1) Application du théorème 2-1

Utilisant les majorations (2-15) on obtient les résultats suivants pour tout $u \in H^4(K)$

$$|u - \Pi u|_{0, 2, K} \leq \frac{4}{9} |u|_{4, 2, K} h^4,$$

$$|u - \Pi u|_{1, 2, \kappa} \leq \frac{73}{24} |u|_{4, 2, \kappa} \frac{h^4}{\rho}$$

$$|u - \Pi u|_{2, 2, \kappa} \leq 19 |u|_{4, 2, \kappa} \frac{h^4}{\rho^2}$$

$$|u - \Pi u|_{3, 2, \kappa} \leq 45 |u|_{4, 2, \kappa} \frac{h^4}{\rho^3}$$

2) Application du théorème 3-1

Le théorème 3-1 est ici applicable pour $m=0, 1, 2$. Utilisant les majorations (3-6) on obtient les résultats pour tout $u \in H^4(K)$:

$$|u - \Pi u|_{0, 2, \kappa} \leq \frac{1}{4} |u|_{4, 2, \kappa} h^4,$$

$$|u - \Pi u|_{1, 2, \kappa} \leq \left(\frac{1}{4} + 2 \frac{h}{\rho} \right) |u|_{4, 2, \kappa} h^3,$$

$$|u - \Pi u|_{2, 2, \kappa} \leq \left(1 + 13 \frac{h^2}{\rho^2} \right) |u|_{4, 2, \kappa} h^2.$$

Remarque 4-1. Comme dans les exemples numériques de [1] on peut remarquer qu'ici aussi, lorsque les deux théorèmes sont applicables, le théorème 3-1 donne de meilleurs résultats numériques que le théorème 2-1.

Remarque 4-2. Si l'on effectue les calculs pour l'élément P_3 -unisolvant de Lagrange dont les degrés de liberté sont définis par les valeurs de la fonction aux trois sommets du triangle, au barycentre et aux points situés aux tiers et aux deux tiers des côtés, on constate que les majorations obtenues sont très proches de celles obtenues ci-dessus. En effet on obtient successivement:

– par application du théorème 1-1 de [1], pour tout $u \in H^4(K)$:

$$|u - \Pi u|_{0, 2, \kappa} \leq |u|_{4, 2, \kappa} h^4,$$

$$|u - \Pi u|_{1, 2, \kappa} \leq 4 |u|_{4, 2, \kappa} \frac{h^4}{\rho}$$

$$|u - \Pi u|_{2, 2, \kappa} \leq 21 |u|_{4, 2, \kappa} \frac{h^4}{\rho^2},$$

$$|u - \Pi u|_{3, 2, \kappa} \leq 32 |u|_{4, 2, \kappa} \frac{h^4}{\rho^3};$$

– par application du théorème 2-1 de [1], pour tout $u \in H^4(K)$

$$|u - \Pi u|_{0, 2, \kappa} \leq \frac{13}{18} |u|_{4, 2, \kappa} h^4,$$

$$|u - \Pi u|_{1, 2, \kappa} \leq \left(\frac{1}{4} + 2 \frac{h}{\rho} \right) |u|_{4, 2, \kappa} h^3,$$

$$|u - \Pi u|_{2, 2, \kappa} \leq \left(1 + 12 \frac{h^2}{\rho^2} \right) |u|_{4, 2, \kappa} h^2.$$

Exemple II: Triangle d'Hermite de type (5)

Soient K un triangle quelconque de \mathbb{R}^2 , de diamètre h et ρ le diamètre du cercle inscrit dans K .

L'ensemble des nœuds de l'élément fini est formé des trois sommets a_1, a_2 et a_3 du triangle et des trois milieux a_4, a_5 et a_6 des côtés du triangle. L'ensemble \sum des degrés de liberté de l'élément fini est défini par:

$$\sum = \{ \phi_i^0 \}_{1 \leq i \leq 3} \cup \{ \phi_{ij}^1 \}_{\substack{1 \leq i, j \leq 3 \\ i \neq j}} \cup \{ \phi_{i+3, i}^1 \}_{1 \leq i \leq 3} \cup \{ \phi_{ij}^2 \}_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3}$$

