Inventiones math. 39, 253–275 (1977)

Inventiones mathematicae

Feuilletages et difféomorphismes infiniment tangents à l'identité

F. Sergeraert

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, F-86022 Poitiers, France

1. Introduction

On connaît le rôle joué par l'holonomie en matière de feuilletages. Soit G le groupe des germes de C^∞-difféomorphismes de $\mathbb{R}$ en O. Si F est une feuille d'un C^∞-feuilletage $\mathscr{F}$ de codimension 1 d'une C^∞-variété, et si $x_0 \in F$, alors l'holonomie de $\mathscr{F}$ en x_0 est un homomorphisme de groupes $H: \pi_1(F, x_0) \to G$ qui, dans une certaine mesure, décrit $\mathscr{F}$ au voisinage de F. D'où l'intérêt particulier que présente l'étude des propriétés algébriques des éléments de G. On démontre dans cet article deux telles propriétés.

Soient G_∞ le sous-groupe de G constitué des germes infiniment tangents à l'identité en 0, G' l'ensemble des éléments de G admettant 0 comme seul point fixe dans un voisinage de 0, et $G'_\infty = G' \cap G_\infty$. Soit $g \in G'_\infty$; le théorème 3.1 donne une condition suffisante pour que g puisse être plongé dans un sous-groupe à un paramètre de G. La condition exprime que g «n'oscille pas trop» (voir la figure qui accompagne 3.1). Une telle condition est bien indispensable puisque dans le §4 on donne un exemple de $g \in G'_\infty$ qui n'est pas un carré et qui donc n'est pas plongeable dans un groupe à un paramètre. Le cas de $g \in G' - G'_\infty$ avait été traité précédemment par Sternberg [10] et Takens [12]; ils avaient montré qu'un tel g est toujours plongeable dans un groupe à un paramètre. Si $g \in G - G'$, l'existence arbitrairement proche de 0 d'autres points fixes que 0 donne lieu à d'autres obstructions au plongement dans un groupe à un paramètre; ces obstructions ne sont pas étudiées ici (voir N. Kopell [2], Mather [5]).

Indépendamment de son intérêt propre, l'étude du plongement dans un groupe à un paramètre des éléments de G'_∞ est motivée par un résultat de Mather [5] caractérisant la classe de conjugaison de certains difféomorphismes à support compact de $\mathbb{R}$. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un C^∞-difféomorphisme tel que pour des $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on ait $f(x) = x$ si $x \notin]a, b[$, et $f(x) > x$ si $x \in]a, b[$; on suppose de plus que le germe f_a de f en a est engendré par un C^∞-champ de vecteurs ξ_a; de même le gerne f_b est engendré par ξ_b. Mather construit alors un difféomorphisme du cercle $\phi(f) \in \mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ tel que la classe de conjugaison de f est caractérisée par $\phi(f)$ et les classes de conjugaison de ξ_a et ξ_b. Dès lors, la question de l'existence de ξ_a et ξ_b pour tout f se posait naturellement. La réponse est donc négative. Notons qu'il y a correspondance canonique entre les classes de conjugaison de C^∞-difféomorphismes à support compact de $\mathbb{R}$ et les classes d'isomorphismes de C^∞-feuilletages de $S^1 \times \mathbb{R}$ de codimension 1, transverses à chaque $\{\theta\} \times \mathbb{R}$ et tels que, si $|t|$ est assez grand, $S^1 \times \{t\}$ soit une feuille.

Le théorème 5.2 affirme que le groupe G_∞ est parfait. Une conséquence de ce résultat est la réponse positive à la question posée par Rosenberg et Thurston [8] de la nullité de la classe de cobordisme des feuilletages de Reeb de S^3. Il en résulte aussi que l'élément de $\pi_3(B\Gamma_1^\infty)$ représenté par tout feuilletage de Reeb est nul. Autrement dit tout feuilletage de Reeb de S^3 peut se prolonger en une Γ_1^∞-structure de D^4.

Une autre interprétation de la même conséquence est la suivante. Soit $\mathrm{Diff}^\infty_{K,\delta}(\mathbb{R})$ le groupe des C^∞-difféomorphismes de $\mathbb{R}$ à support compact, muni de la topologie discrète. Si $g, h \in \mathrm{Diff}^\infty_{K,\delta}(\mathbb{R})$ ont leur support dans $]-\infty, 0]$ et dans $[0, +\infty[$ respectivement, alors le 2-cycle d'Eilenberg-MacLane $[g|h] - [h|g]$ a une classe d'homologie nulle. Le théorème 5.2 est ainsi un modeste progrès dans l'évaluation de $H_2(\mathrm{Diff}^\infty_{K,\delta}(\mathbb{R}) = H_3(B\Gamma_1^\infty) = \pi_3(B\Gamma_1^\infty)$ (Mather [4]).

Pour démontrer le théorème 5.2 on utilise certains résultats intermédiaires de la démonstration du théorème 3.1.

2. Plongement d'une C^∞-contraction dans un groupe a un paramètre de classe C^1

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème 2.2.

2.1. Définition. Soit ξ un germe de champ de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}$.

On peut identifier ξ à un germe de fonction numérique. Supposons de plus que $\xi(0) = 0$. Alors e^ξ est le germe de difféomorphisme défini par:

$$\left|\begin{array}{l} e^\xi(x) = F(1, x), \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \xi(F(t, x)), \\ F(0, x) = x \end{array}\right.$$

où, pour un t donné, x est assez petit.

2.2. Théorème. *Soit $f \in G'$. Alors il existe un unique germe de champ de vecteurs ξ de classe C^1 tel que $e^\xi = f$.*

Ce théorème est dû à Szekeres [11]. On le redémontre afin de donner quelques notations et quelques formules utiles pour la suite.

Supposons maintenant que f soit un C^∞-difféomorphisme f: $[0, \varepsilon[\to [0, \varepsilon'[$ tel que $f(x) < x$ si $x > 0$.

2.3. Notations. Pour tout symbole x, on notera $\Delta x = x - f(x)$, $x_0 = x$, $x_i = f(x_{i-1})$. Par définition:

$$\left|\begin{array}{l} \phi(x) = -f''(x)/f'(x), \\ g^{(q)}(x) = \text{dérivée } q^{\text{ieme}} \text{ de } g \text{ en } x, \\ g_q(x) = \sup\limits_{0 \leqq y \leqq x} |g^{(q)}(y)|. \end{array}\right.$$

2.4. Quelques formules. La formule de Taylor à l'ordre 2 permet d'écrire:

$$f(f(x))-f(x)=(f(x)-x)\cdot f'(x)$$
$$+\left[\int_0^1 (1-t)\, f''(x+t(f(x)-x))\, dt\right](f(x)-x)^2$$

ou:

$$\Delta x_1=\Delta x_0 f'(x_0)+\varepsilon(x_0)\,\Delta x_0^2$$

si:

$$\varepsilon(x)=-\int_0^1 (1-t)\, f''(x-t\,\Delta x)\, dt;$$

donc:

$$|\varepsilon(x)|\leqq f_2(x)/2.$$

Ainsi:

$$f'(x)=\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0}-\varepsilon(x)\,\Delta x.$$

Si on fait tendre x vers 0, on voit que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0}=f'(0).$$

Puis:

$$f'(x_0)=\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0}\left[1-\varepsilon(x_0)\,\frac{\Delta x_0^2}{\Delta x_1}\right]$$

et donc

$$f'(x_0)\dots f'(x_{n-1})=\frac{\Delta x_n}{\Delta x_0}\prod_{i=0}^{n-1}\left[1-\varepsilon(x_i)\,\frac{\Delta x_i^2}{\Delta x_{i+1}}\right].$$

Remarquons que la série

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left|\varepsilon(x_i)\,\frac{\Delta x_i^2}{\Delta x_{i+1}}\right|$$

est convergente (car $\Sigma\,\Delta x_i=x$) et donc aussi le produit infini:

$$\prod_{i=0}^{\infty}\left[1-\varepsilon(x_i)\,\frac{\Delta x_i^2}{\Delta x_{i+1}}\right]$$

et encore la série

$$\sum_{i\geqq 0} f'(x_0)\dots f'(x_{i-1})=O(x/\Delta x)$$

pour $x>0$. Si $f'(0)<1$, elle est même uniformément convergente sur tout compact de $[0,\varepsilon[$, mais si $f'(0)=1$, elle diverge en 0.

2.5. Lemme. *La fonction*

$$K(x,y)=\prod_{i=0}^{\infty}\frac{f'(y_i)}{f'(x_i)}\qquad (x,y\in]0,\varepsilon[)$$

est définie et de classe C^1. *De plus, si* $f'(0)<1$, *le même résultat vaut pour* $x,y\in[0,\varepsilon[$.

Démonstration. Posons:

$$\begin{cases} K_0(x,y)=\sum_{i\geq 0}\log f'(y_i)-\log f'(x_i),\\ K_1(x,y)=\sum_{i\geq 0}\phi(x_i)\,f'(x_{i-1})\ldots f'(x_0). \end{cases}$$

La série K_1 est obtenue en dérivant terme à terme par rapport à x la série K_0 (voir notations 2.3). Puisque $f'(x_{i-1})\ldots f'(x_0)=O(\Delta x_i/\Delta x)$ et que $\Sigma\Delta x_i=x$, on voit que la série K_1 est localement uniformément convergente.

Le théorème classique d'intégration terme à terme et le fait que la série K_0 converge pour $x=y$ prouvent que K_0 est de classe C^1 pour $x,y>0$. Donc $K=\exp(K_0)$ est aussi de classe C^1 pour $x,y>0$.

Si $f'(0)<1$, la série K_1 converge uniformément sur tout compact de $[0,\varepsilon[$. On conclut de la même façon.

