Inventiones math. 12, 304–320 (1971)

Régularité de processus gaussiens

XAVIER FERNIQUE (Strasbourg)

Sommaire. On étudie la continuité presque sûre ou la majoration presque sûre des trajectoires de certains processus gaussiens en fonction de la régularité de leur covariance: on utilise la notion d'espace d'Orlicz pour obtenir des résultats plus fins que les résultats classiques. En appendice, on donne une démonstration élémentaire de l'intégrabilité des vecteurs aléatoires gaussiens à valeurs dans les espaces vectoriels généraux.

Introduction

Jusqu'en 1950, les processus gaussiens n'ont été étudiés que dans des cas très particuliers et par des méthodes qui utilisaient plus spécifiquement ces particularités que le caractère gaussien proprement dit. Dans l'étude classique du mouvement brownien par exemple, on pourrait croire que les propriétés établies sont liées à l'indépendance des accroissements; dans la dernière édition de «Stochastic processes» de Doob ([3]), on lit: «on connaît bien peu de propriétés vraiment spéciales aux processus gaussiens», et il n'en est pas présenté d'étude non triviale.

Depuis 1950, la situation a changé: si les résultats de Hunt ([7]) et Belyaev ([1]) sur les processus gaussiens stationnaires en dimension 1 semblaient directement liés à la stationnarité, Delporte ([2]) en les généralisant aux processus non stationnaires utilise pour la première fois le seul caractère gaussien, ce qui lui permet d'obtenir directement des résultats plus précis.

On sait qu'un processus gaussien à trajectoires presque sûrement continues est continu en probabilité et a donc une covariance continue; on sait aussi qu'il existe des processus gaussiens à covariance continue dont aucune réalisation n'a ses trajectoires presque sûrement continues. D'où le problème classique suivant: caractériser les processus gaussiens possédant des réalisations à trajectoires presque sûrement continues en fonction du module de continuité de leur covariance. Ce problème est presque complètement résolu ([4, 11, 12]); sa solution permet d'étudier les modules de continuité de ces trajectoires ainsi que leur comportement asymptotique ([4a, 10, 11]).

En fait, le problème ainsi posé n'est pas satisfaisant. D'un côté, tout changement de temps continu conserve la continuité des trajectoires tout en modifiant arbitrairement le module de continuité de la covariance; par ailleurs, en multipliant une fonction continue par une variable gaussienne, on construit facilement des processus gaussiens à trajectoires presque sûrement continues ayant des modules de continuité arbitraires; aucune de ces difficultés ne peut se présenter si on se contente d'étudier des processus stationnaires, et il semble bien naturel au contraire de poser le problème sous d'autres formes si on veut effectivement majorer les processus non stationnaires. D'ailleurs, il s'agit en fait d'identifier les mesures gaussiennes portées par un certain espace fonctionnel et il est souhaitable d'utiliser des méthodes qui soient efficaces pour des classes larges d'espaces fonctionnels. C'est le cas de la méthode que nous présentons dans cet article. Elle peut être résumée par le calcul fondamental ci-dessous:

Calcul fondamental

Soient $(k_m)_{m\geqq 1}$ une suite de nombres strictement positifs de somme 1, $(\lambda_m)_{m\geqq 1}$ une suite de variables gaussiennes centrées de variance inférieure ou égale à $\frac{1}{3}$, de liaisons arbitraires; soit de plus $(a_{n,m})_{n,m\geqq 1}$ une suite numérique double. On pose:

$$\mu_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\,\lambda_m.$$

Nous majorons μ_n en séparant les indices de sommation en deux parties (aléatoires):

$$M_1^n = \{m\in\mathbf{N} \mid |a_{n,m}| \leqq k_m(\exp(\lambda_m^2)-1)\},$$
$$M_2^n = \left\{m\in\mathbf{N} \,\middle|\, |\lambda_m| < \sqrt{\log\left(1+\frac{|a_{n,m}|}{k_m}\right)}\right\};$$

nous obtenons:

$$|\mu_n| \leqq \sum_{m=1}^{\infty} k_m\,|\lambda_m|\,(\exp(\lambda_m^2)-1) + \sum_{m=1}^{\infty} |a_{n,m}| \sqrt{\log\left(1+\frac{|a_{n,m}|}{k_m}\right)}.$$

La première série est presque sûrement convergente puisque la série des espérances mathématiques a une somme majorée par $(8/3\pi)^{\frac{1}{2}}$; elle ne dépend pas de n. La seconde série n'est pas aléatoire; si les coefficients sont choisis de telle sorte que:

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{n,m}| \sqrt{\log\left(1+\frac{|a_{n,m}|}{k_m}\right)} < \infty,$$

alors la suite $(\mu_n)_{n\geqq 1}$ est presque sûrement majorée explicitement.

§ 1. Régularité des trajectoires des processus gaussiens mesurables à covariance bornée

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et E un espace lusinien muni d'une mesure de probabilité μ; soit de plus X une application $\mathbf{P}\otimes\mu$-mesurable de $\Omega\times E$ dans $\mathbf{R}$; nous supposons que X est un processus gaussien (centré) sur E de covariance Γ appartenant à $L^\infty(E\times E, \mu\otimes\mu)$: quels que soient $t_1, \ldots, t_k$ dans E et les nombres réels $u_1, \ldots, u_k$, on a:

$$\mathbf{E}\left\{\exp\left(i\sum_{j=1}^{k} u_j X(t_j)\right)\right\}=\exp\left(-\tfrac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{k} u_j u_l \Gamma(t_j, t_l)\right).$$

(Le processus X est donc défini par ses lois temporelles.)

Nous construisons des espaces minimaux contenant presque sûrement les trajectoires de X.