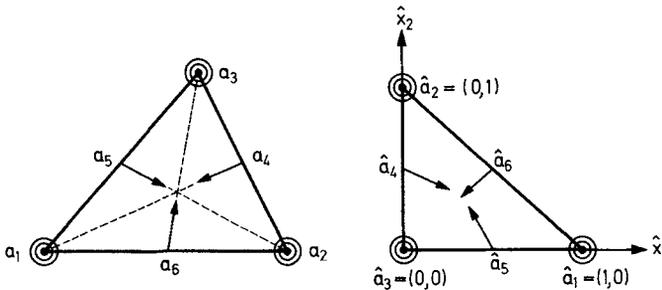
où

$$\begin{aligned} a_i^0 &= a_i^1 = a_i^2 = a_i && \text{pour } 1 \leq i \leq 3, \\ a_{i+3}^1 &= a_{i+3} && \text{pour } 1 \leq i \leq 3, \\ \xi_{ij}^1 &= a_j - a_i && \text{pour } 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j, \\ \xi_{i+3, i}^1 &= a_i - a_{i+3} && \text{pour } 1 \leq i \leq 3 \end{aligned}$$

et où enfin

$$\xi_{ij}^2 = (\xi_{ijk}^2, \xi_{ijl}^2) \in (\mathbb{R}^2)^2 \quad \text{pour } 1 \leq i, j < 3 \text{ et } 1 \leq l, k \leq 3,$$

$l \neq i$ et $k \neq i$ est défini à partir de $\xi_{ijk}^2 = a_k - a_i$ (un seul des deux vecteurs $(\xi_{ijk}^2, \xi_{ijl}^2)$ et $(\xi_{ijl}^2, \xi_{ijk}^2)$ étant évidemment utilisé).



L'ensemble \sum étant P_5 -unisolvant, on peut successivement appliquer les théorèmes 2-1 et 3-1 avec $P = P_5$ et, par exemple, $p = q = 2$. De plus il est clair qu'on se trouve ici dans le cadre de la théorie affine.

On doit tout d'abord déterminer l'ensemble des fonctions de base de P_5 relativement à \sum (cf. Argyris et al. [2]; Bernadou [5]; Ciarlet [6]; Raviart [11]; Thomasset [12]) en utilisant les formules rappelées dans le paragraphe 1 ce qui a été fait ici par résolution numérique sur ordinateur.

On obtient ainsi, dans le triangle \hat{K} de référence de sommets $\hat{a}_1 = (1, 0)$, $\hat{a}_2 = (0, 1)$, $\hat{a}_3 = (0, 0)$ et où par conséquent $\hat{a}_4 = (0, \frac{1}{2})$, $\hat{a}_5 = (\frac{1}{2}, 0)$, $\hat{a}_6 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, les fonctions de base exprimées en fonction de x_1 et x_2 (voir annexe ci-jointe).

Pour appliquer les théorèmes 2-1 et 3-1 on calcule ensuite des approximations numériques des constantes \mathcal{C} et \mathcal{C}' définies par (2-15) et (3-7): dans le premier cas on est ramené à des calculs de maximums, dans le second à des calculs d'in-

tégraes. Pour cela il suffit d'utiliser les expressions des fonctions de base données dans l'annexe, compte tenu du fait qu'elles peuvent être considérées comme exprimées en fonction des coordonnées barycentriques ($\lambda_1 = \hat{x}_1, \lambda_2 = \hat{x}_2$).

1) Application du théorème 2-1

On est conduit à calculer des approximations de quantités du type $\text{Max}_{\hat{x} \in \hat{K}} g(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ où les fonctions g sont de la forme (cf. (2-15)):

$$g(\hat{x}) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^\alpha p_i^0(\hat{x}_1, \hat{x}_2)| \quad \text{ou} \quad g(\hat{x}) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^\alpha p_{ij}^r(\hat{x}_1, \hat{x}_2)|.$$

On a donc:

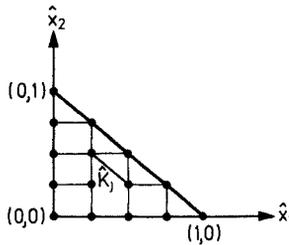
$$\text{Max}_{\hat{x} \in \hat{K}} g(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = |g|_{0, \infty, \hat{K}}.$$

Il est important de noter que les fonctions g , quoiqu'en général non différentiables au sens usuel sur \hat{K} , appartiennent néanmoins à $W^{1, \infty}(\hat{K})$.

On introduit alors un réseau $\mathcal{R}_d \left(\frac{1}{d} \in \mathbb{N}^* \right)$ de points de \hat{K} défini par:

$$\mathcal{R}_d = \left\{ (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathbb{R}^2, \hat{x}_1 = Ld \quad \text{et} \quad \hat{x}_2 = Md, L \in \mathbb{N}, M \in \mathbb{N}, 0 \leq L + M \leq \frac{1}{d} \right\}.$$

Le réseau \mathcal{R}_d définit un recouvrement de \hat{K} au moyen de triangles \hat{K}_j de diamètre $d\sqrt{2}$ (voir figure ci-dessous).



