Numer. Math. 24, 103—131 (1975)

Sur la methode des elements finis hybrides pour le probleme biharmonique

F. Brezzi*

Reçu 14 August, 1973

Introduction

La méthode des éléments finis hybrides a déjà été introduite et expérimenté du point de vue du calcul numérique par plusieurs auteurs (v. Pian-Tong [1], Pian [1], Yamada-Nagakiri-Takatsuka [1], Cooke [1], Kikuci-Ando [1], etc.) aussi bien pour des opérateurs d'ordre deux que pour des opérateurs d'ordre quatre. Le but de ce papier est d'étudier la méthode du point de vue mathématique, en prenant comme cas particulier le problème:

$$\Delta^2 w(x,y) = p(x,y) \quad \text{dans} \quad \Omega,$$
$$w=0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega,$$
$$\frac{\partial w}{\partial n}=0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega,$$

(c'est-à-dire le problème d'une plaque uniforme mince, encastrée sur le bord $\partial\Omega$ et soumise à une charge $-p(x,y)$ uniformement distribuée).

La méthode est exposée du point de vue formel dans le paragraphe 1.1 et précisée du point de vue mathématique dans la suite du chapitre 1. Dans le chapitre 2 on donne d'abord, dans 2.1, un théorème général qui nous assure la «convergence» sous une hypothèse convenable; on donne ensuite, dans le paragraphe 2.2, des exemples de schémas qui ont été introduits et utilisés par plusieurs auteurs (v. Pian [1] et bibliographie de cet article) et qui vérifient l'hypothèse abstraite donnée dans 2.1. On remarque que la vérification de cette hypothèse se reduit à une «condition de compatibilité» sur un élément de référence fixé. Cette condition de compatibilité est voisine (mais, en un certain sens, plus précise) d'une «condition d'optimalité» qui a été trouvée de façon expérimentale par Henshall [1]; on peut voir alors que si un schéma vérifie la condition de compatibilité, on peut en déduire immédiatement un autre schéma (plus simple) qui vérifie encore la condition de compatibilité et qui est «optimal» au sens de Henshall. Dans le dernier paragraphe on donne enfin, très rapidement, l'évaluation de l'erreur pour les exemples donnés précédemment.

Des résultats analogues pour le Laplacien sont contenues dans un article à paraître (Brezzi [1]).

* «Università di Pavia» et «Laboratorio di Analisi Numerica del C.N.R.» (Italie). Travail effectué pendant que l'auteur était boursier du C.N.R. chez l'E.R.A.215 de l'Université de Paris VI.

Je veux remercier ici M. Raviart qui m'a donné le sujet de ce travail et avec qui j'ai eu des conversations très instructives qui m'ont étées très utiles ainsi que ses conseils precieux. Je remercie aussi les mathématiciens de l'E.R.A. 215 de l'Université de Paris VI et en particulier *MM.* Ciarlet, Crouzeix et Glowinski avec lesquels j'ai eu des conversations très intéressantes qui m'ont bien aidé dans l'accomplissement du travail.

1. Formulation theorique de la methode

1.1. Position du problème — Plan de travail

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$; pour fixer les idées on supposera que Ω est un polygone convexe. On veut résoudre le problème:

Trouver $w(x, y)$ dans $H^2(\Omega)$ tel que:

$$\begin{aligned} &\Delta^2 w(x,y) = p(x,y) \quad \textit{dans} \quad \Omega, \\ &w(x,y) = 0 \quad \textit{sur} \quad \Omega, \\ &\frac{\partial w}{\partial n}(x,y) = 0 \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

$p(x, y)$ étant une fonction que l'on supposera, pour simplifier, dans $L^2(\Omega)$. On remarque, d'abord, que le triplet

$$w_{xx},\ w_{xy},\ w_{yy} \tag{1.1.2}$$

realise le minimum de la fonctionnelle

$$J_0(v_1, v_2, v_3) = \tfrac{1}{2} \int_\Omega (v_1^2 + 2v_2^2 + v_3^2)\, dx\, dy \tag{1.1.3}$$

sur la variété affine de $(L^2(\Omega))^3$ formée des triplets (v_1, v_2, v_3) qui vérifient

$$v_{1,xx} + 2v_{2,xy} + v_{3,yy} = p(x, y) \tag{1.1.4}$$

dans Ω. On appliquera, ensuite, la méthode de décomposition et coordination (v. Bensoussan-Lions-Temam [1]) au problème du calcul du minimum de J_0. De façon plus précise, à toute décomposition (d) de Ω en sous polygones Ω_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ avec

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \text{si } i \neq j, \qquad \Omega = \text{intérieur de} \bigcup_{i=1} \bar{\Omega}_i, \tag{1.1.5}$$

on va associer un problème de point de selle équivalent, dans un sens convenable, au problème (1.1.1). Pour cela on va minimiser la fonctionnelle

$$J(v_1, v_2, v_3) = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} (v_1^2 + 2v_2^2 + v_3^2)\, dx\, dy \tag{1.1.6}$$

sur la variété affine des triplets (v_1, v_2, v_3) qui vérifient (1.1.4) dans chaque Ω_i (et pas nécessairement dans Ω tout entier) en imposant comme contrainte la continuité, sur les côtés communs à deux Ω_i, des quantités

$$(1.1.7)\qquad \begin{aligned} m_x(\boldsymbol{v}) &= v_1 \cos n_i\hat{\ } x + v_2 \cos n_i\hat{\ } y,\text{[1]} \\ m_y(\boldsymbol{v}) &= v_2 \cos n_i\hat{\ } x + v_3 \cos n_i\hat{\ } y, \\ Q_n(\boldsymbol{v}) &= (v_{1,x} + v_{2,y}) \cos n_i\hat{\ } x + (v_{2,x} + v_{3,y}) \cos n_i\hat{\ } y. \end{aligned}$$

(On remarque tout de suite que si e.g. $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ est du type (g_{xx}, g_{xy}, g_{yy}) avec $g(x, y)$ appartenant, par exemple, à $H^4(\Omega)$, on a:

$$(1.1.8)\qquad \begin{aligned} m_x(\boldsymbol{v}) &= \frac{\partial g_x}{\partial n_i}, \\ m_y(\boldsymbol{v}) &= \frac{\partial g_y}{\partial n_i}, \\ Q_n(\boldsymbol{v}) &= \frac{\partial \Delta g}{\partial n_i}, \end{aligned}$$

ce qui «justifie», en un certains sens, la contrainte choisie.) La continuité des quantités (1.1.7) sera imposée par la méthode des multiplicateurs le Lagrange; on sera donc ramené à la recherche du point de selle de

$$(1.1.9)\qquad \begin{aligned} \mathscr{L}(\boldsymbol{v}, \phi) = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} (v_1^2 + 2v_2^2 + v_3^2)\, dx\, dy - \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial\Omega_i} \big(m_x(\boldsymbol{v})\, \phi_x + m_y(\boldsymbol{v})\, \phi_y \\ - Q_n(\boldsymbol{v})\, \phi\big)\, d\sigma_i \end{aligned}$$

$\boldsymbol{v}$ et ϕ pouvant varier dans des convexes convenablement choisis. On verifiera, ensuite, que, w étant la solution de (1.1.1), le couple $(\boldsymbol{u}, \psi)$ donné par

$$(1.1.10)\qquad \boldsymbol{u} = (w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}),$$

$$(1.1.11)\qquad (\psi, \psi_x, \psi_y) = \text{restrictions de } (w, w_x, w_y) \text{ à } \Sigma = \bigcup_{i=1}^{N} \partial\Omega_i$$

est le point de selle, *unique*, de $\mathscr{L}(\boldsymbol{v}, \phi)$.

