Inventiones math. 7, 226–234 (1969)

Deux nouveaux facteurs de type II_1

J. DIXMIER et E. C. LANCE (Paris et Newcastle upon Tyne)

Depuis les travaux de Murray et von Neumann [3], Schwartz [6], Wai-Mee Ching [1], Sakai [5], on connaît cinq facteurs de type II_1 deux à deux non isomorphes dans les espaces hilbertiens séparables. En utilisant des idées voisines de celles de Ching et Sakai, nous allons construire deux nouveaux facteurs de type II_1. Zeller-Meier a obtenu encore deux autres facteurs de type II_1 (cf. un article ultérieur dans ce journal).

Le premier auteur a bénéficié de remarques de Zeller-Meier, le deuxième de remarques de Kadison et Vowden; tous deux ont pu consulter [1] et [5] avant publication.

1. Soit F un facteur fini. La norme usuelle d'un élément t de F sera notée $\|t\|$. Si $t, t' \in F$, on posera $(t|t') = Tr(t\,t'^*)$ et $\|t\|_2 = (Tr(t\,t^*))^{\frac{1}{2}}$, où Tr est la trace normalisée de F. Quand on dira qu'une suite $(t_1, t_2, \ldots)$ d'éléments de F est bornée, cela signifiera que $\sup_i \|t_i\| < \infty$.

2. **Définition.** *On appelle suite centrale dans F une suite bornée $(t_1, t_2, \ldots)$ d'éléments de F telle que, pour tout $t \in F$, on ait $\|[t, t_i]\|_2 \to 0$ quand $i \to \infty$.*

On appelle suite hypercentrale dans F une suite centrale $(t_1, t_2, \ldots)$ dans F telle que, pour toute suite centrale $(t'_1, t'_2, \ldots)$ dans F, on ait $\|[t_i, t'_i]\|_2 \to 0$ quand $i \to \infty$.

3. Deux suites bornées $(t_1, t_2, \ldots)$ et $(t'_1, t'_2, \ldots)$ sont dites équivalentes si $\|t_i - t'_i\|_2 \to 0$. Si en outre $(t_1, t_2, \ldots)$ est centrale (resp. hypercentrale), $(t'_1, t'_2, \ldots)$ est centrale (resp. hypercentrale).

4. Soit $(t_1, t_2, \ldots)$ une suite bornée d'éléments de F. Supposons qu'il existe une suite $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ de nombres complexes tels que $\|t_i - \lambda_i\|_2 \to 0$ quand $i \to \infty$; autrement dit, supposons que $\|t_i - Tr(t_i)\|_2 \to 0$ quand $i \to \infty$. Alors la suite $(t_1, t_2, \ldots)$ est hypercentrale. Une telle suite hypercentrale sera dite *triviale*.

5. On notera $\mathscr{C}_F$ (resp. $\mathscr{H}_F, \mathscr{T}_F$) l'ensemble des suites centrales (resp. hypercentrales, hypercentrales triviales) de F. On a $\mathscr{T}_F \subset \mathscr{H}_F \subset \mathscr{C}_F$. Quatre cas sont donc possibles, qui s'excluent mutuellement:

$$\mathscr{T}_F = \mathscr{C}_F; \qquad \mathscr{T}_F = \mathscr{H}_F \neq \mathscr{C}_F; \qquad \mathscr{T}_F \neq \mathscr{H}_F = \mathscr{C}_F; \qquad \mathscr{T}_F \neq \mathscr{H}_F \neq \mathscr{C}_F.$$

Nous verrons que les quatre cas se présentent effectivement.

6. Soit F^∞ l'ensemble des suites bornées d'éléments de F. Cet ensemble est muni de manière évidente d'une structure de C^*-algèbre (en fait, c'est une algèbre de von Neumann). On vérifie aisément que $\mathscr{C}_F, \mathscr{H}_F, \mathscr{T}_F$ sont des sous-C^*-algèbres de F^∞. Soit $\mathscr{I}_F$ l'ensemble des $(t_1, t_2, \ldots) \in F^\infty$ tels que $\|t_i\|_2 \to 0$ quand $i \to \infty$. Alors $\mathscr{I}_F$ est un idéal bilatère normiquement fermé de F^∞ contenu dans $\mathscr{T}_F$, et $\mathscr{H}_F/\mathscr{I}_F$ est le centre de la C^*-algèbre $\mathscr{C}_F^0 = \mathscr{C}_F/\mathscr{I}_F$. Notons, comme c'est l'usage, l^∞ l'ensemble des suites bornées de nombres complexes, et c_0 l'ensemble des suites de nombres complexes tendant vers 0. L'homomorphisme canonique composé

$$l^\infty \to F^\infty \to F^\infty/\mathscr{I}_F$$

a pour image $\mathscr{T}_F/\mathscr{I}_F$ et pour noyau c_0, de sorte que $\mathscr{T}_F/\mathscr{I}_F$ est une sous-C^*-algèbre du centre de $\mathscr{C}_F^0$ canoniquement isomorphe à l^∞/c_0. Les quatre éventualités considérées plus haut peuvent se reformuler ainsi:

$$\mathscr{C}_F^0 = l^\infty/c_0;$$

$\mathscr{C}_F^0$ est non commutative, et son centre est égal à l^∞/c_0;

$\mathscr{C}_F^0$ est commutative et distincte de l^∞/c_0;

$\mathscr{C}_F^0$ est non commutative, et son centre est distinct de l^∞/c_0.