On calcule alors $\text{Max}_{\hat{x} \in \hat{K}} g^*(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ où, pour tout j , g^* est la fonction (positive) telle que $g^*|_{\hat{K}_j}$ soit le P_1 -interpolé de Lagrange de g aux sommets de \hat{K}_j (cf. remarque 4-3 ci-après).

On vérifie que

$$\text{Max}_{\hat{x} \in \hat{K}} g^*(x_1, x_2) = |g^*|_{0, \infty, \hat{K}} = \text{Sup}_{x \in \mathcal{R}_d} g(\hat{x}_1, \hat{x}_2).$$

Etant donné que pour tout j , $g|_{\hat{K}_j}$ appartient à $W^{1, \infty}(\hat{K}_j)$, on a, en appliquant le théorème 1-1 de [1]:

$$|g - g^*|_{0, \infty, \hat{K}_j} \leq 3\sqrt{2} d |g|_{1, \infty, \hat{K}_j},$$

où pour simplifier on a noté g et g^* au lieu de $g|_{\hat{K}_j}$ et $g^*|_{\hat{K}_j}$.
 D'où la majoration d'erreur sur \hat{K} :

$$|\text{Max}_{\hat{x} \in \hat{K}} g(\hat{x}_1, \hat{x}_2) - \text{Max}_{\hat{x} \in \hat{K}} g^*(\hat{x}_1, \hat{x}_2)| = ||g|_{0, \infty, \hat{K}} - |g^*|_{0, \infty, \hat{K}}| \leq 3\sqrt{2} d |g|_{1, \infty, \hat{K}}.$$

Remarque 4-3. On vérifie ainsi la convergence de la méthode lorsque d tend vers 0. Pour avoir la convergence, il suffit d'ailleurs de prendre pour approximation g^* de g l'élément de $L^\infty(\hat{K})$ tel que pour tout j , $g^*|_{\hat{K}_j}$ soit le P_0 -interpolé de Lagrange de g au centre gravité (par exemple) de \hat{K}_j . Etant donnée la régularité de g , on obtient d'ailleurs dans ce cas le même ordre asymptotique de convergence. Cependant les résultats numériques sont alors moins satisfaisants que dans le cas précédent.

Ayant pris successivement $d=0,1$ puis $d=0,05$, on a constaté que la variation des approximations numériques obtenues pour les constantes \mathcal{C} de (2-15) était de l'ordre de 0,01 : On se borne donc ici à indiquer les résultats obtenus pour $d=0,1$.

Pour tout $u \in H^6(K)$:

$$|u - \Pi u|_{0, 2, K} \leq 0,03 |u|_{6, 2, K} h^6,$$

$$|u - \Pi u|_{1, 2, K} \leq 0,2 |u|_{6, 2, K} \frac{h^6}{\rho},$$

$$|u - \Pi u|_{2, 2, K} \leq 3,1 |u|_{6, 2, K} \frac{h^6}{\rho^2},$$

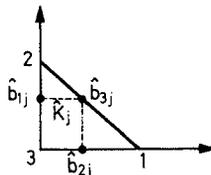
$$|u - \Pi u|_{3, 2, K} \leq 47 |u|_{6, 2, K} \frac{h^6}{\rho^3},$$

$$|u - \Pi u|_{4, 2, K} \leq 330 |u|_{6, 2, K} \frac{h^6}{\rho^4},$$

$$|u - \Pi u|_{5, 2, K} \leq 853 |u|_{6, 2, K} \frac{h^6}{\rho^5}.$$

2) Application du théorème 3-1

Pour calculer des approximations des intégrales intervenant dans les formules (3-7) on utilise une formule d'intégration approchée sur chaque triangle \hat{K}_j (défini comme précédemment).



Pour tout triangle \hat{K}_j , on a pris la formule à trois points

$$\int_{\hat{K}_j} g(\hat{x}) d\hat{x} \sim \frac{d^2}{6} \left[\sum_{i=1}^3 g(\hat{b}_{ij}) \right]$$

où \hat{b}_{1j} , \hat{b}_{2j} et \hat{b}_{3j} sont les milieux des côtés de \hat{K}_j , ce qui par sommation sur j donne une valeur approchée de $\int g(\hat{x}) d\hat{x}$.