1.2. Le problème de point de selle

On va d'abord introduire quelques espaces de fonctions (ou de distributions) qui nous seront utiles dans la suite. On considère, pour chaque Ω_i, l'espace

$$(1.2.1)\qquad \mathscr{I}_i = (L^2(\Omega_i))^3;$$

on munit $\mathscr{I}_i$ du produit scalaire (équivalent au produit scalaire nuaturel)

$$(1.2.2)\qquad [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]_i = \int_{\Omega_i} (u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + u_3 v_3)\, dx\, dy; \qquad \|\boldsymbol{v}\|_i^2 = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}]_i.$$

On considère ensuite l'opérateur

$$(1.2.3)\qquad \boldsymbol{D}: \phi \to (\phi_{xx}, \phi_{xy}, \phi_{yy}),$$

et son adjoint formel (au sens de $\mathscr{I}_i$):

$$(1.2.4)\qquad D^*: (v_1, v_2, v_3) \to v_{1,xx} + 2v_{2,xy} + v_{3,yy};$$

1 Note: Ici et dans toute la suite on a posé n_i = direction normale ext. à Ω_i.

on vérifie sans peine que (toujours formellement):

$$D^* \boldsymbol{D} \phi = \Delta^2 \phi. \tag{1.2.5}$$

On introduit maintenant le sous-espace F_i de $\mathscr{J}_i$ défini par:

$$F_i = \{(v_1, v_2, v_3) \mid (v_1, v_2, v_3) \in \mathscr{J}_i,\ D^*(v_1, v_2, v_3) \in L^2(\Omega_i)\} \tag{1.2.6}$$

avec la norme du graphe

$$\|(v_1, v_2, v_3)\|^2_{F_i} = \|(v_1, v_2, v_3)\|^2_i + \|D^*(v_1, v_2, v_3)\|^2_{L^2(\Omega_i)}. \tag{1.2.7}$$

Notre but est maintenant de donner un sens précis aux quantités $m_x(\boldsymbol{v})$, $m_y(\boldsymbol{v})$, $Q_n(\boldsymbol{v})$ (données formellement par les équations (1.1.7)), lorsque $\boldsymbol{v}$ est un élément de F_i. On souligne de façon explicite qu'on ne donnera pas de sens à chacune de ces trois quantités séparément, mais seulement au triplet. On aura donc besoin: a) de définir des espaces de (triplets de) distributions sur $\Gamma_i = \partial\Omega_i$ dans lesquels «placer» les «traces» $(m_x(\boldsymbol{v}), m_y(\boldsymbol{v}), Q_n(\boldsymbol{v}))$; b) d'un théorème de trace.

On introduit alors, toujours pour chaque Ω_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ l'opérateur

$$\mathscr{G}_i : H^2(\Omega_i) \to (L^2(\Gamma_i))^3 \tag{1.2.8}$$

défini par

$$\mathscr{G}_i v = (\gamma_0^{(i)} v, \gamma_0^{(i)} v_x, \gamma_0^{(i)} v_y) \tag{1.2.9}$$

(où, évidemment, $\gamma_0^{(i)}$ désigne la trace sur Γ_i).

On remarque que l'image de $H^2(\Omega_i)$ par $\mathscr{G}_i$ ne coincide pas avec $(L^2(\Gamma_i))^3$ tout entier; on désigne donc par W_i l'espace image de $H^2(\Omega_i)$ par $\mathscr{G}_i$; on aura alors:

$$\begin{gathered} W_i = \{(\phi_0, \phi_1, \phi_2) \in (L^2(\Gamma_i))^3 \textit{ tels qu'il existe} \\ v \in H^2(\Omega_i) \textit{ avec } \mathscr{G}_i v = (\gamma_0^{(i)} v, \gamma_0^{(i)} v_x, \gamma_0^{(i)} v_y) = (\phi_0, \phi_1, \phi_2)\}. \end{gathered} \tag{1.2.10}$$

On souligne tout de suite de façon explicite que W_i est un sous espace de $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_i) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$, caractérisé par des «conditions de raccord» de type intégral que nous n'expliciterons pas (v. Grisvard [1]). On doit maintenant définir une norme sur W_i; pour cela on observe d'abord que, pour tout élément (ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2) de W_i, il existe une fonction v unique dans $H^2(\Omega_i)$ telle que

$$\begin{aligned} &\Delta^2 v = 0 \\ &\mathscr{G}_i v = (\phi_0, \phi_1, \phi_2); \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

en effet il suffit de remarquer que, grâce à (1.2.10), il existe au moins un élément ζ dans $H^2(\Omega_i)$ tel que

$$\mathscr{G}_i \zeta = (\phi_0, \phi_1, \phi_2); \tag{1.2.12}$$

il suffit donc de résoudre le problème

$$\begin{aligned} &-\Delta^2 u = \Delta^2 \zeta \\ &u \in H_0^2(\Omega_i) \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

(ce qui est évidemment toujours possible) pour déduire de (1.2.12) et (1.2.13) que la fonction

$$v = u + \zeta \tag{1.2.14}$$

est solution de (1.2.11); on a ainsi démontré l'existence d'une solution de (1.2.11); l'unicité est immédiate. On peut donc définir l'opérateur

$$\mathscr{I}_i \colon W_i \to H^2(\Omega_i) \tag{1.2.15}$$

qui à tout élément (ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2) de W_i associe la solution

$$v = \mathscr{I}_i(\phi_0, \phi_1, \phi_2) \tag{1.2.16}$$

du problème (1.2.11). On peut, maintenant, poser:

$$\|(\phi_0, \phi_1, \phi_2)\|_{W_i} = \|\mathscr{I}_i(\phi_0, \phi_1, \phi_2)\|_{H^2(\Omega_i)}; \tag{1.2.17}$$

alors, avec la norme (1.2.17), W_i est un espace de Hilbert. C'est dans le dual W_i' de W_i que l'on va placer les «traces» $(m_x(\boldsymbol{v}), m_y(\boldsymbol{v}), Q_n(\boldsymbol{v}))$ des éléments de F_i. Pour cela on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 1.1.