Théorème 1. *Soient E un espace lusinien et μ une mesure de probabilité sur E; soit de plus X un processus gaussien mesurable de covariance Γ. On suppose que la restriction de Γ à la diagonale de $E\times E$ appartient à $L^\infty(E, \mu)$; dans ces conditions, on a:*

$$\forall \alpha<\frac{1}{2\|\Gamma\|_\infty}, \quad \int_E \exp\{\alpha X^2(\omega, x)\}\, d\mu(x)<\infty \quad p.s.\ sur\ \Omega.$$

Si de plus Γ est continue sur $E\times E$, on a aussi:

$$\forall \alpha>0, \quad \int_E \exp\{\alpha X^2(\omega, x)\}\, d\mu(x)<\infty \quad p.s.\ sur\ \Omega.$$

Démonstration. Le théorème de Fubini et la mesurabilité de l'application $(\omega, x)\to X(\omega, x)$ permettent d'écrire:

$$\mathbf{E}\{\int_E \exp(\alpha X^2)\, d\mu\}=\int_E \mathbf{E}\{\exp \alpha X^2\}\, d\mu=\int_E \frac{d\mu(x)}{\sqrt{1-2\alpha\Gamma(x, x)}};$$

cette intégrale est finie si α est inférieur à $1/2\|\Gamma\|_\infty$, d'où le premier résultat.

Supposons maintenant Γ continu; notons $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des fonctions propres orthonormées de Γ dans $L^2(E, \mu)$; pour tout entier positif p, posons:

$$X_p=\sum_{n=1}^{p}\left(\int_E X\varphi_n\, d\mu\right)\varphi_n, \qquad Y_p=X-X_p;$$

le théorème de Mercer montre que la covariance Γ_p de Y_p qui est $\sum_{n=p+1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(x)\varphi_n(y)$ converge uniformément vers zéro sur $E\times E$. Soit alors $\alpha>0$, et choisissons l'entier p assez grand pour que $\|\Gamma_p\|_\infty$ soit inférieur à $1/4\alpha$; il résulte de la première partie du théorème que $\int_E \exp(2\alpha Y_p^2)\,d\mu$ est p.s. fini. Par ailleurs, X_p est combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions propres continues à coefficients aléatoires, donc est presque sûrement borné; on a donc:

$$\int_E \exp(\alpha X^2)\,d\mu \leqq \int_E \exp(2\alpha X_p^2)\exp(2\alpha Y_p^2)\,d\mu$$
$$\leqq \exp(2\alpha \|X_p\|_\infty^2) \int_E \exp(2\alpha Y_p^2)\,d\mu,$$

c'est le résultat.

Remarque 1. Pour démontrer le premier résultat, il suffit de supposer que X est un processus gaussien mesurable de covariance Γ appartenant à $L^\infty(E\times E, \mu\otimes\mu)$. En effet dans ces conditions, on peut montrer que les variables aléatoires $\omega \to X_x(\omega) = X(\omega, x)$, $x\in E$ appartiennent à un sous-espace séparable de $L^2(\Omega, \mathbf{P})$ et il en résulte que la restriction de Γ à la diagonale de $E\times E$ vérifie l'hypothèse indiquée; on a de plus

$$\|\Gamma(x,x)\|_{L^\infty(E,\mu)} = \|\Gamma\|_{L^\infty(E\times E,\mu\otimes\mu)}.$$

Des résultats assez complets à ce sujet ont été obtenus en collaboration avec Cartier. Ils paraîtront en principe dans le Séminaire de Probabilités de Strasbourg (Lecture Notes in Mathématics).

Remarque 2. Le premier résultat du théorème ne peut pas être amélioré sans hypothèse supplémentaire comme le montre l'exemple suivant: choisissons une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres positifs de somme 1 telle que la série de terme général $a_n\sqrt{\log\frac{1}{a_n}}$ soit divergente; construisons une partition $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de l'intervalle $[0,1]$ par des intervalles de longueur respective a_n; choisissons enfin une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de v.a. gaussiennes centrées de variance 1 et posons:

$$X(\omega,x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \lambda_n(\omega)\, I_{A_n}(x);$$

on vérifie immédiatement à partir du théorème des trois séries que l'intégrale $\int_{[0,1]} \exp\frac{1}{2}X^2(x)\,dx$ qui est définie par la série de terme général $a_n\exp(\frac{1}{2}\lambda_n^2)$ est presque sûrement divergente.

§ 2. Etude d'un espace d'Orlicz

Les résultats du théorème 1 sur les trajectoires des processus gaussiens à covariance bornée conduisent à étudier l'ensemble des fonctions réelles mesurables f telles que l'intégrale $\int_E \exp(\alpha f^2)\,d\mu$ soit finie pour des valeurs strictement positives de l'exposant α. Plus précisément:

Soient K un espace compact métrisable, μ une mesure de probabilité sur K et f une fonction mesurable sur K à valeurs réelles; on pose:

$$N(f)=\sup_{p\geqq 1}(p!)^{-1/2p}\|f\|_{L^{2p}},$$
$$N'(f)=\inf\{\alpha>0 | \int_K (\exp(f^2/\alpha^2)-1)\,d\mu\leqq 1\}.$$

De plus, on note $G=G(K,\mu)$ l'espace des fonctions f telles que:

$$\exists\alpha>0 \quad \exp(\alpha f^2)\in L^1(K,\mu).$$

L'espace G est un espace d'Orlicz; les propriétés que nous établissons dans la suite sont des cas particuliers des propriétés générales de ces espaces présentées dans ([8]).

Théorème 2. *L'espace G est un espace vectoriel; pour qu'une fonction mesurable f appartienne à G, il faut et il suffit que $N(f)$ (resp. $N'(f)$) soit fini. De plus N et N' sont des normes sur G pour lesquelles il est complet et on a:*

$$\forall f\in G, \quad N(f)\leqq N'(f)\leqq 2N(f).$$

Démonstration. Notons d'abord que le caractère vectoriel de G est évident à partir de la convexité de la fonction: $x\mapsto\exp(\alpha x^2)$.