Etant donné que $g \in W^{1, \infty}(\hat{K})$ et que la formule d'intégration numérique utilisée est exacte sur P_0 (en fait sur P_2) il résulte du théorème 3-1 de [1] que l'erreur d'intégration sur chaque triangle \hat{K}_j

$$R_j(g) = \int_{\hat{K}_j} g(\hat{x}) d\hat{x} - \frac{d^2}{6} \left[\sum_{i=1}^3 g(\hat{b}_{ij}) \right].$$

est telle que

$$|R_j(g)| \leq 2(\text{mes } \hat{K}_j) d \sqrt{2} |g|_{1, \infty, \hat{K}_j}.$$

on en déduit que

$$|R(g)| \leq 2(\text{mes } \hat{K}) d \sqrt{2} |g|_{1, \infty, \hat{K}}$$

où $R(g)$ désigne l'erreur d'intégration sur \hat{K} .

Remarque 4-4. On vérifie donc la convergence de la méthode quand d tend vers 0. Notons que pour avoir la convergence (et, vu la régularité de g , le même ordre asymptotique de convergence) il suffit d'utiliser la formule

$$\int_{\hat{K}_j} g(\hat{x}) d\hat{x} \sim \frac{d^2}{2} g(\hat{b}_j)$$

où \hat{b}_j est un point quelconque de \hat{K}_j .

Ayant pris successivement, comme pour le calcul des maximums, $d=0,1$ puis $d=0,05$, on a constaté que la variation des approximations numériques obtenues pour les constantes \mathcal{C}' de (3-7) était ici aussi de l'ordre de 0,01. On se borne donc à indiquer les résultats obtenus pour $d=0,1$.

Pour tout $u \in H^6(K)$

$$|u - \Pi u|_{0, 2, K} \leq 0,002 |u|_{6, 2, K} h^6 + 0,01 |u|_{6, 2, K} h^6,$$

$$|u - \Pi u|_{1, 2, K} \leq 0,01 |u|_{6, 2, K} h^5 + 0,08 |u|_{6, 2, K} \frac{h^6}{\rho},$$

$$|u - \Pi u|_{2, 2, K} \leq 0,06 |u|_{6, 2, K} h^4 + 0,94 |u|_{6, 2, K} \frac{h^6}{\rho^2},$$

$$|u - \Pi u|_{3, 2, K} \leq 0,25 |u|_{6, 2, K} h^3 + 16 |u|_{6, 2, K} \frac{h^6}{\rho^3},$$

$$|u - \Pi u|_{3, 2, K} \leq |u|_{6, 2, K} h^2 + 160 |u|_{6, 2, K} \frac{h^6}{\rho^4}.$$

Remarque 4-5. On vérifie encore ici que lorsque les deux théorèmes sont applicables le théorème 3-1 donne de meilleurs résultats numériques que le théorème 2-1.

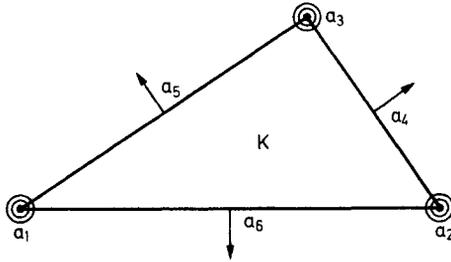
Remarque 4-6. Signalons enfin que le calcul des constantes \mathcal{C} de (2-15) et \mathcal{C}' de (3-7) n'a été effectué dans l'élément de référence \hat{K} que par raison de commodité. On sait que l'utilisation des coordonnées barycentriques permet d'éviter le recours à l'élément fini de référence.

Exemple III: Triangle d'Argyris de type (5)

Soit K un triangle quelconque de \mathbb{R}^2 de diamètre h et soit ρ le diamètre du cercle inscrit dans K .

L'ensemble des nœuds de l'élément fini d'Argyris est le même que celui de l'élément fini d'Hermite de type (5) indiqué dans l'exemple II.

D'autre part, l'ensemble des degrés de liberté est également le même que celui de l'élément fini d'Hermite de type (5), à l'exception des degrés de liberté associés aux milieux des côtés du triangle: ici les vecteurs $\xi_{i+3, i}^1 = \nu_{i+3}$ ($1 \leq i \leq 3$) représentent les vecteurs unités des normales extérieures à K au milieu des côtés. Ainsi cet exemple ne relève pas de la théorie affine. Toutefois on montre (cf. Argyris [2]; Ciarlet [6]; Raviart [11]) que l'on peut calculer l'erreur d'interpolation d'Hermite dans ce cas en se ramenant au calcul de l'erreur pour l'élément fini d'Hermite de type (5) donc à un élément fini qui entre dans la théorie affine.