$$[\mathscr{D}(\bar{\Omega}_i)]^3 \textit{ est dense dans } F_i. \tag{1.2.18}$$

Démonstration. Soit T une fonctionnelle linéaire continue sur F_i; d'après (1.2.7) et le théorème de Hahn-Banach, T peut s'écrire sous la forme

$$T(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}]_i + \int_{\Omega_i} g D^* \boldsymbol{v} \, dx \, dy, \tag{1.2.19}$$

avec:

$$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3) \in (L^2(\Omega_i))^3 \tag{1.2.20}$$

et

$$g \in L^2(\Omega_i). \tag{1.2.21}$$

Supposons que l'on ait

$$T(\boldsymbol{\phi}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in (\mathscr{D}(\bar{\Omega}_i))^3; \tag{1.2.22}$$

on va démontrer que

$$T(\boldsymbol{v}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in F_i, \tag{1.2.23}$$

ce qui entraînera la thèse (1.2.18) grâce au théorème d'Hahn-Banach. Commençons donc en prenant, dans (1.2.22), $\boldsymbol{\phi} \in (\mathscr{D}(\Omega_i))^3$; on aura, évidemment,

$$[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\phi}]_i + \int_{\Omega_i} g D^* \boldsymbol{\phi} \, dx \, dy = 0 \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in (\mathscr{D}(\Omega_i))^3; \tag{1.2.24}$$

d'où, nécessairement,

$$\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{D} g \text{ au sens des distributions.} \tag{1.2.25}$$

De (1.2.25), (1.2.20), (1.2.21) on aura donc

$$g \in H^2(\Omega_i); \tag{1.2.26}$$

notre but est maintenant de montrer que (1.2.22) entraîne:

(1.2.27) $$g \in H_0^2(\Omega_i).$$

On commence par démontrer que

(1.2.28) $$g \in H^2(\Omega_i) \cap H_0^1(\Omega_i).$$

Soit en effet ψ un élément quelconque de $\mathscr{D}(\overline{\Omega}_i) \cap H_0^3(\Omega_i)$ et soit $\boldsymbol{\phi}$ donné par

(1.2.29) $$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{D}\psi = (\psi_{xx}, \psi_{xy}, \psi_{yy}) \in [\mathscr{D}(\overline{\Omega}_i)]^3 \cap [H_0^1(\Omega_i)]^3.$$

On obtient, à partir de la définition de $[\,,\,]_i$ et en utilisant des «formules de Green» bien connues,

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{D}g, \boldsymbol{\phi}]_i &= \int_{\Omega_i} (g_{xx}\psi_{xx} + 2g_{xy}\psi_{xy} + g_{yy}\psi_{yy})\,dx\,dy \\
&= -\int_{\Omega_i} (g_x\psi_{xxx} + g_x\psi_{xyy} + g_y\psi_{xxy} + g_y\psi_{yyy})\,dx\,dy \\
&= -\int_{\Omega_i} (\mathbf{grad}\,g)\cdot(\psi_{xxx}, \psi_{xxy})\,dx\,dy - \int_{\Omega_i} (\mathbf{grad}\,g)\cdot(\psi_{xyy}, \psi_{yyy})\,dx\,dy \\
&= \int_{\Omega_i} g\,[\operatorname{div}(\psi_{xxx}, \psi_{xxy}) + \operatorname{div}(\psi_{xyy}, \psi_{yyy})]\,dx\,dy \\
&\quad - \int_{\Gamma_i} g\,[(\psi_{xxx}\cos n_i x + \psi_{xxy}\cos n_i y) \\
&\quad + (\psi_{xyy}\cos n_i x + \psi_{yyy}\cos n_i y)]\,d\sigma_i \\
&= \int_{\Omega_i} g\,\Delta^2\psi\,dx\,dy - \int_{\Gamma_i} g\,\frac{\partial\Delta\psi}{\partial n_i}\,d\sigma_i = \int_{\Omega_i} g\,D^*\boldsymbol{\phi}\,dx\,dy - \int_{\Gamma_i} g\,\frac{\partial\Delta\psi}{\partial n_i}\,d\sigma_i.
\end{aligned}$$

En résumé, on a

(1.2.30) $$[\boldsymbol{D}g, \boldsymbol{\phi}]_i = \int_{\Omega_i} g\,D^*\boldsymbol{\phi}\,dx\,dy - \int_{\Gamma_i} g\,\frac{\partial\Delta\psi}{\partial n_i}\,d\sigma_i,$$

et donc, de (1.2.22) et (1.2.25), on déduit

(1.2.31) $$\int_{\Gamma_i} g\,\frac{\partial\Delta\psi}{\partial n_i}\,d\sigma_i = 0,$$

d'où immédiatement

(1.2.32) $$g = 0 \quad \text{sur } \Gamma_i,$$

grâce au fait que dans (1.2.31) ψ est quelconque dans $\mathscr{D}(\overline{\Omega}_i) \cap H_0^3(\Omega_i)$; on a donc démontré (1.2.28). Pour démontrer (1.2.27) on observe que, pour tout couple (ψ_1, ψ_2) dans $(\mathscr{D}(\overline{\Omega}_i))^2$, si l'on pose

(1.2.33) $$\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \left(\psi_{1,x}, \tfrac{1}{2}(\psi_{1,y} + \psi_{2,x}), \psi_{2,y}\right),$$

on obtient

$$[\boldsymbol{D}g, \boldsymbol{\phi}]_i = \int\limits_{\Omega_i} (g_{xx}\psi_{1,x} + g_{xy}\psi_{1,y} + g_{yx}\psi_{2,x} + g_{yy}\psi_{2,y})\, dx\, dy$$

$$= \int\limits_{\Omega_i} (\mathbf{grad}\, g_x) \cdot (\mathbf{grad}\, \psi_1)\, dx\, dy + \int\limits_{\Omega_i} (\mathbf{grad}\, g_y) \cdot (\mathbf{grad}\, \psi_2)\, dx\, dy$$

$$= -\int\limits_{\Omega_i} g_x \Delta\psi_1\, dx\, dy - \int\limits_{\Omega_i} g_y \Delta\psi_2\, dx\, dy + \int\limits_{\Gamma_i} g_x \frac{\partial \psi_1}{\partial n_i}\, d\sigma_i + \int\limits_{\Gamma_i} g_y \frac{\partial \psi_2}{\partial n_i}\, d\sigma_i$$

$$= (\text{grâce à } (1.2.32)) \int\limits_{\Omega_i} g \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta\psi_1 + \frac{\partial}{\partial y} \Delta\,\psi_2 \right) dx\, dy$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_i} \left(g_x \frac{\partial \psi_1}{\partial n_i} + g_y \frac{\partial \psi_2}{\partial n_i} \right) d\sigma_i$$

$$= \int\limits_{\Omega_i} g D^* \boldsymbol{\phi}\, dx\, dy + \int\limits_{\Gamma_i} \left(g_x \frac{\partial}{\partial n_i} \psi_1 + g_y \frac{\partial}{\partial n_i} \psi_2 \right) d\sigma_i.$$