Soit f une fonction mesurable; si $N'(f)$ est fini, alors f appartient à G. Réciproquement, si f appartient *à* G, l'application:

$$\alpha\to\int_K (\exp(f^2/\alpha^2)-1)\,d\mu$$

est pour α assez grand une fonction continue tendant vers zéro quand α tend vers l'infini; elle prend donc des valeurs inférieures à 1 et $N'(f)$ est fini.

Posons $c_p=(p!)^{-1/2p}\|f\|_{L^{2p}}$; on a alors:

$$N(f)=\sup_{p\geqq 1}c_p, \qquad \int_K (\exp(f^2/\alpha^2)-1)\,d\mu=\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{c_p}{\alpha}\right)^{2p},$$

et par conséquent:

$$N(f)\leqq a\Leftrightarrow\forall p\geqq 1, \quad c_p\leqq a,$$
$$N'(f)\leqq b\Leftrightarrow\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{c_p}{b}\right)^p\leqq 1.$$

Il en résulte immédiatement que si $N(f)$ est fini, la série convergente de terme général $\left(\frac{c_p}{2N(f)}\right)^p$ a une somme inférieure ou égale à 1: $N'(f)$ est donc inférieur ou égal à $2N(f)$, f appartient à G et vérifie l'inégalité de droite de l'énoncé.

Réciproquement si f appartient à G, $N'(f)$ est fini; la série convergente de terme général $(c_p/N'(f))^p$ a une somme inférieure ou égale à 1, chacun de ses termes est inférieur ou égal à 1; $N(f)$ est donc fini, inférieur ou égal à $N'(f)$; f vérifie donc l'inégalité de gauche de l'énoncé.

Il est évident que N est une norme sur G; N' est aussi une norme puisque la fonction: $x \mapsto \exp(x^2)-1$ est continue, convexe, croissante sur $\mathbf{R}^+$, nulle à l'origine.

Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer que toute N-suite de Cauchy S sur G converge dans (G, N). Or, une telle suite S est une L^p-suite de Cauchy pour tout $p \geqq 1$; elle converge donc fortement dans tout L^p vers un élément f de tout L^p et on a pour tout élément g de G:

$$\begin{aligned} N(f-g) &= \sup_{p \geqq 1} (p!)^{-1/2p} \|f-g\|_{L^{2p}} = \sup_{p \geqq 1} (p!)^{-1/2p} \lim_{s \in S} \|g-s\|_{L^{2p}} \\ &\leqq \varliminf_{s \in S} \sup_{p \geqq 1} (p!)^{-1/2p} \|g-s\|_{L^{2p}} = \varliminf_{s \in S} N(g-s). \end{aligned}$$

On en déduit:

$$\lim_{s_1 \in S} N(f-s_1) \leqq \lim_{s_1 \in S} \varliminf_{s_2 \in S} N(s_2-s_1) = 0,$$

c'est le résultat cherché.

Dans toute la suite, on notera G_C l'adhérence dans (G, N) de l'espace des fonctions continues, G^* le dual topologique de (G, N) et N^* la norme sur G^* duale de N.

Théorème 3. (i) *Si μ n'est pas somme finie de mesures ponctuelles, G_C est strictement inclus dans G.*

(ii) *Toute fonction mesurable et bornée appartient à G_C.*

(iii) *Pour tout élément f du dual topologique de (G_C, N), il existe une fonction mesurable f_0 sur K telle que:*

$$\forall g \in G_C, \quad \langle g, f \rangle = \int_K g f_0 \, d\mu, \quad |f_0| \sqrt{\log^+ |f_0|} \in L^1(K, \mu).$$

(iv) *Réciproquement pour toute fonction mesurable f_0 sur K telle que $|f_0| \sqrt{\log^+ |f_0|}$ appartienne à $L^1(K, \mu)$, l'application: $g \mapsto \int_K f_0 \, g \, d\mu$ est une forme linéaire continue f sur (G, N) et il existe une constante A indépendante de f telle que:*

$$A N^*(f) \leqq \int_K |f_0| \sqrt{\log\left(1 + \frac{|f_0|}{\int_K |f_0| \, d\mu}\right)} \, d\mu \leqq N^*(f).$$

Démonstration. (i) Si g appartient à G_C, on vérifie immédiatement que pour tout α strictement positif, $\exp(\alpha f^2)$ appartient à $L^1(K, \mu)$. Or si μ n'est pas somme finie de mesures ponctuelles, $L^1(\mu)$ est différent de

$L^2(\mu)$, il existe donc une fonction mesurable g telle que $\exp(g^2)$ appartienne à $L^1(\mu)$ et non $\exp(2g^2)$; une telle fonction appartient à G sans appartenir à G_C.

(ii) et (iii) Soit f un élément du dual topologique de (G_C, N); supposons que $N^*(f)$ soit inférieur ou égal à 1; pour tout fonction g continue, on a alors:

$$|\langle g, f\rangle| \leqq N(g) \leqq \|g\|_\infty;$$

il existe donc une mesure (non nécessairement positive) m_f sur K telle que:

$$\forall g \text{ continue}, \quad \langle g, f\rangle = \int g\, dm_f.$$

Soit alors une fonction g mesurable et bornée, et posons $M = \|g\|_\infty$; pour tout entier $n \geqq 1$, il existe une partie compacte K_n de K telle que la restriction de g à K_n soit continue et que de plus on ait:

$$\eta = \sup\{\mu(K - K_n),\ |m_f|(K - K_n)\} \leqq \exp(-4n^2 M^2);$$

il existe aussi une fonction g_n continue sur tout K, coïncidant avec g sur K_n, majorée par M. On a alors:

$$\begin{aligned}\int_K (\exp n^2(g-g_n)^2 - 1)\, d\mu &\leqq \int_{K-K_n} (\exp n^2(g-g_n)^2 - 1)\, d\mu\\ &\leqq \eta(\exp(4n^2M^2) - 1) \leqq 1;\end{aligned}$$

on a donc $N'(g - g_n) \leqq 1/n$ et par suite (théorème 2), g appartient à G_C; le résultat (ii) est donc prouvé et l'on peut écrire:

$$\forall g \text{ mesurable et bornée}, \quad \langle g, f\rangle = \int g\, dm_f.$$