Soit π l'application $(t_1, t_2, \ldots) \mapsto (Tr(t_1), Tr(t_2), \ldots)$ de F^∞ sur l^∞. C'est une application linéaire positive fidèle. On a $\pi(\mathscr{I}_F) \subset c_0$ et $(\pi^{-1}(c_0))^+ \subset \mathscr{I}_F$, donc π définit une application linéaire positive fidèle ρ de $F^\infty/\mathscr{I}_F$ sur l^∞/c_0. En composant ρ avec les caractères de l^∞/c_0, on voit que $F^\infty/\mathscr{I}_F$ possède une famille séparante de traces finies; en particulier, $\mathscr{C}_F^0$ possède une famille séparante de traces finies.

7. **Lemme.** *Soient F un facteur fini, E un sous-ensemble de F engendrant l'algèbre de von Neumann F. Pour $j = 1, 2, \ldots$, soit A_j une sous-algèbre de von Neumann de F. On suppose que, pour tout sous-ensemble fini E_1 de E, il existe j_0 tel que A_j commute à E_1 pour $j \geqq j_0$.*

(i) *Si $(t_1, t_2, \ldots)$ est une suite bornée d'éléments de F tels que $t_j \in A_j$ pour tout j, on a $(t_1, t_2, \ldots) \in \mathscr{C}_F$.*

(ii) *Si, pour tout j, A_j contient un élément unitaire de trace nulle, on a $\mathscr{T}_F \neq \mathscr{C}_F$.*

(iii) *Si, pour tout j, A_j contient deux éléments unitaires u, u' tels que $(u u' | u' u) = 0$, on a $\mathscr{H}_F \neq \mathscr{C}_F$.*

(i) Soit $(t_1, t_2, \ldots)$ une suite bornée d'éléments de F tels que $t_j \in A_j$ pour tout j. Soient $t \in F$ et $\varepsilon > 0$. Il existe t' dans la sous-algèbre involutive de F engendrée par E telle que $\|t - t'\|_2 \leqq \varepsilon$. Il existe j_0 tel que $[t_j, t'] = 0$ pour $j \geqq j_0$. Alors, pour $j \geqq j_0$, on a $\|[t_j, t]\|_2 = \|[t_j, t - t']\|_2 \leqq 2\|t_j\| \varepsilon$. Donc $\|[t_j, t]\|_2 \to 0$ quand $j \to \infty$ et par suite $(t_1, t_2, \ldots) \in \mathscr{C}_F$.

(ii) Supposons que, pour tout j, A_j contienne un élément unitaire t_j de trace nulle. D'après (i), on a $(t_1, t_2, \ldots) \in \mathscr{C}_F$. D'autre part, $\|t_i - Tr(t_i)\|_2^2 = \|t_i\|_2^2 = 1$, donc $(t_1, t_2, \ldots) \notin \mathscr{T}_F$ et $\mathscr{T}_F \neq \mathscr{C}_F$.

(iii) Supposons que, pour tout j, A_j contienne des éléments unitaires t_j, t'_j tels que $(t_j\, t'_j | t'_j\, t_j) = 0$. D'après (i), on a $(t_1, t_2, \ldots) \in \mathscr{C}_F$, $(t'_1, t'_2, \ldots) \in \mathscr{C}_F$. D'autre part, $\|[t_j, t'_j]\|_2^2 = \|t_j\, t'_j\|_2^2 + \|t'_j\, t_j\|_2^2 = 2$. Donc $(t_1, t_2, \ldots) \notin \mathscr{H}_F$ et $\mathscr{H}_F \neq \mathscr{C}_F$.

8. **Lemme.** *Soient F un facteur fini, A une sous-algèbre de von Neumann commutative de F. On suppose que, pour toute suite centrale dans F, il existe une suite équivalente d'éléments de A. Alors $\mathscr{H}_F = \mathscr{C}_F$.*

Soient $(t_1, t_2, \ldots) \in \mathscr{C}_F$, $(t'_1, t'_2, \ldots) \in \mathscr{C}_F$. Il existe dans A des suites bornées $(s_1, s_2, \ldots)$, $(s'_1, s'_2, \ldots)$ telles que $\|t_i - s_i\|_2 \to 0$, $\|t'_i - s'_i\|_2 \to 0$. On a $[t_i, t'_i] = [t_i, t'_i - s'_i] + [t_i - s_i, s'_i] + [s_i, s'_i]$, donc

$$\|[t_i, t'_i]\|_2 \leqq 2\,\|t_i\|\;\|t'_i - s'_i\|_2 + 2\,\|t_i - s_i\|_2\;\|s'_i\| \to 0.$$

Donc $(t_1, t_2, \ldots) \in \mathscr{H}_F$ et $\mathscr{H}_F = \mathscr{C}_F$.