En résumé

$$(1.2.34) \qquad [\boldsymbol{D}g, \boldsymbol{\phi}]_i = \int\limits_{\Omega_i} g D^* \boldsymbol{\phi}\, dx\, dy + \int\limits_{\Gamma_i} \left(g_x \frac{\partial}{\partial n_i} \psi_1 + g_y \frac{\partial}{\partial n_i} \psi_2 \right) d\sigma_i,$$

et, encore grâce à (1.2.22) et (1.2.25),

$$(1.2.35) \qquad \int\limits_{\Gamma_i} \left(g_x \frac{\partial}{\partial n_i} \psi_1 + g_y \frac{\partial}{\partial n_i} \psi_2 \right) d\sigma_i = 0$$

d'où immédiatement

$$(1.2.36) \qquad g_x = g_y = 0 \quad \text{sur } \Gamma_i,$$

grâce au fait que dans (1.2.35) le couple (ψ_1, ψ_2) est quelconque dans $(\mathscr{D}(\bar{\Omega}_i))^2$. On a donc démontré (1.2.27); à partir de cela on vérifie sans peine (1.2.23); soit en effet g_n une suite de fonctions de $\mathscr{D}(\Omega_i)$ qui converge vers g dans $H^2(\Omega_i)$; on aura pour tout $\boldsymbol{v}$ dans F_i:

$$T(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}]_i + \int\limits_{\Omega_i} g D^* \boldsymbol{v}\, dx\, dy = [-\boldsymbol{D}g, \boldsymbol{v}]_i + \int\limits_{\Omega_i} g D^* \boldsymbol{v}\, dx\, dy$$

$$= \lim_{n \to \infty} [-\boldsymbol{D}g_n, \boldsymbol{v}]_i + \int\limits_{\Omega_i} g_n D^* \boldsymbol{v}\, dx\, dy = 0,$$

ce qui achève la démonstration.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème de trace qu'il nous fallait.

Théorème 1.1. *Soit Ω_i un polygone convexe et soient $l_1^{(i)}, \ldots, l_k^{(i)}$ ses côtés. L'application*

$$(1.2.37) \qquad \mathscr{C}_i \colon [\mathscr{D}(\bar{\Omega}_i)]^3 \to \left[\prod_{j=1}^{k} \mathscr{D}(\bar{l}_j^{(i)}) \right]^3$$

définie par:

$$(1.2.38) \qquad \langle \mathscr{C}_i(v_1, v_2, v_3), (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \rangle = \int\limits_{\Gamma_i} \left(m_x(\boldsymbol{v})\, \phi_3 + m_y(\boldsymbol{v})\, \phi_2 - Q_n(\boldsymbol{v})\, \phi_1 \right) d\sigma_i$$

pour tout (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) *dans* $[\prod_{j=1}^{k} \mathscr{D}(\bar{l}_j^{(i)})]^3$, *avec*

$$m_x(\boldsymbol{v}) = v_1 \cos \widehat{n_i\, x} + v_2 \cos \widehat{n_i\, y},$$
$$m_y(\boldsymbol{v}) = v_2 \cos \widehat{n_i\, x} + v_3 \cos \widehat{n_i\, y},$$
$$Q_n(\boldsymbol{v}) = (v_{1,x} + v_{2,y}) \cos \widehat{n_i\, x} + (v_{2,x} + v_{3,y}) \cos \widehat{n_i\, y},$$

se prolonge par continuité en une application, encore notée $\mathscr{C}_i$, *linéaire continue de* F_i *dans* W_i', *et on a la «formule de Green» suivante:*

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{D}v]_i - \int_{\Omega_i} (D^* \boldsymbol{u})\, v\, dx\, dy = \langle \mathscr{C}_i(\boldsymbol{u}), \mathscr{G}_i v \rangle_{W_i' \; W_i} \tag{1.2.39}$$

pour tout $\boldsymbol{u}$ *dans* F_i *et tout* v *dans* $H^2(\Omega_i)$.

Démonstration. On va utiliser la méthode de Lions-Magenes [1]. Pour cela soit $\boldsymbol{u}$ dans F_i; on lui associe une application $Z_{\boldsymbol{u}}^{(i)}$ définie sur W_i de la façon suivante. On choisit un rélèvement $\mathscr{R}_i$ de l'opérateur $\mathscr{G}_i$ et ensuite on définit, pour chaque (ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2) dans W_i,

$$Z_{\boldsymbol{u}}^{(i)} = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{D}v]_i - \int_{\Omega_i} (D^* \boldsymbol{u})\, v\, dx\, dy, \tag{1.2.40}$$

avec

$$v = \mathscr{R}_i(\phi_0, \phi_1, \phi_2), \tag{1.2.41}$$

c'est-à-dire

$$v \in H^2(\Omega_i), \qquad \mathscr{G}_i v = (\phi_0, \phi_1, \phi_2). \tag{1.2.42}$$

On remarque tout de suite que, $\boldsymbol{u}$ étant fixé, la quantité (1.2.40) ne depend que de (ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2) et pas du rélèvement choisi; en effet, si l'on avait

$$v' = \mathscr{R}_i'(\phi_0, \phi_1, \phi_2), \tag{1.2.43}$$

avec donc

$$v' \in H^2(\Omega_i) \quad \text{et} \quad \mathscr{G}_i v' = \mathscr{G}_i v, \tag{1.2.44}$$

on aurait

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{D}(v - v')]_i - \int_{\Omega_i} (D^* \boldsymbol{u})(v - v')\, dx\, dy = 0, \tag{1.2.45}$$

car $(v - v') \in H_0^2(\Omega_i)$.