Pour tout ensemble μ-négligeable A, on peut appliquer la relation ci-dessus à l'indicatrice I_A de A (qui est équivalente à zéro dans (G, N)); comme $\langle I_A, f\rangle$ est nul, il en résulte que m_f est une mesure de base μ. Il existe donc une fonction $f_0 \in L^1(\mu)$ telle que:

$$dm_f = f_0\, d\mu;$$

pour tout entier $n \geqq 1$, il existe un compact L_n tel que la restriction f_n de f_0 à L_n soit mesurable et bornée et que de plus, $\mu(K - L_n)$ soit inférieure à $1/n$; alors la fonction h_n définie par:

$$\begin{aligned}&h_n = 0 \quad \text{hors de } L_n,\\ &|h_n| = \sqrt{\log\left(1 + \frac{|f_n|}{\int_K |f_0|\, d\mu}\right)} \quad \text{dans } L_n,\\ &h_n f_n \geqq 0,\end{aligned}$$

est une fonction mesurable et bornée et appartient donc à G_C. Le théorème 3 montre que $N(h_n)$ est inférieur à 1. On en déduit:

$$\int_K |f_0| \sqrt{\log\left(1+\frac{|f_0|}{\int_K |f_0|\, d\mu}\right)}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_K f_0 h_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \langle f, h_n\rangle \leqq 1,$$

d'où le résultat (iii) et de plus l'inégalité de droite (iv).

(iv) Soit une fonction f_0 mesurable telle que $|f_0| \sqrt{\log^+ |f_0|}$ appartienne à $L^1(\mu)$; l'inégalité «élémentaire» (extraite du calcul fondamental de l'introduction):

$$|x\,y| \leqq 2\sqrt{2}\,|x| \sqrt{\log(1+b\,|x|)} + \frac{1}{b}\,|y|\,(\exp(y^2/8)-1)$$

implique:

$$|x\,y| \leqq 2\sqrt{2}\,|x| \sqrt{\log(1+b\,|x|)} + \frac{1}{3b}\,(\exp(y^2/4)-1)$$

et permet d'écrire pour tout élément g de G tel que $N(g)=1$:

$$\left|\int_K f_0\, g\, d\mu\right| \leqq 2\sqrt{2}\left[\int_K |f_0| \sqrt{\log\left(1+\frac{|f_0|}{\int |f_0|\, d\mu}\right)}\, d\mu\right] + \frac{1}{3}\int_K |f_0|\, d\mu.$$

Comme par ailleurs, on constate que:

$$\forall t \in]0,1[, \quad \int |f_0|\, d\mu \leqq \frac{1}{(1-t)\sqrt{\log(1+t)}} \int |f_0| \sqrt{\log\left(1+\frac{|f_0|}{\int |f_0|\, d\mu}\right)}\, d\mu,$$

on en déduit la dernière affirmation du théorème et l'inégalité de gauche (iv) en choisissant par exemple $A=\frac{1}{6}$.

Le théorème suivant traduit les résultats du théorème 1:

Théorème 4. *Tout processus gaussien mesurable à covariance $\mu\otimes\mu$-presque partout bornée a presque toutes ses trajectoires dans $G(\mu)$. Tout processus gaussien mesurable à covariance continue a presque toutes ses trajectoires dans $G_C(\mu)$.*

§ 3. Application à la majoration et à la continuité des processus gaussiens

Théorème 5. (i) *Soient K un espace compact métrisable, μ une mesure de probabilité sur K et L un ensemble arbitraire; soient de plus Γ une fonction de type positif appartenant à $L^\infty(K\times K, \mu\otimes\mu)$ et f une fonction réelle sur $K\times L$; pour tout $t\in L$, on note f_t la fonction: $x\mapsto f(x,t)$ sur K; on suppose que l'application $t\mapsto f_t$ est une application bornée de L dans*

$G^*(K, \mu)$. Alors:

$$\Delta(s,t) = \int_K \int_K \Gamma(x,y) f(x,t) f(y,s)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \tag{1}$$

est la covariance d'un processus gaussien sur L p.s. borné.

(ii) *Si de plus L est un espace topologique et si $t \mapsto f_t$ est une application faiblement continue de L dans G_C^*, alors Δ est la covariance d'un processus gaussien p.s. continu sur L.*

Démonstration. Elle résulte immédiatement de la formule:

$$X_\Delta(t) = \int_K X_\Gamma(x) f(x,t)\, d\mu(x)$$

(où X_Γ (resp. X_Δ) est un processus de covariance Γ (resp. Δ)) et de l'application du théorème.

Dans la suite de ce paragraphe, nous essayons d'apprécier la force des critères énoncés dans le théorème 4. Nous montrons que les différents critères connus précédemment sont des cas particuliers. Pour ne pas surcharger l'exposé, nous supposerons ces critères connus et nous les utiliserons, ce qui nous permettra d'opérer sur les trajectoires p.s. continues au lieu d'opérer sur les covariances, ce qu'on pourrait faire pourtant sans peine.

Exemple 1. *Pour qu'une suite gaussienne indépendante $X = (X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit p.s. bornée, il faut et il suffit que sa covariance Δ s'écrive sous la forme* (1).