Dans cet exemple, reprenant en cela les notations de Ciarlet [6], on appelle Π l'opérateur de P_5 -interpolation correspondant au triangle d'Argyris, Λ l'opérateur de P_3 -interpolation correspondant au triangle d'Hermite et δ l'expression $\Pi u - \Lambda u$, où $u \in W^{6,p}(K)$.

On a évidemment, pour tout $u \in W^{6,p}(K)$ et pour tout $m=0, 1, \dots, 5$:

$$|u - \Pi u|_{m,p,K} \leq |u - \Lambda u|_{p,p,K} + |\Lambda u - \Pi u|_{m,p,K}.$$

D'autre part (cf. Ciarlet [6], chapitre 13), il vient:

$$\delta = \Pi u - \Lambda u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \nu_{i+3}} (u - \Lambda u)(a_{i+3}^1) \langle a_i - a_{i+3}, \nu_{i+3} \rangle P_{i+3, i}^1.$$

On a alors

$$|\delta|_{n, p, \kappa} \leq \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial v_{i+3}} (u - \Lambda u)(a_{i+3}^1) |p_{i+3, i}|_{m, p, \kappa} h$$

où

$$(4-1) \quad |\delta|_{m, p, \kappa} \leq \sum_{i=1}^3 \|D(u - \Lambda u)(a_{i+3}^1)\| |p_{i+3, i}|_{m, p, \kappa} h.$$

Utilisant le fait que

$$\Psi \in P_5 \quad \Lambda \Psi = \Psi$$

on choisit $\Psi = \Psi_T(u, a)$, où $\Psi_T(u, a)$ est pour presque tout $a \in K$ le «polynôme de Taylor à l'ordre 5 de u au point a » (cf. [1]), et on obtient pour $i = 1, 2, 3$:

$$\|D(u - \Lambda u)(a_{i+3}^1)\| \leq \|D(u - \Psi_T(u, a))(a_{i+3}^1)\| + \|D\Lambda(u - \Psi_T(u, a))(a_{i+3}^1)\|$$

soit

$$(4-2) \quad \|D(u - \Lambda u)(a_{i+3}^1)\| \leq \frac{1}{(k-1)!} \|J_1(u, a_{i+3}^1)(a)\| + \|D\Lambda(u - \Psi_T(u, a))(a_{i+3}^1)\|.$$

(Pour la définition de $J_r(u, a)(x)$, $r = 0, 1, \dots, s$) voir la formule (2-4.) Par définition de Λ on a:

$$\begin{aligned} \Lambda(u - \Psi_T(u, a)) &= \sum_{l=1}^3 (u - \Psi_T(u, a))(a_l^0) p_l^0 + \sum_{\substack{1 \leq l, j \leq 3 \\ l \neq j}} D(u - \Psi_T(u, a))(a_l^1) \cdot \xi_{lj}^1 p_{lj}^1 \\ &+ \sum_{l=1}^3 D(u - \Psi_T(u, a))(a_{l+3}^1) \cdot \xi_{l+3, l}^1 p_{l+3, l}^1 \\ &+ \sum_{1 \leq l, j \leq 3} D^2(u - \Psi_T(u, a))(a_l^2) \cdot \xi_{lj}^2 p_{lj}^2. \end{aligned}$$

Pour $i = 1, 2, 3$, on en déduit, vu que les ξ_{lj} vérifient la formule (2-12),

$$\begin{aligned} \|D\Lambda(u - \Psi_T(u, a))(a_{i+3}^1)\| &\leq \sum_{l=1}^3 \|(u - \Psi_T(u, a))(a_l^0)\| \|D p_l^0(a_{i+3}^1)\| \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq l, j \leq 3 \\ l \neq j}} \|D(u - \Psi_T(u, a))(a_l^1)\| \|D p_{lj}^1(a_{i+3}^1)\| h \\ &+ \sum_{l=1}^3 \|D(u - \Psi_T(u, a))(a_{l+3}^1)\| \|D p_{l+3, l}^1(a_{i+3}^1)\| h \\ &+ \sum_{1 \leq l, j \leq 3} \|D^2(u - \Psi_T(u, a))(a_l^2)\| \|D p_{lj}^2(a_{i+3}^1)\| h^2, \end{aligned}$$

soit encore

$$(4-3) \quad \|D\Lambda(u - \Psi_T(u, a))(a_{i+3}^1)\| \leq \sum_{l=1}^3 |J_0(u, a_l^0)(a)| |p_l^0|_{1, \infty, \kappa} \\ + \sum_{\substack{1 \leq l, j \leq 3 \\ l \neq j}} \|J_1(u, a_l^1)(a)\| |p_{lj}^1|_{1, \infty, \kappa} h \\ + \sum_{l=1}^3 \|J_1(u, a_{l+3}^1)(a)\| |p_{l+3, l}^1|_{1, \infty, \kappa} h \\ + \sum_{1 \leq l, j \leq 3} \|J_2(u, a_l^2)(a)\| |p_{lj}^2|_{1, \infty, \kappa} h^2.$$