On vérifié ensuite que $Z_{\boldsymbol{u}}^{(i)}$ est une application linéaire continue sur W_i; en effet on a

$$\begin{aligned} |Z_{\boldsymbol{u}}^{(i)}(\phi_0, \phi_1, \phi_2)| &\leqq \|\boldsymbol{u}\|_i \, \|\boldsymbol{D}v\|_i + \|D^* \boldsymbol{u}\|_{L(\Omega_i)} \|v\|_{L^2(\Omega_i)} \\ &\leqq \text{const} \, \|\boldsymbol{u}\|_{F_i} \|v\|_{H^2(\Omega_i)} \\ &\leqq \text{const} \, \|\boldsymbol{u}\|_{F_i} \|(\phi_0, \phi_1, \phi_2)\|_{W_i} \end{aligned} \tag{1.2.46}$$

qui donne bien la continuité de $Z_{\boldsymbol{u}}^{(i)}$ (la linéairité étant évidente); en plus:

$$\|Z_{\boldsymbol{u}}^{(i)}\|_{W_i'} \leqq \text{const} \, \|\boldsymbol{u}\|_{F_i}. \tag{1.2.47}$$

On a donc construit une application

(1.2.48) $$\mathscr{Z}^{(i)}: \boldsymbol{u} \to Z_{\boldsymbol{u}}^{(i)}$$

linéaire continue de F_i dans W_i' ; il ne reste donc qu'à démontrer, grâce au lemme 1.1, que

(1.2.49) $$\mathscr{Z}^{(i)}(\boldsymbol{u}) = \mathscr{C}_i \boldsymbol{u} \qquad \text{pour tout } \boldsymbol{u} \in [\mathscr{D}(\bar{\Omega}_i)]^3.$$

Soient donc $\boldsymbol{u}$ dans $[\mathscr{D}(\bar{\Omega}_i)]^3$, v dans $H^2(\Omega_i)$ et soit $(\phi_0, \phi_1, \phi_2) = \mathscr{G}_i(v)$; on a

$$\begin{aligned}
Z_{\boldsymbol{u}}^{(i)}(\phi_0, \phi_1, \phi_2) &= [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{D}v]_i - \int_{\Omega_i} (D^*\boldsymbol{u})\, v\, dx\, dy \\
&= \int_{\Omega_i} (u_1 v_{xx} + u_2 v_{xy} + u_2 v_{xy} + u_3 v_{yy})\, dx\, dy \\
&\quad - \int_{\Omega} (u_{1,xx} + 2u_{2,xy} + u_{3,yy})\, v\, dx\, dy \\
&= -\int_{\Omega_i} (u_{1,x} v_x + u_{2,y} v_x + u_{2,x} v_y + u_{3,y} v_y)\, dx\, dy \\
&\quad + \int_{\Gamma_i} [(u_1 \cos n_i\hat{}\, x + u_2 \cos n_i\hat{}\, y)\, v_x + (u_2 \cos n_i\hat{}\, x + u_3 \cos n_i\hat{}\, y)\, v_y]\, d\sigma_i \\
&\quad - \int_{\Omega_i} (u_{1,xx} + 2u_{2,xy} + u_{3,yy})\, v\, dx\, dy \\
&= \int_{\Omega_i} (u_{1,xx} + 2u_{2,xy} + u_{3,yy})\, v\, dx\, dy \\
&\quad - \int_{\Gamma_i} [(u_{1,x} + u_{2,y}) \cos n_i\hat{}\, x + (u_{2,x} + u_{3,y}) \cos n_i\hat{}\, y]\, v\, d\sigma_i \\
&\quad + \int_{\Gamma_i} \big(m_x(\boldsymbol{u})\, v_x + m_y(\boldsymbol{u})\, v_y\big)\, d\sigma_i - \int_{\Omega_i} (u_{1,xx} + 2u_{2,xy} + u_{3,yy})\, v\, dx\, dy \\
&= \int_{\Gamma_i} \big(m_x(\boldsymbol{u})\, v_x + m_y(\boldsymbol{u})\, v_y - Q_n(\boldsymbol{u})\, v\big)\, d\sigma_i = \langle \mathscr{C}_i \boldsymbol{u}, \mathscr{G}_i v \rangle \\
&= \langle \mathscr{C}_i \boldsymbol{u}, (\phi_0, \phi_1, \phi_2) \rangle
\end{aligned}$$

et l'équation (1.2.49) est démontrée. La «formule de Green» (1.2.39) est maintenant une conséquence immédiate de (1.2.40).

Maintenant on peut, enfin, définir les «bons espaces» dans lesquels placer notre problème de min-max. On définit d'abord l'espace

(1.2.50) $$F = \{(v_1, v_2, v_3) \in (L^2(\Omega))^3 \ \textit{avec}\ D^*(v_1, v_2, v_3) \in L^2(\Omega_i)\ (i = 1, \ldots, N)\}.$$

On observe que, évidemment,

(1.2.51) $$F \approx \prod_{i=1}^{N} F_i,$$

et on pose

(1.2.52) $$\|\boldsymbol{v}\|_F^2 = \sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{v}\|_{F_i}^2.$$

On définit ensuite dans F le convexe

(1.2.53) $$K = \{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in F,\ D^*\boldsymbol{v} = p(x, y) \ \textit{dans chaque}\ \Omega_i\}$$

(qui est d'ailleurs une variété affine).

Pour ce qui concerne les fonctions sur les Γ_i on pose

(1.2.54) $$\Sigma = \bigcup_{i=1}^{N} \Gamma_i,$$

et on considère l'espace:

(1.2.55) $$\begin{aligned} W = \{(\phi_0, \phi_1, \phi_2) \in (L^2(\Sigma))^3 \ \textit{tels qu'il existe } v \textit{ dans} \\ H_0^2(\Omega) \textit{ avec } \mathscr{G}_i v = (\phi_0, \phi_1, \phi_2)_{\Gamma_i}, \ i = 1, 2, \ldots, N\}. \end{aligned}$$

De façon analogue à ce qu'on a fait dans chaque Ω_i, on remarque que pour tout (ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2) dans W il existe une fonction unique v dans $H_0^2(\Omega)$ telle que

(1.2.56) $$\begin{aligned} &\Delta^2 v = 0 \ \text{dans chaque } \Omega_i \\ &\mathscr{G}_i v = (\phi_0, \phi_1, \phi_2)|_{\Gamma_i} \ \text{sur chaque } \Gamma_i. \end{aligned}$$

On a donc défini une application

(1.2.57) $$\mathscr{I}: W \to H_0^2(\Omega)$$

qui à tout élément (ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2) de W fait correspondre la solution $v = \mathscr{I}(\phi_0, \phi_1, \phi_2)$ de (1.2.56); on munit alors W de la norme:

(1.2.58) $$\begin{aligned} \|(\phi_0, \phi_1, \phi_2)\|_W &= \left(\sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{D}\mathscr{I}(\phi_0, \phi_1, \phi_2)\|_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\|v_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|v_{xy}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_{yy}\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}\,{}^{2}, \text{ avec} \\ v &= \mathscr{I}(\phi_0, \phi_1, \phi_2). \end{aligned}$$

On pose aussi, pour simplifier l'écriture

(1.2.59) $$\mathscr{G}: H_0^2(\Omega) \to W$$

défini par

(1.2.60) $$\mathscr{G} v = (\phi_0, \phi_1, \phi_2) \Leftrightarrow \mathscr{G}_i v = (\phi_0, \phi_1, \phi_2)_{|\Gamma_i} \quad (i = 1, \ldots, N);$$

on pose enfin

$$\mathscr{C}: F \to W',$$

défini par:

(1.2.61) $$\underset{W'}{\langle} \mathscr{C}\boldsymbol{u}, \mathscr{G} v \underset{W}{\rangle} = \sum_{i=1}^{N} \underset{W_i'}{\langle} \mathscr{C}_i \boldsymbol{u}, \mathscr{G}_i v \underset{W_i}{\rangle}$$

pour tout v dans $H_0^2(\Omega)$.