9. **Lemme.** *Soient $F, E, A_1, A_2, \ldots$ vérifiant les hypothèses générales du lemme 7. On suppose en outre que:*

a) *pour toute suite centrale dans F, il existe une suite équivalente formée d'éléments de A_1;*

b) *pour tout j, A_j contient un élément unitaire u_j de trace nulle et permutable à A_1.*

Alors $\mathscr{T}_F \neq \mathscr{H}_F$.

On a $(u_1, u_2, \ldots) \in \mathscr{C}_F$ (lemme 7(i)), et $\|u_j - Tr(u_j)\|_2^2 = \|u_j\|_2^2 = 1$, donc $(u_1, u_2, \ldots) \notin \mathscr{T}_F$. Soit $(t_1, t_2, \ldots) \in \mathscr{C}_F$. Il existe une suite $(s_1, s_2, \ldots)$ d'éléments de A_1 tels que $\|t_i - s_i\|_2 \to 0$. Alors $\|[u_i, t_i]\|_2 = \|[u_i, t_i - s_i]\|_2 \leqq 2\,\|t_i - s_i\|_2 \to 0$, donc $(u_1, u_2, \ldots) \in \mathscr{H}_F$ et $\mathscr{T}_F \neq \mathscr{H}_F$.

10. **Lemme.** *Soient F un facteur fini, $x \in F$ un élément de trace nulle, et $\varepsilon > 0$. Il existe un élément unitaire $u \in F$ tel que $\|[u, x]\|_2 \geqq \|x\|_2 - \varepsilon$.*

D'après [2], chap. III, § 5, th. 1, il existe des éléments unitaires $u_1, \ldots, u_n$ de F et des nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqq 0$ tels que

$$\sum_i \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad \Big\|\sum_i \lambda_i\, u_i\, x\, u_i^{-1} - Tr(x)\Big\|_2 \leqq \varepsilon,$$

d'où, puisque $Tr(x) = 0$,

$$\Big\|\sum_i \lambda_i (x - u_i\, x\, u_i^{-1})\Big\|_2 = \Big\|x - \sum_i \lambda_i\, u_i\, x\, u_i^{-1}\Big\|_2 \geqq \|x\|_2 - \varepsilon.$$

Donc il existe un indice i_0 tel que $\|x - u_{i_0}\, x\, u_{i_0}^{-1}\|_2 \geqq \|x\|_2 - \varepsilon$, c'est-à-dire $\|[u_{i_0}, x]\|_2 \geqq \|x\|_2 - \varepsilon$.

11. **Lemme.** *Soient $F, E, A_1, A_2, \ldots$ vérifiant les hypothèses générales du lemme 7. On suppose en outre que:*

a) *pour toute suite $(t_1, t_2, \ldots) \in \mathcal{H}_F$ et pour tout j, il existe une suite équivalente $(s_1, s_2, \ldots)$ formée d'éléments de A_j tels que $\|s_i\| \leqq \|t_i\|$;*

b) *les A_j sont des facteurs $\neq \mathbb{C}$.*

Alors $\mathcal{T}_F = \mathcal{H}_F \neq \mathcal{C}_F$.

Soit $(t_1, t_2, \ldots) \in \mathcal{H}_F$ et supposons que $(t_1, t_2, \ldots) \notin \mathcal{T}_F$. Nous allons aboutir à une contradiction. Par passage à une suite partielle, on peut supposer, d'après l'hypothèse a) du lemme, qu'il existe une suite bornée $(s_1, s_2, \ldots)$ telle que $s_j \in A_j$ pour tout j et $\|t_j - s_j\|_2 \to 0$. On a $(s_1, s_2, \ldots) \in \mathcal{H}_F$ et $(s_1, s_2, \ldots) \notin \mathcal{T}_F$. Soit $r_j = s_j - Tr(s_j)$. On a $\limsup \|r_j\|_2 > 0$. D'après le lemme 10, il existe, pour tout j, un élément unitaire u_j de A_j tel que $\limsup \|[u_j, r_j]\|_2 > 0$. On a $(u_1, u_2, \ldots) \in \mathcal{C}_F$ d'après le lemme 7(i), donc $\|[u_j, r_j]\|_2 \to 0$ puisque $(r_1, r_2, \ldots) \in \mathcal{H}_F$; ceci est la contradiction annoncée. En outre, $\mathcal{T}_F \neq \mathcal{C}_F$ d'après le lemme 7(ii).