Utilisant (4-2) et prenant les normes $L^p(K)$ des deux membres de (4-1) considérés comme fonction de a , on obtient:

$$(\text{mes } K)^{\frac{1}{p}} |\delta|_{m,p,K} \leq \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{1}{(k-1)!} \|J_1(u, a_{i+3}^1)\|_{L^p(K)} + \|DA(u - \Psi_T(u, a))(a_{i+3}^1)\|_{L^p(K)} \right\} |p_{i+3, i}|_{m,p,K} h.$$

Compte tenu de (4-3) et de la proposition 2-1 on a:

$$(4-4) \quad (\text{mes } k)^{\frac{1}{p}} |\delta|_{m,p,K} \leq \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{1}{(k-1)!} \frac{1}{k - \frac{2}{p}} |u|_{6,p,K} h^5 + \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1 - \frac{2}{p}} \left(\sum_{l=1}^3 |p_l^0|_{1,\infty,K} \right) |u|_{6,p,K} h^6 + \frac{1}{(k-1)!} \frac{1}{k - \frac{2}{p}} \left(\sum_{\substack{1 \leq l, j \leq 3 \\ i \neq j}} |p_{lj}^1|_{1,\infty,K} + \sum_{l=1}^3 |p_{l+3, l}^1|_{1,\infty,K} \right) |u|_{6,p,K} h^6 + \frac{1}{(k-2)!} \frac{1}{k-1 - \frac{2}{p}} \left(\sum_{1 \leq l, j \leq 3} |p_{lj}^2|_{1,\infty,K} \right) |u|_{6,p,K} h^6 \right\} |p_{i+3, i}|_{m,p,K} h.$$

Remarque 4-7. On vérifie que la majoration (4-4) de $|\delta|_{m,p,K}$ est de la forme

$$|\delta|_{m,p,K} \leq \left(C_1 + C_2 \frac{h}{\rho} \right) |u|_{6,p,K} \frac{h^6}{\rho^m},$$

où C_1 et C_2 ne dépendent que de n, k, m, p, s . Donc, si la suite de triangulations est régulière (cf. Ciarlet [6]; Ciarlet et Raviart [7]; Raviart [11]) l'inégalité (4-4) conduit à des majorations uniformes de δ .

Donnons pour terminer des résultats numériques pour $p=2$.

Pour $m=0, 1, \dots, 5$, l'erreur d'interpolation correspondant au triangle d'Argyris est de la forme

$$|u - \Pi u|_{m,2,K} \leq |u - \mathcal{A}u|_{m,2,K} + |\delta|_{m,2,K}.$$

Rappelons que des majorations des quantités $|u - \mathcal{A}u|_{m,2,K}$ ont été calculées dans l'exemple II. On se borne donc à expliciter des majorations des quantités $|\delta|_{m,2,K}$. Utilisant (4-4) on obtient:

$$\begin{aligned} |\delta|_{0,2,K} &\leq \left(0,01 + 0,02 \frac{h}{\rho} \right) |u|_{6,2,K} h^6, \\ |\delta|_{1,2,K} &\leq \left(0,02 + 0,24 \frac{h}{\rho} \right) |u|_{6,2,K} \frac{h^6}{\rho}, \\ |\delta|_{2,2,K} &\leq \left(0,22 + 4,55 \frac{h}{\rho} \right) |u|_{6,2,K} \frac{h^6}{\rho^2}, \end{aligned}$$

$$|\delta|_{3,2,\kappa} \leq \left(4 + 81 \frac{h}{\rho}\right) |u|_{6,2,\kappa} \frac{h^6}{\rho^3},$$

$$|\delta|_{4,2,\kappa} \leq \left(39 + 810 \frac{h}{\rho}\right) |u|_{6,2,\kappa} \frac{h^6}{\rho^4},$$

$$|\delta|_{5,2,\kappa} \leq \left(15 + 303 \frac{h}{\rho}\right) |u|_{6,2,\kappa} \frac{h^6}{\rho^5}.$$