Remarque 1.1. Si $\boldsymbol{u}$ est «suffisamment régulier» dans chaque Ω_i, on aura évidemment:

(1.2.62) $$\begin{aligned} \langle \mathscr{C}\boldsymbol{u}, \mathscr{G} v \rangle &= \sum_{i=1}^{N} \langle \mathscr{C}_i \boldsymbol{u}, \mathscr{G}_i v \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_{\Gamma_i} (m_x(\boldsymbol{u}) v_x + m_y(\boldsymbol{u}) v_y - Q_n(\boldsymbol{u}) v) \, d\sigma_i, \end{aligned}$$

toujours pour tout v dans $H_0^2(\Omega)$.

2 Cette quantité sera souvent designée, dans la suite, par $|v|_{2,\Omega}$ (cfr. e.g. Raviart [1]).

Remarque 1.2. Soulignons de façon explicite la «formule de Green» suivante:

$$\sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{D}\phi]_i - \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} (D^* \boldsymbol{u})\, \phi\, dx\, dy = \langle \mathscr{C}\boldsymbol{u}, \mathscr{G}\phi \rangle \tag{1.2.63}$$

pour tout $\boldsymbol{u}$ dans F et tout ϕ dans $H_0^2(\Omega)$, qui est une conséquence immediate de (1.2.39).

Remarque 1.3. On voit bien que la condition

$$\mathscr{C}\boldsymbol{u} = 0 \tag{1.2.64}$$

entraîne, en un certain sens, la continuité des quantités $\big(m_x(\boldsymbol{u}), m_y(\boldsymbol{u}), Q_n(\boldsymbol{u})\big)$ sur les côtes communs à deux Ω_i; on a en effet que, si (e.g.) $\boldsymbol{u}$ est dans F et si de plus

$$D^* \boldsymbol{u} \in L^2(\Omega),$$

on a pour tout ϕ dans $H_0^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{C}\boldsymbol{u}, \mathscr{G} \rangle &= \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{D}\phi]_i - \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} (D^* \boldsymbol{u})\, \phi\, dx\, dy \\ &= \int_{\Omega} (u_1 \phi_{xx} + 2 u_2 \phi_{xy} + u_3 \phi_{yy})\, dx\, dy - \int_{\Omega} (u_{1,xx} + 2u_{2,xy} + u_{3,yy})\, \phi\, dx\, dy = 0.\end{aligned}$$

Remarque 1.4. Notons aussi que si l'on a e.g. g dans $H^2(\Omega)$, et $g \in H^4(\Omega_i)$ pour chaque Ω_i, et si

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{D}g \text{ dans chaque } \Omega_i,$$

la formule (1.2.63) devient $\big($pour tout ϕ dans $H_0^2(\Omega)\big)$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{D}g, \boldsymbol{D}\phi]_i - \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} (\Delta^2 g)\, \phi\, dx\, dy \\ &\quad = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Gamma_i} \left(\phi_x \frac{\partial}{\partial n_i} g_x + \phi_y \frac{\partial}{\partial n_i} g_y + \phi \frac{\partial}{\partial n_i} \Delta g \right) d\sigma_i.\end{aligned} \tag{1.2.65}$$

On peut maintenant formuler notre problème de min-max de la façon suivante:

Trouver le point de selle dans $K \times W$ de:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\phi}) &= \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} (v_1^2 + 2v_2^2 + v_3^2)\, dx\, dy \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N} \langle \mathscr{C}_i(\boldsymbol{v}), (\phi_0, \phi_1, \phi_2) \rangle = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{v}\|_i^2 - \langle \mathscr{C}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{\phi} \rangle\end{aligned} \tag{1.2.66}$$

où, ici et dans la suite, lorsqu'il n'y aura pas le risque de confusion, on a écrit $\boldsymbol{\phi}$ au lieu de (ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2).

Notons que $\mathscr{L}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\phi})$, K et W dépendent de la décomposition choisie; on aura donc, *pour chaque décomposition, un problème différent de min-max.* D'ailleurs, tous ces problèmes sont «équivalents» entre eux, puisqu'ils sont tous «équivalents», dans un sens convenable, au problème (1.1.1), comme on va le montrer au théorème suivant.

Théorème 1.2. *Le problème* (1.1.1) *et le problème* (1.2.66) *sont équivalents au sens suivant: si w est la solution de* (1.1.1), *alors le couple* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\psi})$, *donné par*

$$\boldsymbol{u} = (w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}), \tag{1.2.67}$$

$$\boldsymbol{\psi} = \mathscr{G} w = (w, w_x, w_y)_{|\Sigma} \tag{1.2.68}$$

est le point de selle unique de $\mathscr{L}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\phi})$, *et donc solution de* (1.2.66).

Démonstration. Montrons d'abord que $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\psi})$, donné par (1.2.67), (1.2.68) est un point de selle pour $\mathscr{L}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\phi})$; il suffit pour cela de vérifier que, pour tout $\boldsymbol{v}$ dans K, on a

$$\sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}]_i - \langle \mathscr{C}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}), \boldsymbol{\psi} \rangle \geqq 0, \tag{1.2.69}$$

et que pour tout $\boldsymbol{\phi}$ dans W on a

$$\langle \mathscr{C} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\phi} \rangle = 0. \tag{1.2.70}$$

Or, (1.2.70) est immédiate, puisque de (1.2.67) et de la remarque 1.3 on a $\mathscr{C}\boldsymbol{u} = 0$. Pour vérifier (1.2.69) on utilise la formule de Green (1.2.63) pour avoir

$$\langle \mathscr{C}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}), \mathscr{G} w \rangle = \sum_{i=1}^{N} \left\{ [\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{D} w]_i - \int_{\Omega_i} D^*(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\, w \, dx\, dy \right\}; \tag{1.2.71}$$

en utilisant (1.2.67) et (1.2.68), la (1.2.71) devient:

$$\langle \mathscr{C}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}), \boldsymbol{\psi} \rangle = \sum_{i=1}^{N} \left\{ [\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}]_i - \int_{\Omega_i} D^*(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\, w \, dx\, dy \right\}; \tag{1.2.72}$$

grâce au fait que $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont dans K on a:

$$D^*(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = D^* \boldsymbol{v} - D^* \boldsymbol{u} = 0, \tag{1.2.73}$$

et donc pour tout $\boldsymbol{v}$ dans K on a

$$\langle \mathscr{C}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}), \boldsymbol{\psi} \rangle = \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}]_i, \tag{1.2.74}$$

ce qui implique bien (1.2.69).