2.6. Lemme. *Supposons que* $f'(0)=1$. *Soit* $a\in]0,\varepsilon[$ *fixé. Une condition nécessaire pour que* ξ, *germe* C^1 *de champ de vecteurs, vérifie* $f=e^{\xi}$ *est qu'il existe* $\rho\in\mathbb{R}-\{0\}$ *tel que* $\xi(x)=\rho K(x,a)$. *Un tel* ρ *est unique.*

Démonstration. Si F est l'intégrale d'un tel ξ, c'est-à-dire si:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x)=\xi(F(t,x)),\\ F(0,x)=x,\\ F(1,x)=f(x). \end{cases}$$

alors, pour chaque t le germe de difféomorphisme $x\mapsto F(t,x)$ commute avec f. Le lemme de N. Kopell [2] permet donc d'affirmer:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)=K(F(t,x),x).$$

En calculant $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial x}$ de deux façons, il vient:

$$\xi'(F(t,x))\,\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)=\frac{\partial K}{\partial x}(F(t,x),x)\,\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)$$

ou:

$$\xi'(F(t,x))\,K(F(t,x),x)=\frac{\partial K}{\partial x}(F(t,x),x)\,\xi(F(t,x)).$$

Pour $t=0$, cette relation s'écrit:

$$\xi'(x)=K_1(x,x)\,\xi(x).$$

C'est une équation différentielle linéaire. L'existence de ρ sera prouvée si $\xi(x) = K(x, a)$ est solution; il faut voir que $K_1(x, a) = K_1(x, x)$; mais $K_1(x, y)$ ne dépend pas de y!

2.7. Lemme. *Supposons que $f'(0) < 1$. Une condition nécessaire pour que ξ, germe C^1 de champ de vecteurs vérifie $f = e^{\xi}$ est que:*

$$\xi(x) = \log f'(0) \int_0^x K(x, t)\, dt.$$

Démonstration. On ne peut plus appliquer le lemme de N. Kopell qui suppose $f'(0) = 1$. Cependant le même calcul qu'en [2] prouve cette fois que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, 0)\, K(F(t, x), x)$$

En procédant comme pour la démonstration du lemme 2.6, on trouve maintenant que ξ doit vérifier l'équation:

$$\xi'(x) - K_1(x, x)\, \xi(x) = \xi'(0).$$

Cette fois K, K_0, K_1 sont définis même en 0. Nécessairement $\xi(0) = 0$, $\xi'(0) = \log f'(0)$. La méthode d'intégration par «variation de la constante» conduit à chercher $\xi(x)$ sous la forme $C(x)\, K(x, a)$. On trouve ensuite que

$$C(x) = \log f'(0) \int_0^x K(a, t)\, dt$$

d'où le résultat.

2.8. Définition. $\xi(x)$ est désormais la fonction définie par le lemme 2.6 ou le lemme 2.7 selon que $f'(0) = $ ou < 1.

2.9. Lemme. *Si $f'(0) = 1$, alors $\xi(x) \sim -\Delta x$ quand $x \to 0$.*

Démonstration.

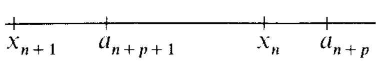
$$K(x, a) = \lim_{n \to \infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{f'(a_i)}{f'(x_i)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\dfrac{\Delta a_n}{\Delta a}\right)}{\left(\dfrac{\Delta x_n}{\Delta x}\right)} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1 + \varepsilon(a_i)\, \dfrac{\Delta a_i^2}{\Delta a_{i+1}}}{1 + \varepsilon(x_i)\, \dfrac{\Delta x_i^2}{\Delta x_{i+1}}}.$$

Montrons que $\lim_{n \to \infty} \Delta a_n / \Delta x_n = 1$. Supposons pour fixer les idées que $a \geqq x$. Si $x = a_p$, alors $\Delta a_n / \Delta a_{n+p} \sim f'(a_n) \ldots f'(a_{n+p-1}) \sim 1$.

Sinon, soit p tel que $a_{p+1} < x < a_p$. Il suffit de montrer que $\lim_{n \to \infty} \Delta a_{n+p} / \Delta x_n = 1$. Mais

$$\frac{\Delta a_{n+p}}{\Delta x_n} = \frac{(x_n - a_{n+p+1}) + (a_{n+p} - x_n)}{(x_n - a_{n+p+1}) + (a_{n+p+1} - x_{n+1})}$$



Or $(a_{n+p}-x_n)/(a_{n+p+1}-x_{n+1})\to 1$ par le même argument que celui qui montrait $\Delta x_1/\Delta x_0\to f'(0)$ (*cf.* 2.4).

Donc:

$$\frac{K(x,a)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta a}\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1+\varepsilon(a_i)\dfrac{\Delta a_i^2}{\Delta a_{i+1}}}{1+\varepsilon(x_i)\dfrac{\Delta x_i^2}{\Delta x_{i+1}}}$$

où le produit infini est uniformément convergent sur tout compact de $[0,\varepsilon[$. Donc $\xi(x)\sim -\mu\Delta x$ avec $\mu>0$. Posons $\xi(x)=-\mu(x)\Delta x$ avec $\lim_{x\to 0}\mu(x)=\mu$. Alors:

$$\frac{1}{\mu(x)}=-\frac{\Delta x}{\xi(x)}=\frac{1}{\xi(x)}\int_0^1\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\,dt=\int_0^1\frac{\xi(F(t,x))}{\xi(x)}\,dt$$
$$=\int_0^1\frac{\mu(F(t,x))}{\mu(x)}\,\frac{\Delta(F(t,x))}{\Delta x}\,dt.$$

Mais, si $x\to 0$, les deux rapports sous le signe somme tendent uniformément vers 1. Donc $\mu=1$.

2.10. Remarque. On peut donc poser $\xi(x)=-\mu(x)\Delta x$ avec $\mu(0)=1$. L'équation fonctionnelle $\xi(f(x))=f'(x)\,\xi(x)$ implique que:

$$\mu(x)=\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0 f'(x_0)}\,\mu(x_1)=\frac{\Delta x_2}{\Delta x_0 f'(x_0)f'(x_1)}\,\mu(x_2)=\dots$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta x_n}{\Delta x_0}\prod_{i=0}^{n-1}1/f'(x_i).$$

D'où:

$$\xi(x)=-\lim_{n\to\infty}\Delta x_n\prod_{i=0}^{n-1}1/f'(x_i).$$

2.11. Corollaire. *ξ est de classe C^1 sur* $[0,\varepsilon[$.

Démonstration. Si $f'(0)<1$, ceci résulte de la définition de ξ. Si $f'(0)=1$, on sait déjà par le lemme 2.5 que $\xi(x)$ est C^1 pour $x>0$. Mais:

$$\xi'(x)=\rho\frac{\partial K}{\partial x}(x,a)=\rho\,K_1(x,a)\,K(x,a)$$
$$=\rho\sum_{i\geqq 0}\phi(x_i)f'(x_{i-1})\dots f'(x_0)\,K(x,a)=\rho\sum_{i\geqq 0}\phi(x_i)\,K(x_i,a)$$
$$=\sum_{i\geqq 0}\phi(x_i)\,\xi(x_i).$$

Il résulte de cette expression que $|\xi'(x)|=O(x f_2(x))$.

2.12. Lemme. $f=e^{\xi}$.

Démonstration. Si $f'(0)=1$, il est évident que $f'(x)=\xi(f(x))/\xi(x)$. C'est vrai aussi si $f'(0)<1$, car alors:

$$\begin{aligned}\xi(f(x))/\xi(x) &= \int_0^{f(x)} K(f(x),t)\,dt \Big/ \int_0^x K(x,t)\,dt \\ &= \int_0^x K(f(x),f(u))\,f'(u)\,du \Big/ \int_0^x K(x,t)\,dt = f'(x).\end{aligned}$$

Dans l'un ou l'autre cas, soit $F(t,x)$ l'intégrale de ξ; puisque $\xi(x)<0$ quand $x>0$, on voit que pour un $t_0>0$, $F(t_0,a)=f(a)$. Par ailleurs on sait que tout germe g: $x\mapsto F(t,x)$ vérifie l'équation différentielle $g'(x)=\xi(g(x))/\xi(x)$; or f et $x\mapsto F(t_0,x)$ vérifient cette même équation différentielle avec la même condition initiale en a. Donc $f(x)=F(t_0,x)$. Si $t_0\neq 1$, c'est que $f=e^{t_0\xi}$, mais ceci est impossible (lemmes 2.6, 2.7). Donc $t_0=1$ et $f=e^{\xi}$.

2.13. Démonstration du théorème 2.2. Elle résulte des lemmes 2.6, 2.7 et 2.12. Il faut dire un mot du fait que, dans l'énoncé du théorème 2.2, $f\in G'$ et donc est aussi définie pour $x<0$ assez petit. Si $f'(0)\neq 1$, la définition de ξ par le lemme 2.7 a le même domaine de définition que celui de f, car alors K, K_0, K_1 ont aussi ce même domaine de définition. Si $f'(0)=1$, on fait le travail d'abord pour $x\geqq 0$, puis pour $x\leqq 0$; il n'y a pas de problème de recollement, puisque, d'un côté ou de l'autre, $\xi(0)=\xi'(0)=0$. Si f n'était pas une contraction, il suffirait de changer (au besoin d'un seul côté) f en f^{-1}.

3. Plongement d'un élément de G'_{∞} dans un groupe à un paramètre

On suppose dans ce paragraphe que f: $[0,\varepsilon[\to[0,\varepsilon'[$ est un C^{∞}-difféomorphisme contractant et infiniment tangent à l'identité en 0; autrement dit, d'une part, si $x>0$, alors $f(x)<x$, et d'autre part:

$$\left|\begin{aligned}&f^{(q)}(0)=0 \quad \text{si} \quad q\neq 1,\\ &f'(0)=1.\end{aligned}\right.$$

Les notations 2.3 restent valables. De plus, on note:

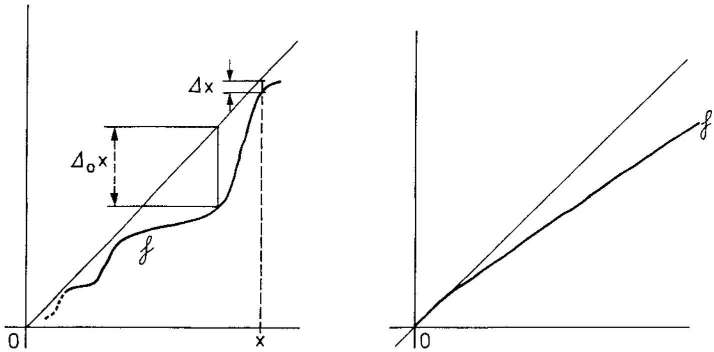
$$\Delta_0 x = \sup_{0\leqq y\leqq x} \Delta y.$$

Dans tout ce paragraphe, ξ est le champ de vecteurs associé à f par le théorème 2.2.