Démonstration. Soit $\sigma = (\sigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des écarts-type de X; soit de plus $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une partition de $[0,1]$ par des intervalles de longueur respective a_n; soit enfin $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite gaussienne normalisée indépendante. Pour tout $x \in [0,1]$, on pose:

$$Y(\omega, x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \lambda_n(\omega)\, I_{A_n}(x),$$

$$f_n(x) = \left(\frac{\sigma_n}{a_n}\right) I_{A_n}(x).$$

On vérifie facilement que:

$$X_n(\omega) = \int_{[0,1]} Y(\omega, x) f_n(x)\, dx.$$

Par ailleurs, Y a une covariance bornée par 1 et le théorème 3 montre que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sera bornée dans $G_C^*([0,1], dx)$ pour un choix convenable des a_n si et seulement s'il existe un nombre M tel que la série de terme général $\exp(-M^2/\sigma_n^2)$ soit convergente; c'est la condition nécessaire et suffisante classique pour que X soit p.s. bornée, d'où le résultat.

Exemple 2. *Pour qu'un processus gaussien X de la forme:*

$$X(\omega,t)=\sum_{n\in\mathbf{N}}[\lambda_n(\omega)\cos a_n t+\mu_n(\omega)\sin a_n t],$$

$$\inf_{n\in\mathbf{N}}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1,\qquad \mathbf{E}\{|\lambda_n|\}=b_n,\qquad \mathbf{E}\{|\mu_n|\}=c_n$$

où la suite $(\lambda_n,\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite gaussienne indépendante, soit p.s. borné, il faut et il suffit que sa covariance s'écrive sous la forme (1).

Démonstration. Les théorèmes de Szidon ([14, 15]) montrent que X sera p.s. borné si et seulement si la série de terme général $(|\lambda_n(\omega)|+|\mu_n(\omega)|)$ est p.s. convergente. Sous cette hypothèse, posons sur $\left\{[0,2\pi],\frac{dx}{2\pi}\right\}$:

$$\Gamma(x,y)=\sum_{n\in\mathbf{N}}[b_n\cos nx\cos ny+c_n\sin nx\sin ny],$$

$$f_t(x)=2\sum_{n\in\mathbf{N}}[\sqrt{b_n}\cos nx\cos a_n t+\sqrt{c_n}\sin nx\sin a_n t].$$

On vérifie facilement que Γ est borné, que (f_t) est borné dans L^2, donc dans G_C^* et que de plus la covariance Δ de X a la valeur donnée par la formule (1), d'où le résultat.

Exemple 3. *Soit φ une fonction positive croissante d'une variable positive telle que l'intégrale $\int^{\infty}\varphi(\exp(-x^2))\,dx$ soit convergente; soit de plus X un processus gaussien sur une partie ouverte $\mathscr{G}$ de $\mathbf{R}^d$ telle que:*

$$\forall x,y,\qquad E\{|X(x)-X(y)|^2\}\leqq\varphi^2(|x-y|);$$

alors la covariance Δ de X s'écrit sur tout compact K intérieur à $\mathscr{G}$ sous la forme (1).

Démonstration. Nous supposons les trajectoires de X p.s. continues. Nous supposons aussi que le voisinage L d'ordre ε de K est inclus dans $\mathscr{G}$. Nous choisissons une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres positifs tendant vers zéro en décroissant $\left(\varepsilon_0<\frac{\varepsilon}{2}\right)$; nous notons ρ_n la fonction proportionnelle à l'indicatrice de la boule de R^d de rayon ε_n centrée à l'origine et d'intégrale égale à 1; les propriétés des convolutions permettent d'écrire:

$$\forall t\in K,\qquad X(t)=X*\rho_0(t)+\lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{p}X*(\rho_n-\rho_{n-1})(t);$$

utilisant la valeur de l'intégrale de ρ_n, on en déduit:

$$X(t) - X * \rho_0(t) = \lim_{p\to\infty} \iint \frac{X(x)-X(y)}{\sqrt{E\{|X(x)-X(y)|^2\}}}$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{p} \sqrt{E\{|X(x)-X(y)|^2\}}\, \rho_n(t-x)\, \rho_{n-1}(t-y)\, dx\, dy.$$

On pose alors:

$$Y(\omega, x, y) = \frac{X(\omega, x) - X(\omega, y)}{\sqrt{E\{|X(x)-X(y)|^2\}}},$$

$$f_{n,t}(x, y) = \sqrt{E\{|X(x)-X(y)|^2\}}\, \rho_n(t-x)\, \rho_{n-1}(t-y);$$

le processus gaussien Y défini sur $L \times L$ a une covariance bornée p.p. par rapport à la mesure de Lebesgue, ses trajectoires sont donc dans $G(L \times L, dx\,dy)$. Les fonctions $f_{n,t}$ appartiennent à G_C^*; on a donc au sens de la dualité correspondante:

$$X(t) - X * \rho_0(t) = \lim_{p\to\infty} \left\langle Y, \sum_{n=1}^{p} f_{n,t} \right\rangle.$$

En passant aux covariances, on en déduira le résultat annoncé si la suite d'applications $t \mapsto \sum_{n=1}^{p} f_{n,t}$ converge quand p tend vers l'infini vers une application continue de K dans G_C^*. Il suffit pour cela que la série de terme général $\sup_{t\in K} \|f_{n,t}\|_{G_C^*}$ soit convergente. Posons $\varepsilon_n = \frac{1}{2}\exp(-e^{n+1})$; on obtient:

$$\sup_{t\in K} \|f_{n,t}\|_{G_C^*} \leqq \varphi(2\varepsilon_{n-1}) \left(C_1 + C_2 \sqrt{\log \frac{1}{\varepsilon_n}} \right) \leqq C_3\, \varphi(\exp(-e^n))\, e^{n/2},$$

ce dernier terme est le terme général d'une série convergente puisque $\int^{\infty} \varphi(\exp(-x^2))\, dx$ est convergente, d'où le résultat.