12. **Proposition.** *Soit F un facteur hyperfini de type II_1. On a $\mathcal{T}_F = \mathcal{H}_F \neq \mathcal{C}_F$.*

Il existe dans F une suite croissante $(B_1, B_2, \ldots)$ de sous-facteurs de types $I_2, I_4, I_8, \ldots$ engendrant F, tels que le commutant A_j de B_j dans F soit un facteur. Soit E la réunion des B_i. Les hypothèses générales du lemme 7 sont vérifiées. Soient $(t_1, t_2, \ldots) \in \mathcal{C}_F$ et j un entier $\geqq 1$. Soit G_j un sous-groupe fini d'ordre n_j du groupe unitaire de B_j engendrant l'algèbre de von Neumann B_j. Soit $s_i = (n_j)^{-1} \sum_{u \in G_j} u\, t_i\, u^{-1}$. Puisque $\|[u, t_i]\|_2 \to 0$ pour tout $u \in G_j$, on a $\|t_i - s_i\|_2 \to 0$. D'autre part, s_i commute à G_j donc $s_i \in A_j$. Enfin, $\|s_i\| \leqq \|t_i\|$. Donc $\mathcal{T}_F = \mathcal{H}_F \neq \mathcal{C}_F$ (lemme 11).

13. Rappelons quelques faits bien connus. Soit G un groupe discret. Par «classe» de G, nous entendons «classe de conjugaison». On note $\| \ \|_2$ la norme dans $L^2(G)$. Pour tout $g \in G$, soit $u_G(g)$ ou simplement $u(g)$ l'opérateur unitaire dans $L^2(G)$ défini par $\big(u(g)f\big)(g') = f(g^{-1}g')$. Les $u(g)$ engendrent une algèbre de von Neumann $\mathcal{U}(G)$ dans $L^2(G)$. Soit $\mathfrak{A}(G) \subset L^2(G)$ l'algèbre hilbertienne de G, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in L^2(G)$ qui définissent par convolution à gauche un opérateur borné $u_G(x) = u(x)$ dans $L^2(G)$. L'ensemble des $u(x)$ pour $x \in \mathfrak{A}(G)$ est $\mathcal{U}(G)$. Si $g \in G$ et si ε_g est la fonction caractéristique de g dans G, on a $u(g) = u(\varepsilon_g)$. La fonction ε_e est un vecteur-trace séparateur et totalisateur pour $\mathcal{U}(G)$; soient Tr la trace correspondante sur $\mathcal{U}(G)$ et $\| \ \|_2$ la norme préhilbertienne associée; si $x \in \mathfrak{A}(G)$, on a $\|x\|_2 = \|u(x)\|_2$ et $x(e) = Tr\big(u(x)\big)$. Si $G \neq \{e\}$ et si toute classe non triviale de G est infinie (nous dirons alors que G est un groupe ICC), $\mathcal{U}(G)$ est un facteur de type II_1 et les notations Tr, $\| \ \|_2$ concordent alors avec les notations introduites en 1. Pour tout ceci, cf. par exemple [2], chap. III, § 7.6.

14. Soit H un sous-groupe de G. Identifions $L^2(H)$ à un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(G)$. Les faits suivants sont faciles à voir (cf. d'ailleurs [3], appendix): $\mathfrak{A}(H)=L^2(H)\cap\mathfrak{A}(G)$; si $x\in\mathfrak{A}(H)$, $u_H(x)$ est la restriction de $u_G(x)$ à $L^2(H)$, et $u_H(x)\mapsto u_G(x)$ est un isomorphisme (en fait une ampliation) de $\mathscr{U}(H)$ sur une sous-algèbre de von Neumann de $\mathscr{U}(G)$.

15. On a aussi le résultat suivant (lié à la notion d'espérance conditionnelle), qui est connu depuis longtemps de nombreux chercheurs, mais pour lequel nous manquons de référence:

Lemme. *Soient $x\in\mathfrak{A}(G)$, y la fonction sur G égale à x sur H et à* 0 *sur $G-H$. On a $y\in\mathfrak{A}(H)$ et $\|u(y)\|\leqq\|u(x)\|$.*