3.1. Théorème. *ξ est de classe C^{∞} sur $]0,\varepsilon[$. De plus, si*

$$\Delta_0 x = O(\Delta x^{1-\alpha})$$

avec $\alpha<1/r$ pour un entier $r\geqq 2$, alors ξ est de classe C^r en 0. En particulier, si $\Delta_0 x=O(\Delta x)$, alors ξ est de classe C^{∞} sur $[0,\varepsilon[$. C'est le cas si la fonction $x\mapsto\Delta x$ est monotone.



Mauvais f: $\Delta_0 x \gtrsim \Delta x$ Bon f: $\Delta_0 x \lesssim \Delta x$

3.2. Lemme. *Il existe des constantes* $\alpha_{p,q,r} \in \mathbb{R}_+$, *pour* $p \leqq q \leqq r$ *entiers, telles que si* $g \in C^\infty([0, \varepsilon[)$ *est* ∞*-plate en* 0 (*i.e.* $g^{(n)}(0) = 0$ *pour tout* n), *alors:*

$$g_q(x) \leqq \alpha_{p,q,r} [g_p(x)]^{\frac{r-q}{r-p}} [g_r(x)]^{\frac{q-p}{r-p}}$$

(voir notations 2.3).

Démonstration. Notons

$$\bar{g}_p = \sum_{i=0}^{p} g_i.$$

On sait, par l'inégalité d'Hadamard (pour une démonstration très conceptuelle, voir [9], théorème 2.2.2), que

$$\bar{g}_q(1) \leqq \beta_{p,q,r} [\bar{g}_p(1)]^{\frac{r-q}{r-p}} [\bar{g}_r(1)]^{\frac{q-p}{r-p}}$$

Si $x > 0$, posons $h(y) = g(xy)$; en appliquant la relation précédente à h, il vient:

$$x^q g_q(x) \leqq \beta_{p,q,r} \left[\sum_{i=0}^{p} x^i g_i(x)\right]^{\frac{r-q}{r-p}} \left[\sum_{i=0}^{r} x^i g_i(x)\right]^{\frac{q-p}{r-p}}.$$

Mais, comme g est ∞-plate en 0:

$$g_i(x) \leqq \frac{x^{j-i}}{(j-i)!} g_j(x) \quad \text{si} \quad j \geqq i.$$

La majoration de $x^q g_q(x)$ peut donc s'écrire:

$$x^q g_q(x) \leqq 3 \beta_{p,q,r} [x^p g_p(x)]^{\frac{r-q}{r-p}} [x^r g_r(x)]^{\frac{q-p}{r-p}}.$$

3.3. Lemme. *Soit* $g \in C^\infty([0, \varepsilon[)$ ∞*-plate en* 0. *Alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $\eta > 0$,

$$g_n(x) = O(g_0(x)^{1-\eta}).$$

Démonstration. Soit $m \geqq n$. Le lemme 3.2 implique que:

$$g_n(x) = O(g_0(x)^{1-\frac{n}{m}} g_m(x)^{\frac{n}{m}}) = O(g_0(x)^{1-\frac{n}{m}}).$$

3.4. Corollaire. *Pour tout entier n et tout $\eta > 0$,*

$$\phi_n(x) = O(\Delta_0 x^{1-\eta}) \qquad \text{(notations 2.3).}$$

Démonstration. Le lemme 3.3 appliqué à $f(x) - x$ implique que:

$$f_2(x) = O(\Delta_0 x^{1-\eta}).$$

On a donc:

$$\phi_0(x) = O(\Delta_0 x^{1-\eta})$$

et on applique à nouveau le lemme 3.3 à ϕ.

3.5. Notation. On note $\mu_n(x) = \xi^{(n)}(x)[\xi(x)]^{n-1}$, chaque fois que cette quantité est définie.

3.6. Lemme. *Il existe des constantes entières $C_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}}$ et $D_{q, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}}$ telles que:*

$$\mu_n(x) + \sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1} = n} C_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}} [\mu_1(x)]^{\alpha_1} \dots [\mu_{n-1}(x)]^{\alpha_{n-1}}$$

$$= \sum_{i \geqq 0} \xi(x_i) \sum_{q=0}^{n-1} \phi^{(q)}(x_i)[\xi(x_i)]^q$$

$$\cdot \sum_{\alpha_1 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1} = n-q-1} D_{q, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}} [\mu_1(x_i)]^{\alpha_1} \dots [\mu_{n-1}(x_i)]^{\alpha_{n-1}}.$$

De plus, $|\mu_n(x)| = O(\Delta_0 x^{n-\eta})$ pour tout réel $\eta > 0$.

Démonstration. Par récurrence sur n. Le lemme est déjà montré pour $n = 1$ (corollaire 2.11). Le calcul formel de μ_n connaissant μ_{n-1} résulte des relations:

$$\left|\begin{aligned} &\frac{dx_i}{dx} = \frac{\xi(x_i)}{\xi(x)}, \\ &\xi'(x) = \mu_1(x), \\ &\mu_n'(x)\,\xi(x) = \mu_{n+1}(x) + (n-1)\,\mu_n(x)\,\mu_1(x). \end{aligned}\right.$$

La dérivation terme à terme est justifiée, car la série du second membre est uniformément convergente, grâce à l'hypothèse de récurrence, et à $|\xi(x)| = O(\Delta x)$.

Enfin la relation $\mu_n(x) = O(\Delta_0 x^{n-\eta})$ résulte de l'hypothèse de récurrence, de $|\phi^{(q)}(x)| = O(\Delta_0 x^{1-\eta})$ et de $|\xi(x)| = O(\Delta x)$.

3.7. Démonstration du théorème 3.1. D'abord, pour $x > 0$, $\xi^{(n)}(x) = \mu_n(x)/[\xi(x)]^{n-1}$ est défini. Ainsi ξ est de classe C^∞ sur $]0, \varepsilon[$.

Ensuite, si $\Delta_0 x = O(\Delta x^{1-\alpha})$ avec $\alpha < 1/r$, on voit que:

$$|\xi^{(n)}(x)| = O(\Delta x^{1-\alpha n - (1-\alpha)\eta})$$

pour tout $\eta > 0$. Donc $\lim_{n \to 0} \xi^{(n)}(x) = 0$ si $n \leqq r$.

3.8. Remarque. On verra au §4 qu'il faut bien imposer à f, contractante et ∞-tangente à l'identité en 0, une condition supplémentaire pour assurer que $\xi \in C^\infty([0,\varepsilon[)$. Par contre, il résulte de Sternberg [10] et Takens [12] que si f n'a pas un contact d'ordre infini avec l'identité en 0, alors nécessairement $\xi \in C^\infty([0,\varepsilon[)$. On pourrait penser qu'une démonstration analogue à celle qui est donnée pour le théorème 3.1 s'applique au cas non ∞-plat. Malheureusement il ne semble pas que ce soit le cas.

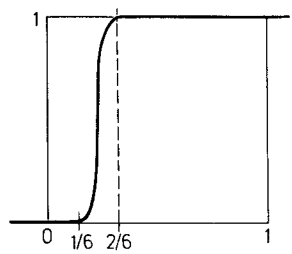
Supposons en effet que $f(x)=x-\alpha x^r+o(x^r)$ avec $\alpha>0$. Le même plan de démonstration donne alors les majorations:

$$|\mu_n(x)| = O(x^{n(r-1)}),$$
$$|\xi^{(n)}(x)| = O(x^{r-n})$$

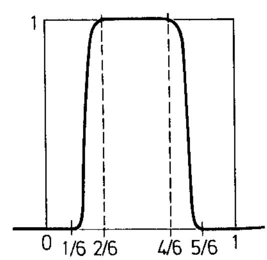
qui sont insuffisantes. On aura pourtant l'occasion d'utiliser la dernière dans le §5.

4. Un élément de G'_∞ peut ne pas être un carré

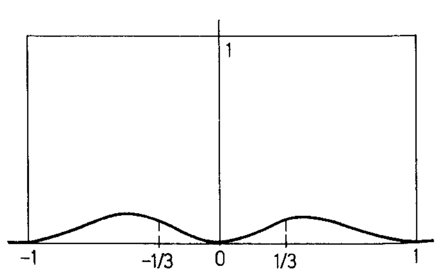
On définit d'abord trois fonctions C^∞ qui serviront dans la construction du contre-exemple. Soient:



$$\alpha(x)\begin{cases} =0 & \text{si} \quad x \leqq 1/6 \\ \in [0,1] & \text{si} \quad 1/6 \leqq x \leqq 2/6 \\ =1 & \text{si} \quad x \geqq 2/6, \end{cases}$$



$$\beta(x)\begin{cases} =0 & \text{si} \quad x \leqq 1/6 \quad \text{ou} \quad x \geqq 5/6 \\ \in [0,1] & \text{si} \quad 1/6 \leqq x \leqq 2/6 \quad \text{ou} \quad 4/6 \leqq x \leqq 5/6 \\ =1 & \text{si} \quad 2/6 \leqq x \leqq 4/6, \end{cases}$$

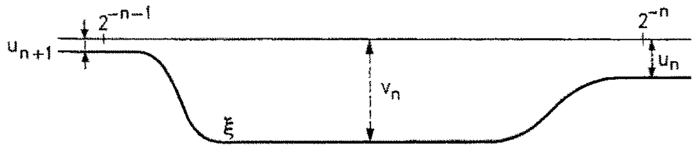


$$\gamma(x)\begin{cases} =0 & \text{si} \quad |x| \geqq 1 \\ \in [0,1] & \text{si} \quad 1/3 \leqq |x| \leqq 1 \\ =x^2/2 & \text{si} \quad |x| \leqq 1/3. \end{cases}$$

Soient $u_n = 2^{-n^4}$, $v_n = 2^{-n^2}$, $w_n = 2^{-n^3}$.