§ 4. Processus gaussiens portés par des espaces fonctionnels

La méthode présentée ci-dessus permet de progresser dans l'étude des processus gaussiens portés par des espaces vectoriels topologiques généraux. On peut énoncer par exemple le théorème suivant que nous donnons sans démonstration:

Théorème 6. *Soit E un espace vectoriel topologique dans lequel il existe une suite partout dense et soit E' son dual topologique muni de la tribu engendrée par les cylindres; soient K un espace compact métrisable, μ une probabilité sur K et Γ une fonction de type positif sur $K \times K$ appartenant à $L^\infty(K \times K, \mu \otimes \mu)$; soit enfin $x \mapsto U(x)$ une application mesurable de K dans E' vérifiant la condition suivante:*

Il existe un voisinage V de l'origine dans E tel que:

$$\sup_{\varphi \in V} \int |\langle U(x), \varphi\rangle| \sqrt{\log\left(1 + \frac{|\langle U(x), \varphi\rangle|}{\int |\langle U(x), \varphi\rangle| \, d\mu(x)}\right)} \, d\mu(x) < \infty.$$

Dans ces conditions, la forme bilinéaire

$$(\varphi, \varphi') \mapsto \int_K \int_K \Gamma(x, y) \langle U(x), \varphi\rangle \langle U(y), \varphi'\rangle \, d\mu(x) \, d\mu(y)$$

est la covariance d'une mesure gaussienne sur E'.

Pour la démonstration, on applique le théorème II.3.2 de ([5]) en majorant:

$$\sup_{\varphi \in V} \int X_\Gamma(\omega, x) < U(x), \quad \varphi > d\mu(x)$$

à partir du calcul démontrant l'inégalité de droite (iv) du théorème 3.

Remarque. Ce théorème est assez précis puisque dans le cas où E est un espace de Hilbert, il donne la condition nécessaire et suffisante de Prohorov caractérisant les mesures gaussiennes portées par E.

§ 5. Appendice sur l'intégrabilité des vecteurs aléatoires gaussiens ([6, 9, 12])

On sait que si X est une variable aléatoire gaussienne usuelle (centrée) d'écart-type σ, l'espérance mathématique de $\exp(\alpha X^2)$ est finie et vaut $(1-2\alpha\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}$ pour tout α inférieur à $1/2\sigma^2$. Cette propriété se généralise immédiatement à un vecteur aléatoire gaussien $X=(X_j)_{1 \leq j \leq d}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^d$: notant σ le maximum des écarts-type des composantes, on a:

$$\forall \alpha < \frac{1}{2\sigma^2}, \qquad \mathbf{E}\{\exp(\alpha \|X\|_\infty^2)\} \leqq \sum_{j=1}^{d} \mathbf{E}\{\exp(\alpha X_j^2)\} \leqq d(1-2\alpha\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

En analysant de près les calculs justifiant les théorèmes 5 et 6, on constaterait facilement que pour toutes les mesures gaussiennes identifiées par cette méthode sur des espaces normés par une norme N, il existe un nombre α strictement positif tel que l'intégrale $\int_E \exp(\alpha N^2(x)) \, d\mu(x)$ soit finie. Nous démontrons ici que cette propriété est absolument générale.

On notera E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Nous ne ferons aucune hypothèse de finitude sur la dimension de E. Nous ne supposerons pas que E soit muni d'une topologie. Nous supposerons seulement que E est muni d'une tribu $\mathscr{B}$ compatible avec sa structure d'espace vectoriel: l'addition et la multiplication par les scalaires sont des applications mesurables de $(E \times E, \mathscr{B} \times \mathscr{B})$ dans $(E, \mathscr{B})$ et de $(\mathbf{R} \times E, \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \times \mathscr{B})$ dans $(E, \mathscr{B})$.

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X une application mesurable de $(\Omega, \mathscr{A})$ dans $(E, \mathscr{B})$; nous dirons que X est un vecteur gaussien à valeurs dans E s'il vérifie la propriété suivante:

(G): Pour tout couple (X_1, X_2) de vecteurs aléatoires indépendants de même loi que X, pour tout couple (s, t) de nombres réels tels que $s^2+t^2=1$, les variables aléatoires (sX_1+tX_2) et (tX_1-sX_2) sont indépendantes et de même loi que X.

Un théorème classique prouve que si E est de dimension finie, on obtient ainsi les vecteurs gaussiens (centrés) usuels; on montre facilement que c'est le cas plus généralement si la tribu $\mathscr{B}$ sur E est engendrée par des formes linéaires mesurables. La définition (G) a l'avantage de permettre de définir des vecteurs gaussiens dans d'autres cas; elle a aussi l'avantage de se plier exactement aux calculs utiles pour notre étude.

Nous notons N une semi-norme sur E mesurable de $(E, \mathscr{B})$ dans $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$.

Théorème 7. *Il existe un nombre α strictement positif tel que l'espérance de* $\exp(\alpha N^2(X))$ *soit finie.*

Démonstration. La propriété (G) montre que si X_1 et X_2 sont des vecteurs aléatoires indépendants de même loi que X, alors les variables aléatoires réelles $N(X_1+X_2)/\sqrt{2}$ et $N(X_1-X_2)/\sqrt{2}$ sont indépendantes et de même loi que $N(X)$. On en déduit pour tout couple (s, t) de nombres réels:

$$\mathbf{P}(N(X) \leqq s) \cdot \mathbf{P}(N(X) > t) = \mathbf{P}(N(X_1 - X_2) \leqq s\sqrt{2}, N(X_1 + X_2) > t\sqrt{2});$$