Annexe

Fonctions de base de l'élément fini d'Hermite de type (5) dans \hat{K} (on notera x_1, x_2, p au lieu de $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{p}$).

$$p_1^0(x_1, x_2) = 10x_1^3 + 15x_1^2 x_2 - 15x_1^4 - 30x_1^3 x_2 - 15x_1^2 x_2^2 + 6x_1^5 - 15x_1^4 x_2 + 15x_1^3 x_2^2,$$

$$p_2^0(x_1, x_2) = 15x_1 x_2^2 + 10x_2^3 - 15x_1^2 x_2^2 - 30x_1 x_2^3 - 15x_2^4 + 15x_1^2 x_2^3 + 15x_1 x_2^4 + 6x_2^5,$$

$$p_3^0(x_1, x_2) = 1 - 10x_1^3 - 15x_1 x_2^2 - 10x_2^3 + 15x_1^4 + 30x_1^3 x_2 + 30x_1^2 x_2^2 + 30x_1 x_2^3 + 15x_2^4 - 6x_1^5 - 15x_1^4 x_2 - 15x_1^3 x_2^2 - 15x_1^2 x_2^3 - 15x_1 x_2^4 - 6x_2^5,$$

$$p_{12}^1(x_1, x_2) = 4x_1^3 + \frac{17}{2}x_1^2 x_2 - 7x_1^4 - 21x_1^3 x_2 - 22x_1^2 x_2^2 + 3x_1^5 + \frac{23}{2}x_1^4 x_2 + 22x_1^3 x_2^2 + \frac{27}{2}x_1^2 x_2^3,$$

$$p_{13}^1(x_1, x_2) = -5x_1^2 x_2 + 14x_1^3 x_2 + \frac{37}{2}x_1^2 x_2^2 - 8x_1^4 x_2 - \frac{37}{2}x_1^3 x_2^2 - \frac{27}{2}x_1^2 x_2^3,$$

$$p_{21}^1(x_1, x_2) = \frac{17}{2}x_1 x_2^2 + 4x_2^3 - 22x_1^2 x_2^2 - 21x_1 x_2^3 - 7x_2^4 + \frac{27}{2}x_1^3 x_2^2 + 22x_1^2 x_2^3 + \frac{23}{2}x_1 x_2^4 + 3x_2^5,$$

$$p_{23}^1(x_1, x_2) = -5x_1 x_2^2 + \frac{37}{2}x_1^2 x_2^2 + 14x_1 x_2^3 - \frac{27}{2}x_1^3 x_2^2 - \frac{37}{2}x_1^2 x_2^3 - 8x_1 x_2^4,$$

$$p_{31}^1(x_1, x_2) = x_1 - 6x_1^3 - \frac{7}{2}x_1^2 x_2 - 11x_1 x_2^2 + 8x_1^4 + 7x_1^3 x_2 + 17x_1^2 x_2^2 + 18x_1 x_2^3 - 3x_1^5 - \frac{7}{2}x_1^4 x_2 - 6x_1^3 x_2^2 - \frac{27}{2}x_1^2 x_2^3 - 8x_1 x_2^4,$$

$$p_{32}^1(x_1, x_2) = x_2 - 11x_1^2 x_2 - \frac{7}{2}x_1 x_2^2 - 6x_2^3 + 18x_1^3 x_2 + 17x_1^2 x_2^2 + 7x_1 x_2^3 + 8x_2^4 - 8x_1^4 x_2 - \frac{27}{2}x_1^3 x_2^2 - 6x_1^2 x_2^3 - \frac{7}{2}x_1 x_2^4 - 3x_2^5,$$

$$p_{41}^1(x_1, x_2) = 16x_1 x_2^2 - 32x_1^2 x_2^2 - 32x_1 x_2^3 + 16x_1^3 x_2^2 + 32x_1^2 x_2^3 + 16x_1 x_2^4,$$

$$p_{52}^1(x_1, x_2) = 16x_1^2 x_2 - 32x_1^3 x_2 - 32x_1^2 x_2^2 + 16x_1^4 x_2 + 32x_1^3 x_2^2 + 16x_1^2 x_2^3,$$

$$p_{63}^1(x_1, x_2) = 16x_1^2 x_2^2 - 16x_2^3 x_2^2 - 16x_1^2 x_2^3,$$

$$p_{11}^2(x_1, x_2) = -x_1^2 x_2 + 3x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2^2 - 2x_1^4 x_2 - 2x_1^3 x_2^2,$$