On définit, si $x \in [2^{-n-1}, 2^{-n}]$ et $n \geqq 0$:

$$\xi(x) = -u_{n+1} - (u_n - u_{n+1})\,\alpha(2^{n+1}x - 1) - (v_n - u_n)\,\beta(2^{n+1}x - 1).$$



On voit que ξ est C^∞ et ∞-plate en 0.
On définit ensuite $f = e^\xi$. Alors $f(x) = x - \Delta x$ avec $\lim_{x\to 0} \Delta x/\xi(x) = -1$.

Soient $a_0 = 1$ et $a_i = f(a_{i-1})$.
Définissons aussi $g = e^{\xi/2}$, et $b_i = g(a_i)$. Alors $a_{i+1} = g(b_i)$.
On a toujours la relation $g'(x) = \xi(g(x))/\xi(x)$ d'où l'on tire:

$$g''(x) = \frac{\xi(g(x))(\xi'(g(x)) - \xi'(x))}{\xi(x)^2}.$$

La situation présentée par f, g, ξ est «normale». On va perturber f et le transformer en un $\bar{f}$ qui va servir à définir $\bar{\xi}$ tel que $\bar{f} = e^{\bar{\xi}}$ et $\bar{g} = e^{\bar{\xi}/2}$. Du choix de la perturbation de f il résultera que $\bar{g}$ et a fortiori $\bar{\xi}$ ne seront pas C^2 en 0.

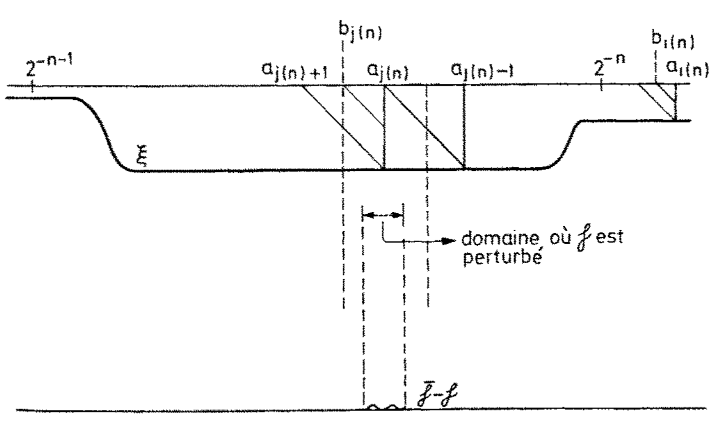
Soit n_0 un entier assez grand. Pour chaque $n \geqq n_0$, on choisit des entiers $i(n)$ et $j(n)$ tels que:

$$2^{-n} - \tfrac{1}{12}2^{-n-1} \leqq a_{i(n)} \leqq 2^{-n} + \tfrac{1}{12}2^{-n},$$

$$2^{-n-1} + \tfrac{5}{12}2^{-n-1} \leqq a_{j(n)+1} < a_{j(n)-1} \leqq 2^{-n} - \tfrac{5}{12}2^{-n-1}.$$

C'est possible si n_0 est assez grand. De même, si n est assez grand, on a $b_{i(n)} = a_{i(n)} - u_n/2$ et $b_{j(n)} = a_{j(n)} - v_n/2$. Définissons maintenant:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) + w_n\,\gamma(4(x - a_{j(n)})/v_n) & \text{si } \exists n \geqq n_0 \text{ tel que } |x - a_{j(n)}| \leqq v_n/4 \\ f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$



$\bar{f}$ est aussi un C^∞-difféomorphisme de source $[0,\varepsilon[$, ∞-tangent à l'identité en 0. La définition 2.8 définit alors $\bar{\xi}$ qui est de classe C^1 sur $[0,\varepsilon[$ et de classe C^∞ sur $]0,\varepsilon[$. On pose $\bar{g}=e^{\bar{\xi}/2}$.

Comme $\bar{\xi}$, $\bar{g}$ est C^1 sur $[0,\varepsilon[$ et C^∞ sur $]0,\varepsilon[$. On va montrer que $\bar{g}$ n'est pas C^2 en 0. Il en résultera le:

4.1. Théorème. *$\bar{f}$ n'est pas le carré d'un C^∞-difféomorphisme pour la composition.*

Démonstration. Supposons que $\bar{f}=\bar{h}\circ\bar{h}$ avec $\bar{h}$ de classe C^∞ sur $[0,\varepsilon[$. Alors $\bar{f}$ commute avec $\bar{h}$ et par le lemme de N. Kopell [2], on en déduit que $\bar{h}$ vérifie l'équation différentielle:

$$\bar{h}'(x)=\bar{K}(\bar{h}(x),x)=\bar{\xi}(\bar{h}(x))/\bar{\xi}(x).$$

L'argument développé en 2.12 prouve alors que $\bar{h}=\bar{g}$.

Naturellement on a le même résultat pour le germe de $\bar{f}$ en 0, ce qui justifie le titre de ce paragraphe.

Il reste donc à montrer la

4.2. Proposition. *$\bar{g}$ n'est pas de classe C^2 en* 0.

Démonstration. Notons d'abord que certaines relations sont inchangées dans la situation perturbée

$$\left| \begin{array}{l} a_{i+1}=f(a_i)=\bar{f}(a_i), \qquad \bar{f}'(a_i)=f'(a_i), \\ \bar{\xi}(a_i)=\xi(a_i). \end{array} \right.$$

Il n'est peut-être plus vrai que $b_i=\bar{g}(a_i)$, mais par contre, étant donné le support de $\bar{f}-f$, on peut affirmer que $\xi=\bar{\xi}$ dans un voisinage de b_i. En particulier, pour n assez grand,

$$\bar{\xi}(x)=\xi(x) \quad \text{si} \quad |x-b_{i(n)}|\leqq u_n/4.$$

Notons $\bar{b}_i=\bar{g}(a_i)$. Comme $\bar{g}$ est de classe C^1 et que $(a_{i+1}-\bar{b}_i)/(\bar{b}_i-a_i)$ tend vers $\bar{g}'(0)=1$, on déduit que pour n assez grand:

$$|\bar{b}_{i(n)}-b_{i(n)}|\leqq u_n/4$$

d'où il résulte que:

$$\begin{aligned} &\bar{\xi}(\bar{b}_{i(n)})=\xi(\bar{b}_{i(n)})=u_n \\ &\bar{\xi}'(\bar{b}_{i(n)})=\xi'(\bar{b}_{i(n)})=0. \end{aligned}$$

Par ailleurs si on se souvient que:

$$0=\xi'(a_{i(n)})=\sum_{j\geqq i(n)}\phi(a_j)\,\xi(a_j)=\sum_{j\geqq i(n)}\phi(a_j)\,\bar{\xi}(a_j)$$

on trouve que:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}'(a_{i(n)}) &= \sum_{j\geqq i(n)}\bar{\phi}(a_j)\,\bar{\xi}(a_j)=\sum_{j\geqq i(n)}(\bar{\phi}(a_j)-\phi(a_j))\,\bar{\xi}(a_j) \\ &= \sum_{m\geqq n}(\bar{f}''(a_{j(m)})-f''(a_{j(m)}))\,\bar{\xi}(a_{j(m)}) \\ &= \sum_{m\geqq n}\frac{16w_m}{v_m^2}v_m>\frac{16w_n}{v_n}. \end{aligned}$$

Calculons maintenant:

$$\bar{g}''(a_{i(n)}) = \frac{\bar{\xi}(b_{i(n)})}{\bar{\xi}(a_{i(n)})^2}\,[\bar{\xi}'(b_{i(n)}) - \bar{\xi}'(a_{i(n)})] = -\frac{\bar{\xi}'(a_{i(n)})}{u_n}$$

d'où il résulte que:

$$\bar{g}''(a_{i(n)}) < -\frac{16\, w_n}{u_n\, v_n}.$$

Mais cette dernière quantité tend vers $-\infty$ quand n tend vers l'infini. Ainsi $\bar{g}''$ n'est pas continue en 0.

5. $H_1(G_\infty) = 0$

5.1. Abréviation. On utilise l'abréviation «ITIO» pour «infiniment tangent à l'identité en 0».

5.2. Théorème. *Le groupe G_∞ est parfait, autrement dit G_∞ est égal à son sous-groupe des commutateurs. Plus précisément, si $\eta \in G_\infty$, il existe ϕ et $f \in G_\infty$ tels que*

$$\eta = f\phi f^{-1}\phi^{-1}.$$

Démonstration. On commence par ramener la démonstration de ce théorème à celle d'un résultat assez technique (5.4).

Soit $\eta \in G_\infty$. On peut trouver un C^∞-difféomorphisme de $[0, +\infty[$ définissant le germe η à droite de 0. *Désormais η désigne un tel difféomorphisme.*

Choisissons un champ de vecteurs ξ_2 sur $[0, +\infty[$ tel que $\xi_2(x) = \alpha_2\, x^2$ pour un $\alpha_2 > 0$ si x est assez petit, et $\xi_2(x) \in]0, 1]$ si $x > 0$.