En utilisant les inégalités du triangle, on constate que dans l'ensemble mesuré au second membre, on a simultanément:

$$N(X_1) > (t-s)/\sqrt{2}, \qquad N(X_2) > (t-s)/\sqrt{2};$$

comme $N(X_1)$ et $N(X_2)$ sont indépendantes et de même loi que $N(X)$, on en déduit:

$$\mathbf{P}(N(X) \leqq s) \cdot \mathbf{P}(N(X) > t) \leqq [\mathbf{P}(N(X) > (t-s)/\sqrt{2})]^2.$$

Cette seule relation suffit pour la conclusion du théorème; en effet définissons une suite $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres positifs en posant

$$t_0 = s \in \mathbf{R}^+, \qquad t_{n+1} - s = \sqrt{2}\, t_n,$$

de sorte que l'on ait:

$$t_n = (2^{(n+1)/2} - 1)(\sqrt{2} + 1)\, s;$$

Posons de plus:

$$\mathbf{P}(N(X) \leqq s) = q, \qquad \mathbf{P}(N(X) > t_n) = q\, x_n.$$

La relation établie ci-dessus permet d'écrire:

$$x_{n+1} \leqq (x_n)^2.$$

On en déduit pour tout entier positif n:

$$x_n \leqq (x_0)^{2^n} = \exp(2^n \log x_0),$$

et finalement:

$$\mathbf{P}\big(N(X) > (2^{(n+1)/2} - 1)(\sqrt{2}+1)\, s\big) \leqq q \exp\left(-2^n \log \frac{q}{1-q}\right).$$

Choisissant alors s tel que q soit strictement supérieur à $\frac{1}{2}$, on obtient par interpolation:

$$\forall u \geqq s, \qquad \mathbf{P}\big(N(X) > u\big) \leqq q \exp\left(-\frac{u^2}{24 s^2} \log \frac{q}{1-q}\right)$$

le résultat s'ensuit immédiatement.

Théorème 8. *Soit M une application mesurable de $(E, \mathscr{B})$ dans $(\bar{\mathbf{R}}, \mathscr{B}_{\bar{\mathbf{R}}})$; on suppose que la restriction de M à $M^{-1}(\mathbf{R})$ est une semi-norme, qu'il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de formes linéaires mesurables sur $(E, \mathscr{B})$ telles que:*

$$\mathbf{P}\big(M(X) = \sup_{n \in \mathbf{N}} |\langle X, y_n \rangle|\big) = 1;$$

on suppose de plus que:

$$\mathbf{P}\big(M(X) < \infty\big) > 0;$$

on note σ la borne supérieure des écarts-type des variables aléatoires $\langle X, y_n \rangle$. Dans ces conditions, $M(X)$ est presque sûrement fini; de plus pour tout α strictement inférieur à $1/2\sigma^2$, on a:

$$\mathbf{E}\{\exp(\alpha M^2(x))\} < \infty.$$

Remarque. La propriété (G) montre que les variables aléatoires $\langle X, y_n \rangle$ sont gaussiennes centrées (au sens usuel); σ est donc bien défini. En se reportant au début du paragraphe, on constatera que le résultat du théorème est le meilleur résultat possible.

Démonstration. On démontre comme ci-dessus que pour tout triplet (s, t, u) de nombres positifs avec $t < u$, on a:

$$\mathbf{P}\big(M(X) \leqq s\big) \cdot \mathbf{P}\big(t < M(X) \leqq u\big) \leqq \big[\mathbf{P}\big((t-s)/\sqrt{2} < M(X) \leqq (u+s)/\sqrt{2}\big)\big]^2.$$

Définissant alors deux suites récurrentes par:

$$\begin{aligned} t_0 &= s \in \mathbf{R}^+, & t_n &= (t_{n+1} - s)/\sqrt{2}, \\ u_0 &= 3s(1+\sqrt{2}), & u_n &= (u_{n+1} + s)/\sqrt{2}, \end{aligned}$$

on constate que t_n et u_n tendent vers l'infini avec n et que u_n est toujours supérieur ou égal à t_{n+1}. On pose alors:

$$q = \mathbf{P}\big(M(X) \leqq s\big), \qquad q' = \mathbf{P}\big(s < M(X) \leqq 3s(1+\sqrt{2})\big);$$

en opérant comme ci-dessus, on en déduit:

$$\mathbf{P}(t_n < M(X) \leqq t_{n+1}) \leqq q \exp\left(-2^n \log \frac{q}{q'}\right),$$

et donc par une sommation facile, si (q'/q) est inférieur à 1:

$$\mathbf{P}(t_n < M(X) < \infty) \leqq \frac{q^2}{q-q'} \exp\left(-2^n \log \frac{q}{q'}\right).$$

On choisit s de sorte que (q'/q) soit strictement inférieur à 1, on choisit un nombre c strictement compris entre (q'/q) et 1. Il existe alors un entier k_0 tel que:

$$\forall k \geqq k_0, \quad \mathbf{P}(\sup_{n \leqq k} |\langle X, y_n \rangle| \leqq s) \geqq q,$$
$$\mathbf{P}(s < \sup_{n \leqq k} |\langle X, y_n \rangle| \leqq 3s(1+\sqrt{2})) \leqq c\,q.$$

On en déduit:

$$\forall k \geqq k_0, \quad \mathbf{P}(t_n < \sup_{n \leqq k} |\langle X, y_n \rangle|) \leqq q \frac{1}{1-c} \exp(2^n \log c),$$

d'où une inégalité analogue pour $M(X)$ qui est donc presque sûrement finie.

Pour démontrer la deuxième propriété, on peut légitimement se placer dans le cas particulier suivant: l'espace E est l'espace ℓ^∞, les y_n sont les formes coordonnées, la semi-norme M est la norme usuelle. Nous notons $(\lambda_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite gaussienne normale engendrant la tribu de X, il existe donc une famille $(V_i)_{i \in \mathbf{N}}$ d'éléments de E telle que:

$$X = \sum_{i \in \mathbf{N}} V_i \lambda_i, \qquad V_i = (v_{ki})_{k \in \mathbf{N}}.$$

Nous posons

$$X_{-n} = \sum_{i > n} V_i \lambda_i, \qquad Y_{-n} = \exp[\alpha \|X_{-n}\|^2]$$

et nous notons $\mathscr{B}_{-n}$ la tribu engendrée par $(\lambda_i)_{i > n}$.