$$p_{12}^2(x_1, x_2) = \frac{5}{4}x_1^2 x_2^2 - \frac{3}{4}x_1^3 x_2^2 - \frac{5}{4}x_1^2 x_2^3,$$

$$p_{13}^2(x_1, x_2) = \frac{x_1^3}{2} + \frac{5}{4}x_1^2 x_2 - x_1^4 - \frac{7}{2}x_1^3 x_2 - \frac{5}{2}x_1^2 x_2^2 + \frac{x_1^5}{2} + \frac{9}{4}x_1^4 x_2 + 3x_1^3 x_2^2 + \frac{5}{4}x_1^2 x_2^3,$$

$$p_{21}^2(x_1, x_2) = \frac{5}{4}x_1^2 x_2^2 - \frac{5}{4}x_1^3 x_2^2 - \frac{3}{4}x_1^2 x_2^3,$$

$$p_{22}^2(x_1, x_2) = -x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2^2 + 3x_1 x_2^3 - 2x_1^2 x_2^3 - 2x_1 x_2^4,$$

$$p_{23}^2(x_1, x_2) = \frac{5}{4}x_1 x_2^2 + x_2^3 - \frac{5}{2}x_1^2 x_2^2 - \frac{7}{2}x_1 x_2^3 + \frac{5}{4}x_1^3 x_2^2 + 3x_1^2 x_2^3 + \frac{9}{4}x_1 x_2^4 + \frac{x_2^5}{2},$$

$$p_{31}^2(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} - \frac{3}{2}x_1^3 - \frac{x_1^2 x_2}{4} + \frac{3}{2}x_1^4 + \frac{x_1^3 x_2}{2} - x_1^2 x_2^2 - \frac{x_1^5}{2} - \frac{x_1^4 x_2}{4} + x_1^3 x_2^2 + \frac{3}{4}x_1^2 x_2^3,$$

$$p_{32}^2(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_1 x_2^2}{4} - \frac{3}{2}x_2^3 - x_1^2 x_2 + \frac{x_1 x_2^3}{2} + \frac{3}{2}x_2^4 + \frac{3}{4}x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 - \frac{x_1 x_2^4}{4} - \frac{x_1^5}{2},$$

$$p_{33}^2(x_1, x_2) = x_1 x_2 - 4x_1^2 x_2 - 4x_1 x_2^2 + 5x_1^3 x_2 + 10x_1^2 x_2^2 + 5x_1 x_2^3 - 2x_1^4 x_2 - 6x_1^3 x_2^2 - 6x_1^2 x_2^3 - 2x_1 x_2^4.$$

References

1. Arcangeli, R., Gout, J. L.: Sur l'évaluation de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert de \mathbb{R}^n . R. A. I. R. O. (1976, à paraître)
2. Argyris, J. H., Fried, I., Scharpf, D. W.: The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method. The Aeronautical J. R. Ac. S. **72**, 701 – 709 (1968)
3. Barnhill, R. E., Whiteman, J. R.: Error analysis of finite element methods with triangles for elliptic boundary value problems. In: The mathematics of finite elements and applications (J. R. Whiteman, ed.), pp. 83 – 112. London: Academic Press 1973
4. Bell, K.: A refined triangular plate bending element. Internat. J. Numer. Methods Engrg. **1**, 101 – 122 (1969)
5. Bernadou, M.: I.R.I.A. Communication personnelle
6. Ciarlet, P. G.: Numerical analysis of the finite element method. Université de Montréal, 1976
7. Ciarlet, P. G., Raviart, P. A.: General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite methods. Arch. Rational Mech. Anal. **46**, 177 – 199 (1972)
8. Irons, B. M.: Comments on "complete polynomial displacement fields for finite element method" by P. C. Dunne. The Aeronautical J. R. Ac. S. **72**, 709 (1968)
9. Meinguet, J.: Realistic estimates for generic constants in multivariate pointwise approximation. In: Topics in numerical analysis, Vol. II (J. J. H. Miller, ed). London: Academic Press 1975
10. Necas, J.: Les méthodes directes en théories des équations elliptiques. Paris: Masson 1967
11. Raviart, P. A.: Méthodes des éléments finis (rédigé par J. M. Thomas). D. E. A. Analyse Numérique, Paris VI (1971 – 1972)
12. Thomasset, F.: Etude d'une méthode d'éléments finis de degré 5. Application aux problèmes de plaques et d'écoulement de fluides. Thèse 3ème cycle, Paris XI, 1974
13. Zienkiewicz, O. C.: La méthode des Eléments finis. Paris: Ediscience 1973

Reçu le 25 June 1976