On peut supposer que $\|u(x)\|=1$. Soit $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un système de représentants des classes à droite suivant H, avec $g_{\lambda_0}=e$. Soient χ_λ la fonction caractéristique de Hg_λ, et $Y_\lambda=\chi_\lambda L^2(G)$. Alors $L^2(G)$ est somme hilbertienne des Y_λ. Soit Y'_λ l'ensemble des éléments de Y_λ à support fini. Soit $z\in Y'_\lambda$. On a $y*z\in Y_\lambda$. Ecrivons $x=\sum_{\mu\in\Lambda}x_\mu$ où $x_\mu\in Y_\mu$. On a $x_{\lambda_0}=y$ et $u(x)z=x*z=\sum_{\mu\in\Lambda}x_\mu*z$ (série convergeant dans $L^2(G)$). Soit $\mu\in\Lambda$ tel que $\mu\neq\lambda_0$. Alors $x_\mu*z$ est somme dans $L^2(G)$ d'éléments de la forme $\varepsilon_h*\varepsilon_{g_\mu}*\varepsilon_{h'}*\varepsilon_{g_\lambda}$ où h, $h'\in H$ et $hg_\mu h'g_\lambda\notin Hg_\lambda$ pour $h,h'\in H$. Donc $x_\mu*z\in\bigoplus_{\nu\neq\lambda}Y_\nu$. Ainsi, $u(x)z=(y*z)+t$ avec $y*z\in Y_\lambda$ et $t\in\bigoplus_{\nu\neq\lambda}Y_\nu$. Donc $\|y*z\|_2\leqq\|u(x)z\|_2\leqq\|z\|_2$. Ainsi l'application $z\mapsto y*z$ de Y'_λ dans Y_λ se prolonge en une application linéaire continue de Y_λ dans Y_λ de norme $\leqq 1$. Cela étant vrai pour tout λ, on voit que $y\in\mathfrak{A}(H)$ et que $\|u(y)\|\leqq 1$, d'où le lemme.

L'application $u(x)\mapsto u(y)$ de $\mathscr{U}(G)$ sur $\mathscr{U}(H)$ sera appelée la *projection canonique* de $\mathscr{U}(G)$ sur $\mathscr{U}(H)$.

16. **Définition.** *Soit G un groupe. Une partie A de G sera dite résiduelle s'il existe une partie B de G et des éléments g_1, g_2 de G tels que:* (i) $B\cup g_1Bg_1^{-1}\cup A=G$; (ii) B, $g_2^{-1}Bg_2$, $g_2Bg_2^{-1}$ *sont des parties de $G-A$ deux à deux disjointes.*

Si A est une partie résiduelle de G et si G' est un groupe, il est clair que $A\times G'$ est une partie résiduelle de $G\times G'$.

17. **Lemme.** *Soient G un groupe* ICC, *G_1 un sous-groupe résiduel de G, π la projection canonique de $F=\mathscr{U}(G)$ sur $F_1=\mathscr{U}(G_1)$. Si $(t_1,t_2,\ldots)\in\mathscr{C}_F$, on a $(\pi(t_1),\pi(t_2),\ldots)\in\mathscr{C}_{F_1}$ et $\|t_i-\pi(t_i)\|_2\to 0$.*

Ecrivons $t_i=u(x_i)$ avec $x_i\in\mathfrak{A}(G)$. Soit y_i la projection orthogonale de x_i sur $L^2(G_1)$, de sorte que $\pi(t_i)=u(y_i)$. Puisque G_1 est un sous-groupe résiduel, on peut introduire B, g_1, g_2 conformément à la déf. 16. Puisque $(t_1,t_2,\ldots)\in\mathscr{C}_F$, on a $\|[u(x_i),u(g_1)]\|_2\to 0$ et $\|[u(x_i),u(g_2)]\|_2\to 0$ quand

$i \to \infty$. Autrement dit, $\|x_i * \varepsilon_{g_1} - \varepsilon_{g_1} * x_i\|_2 \to 0$ et $\|x_i * \varepsilon_{g_2} - \varepsilon_{g_2} * x_i\|_2 \to 0$ quand $i \to \infty$. D'après la démonstration de [4], lemme 10, on a $\sum_{g \in G - G_1} |x_i(g)|^2 \to 0$, c'est-à-dire $\|x_i - y_i\|_2 \to 0$, d'où $\|t_i - \pi(t_i)\|_2 \to 0$. Il en résulte que $(\pi(t_1), \pi(t_2), \ldots) \in \mathscr{C}_F$ et a fortiori $(\pi(t_1), \pi(t_2), \ldots) \in \mathscr{C}_{F_1}$.

18. La proposition suivante est essentiellement connue ([3], p. 801–803).

Proposition. *Soit Φ_2 le groupe libre à deux générateurs. Soit $F = \mathscr{U}(\Phi_2)$. On a $\mathscr{C}_F = \mathscr{T}_F$.*

Soient g_1, g_2 des générateurs libres de Φ_2. Soit B l'ensemble des éléments de Φ_2 dont l'écriture normale se termine par une puissance non nulle de g_1. Les conditions de la déf. 16 sont vérifiées avec $A = \{e\}$. Donc $\{e\}$ *est un sous-groupe résiduel de* Φ_2, et la proposition résulte du lemme 17.