Alors ξ_2 engendre un groupe à un paramètre d'éléments de $\mathrm{Diff}^\infty([0, \infty[)$ où figure:

$$f_2(x) = e^{\xi_2}(x)\,(= x/1 - \alpha_2\, x \text{ si } x \text{ est assez petit}).$$

Comme η est ITIO, les séries de Taylor de $f_2^{-1}\eta$ et de f_2^{-1} en 0 sont les mêmes. Par Takens [12], les germes de $f_2^{-1}\eta$ et de f_2^{-1} sont conjugués. Mieux, si on a choisi η à support compact, ce qui est possible, et α_2 assez grand, alors $f_2^{-1}\eta$ et f_2^{-1} sont conjugués sur $[0, \infty[$ par un élément ITIO de $\mathrm{Diff}^\infty([0, \infty[)$. On a donc:

$$f_2^{-1}\eta = \phi_2\, f_2^{-1}\, \phi_2^{-1}$$

ou:

$$\eta = f_2\, \phi_2\, f_2^{-1}\, \phi_2^{-1}.$$

Supposons qu'on sache trouver pour tout $n \geqq 3$, f_n, $\phi_n \in \mathrm{Diff}^\infty([0, \infty[)$ tels que:

a) $\eta = f_n \phi_n f_n^{-1} \phi_n^{-1}$,

b) $f_n^{(i)}(0) = 0$ si $i < n$ et $i \neq 1$,
$f_n'(0) = 1$,

c) ϕ_n est ITIO,

d) $\|f_n - f_{n+1}\|_{n-1} \leqq 2^{-n}$, $\|\phi_n - \phi_{n+1}\|_{n-1} \leqq 2^{-n}$

où $\|g\|_n$ désigne:

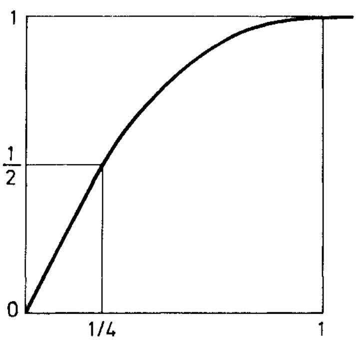
$$\|g\|_n = \sum_{i=0}^{n} \sup_{0 \leqq x \leqq 1} |g^{(i)}(x)|.$$

Alors f_n et ϕ_n convergeraient au sens C^∞ vers des C^∞-difféomorphismes f et ϕ, définis sur $[0,1]$. Par continuité on aurait $\eta = f \phi f^{-1} \phi^{-1}$ là où le second membre serait défini; par ailleurs f et ϕ seraient ITIO. Le théorème 5.2 serait démontré.

Il reste donc construire f_n et ϕ_n vérifiant a, b, c, d.

On utilise la fonction C^∞:

$$\beta(x) \begin{cases} = 2x & \text{si } 0 \leqq x \leqq 1/4 \\ \in [0,1] & \text{si } 1/4 \leqq x \leqq 1 \\ = 1 & \text{si } x \geqq 1. \end{cases}$$



On va supposer par récurrence que $f_n = e^{\xi_n}$ où $\xi_n(x) = \alpha_n x^n + o(x^n)$ est C^∞. C'est bien le cas pour $n=2$. On cherche alors $f_{n+1} = e^{\xi_{n+1}}$ où $\xi_{n+1}(x) = \beta(x/\varepsilon)\,\xi_n(x)$ pour un ε qu'il faudra choisir assez petit. De cette définition, il résulte que $\xi_{n+1}(x) = \alpha_{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1})$ avec $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n/\varepsilon$. De plus,

$$\xi_{n+1}^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \varepsilon^{-j} \beta^{(j)}(x/\varepsilon)\, \xi_n^{(i-j)}(x).$$

De la nullité de $\beta^{(j)}(x/\varepsilon)$ pour $j \geqq 1$ et $x \geqq \varepsilon$, et de l'équivalence $\xi_n \sim \alpha_n x^n$ quand $x \to 0$, on déduit:

$$\|\xi_{n+1} - \xi_n\|_i = O(\varepsilon^{n-i})$$

quand $\varepsilon \to 0$ (même si $i \geqq n$).

Les résultats standards concernant la dépendance des solutions d'équations différentielles par rapport aux paramètres permettent d'affirmer que

$$\|f_{n+1} - f_n\|_i = O(\varepsilon^{n-i}).$$

Notons $\hat{f}_n = f_n^{-1} f_{n+1}$ et cherchons ϕ_{n+1} sous la forme $\phi_n \hat{\phi}_n$. La relation $\eta = f_{n+1}\phi_{n+1} f_{n+1}^{-1}\phi_{n+1}^{-1}$ s'écrit aussi:

$$f_n \phi_n f_n^{-1} \phi_n^{-1} = f_n \hat{f}_n \phi_n \hat{\phi}_n \hat{f}_n^{-1} f_n^{-1} \hat{\phi}_n^{-1} \phi_n^{-1}$$

ou:

$$\hat{\phi}_n f_n \hat{f}_n \hat{\phi}_n^{-1} = f_n \phi_n^{-1} \hat{f}_n \phi_n.$$

Ainsi l'inconnue $\hat{\phi}_n$ apparaît comme la solution d'un problème de conjugaison entre $f_n \hat{f}_n$ et $f_n \phi_n^{-1} \hat{f}_n \phi_n$.

Observons d'abord que $f_n \hat{f}_n$ et $f_n \phi_n^{-1} \hat{f}_n \phi_n$ ont même série de Taylor en 0, car ϕ_n est ITIO. Comme cette série n'est pas triviale, l'existence de $\hat{\phi}_n$ résulte à nouveau de Takens [12]. Notons ensuite que si $\hat{f}_n = \mathrm{Id}$, alors $f_n \hat{f}_n \phi_n^{-1} \hat{f}_n \phi_n$ et on peut donc choisir $\phi_n = \mathrm{Id}$; si donc $\hat{f}_n$ est petit pour $\|\cdot\|_{n-1}$, alors $f_n \hat{f}_n$ et $f_n \phi_n^{-1} \hat{f}_n \phi_n$ sont proches en $\|\cdot\|_{n-1}$ et on peut prévoir qu'il sera possible de trouver $\hat{\phi}_n$ petit pour $\|\cdot\|_{n-1}$.

En fait $f_n \hat{f}_n$ et $f_n \phi_n^{-1} \hat{f}_n \phi_n$ sont «beaucoup plus proches» qu'on vient de le dire. On a en effet le

5.3. Lemme. *Soient $i, p \in \mathbb{N}$ des entiers quelconques. Alors:*

$$\|f_n \hat{f}_n - f_n \phi_n^{-1} \hat{f}_n \phi_n\|_i = O(\varepsilon^p) \qquad (\text{même si } i > n!).$$

Démonstration. Si $x \geq \varepsilon$, alors $\xi_n(x) = \xi_{n+1}(x)$, et donc $f_n(x) = f_{n+1}(x)$, $\hat{f}_n(x) = x$ et enfin $f_n \hat{f}_n(x) = f_n \phi_n^{-1} \hat{f}_n \phi_n(x)$. On peut donc supposer pour démontrer le lemme 5.3 que le domaine de définition est $[0, \varepsilon[$.

Dans ce domaine de définition, on a, puisque ϕ_n est ITIO:

$$\|\phi_n - \mathrm{Id}\|_i = O(\varepsilon^p) \qquad \forall i, p.$$

Rappelons-nous que $\|\hat{f}_n - \mathrm{Id}\|_i = O(\varepsilon^{n-i})$; par composition on obtient:

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_n \phi_n\|_i = O(\varepsilon^p) \qquad \forall i, p.$$

De même:

$$\|f_n - f_n \phi_n^{-1}\|_i = O(\varepsilon^p) \qquad \forall i, p,$$

et à nouveau par composition:

$$\|f_n \hat{f}_n - f_n \phi_n^{-1} \hat{f}_n \phi_n\|_i = O(\varepsilon^p) \qquad \forall i, p.$$

Il nous reste donc à prouver la proposition 5.4. Pour l'énoncer plus commodément, on prend de nouvelles notations.

Soit ξ un champ de vecteurs défini sur $[0, +\infty[$, de classe C^∞, tel que $\xi(x) = \alpha x^n + o(x^n)$ et tel que, si $x > 0$, alors $\xi(x) > 0$. On considère aussi une famille ξ_ε de champs de vecteurs, paramétrée par $\varepsilon \geq 0$ assez petit, et telle que:

si $x > 0$, alors $\xi_\varepsilon(x) > 0$

$\xi_0 = \xi$

$\|\xi_\varepsilon - \xi\|_i = O(\varepsilon^{n-i}) \qquad \forall i \in \mathbb{N}$.

$\exists \alpha' > 0$ tel que $\xi_\varepsilon(x) \geq \alpha' x^{n+1}$ pour tout ε et pour tout $x \in [0, 1]$.

La dernière condition est une condition «d'uniforme non ∞-platitude en 0».

On note $f=e^{\xi}$, $f_\varepsilon=e^{\xi_\varepsilon}$; on a aussi $\|f-f_\varepsilon\|_i=O(\varepsilon^{n-i})$.

Soit ensuite δ_ε une famille de C^∞-difféomorphismes de $[0,\infty[$, telle que chaque δ_ε soit ITIO, et telle que:

$$\|\delta_\varepsilon-\mathrm{Id}\|_i=O(\varepsilon^p) \qquad \forall i, p\in\mathbb{N}.$$

5.4. Proposition. *Il existe une famille ϕ_ε de C^∞-difféomorphismes de $[0,\infty[$, telle que chaque ϕ_ε soit ITIO, et telle que:*

$$\left|\begin{array}{l}\|\phi_\varepsilon-\mathrm{Id}\|_i=O(\varepsilon^p) \qquad \forall i, p\in\mathbb{N}.\\ \phi_\varepsilon f_\varepsilon \phi_\varepsilon^{-1}=\delta_\varepsilon f_\varepsilon\end{array}\right.$$

Le théorème 5.2 résulte de la proposition 5.4; la correspondance est la suivante:

$$\left|\begin{array}{ll}\xi_\varepsilon(x) & \rightsquigarrow \beta(x/\varepsilon)\,\xi_n(x),\\ f_\varepsilon(x) & \rightsquigarrow f_{n+1}(x)=(f_n\circ\hat{f}_n)(x),\\ \delta_\varepsilon & \rightsquigarrow (f_n\phi_n^{-1}\hat{f}_n\phi_n)(f_n\hat{f}_n)^{-1},\\ \phi_\varepsilon & \rightsquigarrow \hat{\phi}_n.\end{array}\right.$$

Démonstration de 5.4. Notons F_ε l'intégrale de ξ_ε:

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial F_\varepsilon}{\partial t}(t,x)=\xi_\varepsilon(F_\varepsilon(t,x)),\\ F_\varepsilon(0,x)=x,\\ F_\varepsilon(1,x)=f_\varepsilon(x).\end{array}\right.$$