L'indépendance des λ_i montre que $(X_{-n}, \mathscr{B}_{-n})_{n \in \mathbf{N}}$ est une martingale à valeurs vectorielles; il en résulte que $(Y_{-n}, \mathscr{B}_{-n})_{n \in \mathbf{N}}$ est une sous-martingale. Les inégalités des sous-martingales permettent donc d'écrire:

$$\forall s \in \mathbf{R}^+, \quad \mathbf{P}\{\sup_{n \in \mathbf{N}} \|\sum_{i \geqq n} V_i \lambda_i\| \geqq s\} \leqq e^{-\alpha s^2} \mathbf{E}\{\exp[\alpha \|X\|^2]\}.$$

Choisissons $\alpha > 0$ tel que le second membre soit fini et $s > 0$ tel qu'il soit strictement inférieur à 1; notant que $\limsup_{n \in \mathbf{N}} \|\sum_{i \geqq n} V_i \lambda_i\|$ est une variable aléatoire dégénérée, on obtient:

$$\mathbf{P}\{\limsup_{n \in \mathbf{N}} \|\sum_{i \geqq n} V_i \lambda_i\| \geqq s\} = 0.$$

Pour tout $\varepsilon>0$, on peut donc déterminer un entier n tel que:

$$\mathbf{P}\{\|\sum_{i\geqq n} V_i \lambda_i\| \geqq s+\varepsilon\}<\varepsilon. \tag{1}$$

Soit alors $\alpha<1/2\sigma^2$; choisissons $\beta\in]\alpha, 1/2\sigma^2[$ et $\varepsilon\in]0,\frac{1}{2}[$ tels que

$$\frac{\alpha\beta}{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2}<\frac{1}{24(\sigma+\varepsilon)^2}\log\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}. \tag{2}$$

Les inégalités (1) et (2) assurent (théorème 7) que:

$$\mathbf{E}\left\{\exp\frac{\alpha\beta}{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2}\|\sum_{i\geqq n} V_i\lambda_i\|^2\right\}=A<\infty.$$

L'hypothèse sur β et la relation:

$$\sum_{i<n}(v_{ki})^2\leqq\sum_{i\in\mathbf{N}}(v_{ki})^2\leqq\sigma^2$$

montrent que:

$$\mathbf{E}\{\exp[\beta\|\sum_{i<n} V_i\lambda_i\|^2]\}\leqq\mathbf{E}\{\exp[\beta\sigma^2\sum_{i<n}\lambda_i^2]\}=(1-2\beta\sigma^2)^{-\frac{n-1}{2}}<\infty.$$

La convexité de la fonction $x\mapsto\exp x^2$ permet alors d'écrire:

$$\mathbf{E}\{\exp[\alpha\|X\|^2]\}\leqq\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}(1-2\beta\sigma^2)^{-\frac{n-1}{2}}+\left(1-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)A<\infty;$$

c'est le résultat à prouver.

Remarque. Le résultat du théorème 7 est dû à Landau et Shepp ([9]), avec une démonstration fausse qui rend cependant le résultat plausible. La démonstration présentée ici, radicalement différente, a été publiée dans [6] par nous-même. La première partie du théorème 8 est originale; une démonstration assez semblable de la seconde partie dudit théorème se trouve dans [12].

Bibliographie

1. Belyaev, Yu. K.: Local properties of the sample functions of stationnary gaussian processes. Th. Prob. Appl. **5**, 117–120 (1960).
2. Delporte, J.: Fonctions aléatoires presque sûrement continues sur un intervalle fermé. Ann. Inst. Henri Poincarè **B 1**, 111–215 (1964).
3. Doob, J. L.: Stochastic processes. New-York: Wiley 1967.
4. Fernique, X.: Continuité de processus gaussiens. C. R. Acad. Sc., Paris **258**, 6058–60 (1964).

4a. – Continuité de certains processus gaussiens. Sém. R. Fortet, Inst. Henri Poincaré, Paris, 1965.

5. – Processus linéaires, processus généralisés. Ann. Inst. Fourier, Grenoble **17**, 1–92 (1967).
6. – Intégrabilité des vecteurs gaussiens. C. R. Acad. Sc. Paris **270**, 1698–99 (1970).

7. Hunt, G.A.: Random Fourier transforms. Trans. Am. Math. Soc. **71**, 38–69 (1951).
8. Krasnoselsky, M.A., Rutitsky, Y.B.: Convex function and Orlicz spaces. Delhi, Publ. Hindustan Corp. (1962).
9. Landau, H.J., Shepp, L.A.: On the supremum of a Gaussian process, Sankhya (à paraître).
10. Marcus, M.B.: Upper bounds for the asymptotic maxima of continuous Gaussian process (à paraître).
11. – Shepp, L.A.: Continuity of Gaussian processes. Trans. Am. Math. Soc. (à paraître).
12. – – Sample behavior of Gaussian processes. Proc. 6th Berkeley Symposium (à paraître).
13. Nisio, M.: On the extreme values of Gaussian processes. Osaka J. Math. **4**, 313–26 (1967).
14. Szidon, S.: Verallgemeinerung eines Satzes über die absolute Konvergenz von Fourierreihen mit Lücken. Math. Ann. **97**, 477–80 (1927).
15. Zygmund, A.: Trigonometrical series. Oxford: University Press (1955).

Xavier Fernique
Institut de Recherche Mathématique Avancée
7, Rue René Descartes
F-67 Strasbourg
France

(Reçu le 10 février 1971)