On doit donc maintenant montrer que (1.2.66) admet une solution unique. Cela peut être obtenu avec des raisonnements classiques dans ce type de problèmes (cf. e.g. Lions-Stampacchia [1], Lions [1], Bensoussan-Lions-Temam [1], Rockafellar [1]). Supposons en effet que $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{\psi}_1)$ soit un autre point de selle pour $\mathscr{L}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\phi})$; on aurait évidemment pour tout $\boldsymbol{v}$ dans K

$$\sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_1]_i - \langle \mathscr{C}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_1), \boldsymbol{\psi}_1 \rangle \geqq 0, \tag{1.2.75}$$

et pour tout $\boldsymbol{\phi}$ dans W

$$\langle \mathscr{C} \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{\phi} \rangle = 0. \tag{1.2.76}$$

En prenant $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}_1$ dans (1.2.69) et $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$ dans (1.2.75) on a, grâce à (1.2.70) et (1.2.76),

(1.2.77) $$\sum_{i=1}^{N}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}]_i \geqq 0,$$

(1.2.78) $$\sum_{i=1}^{N}[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1]_i \geqq 0,$$

d'où, par différence,

(1.2.79) $$\sum_{i=1}^{N}[\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}]_i \geqq 0,$$

et finalement

(1.2.80) $$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1.$$

On en déduit alors, grâce à (1.2.69), (1.2.70), (1.2.75), (1.2.67),

(1.2.81) $$\langle \mathscr{C}\boldsymbol{v},\psi-\psi_1\rangle=0 \qquad \forall \boldsymbol{v}\in K.$$

Soit donc $\zeta=\mathscr{I}(\psi-\psi_1)$, c'est-à-dire solution de

(1.2.82) $$\begin{aligned}&\Delta^2\zeta=0 \text{ dans chaque } \Omega_i,\\ &\mathscr{G}\zeta=\psi-\psi_1,\end{aligned}$$

et soit

(1.2.83) $$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{D}\zeta+\boldsymbol{u};$$

on a que $\boldsymbol{v}$ est dans K puisque

(1.2.84) $$D^*\boldsymbol{v}=D^*\boldsymbol{D}\zeta+D^*\boldsymbol{u}=\Delta^2\zeta+p=p;$$

en plus on a (grâce à (1.2.70))

(1.2.85) $$\langle \mathscr{C}\boldsymbol{v},\psi-\psi_1\rangle=\langle \mathscr{C}\boldsymbol{u}+\mathscr{C}\boldsymbol{D}\zeta,\mathscr{G}\zeta\rangle=\langle \mathscr{C}\boldsymbol{D}\zeta,G\zeta\rangle;$$

en appliquant la formule de Green on a

$$\langle \mathscr{C}\boldsymbol{D}\zeta,G\zeta\rangle=\sum_{i=1}^{N}\left\{[\boldsymbol{D}\zeta,\boldsymbol{D}\zeta]_i+\int_{\Omega_i}(D^*\boldsymbol{D}\zeta)\,\zeta\,dx\,dy\right\}=\sum_{i=1}^{N}[\boldsymbol{D}\zeta,\boldsymbol{D}\zeta]_i=\|\psi-\psi_1\|_W.$$

De (1.2.81), (1.2.85), (1.2.86) on déduit alors que

(1.2.87) $$\|\psi-\psi_1\|_W=0,$$

donc

(1.2.88) $$\psi=\psi_1,$$

et l'unicité de la solution de (1.2.66) est démontrée.

1.3. Linéarisation du problème

On va maintenant transformer le problème de min-max (1.2.66) dans une couple d'équations linéaires sur des sous espaces. Supposons à partir de maintenant et dans toute la suite que l'on connaisse de façon explicite un triplet

$f=(f_1, f_2, f_3)$ tel que

$$f(H^1(\Omega))^3, \quad D^* f = p(x,y) \text{ dans } \Omega. \tag{1.3.1}$$

On pourra, par exemple, prendre $f=(0, f_2, 0)$, avec

$$f_2(x,y) = \tfrac{1}{2} \int_0^x \int_0^y p(\xi, \eta)\, d\eta\, d\xi. \tag{1.3.2}$$

Notons que, comme on l'a vu dans la remarque 1.3, on a $\mathscr{C} f = 0$. Tout élément de K peut maintenant s'écrire

$$v = v_0 + f \quad \text{avec } v_0 \in V, \tag{1.3.3}$$

$$V = \{(v_1, v_2, v_3) \mid (v_1, v_2, v_3) \in F, D^*(v_1, v_2, v_3) = 0\}. \tag{1.3.4}$$

L'inéquation (1.2.69) et l'équation (1.2.70) deviennent alors:

$$\sum_{i=1}^N [u_0 + f, v_0 - u_0]_i - \langle \mathscr{C}(v_0 - u_0), \psi \rangle \geqq 0 \quad \forall v_0 \in V, \tag{1.3.5}$$

$$\langle \mathscr{C} u_0, \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in W, \tag{1.3.6}$$

d'où, grâce au fait que V est un espace linéaire,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N [u_0, v_0]_i + \sum_{i=1}^N [f, v_0]_i - \langle \mathscr{C} v_0, \psi \rangle = 0 \quad \forall v_0 \in V, \\ &\langle \mathscr{C} u_0, \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in W. \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

En résumé, on a «translaté» (1.2.66) dans le problème

(1.3.8) *Trouver (u_0, ψ) dans $V \times W$, point de selle de*

$$\mathscr{L}_0(v_0, \phi) = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|v_0\|_i^2 + \sum_{i=1}^N [f, v_0]_i - \langle \mathscr{C} v_0, \phi \rangle,$$

qui se traduit par les inéquations (1.3.7). On aura, grâce à ce qu'on a vu précedemment, que, si (u_0, ψ) est solution de (1.3.8) et w est solution de (1.1.1), alors:

$$u_0 = (w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}) - (f_1, f_2, f_3), \tag{1.3.9}$$

$$\psi = \mathscr{G} w = (w, w_x, w_y)_{|\Sigma}. \tag{1.3.10}$$

2. Approximation

2.1. Le théorème d'approximation «abstrait»

On choisit maintenant, pour toute décomposition (d) de Ω du type (1.1.5) *un* sous-espace de dimension finie, V_h, de V et *un* sous-espace de dimension finie, W_h, de W. On va supposer que le choix de V_h et de W_h dans chaque décomposition ne soit pas fait de façon tout-à-fait arbitrire, mais que V_h et W_h soient liés par la relation suivante.