19. **Proposition.** *Soit Π le groupe des permutations de $\{1, 2, 3, \ldots\}$ qui laissent fixes tous les entiers sauf un nombre fini d'entre eux. Soit $F = \mathscr{U}(\Phi_2 \oplus \Pi)$. On a $\mathscr{T}_F = \mathscr{H}_F \neq \mathscr{C}_F$.*

On sait que $\mathscr{U}(\Pi)$ est un facteur hyperfini, donc $\mathscr{C}_{\mathscr{U}(\Pi)} \neq \mathscr{H}_{\mathscr{U}(\Pi)}$ (prop. 12). Identifions $\mathscr{U}(\Pi)$ à un sous-facteur de F. Il est clair que $\mathscr{C}_{\mathscr{U}(\Pi)} \subset \mathscr{C}_F$, donc $\mathscr{C}_F \neq \mathscr{H}_F$. Comme $\{e\}$ est un sous-groupe résiduel de Φ_2, le sous-groupe $\Pi = \{e\} \oplus \Pi$ est résiduel dans $\Phi_2 \oplus \Pi$. Soit $(t_1, t_2, \ldots) \in \mathscr{H}_F$. D'après de lemme 17, il existe une suite équivalente $(s_1, s_2, \ldots) \in \mathscr{H}_F$ telle que $s_i \in \mathscr{U}(\Pi)$ pour tout i. Puisque $\mathscr{C}_{\mathscr{U}(\Pi)} \subset \mathscr{C}_F$, on en conclut que $(s_1, s_2, \ldots) \in \mathscr{H}_{\mathscr{U}(\Pi)}$. Donc $(s_1, s_2, \ldots) \in \mathscr{T}_{\mathscr{U}(\Pi)}$ (prop. 12) et par suite $(t_1, t_2, \ldots) \in \mathscr{T}_F$. Ainsi, $\mathscr{T}_F = \mathscr{H}_F$.

20. **Proposition.** *Soit G la somme directe infinie $\Phi_2 \oplus \Phi_2 \oplus \Phi_2 \oplus \cdots$. Soit $F = \mathscr{U}(G)$. On a $\mathscr{T}_F = \mathscr{H}_F \neq \mathscr{C}_F$.*

Soit $E \subset F$ l'ensemble des $u(g)$ pour $g \in G$. Soit G_j le sous-groupe de G formé des éléments dont les $j-1$ premières coordonnées sont égales à e. Identifions $\mathscr{U}(G_j)$ à un sous-facteur A_j de F. Les hypothèses générales du lemme 7 sont vérifiées. Pour tout $g \in G$ tel que $g \neq e$, $u(g)$ est unitaire de trace nulle. Pour tout $k \geqq 1$, l'ensemble des éléments de G dont la k^{eme} coordonnée est égale à e est un sous-groupe résiduel de G. Donc, si $(t_1, t_2, \ldots) \in \mathscr{H}_F$, le lemme 17 appliqué $j-1$ fois prouve l'existence d'une suite équivalente $(s_1, s_2, \ldots)$ dans A_j. D'après le lemme 11, on a $\mathscr{T}_F = \mathscr{H}_F \neq \mathscr{C}_F$.

21. Soient $(G_1, G_2, \ldots)$, $(H_1, H_2, \ldots)$ deux suites de groupes. Nous noterons $(G_1, G_2, \ldots; H_1, H_2, \ldots)$ le groupe engendré par $G_1, G_2, \ldots$, $H_1, H_2, \ldots$ avec les seules relations suivantes:

$$\text{pour } i \neq j, \quad H_i \text{ commute à } H_j;$$
$$\text{pour } i \leqq j, \quad G_i \text{ commute à } H_j.$$

(Cette construction est inspirée de [3], p. 805/806.) Soient $K=(G_1, G_2, \dots; H_1, H_2, \dots)$, L (resp. M) le sous-groupe de K engendré par $G_1, G_2, \dots$ (resp. $H_1, H_2, \dots$). Alors L est le groupe engendré librement par $G_1, G_2, \dots$, et M est la somme directe de $H_1, H_2, \dots$. Tout élément g de $L-\{e\}$ a une écriture unique $g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n}$ où $g_{i_1} \in G_{i_1}-\{e\}, \dots, g_{i_n} \in G_{i_n}-\{e\}$, $i_1 \neq i_2$, $i_2 \neq i_3, \dots, i_{n-1} \neq i_n$; nous poserons $w(g)=i_n$. Tout élément de K s'écrit de manière unique sous forme normale

$$m_1\, l_1\, m_2\, l_2 \dots m_p\, l_p\, m_{p+1} \tag{1}$$

où

$$\begin{aligned} &p \geqq 0; \quad l_1, \dots, l_p \in L-\{e\}; \quad m_1, \dots, m_{p+1} \in M; \\ &\text{pour} \quad i=2,3,\dots,p+1, \quad \text{on a } m_i \in H_1 \oplus \dots \oplus H_{w(l_{i-1})-1}; \\ &\text{pour} \quad i=2,3,\dots,p, \quad \text{on a } m_i \neq e. \end{aligned} \tag{2}$$

Supposons qu'aucun des groupes G_i ne soit trivial. Alors K est ICC. Soit $F=\mathscr{U}(K)$. Soit E l'ensemble des $u(g)$ pour $g \in K$. Soit $M_j=H_j \oplus H_{j+1} \oplus \cdots$, et identifions $\mathscr{U}(M_j)$ à une sous-algèbre de von Neumann A_j de F. Les hypothèses générales du lemme 7 sont vérifiées.