On définit une fonction τ_ε telle que:

$$F_\varepsilon(\tau_\varepsilon(x),x)=\delta_\varepsilon(x).$$

Il faut prendre:

$$\tau_\varepsilon(x)=\int_x^{\delta_\varepsilon(x)}\frac{dy}{\xi_\varepsilon(y)}$$

d'où l'on tire:

$$\tau'_\varepsilon(x)=\frac{\delta'_\varepsilon(x)}{\xi_\varepsilon(\delta_\varepsilon(x))}-\frac{1}{\xi_\varepsilon(x)}=\frac{(\delta'_\varepsilon-1)\cdot\xi_\varepsilon+(\xi_\varepsilon-\xi_\varepsilon\circ\delta_\varepsilon)}{\xi_\varepsilon\cdot\xi_\varepsilon\circ\delta_\varepsilon}(x).$$

Comme $\delta_\varepsilon-\mathrm{Id}$ est à «décroissante rapide», que δ_ε est ITIO, et que ξ_ε est «uniformément non ∞-plat en 0» et «à croissance lente», on obtient:

$$\|\tau_\varepsilon\|_i=O(\varepsilon^p) \qquad \forall i,p.$$

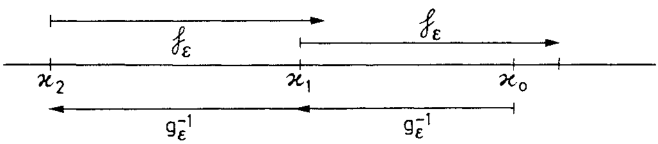
Posons $g_\varepsilon=\delta_\varepsilon f_\varepsilon$ et:

$$\phi_\varepsilon=\lim_{n\to\infty} g_\varepsilon^n f_\varepsilon^{-n}.$$

Alors, formellement, $\phi_\varepsilon f_\varepsilon=g_\varepsilon\phi_\varepsilon$; ϕ_ε réalise donc la conjugaison entre f_ε et $\delta_\varepsilon f_\varepsilon$. Il reste à voir que ϕ_ε est défini et que $\|\phi_\varepsilon-\mathrm{Id}\|_i=O(\varepsilon^p)$ $\forall i,p$.

Notons $x_{i,\varepsilon}=g_\varepsilon^{-1}(x_{i-1,\varepsilon})$, avec $x_{0,\varepsilon}=x$. Alors:

$$f_\varepsilon g_\varepsilon^{-1}(x)=f_\varepsilon(x_{1,\varepsilon})=\delta_\varepsilon(x)=F_\varepsilon(\tau_\varepsilon(x),x).$$



Puis:

$$
\begin{aligned}
f_\varepsilon^2 g_\varepsilon^{-2} &= F_\varepsilon(1, f_\varepsilon(x_2)) = F_\varepsilon(1, F_\varepsilon(\tau_\varepsilon(x_1), x_1)) \\
&= F_\varepsilon(\tau_\varepsilon(x_1)+1,\ F_\varepsilon(-1+\tau_\varepsilon(x_0), x)) = F_\varepsilon(\tau_2(x_0)+\tau_\varepsilon(x_1), x)
\end{aligned}
$$

De même:

$$f_\varepsilon^n g_\varepsilon^{-n}(x) = F_\varepsilon\left(\sum_{i=0}^{n-1} \tau_\varepsilon(x_{i,\varepsilon}), x\right).$$

Posons donc

$$T_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_\varepsilon(x_{i,\varepsilon}).$$

On aura alors

$$\phi_\varepsilon^{-1}(x) = F_\varepsilon(T_\varepsilon(x), x)$$

et il reste seulement à voir que T_ε est défini, et que

$$\|T_\varepsilon\|_i = O(\varepsilon^p) \qquad \forall\, i, p.$$

Notons d'abord que $\xi_\varepsilon(x) \geqq \alpha' x^{n+1}$. Il en résulte par intégration que

$$f_\varepsilon^{-1}(x) \leqq \frac{x}{[1+\alpha' n x^n]^{1/n}}$$

et aussi

$$g_\varepsilon^{-1}(x) \leqq \frac{x}{[1+\alpha'' n x^n]^{1/n}}$$

pour une constante α'' un peu plus petite que α'. Par itération:

$$x_{i,\varepsilon} \leqq \frac{x}{[1+\alpha'' i n x^n]^{1/n}} \sim \frac{1}{[\alpha'' i n]^{1/n}}.$$

Autrement dit $x_{i,\varepsilon}$ ne tend pas vers zéro de façon infiniment lente; $x_{i,\varepsilon}$ tend vers zéro aussi vite que $i^{-1/n}$.

Soit χ_ε le champ de vecteurs associé à g_ε^{-1} par la définition 2.8:

$$\chi_\varepsilon(x) = \lim_{i\to\infty} (x_{i+1,\varepsilon} - x_{i,\varepsilon}) \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{(g_\varepsilon^{-1})'(x_{i,\varepsilon})}.$$

De l'inégalité signalée dans la remarque 3.8, on déduit que pour tout entier i il existe des entiers q_i, $p_i \in \mathbb{Z}$ tels que

$$|\chi_\varepsilon^{(i)}(x)| \leqq x^{q_i} \varepsilon^{p_i}.$$

La dérivée q^{ieme} de T_ε vérifie une relation qu'on obtient par le même procédé qu'en 3.6:

$$\begin{aligned}
&T_\varepsilon^{(q)}(x)[\chi_\varepsilon(x)]^q \\
&\quad+\sum_{l=1}^{q-1} T_\varepsilon^{(l)}(x) \sum_{\alpha_1+\cdots+(q-1)\alpha_{q-1}=q-l} E_{\alpha_1,\ldots}[\chi_\varepsilon'(x)]^{\alpha_1}\ldots[\chi_\varepsilon^{(q-1)}(x)]^{\alpha_{q-1}}[\chi_\varepsilon(x)]^{q-\Sigma\alpha_j} \\
&=\sum_{i\geqq 0}\sum_{l=1}^{q}\tau_\varepsilon^{(l)}(x_i)\sum_{\alpha_1+\cdots=q-l} E_{\alpha_1,\ldots}[\chi_\varepsilon'(x_i)]^{\alpha_1}\ldots[\chi_\varepsilon^{(q-1)}(x_i)]^{\alpha_{q-1}}[\chi_\varepsilon(x_i)]^{q-\Sigma\alpha_j}.
\end{aligned}$$

La décroissance rapide de τ_ε l'emporte sur la croissance lente de χ_ε. On montre ainsi par récurrence que $T_\varepsilon^{(q)}$ est à décroissance rapide.

6. Conséquences de $H_1(G_\infty)=0$

On connait la définition du feuilletage de Reeb de S^3. Précisons seulement quelques notations. Soient S_1^1 et S_2^1 (respectivement D_1^2 et D_2^2) deux exemplaires de S^1 (resp. D^2). Alors $S^3=(S_1^1\times D_1^2)\cup(D_2^2\times S_1^2)/\sim$ où $\sim$ est la relation qui identifie point par point $S_1^1\times\partial D_1^2$ et $\partial D_2^2\times S_2^1$. Le tore $T^2=S_1^1\times\partial D_1^2=\partial D_2^2\times S_2^1$ est la seule feuille compacte du feuilletage de Reeb de S^3. Les autres feuilles sont difféomorphes à $\mathbb{R}^2$; certaines coupent transversalement $S_1^1\times\{0\}$ et «s'enroulent» le long de $S_1^1\times\partial D_1^2$ en tournant «presque parallèlement» à S_1^1. Les autres coupent transversalement $\{0\}\times S_2^1$ et s'enroulent le long de $\partial D_2^2\times S_2^1$ parallèlement à S_2^1. L'holonomie le long de T^2 est un homomorphisme de groupes

$$\mathscr{H}\colon \pi_1(T^2)\to G$$

où G est le groupe défini dans l'introduction.

Soient p_1 et p_2 deux générateurs standards de $\pi_1(T^2)$. Par exemple p_1 pourrait être représenté par $S_1^1\times\{y_0\}$ où $y_0\in\partial D_1^2$, et p_2 par $\{x_0\}\times S_2^1$ où $x_0\in\partial D_2^2$. L'holonomie $\mathscr{H}$ est définie par $\mathscr{H}(p_1)$ et $\mathscr{H}(p_2)$. La restriction du feuilletage de Reeb à $S_1^1\times D_1^2$ est à symétrie circulaire autour du centre de D_1^2. De même pour la restriction à $D_2^2\times S_2^1$. Il en résulte que, si on oriente convenablement la petite section transverse à T^2 servant à définir $\mathscr{H}$, les germes de difféomorphismes $\mathscr{H}(p_1)$ et $\mathscr{H}(p_2)$ ont leur support respectif dans $]-\varepsilon,0]$ et $[0,\varepsilon[$. En particulier $\mathscr{H}(p_1)$ et $\mathscr{H}(p_2)$ sont ITIO (5.1); c'est la raison pour laquelle il n'existe pas de feuilletage de Reeb analytique. Par ailleurs $\mathscr{H}(p_1)$ (resp. $\mathscr{H}(p_2)$) est sans point fixe sur $]-\varepsilon,0[$(resp. $]0,\varepsilon[$). Le type d'isomorphisme du feuilletage de Reeb est caractérisé par la classe de conjugaison de $\mathscr{H}(p_1)\circ\mathscr{H}(p_2)$, et aussi par des considérations d'orientation étudiées en détail dans Mizutani [7]. Il faut donc mieux parler *des* feuilletages de Reeb puisque les classes de conjugaison d'éléments de G'_∞ sont très nombreuses.

Notons $g_1=\mathscr{H}(p_1)$, $g_2=\mathscr{H}(p_2)$, et $\mathscr{F}(g_1,g_2)$ le feuilletage de Reeb associé. Ce feuilletage est classifié par une application $f\colon S^3\to B\Gamma_1^\infty$ bien définie à homotopie près. On note $\pi_3(g_1,g_2)$ l'élément de $\pi_3(B\Gamma_1^\infty)$ associé, et $H_3(g_1,g_2)$ celui de $H_3(B\Gamma_1^\infty)$ associé à $\pi_3(g_1,g_2)$ par l'homomorphisme de Hurewicz; c'est l'image par $H_3(f)$ de la classe fondamentale de S^3.

6.1. Théorème. *Quels que soient* $g_1, g_2, H_3(g_1, g_2) = 0$.

On va donner deux démonstrations différentes de ce théorème. Au passage on obtiendra d'autres résultats. Avant ces démonstrations, donnons les corollaires:

6.2. Corollaire. *Quels que soient* $g_1, g_2, \pi_3(g_1, g_2) = 0$.

Démonstration. On sait que $\pi_1(B\Gamma_1^\infty) = 0$ (Haefliger [1]) et que $\pi_2(B\Gamma_1^\infty) = 0$ (Mather [4]). L'homomorphisme de Hurewicz $\pi_3(B\Gamma_1^\infty) \to H_3(B\Gamma_1^\infty)$ est donc un isomorphisme. Naturellement on a noté Γ_1^∞ le groupoïde des germes de C^∞ difféomorphismes *orientés*.

6.3. Corollaire. *Quels que soient* g_1, g_2, *le feuilletage* $\mathscr{F}(g_1, g_2)$ *de* $S^3 = \partial D^4$ *se prolonge en une* Γ_1^∞*-structure de* D^4.

C'est une autre façon d'énoncer 6.2.

Pour démontrer le théorème 6.1, on remarque d'abord qu'il résulte du:

6.4. Théorème. *Quels que soient* g_1, g_2, *il existe une* C^∞*-variété orientable* V *compacte à bord* $\partial V = S^3$, *et un* C^∞*-feuilletage* $\mathscr{G}$ *de codimension* 1 *de* V *tranverse à* ∂V *et tel que* $\mathscr{G} \mid \partial V = \mathscr{F}(g_1, g_2)$.

Si en effet, σ est une chaine singulière «fondamentales» de V, i.e. telle que sa classe d'homologie dans $H_4(V, \partial D)$ soit fondamentale, et si $g\colon V \to B\Gamma_1^\infty$ classifie $\mathscr{G}$, alors la 3-chaine servant à définir $H_3(g_1, g_2)$ est le bord de la 4-chaîne $g \circ \sigma$ de $B\Gamma_1^\infty$; sa classe d'homologie est donc nulle. Il reste à démontrer 6.4.

Démonstration de 6.4. Mizutani [12] a démontré le même résultat, mais après avoir légèrement modifié feulletage de Reeb. Le feuilletage de Reeb standard, tel qu'on l'a décrit n'a qu'une feuille compacte: un tore. Mizutani remplace ce tore par une famille à un paramètre de tores: $T^2 \times [0, 1]$; son feuilletage a donc une famille continue de feuilles compactes, toutes C^∞-difféomorphes au tore T^2. Cela revient à supposer que, par exemple, le support de g_1 est maintenant $]-\varepsilon, -\varepsilon']$ avec $\varepsilon' > 0$; g_1 est l'identité sur un voisinage de 0. Le feuilletage de Reeb étant ainsi modifié. Mizutani construit V et $\mathscr{G}$ comme dans l'énoncé de 6.4.

Notons $\mathrm{Diff}_K^\infty(]0, 1[)$ le groupe des C^∞-difféomorphismes à support compact de $]0, 1[$ et $\mathrm{Diff}_\infty^\infty([0, 1])$ celui des C^∞-difféomorphismes de $[0, 1]$ ∞-tangents à l'identité en 0 et en 1. Mizutani utilise de façon essentielle le

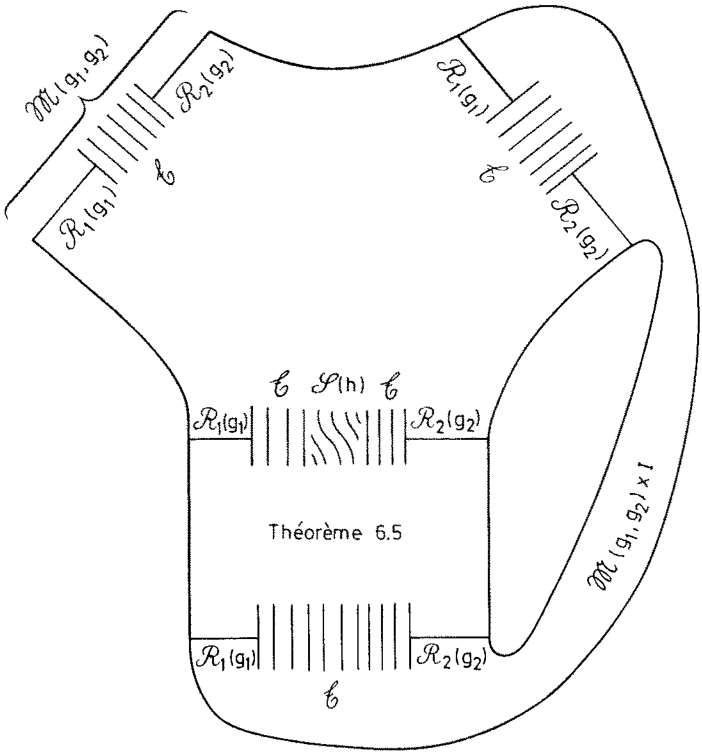
6.5. Théorème (*Mather* [3]). *Le groupe* $\mathrm{Diff}_K^\infty(]0, 1[)$ *est parfait.*

Notons $\mathscr{R}_1(g_1)$ la restriction à $S_1^1 \times D_1^2$ de $\mathscr{F}(g_1, g_2)$ (composante de Reeb); de même pour $\mathscr{R}_2(g_2)$. Notons $\mathscr{C}$ le feuilletage trivial de $T^2 \times [0, 1]$ par les $T^2 \times \{t\}$. Notons encore, si $h \in \mathrm{Diff}_\infty^\infty([0, 1])$, $\mathscr{S}(h)$ le feuilletage de $T^2 \times [0, 1]$ défini par l'holonomie globale $\mathscr{H}'\colon \pi_1(T^2) \to \mathrm{Diff}^\infty([0, 1])$ où $\mathscr{H}'(p_1) = \mathrm{Id}$, $H'(p_2) = h$. Si h est sans point fixe autre que 0, 1, les deux seules feuilles compactes de $\mathscr{S}(h)$ sont $T^2 \times \{0\}$ et $T^2 \times \{1\}$, les autres feuilles sont des cylindres $S^1 \times \mathbb{R}$. Notons enfin $+$ la réunion disjointe et $\sharp$ la réunion le long d'un bord.

Le feuilletage de Mizutani est

$$\mathscr{M}(g_1, g_2) = \mathscr{R}_1(g_1) \sharp \mathscr{C} \sharp \mathscr{R}_2(g_2)$$

Mizutani construit un cobordisme entre $\mathscr{M}(g_1, g_2)+\mathscr{M}(g_1, g_2)$ d'une part, et $\mathscr{R}_1(g_1)\#\mathscr{C}\#\mathscr{S}(h)\#\mathscr{C}\#\mathscr{R}_2(g_2)$ d'autre part, pour un h bien choisi; il utilise ensuite le théorème 6.5 pour construire un cobordisme entre $\mathscr{R}_1(g_1)\#\mathscr{C}\#\mathscr{S}(h)\#\mathscr{C}\#\mathscr{R}_2(g_2)$ et $\mathscr{R}_1(g_1)\#\mathscr{C}\#\mathscr{R}_2(g_2)$. Il en résulte que $\mathscr{M}(g_1, g_2)$ est cobordant à zéro.



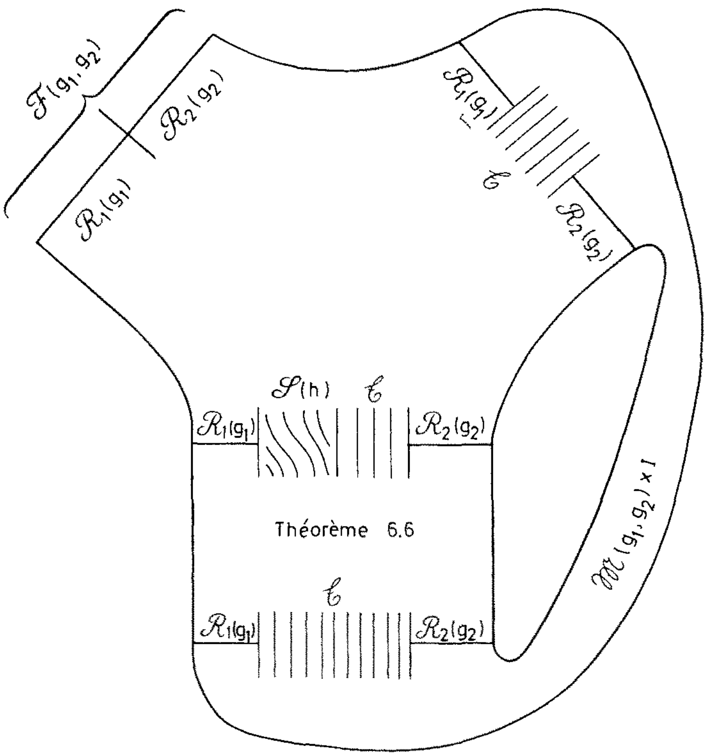
Supposons qu'on sache démontrer le:

Théorème 6.6. $\mathrm{Diff}^{\infty}_{\infty}([0,1])$ *est parfait.*

Alors on peut faire par la même méthode que Mizutani la construction décrite dans la figure ci-dessous qui prouve que $\mathscr{F}(g_1, g_2)$ est cobordant à zéro.

Démonstration de 6.6. Soit $\eta\in\mathrm{Diff}^{\infty}_{\infty}([0,1])$. D'après le théorème 5.2, on peut trouver f et $\phi\in\mathrm{Diff}^{\infty}_{\infty}([0,1])$ tels que $\eta\circ(f\phi f^{-1}\phi^{-1})^{-1}$ soit l'identité dans un voisinage de 0. De même au voisinage de 1. Il en résulte que, modulo le sous-groupe des commutateurs de $\mathrm{Diff}^{\infty}_{\infty}([0,1])$, η est égal à $\bar\eta$ à support compact dans $]0,1[$; mais, par 6.5, un tel $\bar\eta$ est un produit de commutateurs.