22. **Proposition.** *Soit $K=(G_1, G_2, \dots; H_1, H_2, \dots)$ où les G_i sont isomorphes à $\mathbf{Z}$ et où les H_i sont isomorphes à un groupe commutatif non trivial W. Soit $F=\mathscr{U}(K)$. On a $\mathscr{T}_F \neq \mathscr{H}_F = \mathscr{C}_F$.*

Introduisons A_j comme au n° 21. Pour tout $g \in K$ tel que $g \neq e$, $u(g)$ est unitaire de trace nulle. Le lemme 7(ii) prouve que $\mathscr{T}_F \neq \mathscr{C}_F$.

Montrons que M est résiduel dans K. Soit B l'ensemble des éléments de K dont l'écriture normale $m_1\, l_1\, m_2\, l_2 \dots m_p\, l_p\, m_{p+1}$ au sens du n° 21 possède la propriété suivante:

$$w(l_p)=1 \quad (\text{donc } m_{p+1}=e).$$

Soient g_1 un générateur de G_1, g_2 un générateur de G_2. Alors B, $g_2 B g_2^{-1}$, $g_2^{-1} B g_2$ sont des parties de $K-M$ deux à deux disjointes. Montrons que $B \cup g_1 B g_1^{-1} \cup M = K$. Soit g un élément de K tel que $g \notin B \cup M$. Soit $m_1\, l_1 \dots m_{p+1}$ son écriture normale. On a $p>0$ puisque $g \notin M$. On a $w(l_p)>1$ puisque $g \notin B$. Il résulte facilement de là que $g_1^{-1} g\, g_1 \in B$, donc $g \in g_1 B g_1^{-1}$. (Ce qui précède ne suppose pas W commutatif.)

Alors, d'après les lemmes 8 et 17, on a $\mathscr{H}_F = \mathscr{C}_F$.

23. Le facteur de la prop. 22 n'est qu'une variante d'un facteur étudié par Ching ([1], th. 4 et 5). A cela près, les cinq facteurs considérés dans les prop. 12, 18, 19, 20, 22 sont les cinq facteurs considérés par Sakai dans [5]. D'après [5], ces cinq facteurs sont deux à deux non isomorphes. D'ailleurs, pour le vérifier, il suffit, en vertu des propositions précédentes,

de s'assurer que $\mathscr{U}(\Phi_2 \oplus \Pi)$ et $\mathscr{U}(\Phi_2 \oplus \Phi_2 \oplus \Phi_2 \oplus \cdots)$ sont non hyperfinis et non isomorphes. Comme les groupes $\Phi_2 \oplus \Pi$ et $\Phi_2 \oplus \Phi_2 \oplus \Phi_2 \oplus \cdots$ sont non amenables, les facteurs correspondants sont non hyperfinis ([6], lemme 7). D'autre part, comme observé dans [5], $\mathscr{U}(\Phi_2 \oplus \Phi_2 \oplus \cdots)$ est asymptotiquement commutatif tandis que $\mathscr{U}(\Phi_2 \oplus \Pi)$ ne l'est pas.

24. **Proposition.** *Soient G_i, H_i, K, W comme dans la prop. 22. On suppose W fini. Soit $F = \mathscr{U}(K \oplus \Pi)$. On a $\mathscr{T}_F \neq \mathscr{H}_F \neq \mathscr{C}_F$, et F n'est pas asymptotiquement commutatif.*

Comme au n° 19, on voit que $\mathscr{C}_F \neq \mathscr{H}_F$. Soit $E \subset F$ l'ensemble des $u(g)$ pour $g \in K \oplus \Pi$. Soit M_j comme au n° 21. Posons $N_1 = \Pi$ et $N_j = \{e\}$ pour $j > 1$. Identifions $\mathscr{U}(M_j \oplus N_j)$ à une sous-algèbre de von Neumann A_j de F. Les hypothèses générales du lemme 7 sont vérifiées. Puisque M est résiduel dans K, $M_1 \oplus N_1 = M \oplus \Pi$ est résiduel dans $K \oplus \Pi$. D'après le lemme 17, l'hypothèse a) du lemme 9 est vérifiée. Soit $h \neq e$ un élément de H_j. Alors $u(h)$ est un élément unitaire de trace nulle de A_j permutable à A_1: l'hypothèse b) du lemme 9 est vérifiée. Le lemme 9 prouve que $\mathscr{T}_F \neq \mathscr{H}_F$. Comme W est fini (hypothèse qui n'a pas encore été utilisée), il existe dans A_1 une suite croissante de sous-algèbres involutives de rang fini dont la réunion est fortement dense dans A_1. Si F était asymptotiquement commutatif, on verrait, comme dans la démonstration de [5], th. 1, que F est hyperfini. Or $K \oplus \Pi$ est non amenable, ce qui contredit le lemme 7 de [6].