On a terminé la première démonstration du théorème 6.1. La deuxième est plus indirecte, mais va peut-être plus au coeur des choses. Soit $\mathrm{Diff}^{\infty}_{K}(\mathbb{R})$ le groupe des C^∞-difféomorphismes de $\mathbb{R}$ à support compact, muni de la topologie discrète. L'homologie d'Eilenberg-MacLane de $\mathrm{Diff}^{\infty}_{K}(\mathbb{R})$ peut être définie comme celle du complexe (C_q, d) où C_q est le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par $(\mathrm{Diff}^{\infty}_{K}(\mathbb{R}))^q$ et $d(g_1,\dots,g_q)=(g_2,\dots,g_q)-(g_1 g_2,\dots,g_q)+\cdots+(-1)^q(g_1,\dots,g_{q-1})$.



Si $g_1, g_2 \in \mathrm{Diff}_K^\infty(\mathbb{R})$ commutent, alors $(g_1, g_2)-(g_2, g_1)$ est un 2-cycle dont la classe d'homologie est notée $H_2(g_1, g_2) \in H_2(\mathrm{Diff}_K^\infty(\mathbb{R}))$. En particulier, si g_1 a son support dans $]-\infty, 0]$ et g_2 dans $[0, +\infty[$, alors g_1 et g_2 commutent.

6.7. Théorème. *Si support* $(g_1) \subset]-\infty, 0]$ *et support* $(g_2) \subset [0, +\infty[$, *alors*

$$H_2(g_1, g_2) = 0.$$

Démonstration. Soit D_1 (resp. D_2) le sous-groupe des éléments de $\mathrm{Diff}_K^\infty(\mathbb{R})$ dont le support est dans $]-\infty, 0]$ (resp. $[0, +\infty[$). On a une inclusion canonique $D_1 \times D_2 \subset \mathrm{Diff}_K^\infty(\mathbb{R})$, et $g_1, g_2 \in D_1 \times D_2$. Mieux, $g_1 \in D_1 \times \{e_2\}$, $g_2 \in \{e_1\} \times D_2$ si e_1, e_2 sont les éléments neutres respectifs de D_1 et D_2. Il suffit de montrer que la classe d'homologie $H_2(g_1, g_2)$ est déjà nulle dans $H_2(D_1 \times D_2)$. Par la formule de Künneth:

$$H_2(D_1 \times D_2) \approx H_2(D_1) \oplus (H_1(D_1) \otimes H_1(D_2)) \oplus H_2(D_2).$$

Dans cet isomorphisme canonique, l'élément $H_2(g_1, g_2)$ est décomposé en trois composantes qu'on peut noter $H_2(g_1, e)$, $H_1(g_1) \otimes H_1(g_2)$, $H_2(e, g_2)$. La première et la troisième sont nulles parce que classes d'homologie de cycles dégénérés. Par ailleurs $H_1(D_1) = H_1(D_2) = 0$ par le même argument qu'en 6.6. On a donc aussi $H_1(g_1) = H_1(g_2) = 0$.

On va expliquer maintenant comment on peut déduire le théorème 6.1 du théorème 6.7.

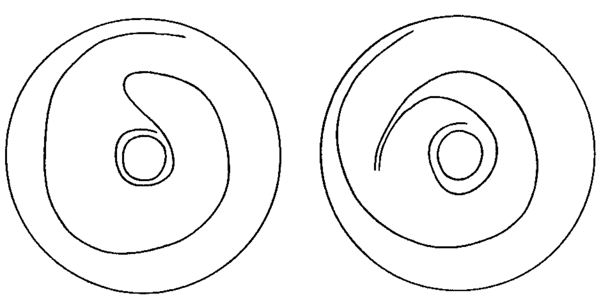
Mather construit dans [4] un isomorphisme

$$S\colon H_2(\mathrm{Diff}_K^\infty(\mathbb{R})) \xrightarrow{\approx} H_3(B\Gamma_1^\infty).$$

Soient g_1 et g_2 comme en 6.1. Alors les germes g_1 et g_2 sont les germes d'éléments de D_1 et D_2 respectivement. Par abus de notation, on note encore g_1 et g_2 ces éléments. On peut supposer que $|x| \geqq 1$ implique $g_1(x) = x$, $g_2(x) = x$, et que g_1 et g_2 sont sans point fixe sur $]-1, 0[$ et $]0, 1[$ respectivement. Soit

$$\mathscr{H}\colon \pi_1(T^2) \to \mathrm{Diff}^\infty[-1, +1]$$

l'homomorphisme de groupes qui envoie p_1 et p_2 sur g_1 et g_2 respectivement. $\mathscr{H}$ est l'holonomie globale d'un feuilletage de $T^2 \times [-1, +1]$. Si $T^2 = S^1 \times S^1$, soit $\sim$ la relation d'équivalence sur $T^2 \times [-1, +1]$ dont les seules classes non triviales sont les $\{\theta_1\} \times S^1 \times \{-1\}$ pour $\theta_1 \in S^1$, et les $S^1 \times \{\theta_2\} \times \{1\}$ pour $\theta_2 \in S^1$. Alors $T^2 \times [-1, +1]/\sim\, = S^3$. Le feuilletage de $T^2 \times [-1, +1]$ passe au quotient et définit une Γ_1^∞-structure sur S^3 qu'on note $\mathscr{F}'(g_1, g_2)$ et qui ressemble beaucoup au feuilletage de Reeb $\mathscr{F}(g_1, g_2)$. Les différences sont les suivantes: les feuilles non compactes sont cette fois des cylindres $S^1 \times \mathbb{R}$ qui s'enroulent non seulement le long du tore T^2, mais aussi le long de l'âme $S_1^1 \times \{0\}$ ou $\{0\} \times S_2^1$ de l'un des tores solides $S_1^1 \times D_1^2$ ou $D_2^2 \times S_2^1$.



Feuilletage $\mathscr{F}$ $\qquad$ Γ_1^∞- structure $\mathscr{F}'$

Les deux âmes sont les seules feuilles singulières de $\mathscr{F}'(g_1, g_2)$.

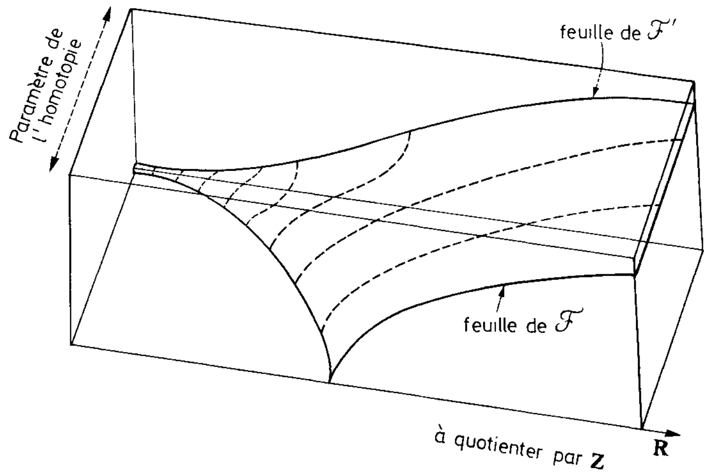
Soit $g\colon S^3 \to B\Gamma_1^\infty$ classifiant la Γ_1^∞-structure $\mathscr{F}'(g_1, g_2)$.

6.8. Lemme. *$S(H_2(g_1, g_2)) = H_3(g)([S^3])$ où $[S^3]$ est la classe fondamentale de S^3.*

Démonstration. Elle résulte du fait qu'on a simplement détaillé la construction de Mather [4] de la flèche S quand elle s'applique à $H_2(g_1, g_2)$. Voir [4].

6.9. Lemme. *Les Γ_1^∞-structures $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont homotopes.*

Démonstration. Méditer la figure:



On déduit du lemme 6.9 que g classifie aussi bien la Γ_1^∞-structure $\mathscr{F}(g_1, g_2)$. Donc

$H_3(g_1, g_2) = H_3(g)([S^3]) = S(H_2(g_1, g_2))$.

Mais, par 6.7, $H_2(g_1, g_2) = 0$.

On a ainsi terminé la deuxième démonstration du théorème 6.1. Il faut remarquer aussi, pour être complet, qu'on peut déduire le théorème 6.4 du corollaire 6.3 en utilisant la théorie de Thurston [13].

Bibliographie

1. Haefliger, A.: Homotopy and integrability. In: Manifolds – Amsterdam 1970. Lecture Notes in Math. **197**. Berlin-Heidelberg-NewYork: Springer 1971
2. Kopell, N.: Commuting diffeomorphisms. In: Global analysis, Proc. of Symp. in Pure Math., **XIV**, 1970
3. Mather, J.: On Haefliger's classifying space. I. Bull. of the A.M.S. **77**, 1111 – 1115 (1971)
4. Mather, J.: Integrability in codimension one. Comm. Math. Helv. **48**, 195 – 233 (1973)
5. Mather, J.: Commutators of C^r diffeomorphisms of the real line. Preprint, version préliminaire de [6]
6. Mather, J.: Commutators of diffeomorphisms. Comm. Math. Helv. **49**, 512 – 528 (1974)
7. Mizutani, T.: Foliated cobordisms of S^3 and examples of foliated 4-manifolds. Topology **13**, 353–362 (1974)
8. Rosenberg, H., Thurston, W.: Some remarks on foliations. In: Dynamical Systems. NewYork-London: Academic Press 1973
9. Sergeraert, F.: Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications. Ann. Sc. de l'E.N.S. de Paris, 4è série, **5**, 599 – 660 (1972)
10. Sternberg, S.: Local C^n transformations of the real line. Duke Math. J. **24**, 97 – 102 (1957)
11. Szekeres, G.: Regular iteration of real and complex functions. Acta Math. **100**, 203 – 258 (1958)
12. Takens, F.: Normal forms for certain singularities of vectorfields. Ann. Inst. Fourier **23**, 163 – 195 (1973)
13. Thurston, W.: Existence of codimension one foliations. Ann. Math. **104**, 249-268 (1976)

Received August 30, 1976