25. **Proposition.** *Soit $K = (G_1, G_2, \ldots; H_1, H_2, \ldots)$ où les G_i sont isomorphes à $\mathbf{Z}$ et où les H_i sont isomorphes à un groupe W non commutatif et de centre non trivial. Soit $K^\sim = K \oplus K \oplus K \oplus \cdots$. Soit $F = \mathscr{U}(K^\sim)$. On a $\mathscr{T}_F \neq \mathscr{H}_F \neq \mathscr{C}_F$, et F est asymptotiquement commutatif.*

D'après [5], prop. 1, F est asymptotiquement commutatif.

Soit N_1 le sous-groupe de $K^\sim$ formé des éléments de $K^\sim$ dont la première coordonnée appartient à M. Pour $j > 1$, soit N_j le sous-groupe de $K^\sim$ formé des éléments de $K^\sim$ dont la première coordonnée appartient à M_j et dont les coordonnées suivantes sont égales à e. Pour $j \geqq 1$, identifions $\mathscr{U}(N_j)$ à une sous-algèbre de von Neumann A_j de F. Les hypothèses générales du lemme 7 sont vérifiées. Le lemme 7(iii) et la non commutativité de W prouvent que $\mathscr{H}_F \neq \mathscr{C}_F$. Comme M est résiduel dans K, N_1 est résiduel dans $K^\sim$. Donc l'hypothèse a) du lemme 9 est vérifiée (lemme 17). D'autre part, le fait que le centre de W est non trivial entraîne que l'hypothèse b) du lemme 9 est vérifiée. Donc $\mathscr{T}_F \neq \mathscr{H}_F$ (lemme 9).

26. **Corollaire.** *Les sept facteurs de type* II_1 *considérés aux prop. 12, 18, 19, 20, 22, 24, 25 opèrent dans des espaces hilbertiens séparables et sont deux à deux non isomorphes.*

27. *Remarques.* a) L'invariant $\mathscr{C}_F^0 = \mathscr{C}_F / \mathscr{I}_F$ attaché à un facteur F de type II_1 peut sans doute être utilisé plus efficacement et fournir d'autres facteurs de type II_1. Toutefois, les 4 possibilités signalées en 5, combinées avec la propriété d'asymptotique commutativité, peuvent donner non pas 8 facteurs non hyperfinis, mais seulement 6, car on a le résultat suivant:

Si F est asymptotiquement commutatif, on a $\mathscr{H}_F \neq \mathscr{C}_F$.

En effet, soit $(\rho_1, \rho_2, \ldots)$ une suite d'automorphismes de F telle que $(\rho_n(x)) \in \mathscr{C}_F$ pour tout $x \in F$. Soient y, z deux éléments non permutables de F. On a $\lim \|[\rho_n(x), \rho_n(y)]\|_2 = \|[x, y]\|_2 \neq 0$, donc $(\rho_1(x), \rho_2(x), \ldots) \notin \mathscr{H}_F$.

b) Appelons suite cocentrale une suite $(t_1, t_2, \ldots) \in F^\infty$ telle que, pour toute suite centrale $(t'_1, t'_2, \ldots)$, on ait $\lim \|[t_i, t'_i]\|_2 = 0$. Peut-on obtenir de nouveaux facteurs de type II_1 en considérant la propriété suivante: les suites centrales et les suites cocentrales engendrent la C^*-algèbre F^∞?

c) Soit U un ultrafiltre sur l'ensemble des entiers. Soit I l'ensemble des suites centrales $(t_1, t_2, \ldots)$ telles que $\lim_U \|t_i\|_2 = 0$. Est-ce que $\mathscr{C}_F / I$ est une algèbre de von Neumann?

d) Est-ce que $\mathscr{C}_F^0$ peut être postliminaire sans être commutative?

e) Certaines relations entre $\mathscr{C}_F$ et les propriétés Γ ([3]), C ([1]) sont analysées dans un autre article du même journal.

Bibliographie

1. Ching, Wai-Mee: Non-isomorphic non-hyperfinite factors (à paraître).
2. Dixmier, J.: Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. Paris: Gauthier-Villars 1957.
3. Murray, F. J., and J. von Neumann: On rings of operators IV. Ann. of Math. **44**, 716–808 (1943).
4. Pukanszky, L.: Some examples of factors. Publicationes math. **4**, 135–156 (1956).
5. Sakai, S.: Asymptotically abelian II_1 factors (à paraître).
6. Schwartz, J. T.: Two finite, non-hyperfinite, non-isomorphic factors. Comm. pure appl. math. **16**, 19–26 (1963).

J. Dixmier
Institut H. Poincaré
Paris 5ᵉ, France

E. C. Lance
The University of Newcastle upon Tyne
Newcastle upon Tyne 1, England

(Reçu le 11 Janvier 1969)