Hypothèse H1. Il existe une constante $\alpha > 0$ indépendante de la décomposition (d) telle que pour toute $\chi_h \neq 0$ dans W_h il existe $v_h \neq 0$ dans V_h avec

$$\langle \mathscr{C} v_h, \chi_h \rangle \geqq \alpha \|v_h\|_V \|\chi_h\|_W. \tag{2.1.1}$$

L'hypothèse $H1$ va jouer un rôle très important dans la suite. Il sera donc utile de faire quelques remarques.

Remarque 2.1. En introduisant l'espace W_h', dual de W_h et l'opérateur π_h de «projection» de W' sur W_h', défini par

$$\underset{W_h'}{\langle}\pi_h \tau, \boldsymbol{\phi}_h\underset{W_h}{\rangle} = \underset{W'}{\langle}\tau, \boldsymbol{\phi}_h\underset{W}{\rangle} \qquad \forall \boldsymbol{\phi}_h \in W_h, \tag{2.1.2}$$

on peut vérifier assez facilement que l'hypothèse $H1$ est «équivalent» à supposer l'existence d'un opérateur $\mathscr{R}_h$ de W_h' dans V_h tel que:

$$\pi_h \mathscr{R}_h(\tau_h) = \tau_h \qquad \forall \tau_h \in W_h', \tag{2.1.3}$$

$$\|\mathscr{R}_h \tau_h\|_{V_h} \leqq \alpha' \|\tau_h\|_{W_h'} \qquad \forall \tau_h \in W_h', \tag{2.1.4}$$

avec $\alpha' > 0$ constante indépendante de (d). On peut trouver dans Crouzeix-Raviart [1] des cas très intéressants dans lesquels l'existence d'un tel $\mathscr{R}_h$ a été utilisée de façon essentielle.

Remarque 2.2. Soient $\widetilde{W}_h = \mathscr{I}(W_h)$ et $\widetilde{V}_h = \boldsymbol{D}(\widetilde{W}_h)$; la formule (2.1.1) devient alors:

$$\sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{q}_h]_i \geqq \alpha \|\boldsymbol{v}_h\|_V \|\boldsymbol{q}_h\|_V, \tag{2.1.5}$$
$$\boldsymbol{q}_h = \boldsymbol{D}\mathscr{I}\chi_h \in \widetilde{V}_h.$$

En notant le produit scalaire dans V par $[\ ,\ ]$, c'est-à-dire en posant

$$[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{q}] = \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{q}]_i, \qquad \boldsymbol{v}, \boldsymbol{q} \in V \tag{2.1.6}$$

l'hypothèse $H1$ nous dit alors que, en un certain sens, $\widetilde{V}_h$ ne tend pas à avoir des composantes orthogonales à V_h lorsque la décomposition (d) change.

Remarque 2.3. De l'hypothèse $H1$ on déduit immédiatement que si $\boldsymbol{\phi}_h$ est un élément de W_h tel que

$$\langle \mathscr{C}\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\phi}_h\rangle = 0 \qquad \forall \boldsymbol{v}_h \in V_h \tag{2.1.7}$$

alors $\boldsymbol{\phi}_h = 0$ (donc $\pi_h \mathscr{C}$ est surjectif de V_h sur W_h'). En effet par contradiction si l'on avait $\boldsymbol{\phi}_h \neq 0$ il existerait, d'après $H1$, un $\boldsymbol{v}_h \neq 0$ dans V_h avec

$$\langle \mathscr{C}\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\phi}_h\rangle \geqq \alpha \|\boldsymbol{v}_h\|_V \|\boldsymbol{\phi}_h\|_W > 0. \tag{2.1.8}$$

Considerons maintenant le *problème approché.*

$$\begin{aligned} &\textit{Trouver } (\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \textit{ dans } V_h \times W_h \textit{ tels que:}\\ &[\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h] + [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h] = \langle \mathscr{C}\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h\rangle \qquad \forall \boldsymbol{v}_h \in V_h,\\ &\langle \mathscr{C}\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h\rangle = 0 \qquad \forall \boldsymbol{\phi}_h \in W_h. \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

On a le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Sous l'hypothèse $H1$ le probleme* (2.1.9) *admet une et une seule solution.*

Démonstration. Soit N_h l'espace

(2.1.10) $$N_h = \{\boldsymbol{v}_h \mid \boldsymbol{v}_h \in V_h, \ \pi_h \mathscr{C} \boldsymbol{v}_h = 0\},$$

et soit u_h^* la solution (qui sûrement existe) du problème:

(2.1.11) $$\begin{aligned} &\textit{trouver } u_h^* \textit{ dans } N_h \textit{ tel que:} \\ &[u_h^*, \boldsymbol{v}_h] + [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h] = 0 \qquad \forall \boldsymbol{v}_h \in N_h. \end{aligned}$$

Notons que si $\psi_h^* \in W_h$ est tel que

(2.1.12) $$\begin{aligned} &[u_h^*, \boldsymbol{v}_h] + [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h] = \langle \mathscr{C} \boldsymbol{v}_h, \psi_h^* \rangle \qquad \forall \boldsymbol{v}_h \in N_h^{\perp}, \\ &\textit{avec } N_h^{\perp} = \textit{orthogonale de } N_h \textit{ dans } V_h, \end{aligned}$$

alors le couple (u_h^*, ψ_h^*) est une solution de (2.1.9). Pour démontrer que (2.1.9) admet au moins une solution il suffit donc de démontrer qu'il existe au moins un ψ_h^* dans W_h vérifiant (2.1.12). Pour cela, notons que, comme on l'a vu dans la remarque 2.3, l'opérateur $\pi_h \mathscr{C}$ est surjectif de V_h sur W_h', et donc sa restriction T_h à $N_h^{\perp}$ est un isomorphisme surjectif de $N_h^{\perp}$ sur W_h'. Par dualité alors l'opérateur T_h^t, transposé de T_h, est un isomorphisme surjectif de W_h (dual de W_h') sur $(N_h^{\perp})'$ (dual de $N_h^{\perp}$). Il suffit maintenant de noter que l'application

(2.1.13) $$\mathscr{U}^* : \boldsymbol{v}_h \to [u_h^*, \boldsymbol{v}_h] + [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h], \qquad \boldsymbol{v}_h \in N_h^{\perp}$$

est un élément de $(N_h^{\perp})'$, pour avoir que

(2.1.14) $$\psi_h^* = (T_h^t)^{-1} \mathscr{U}^*$$

est un élément de W_h qui évidemment vérifie:

(2.1.15) $$\begin{aligned} \langle \mathscr{C} \boldsymbol{v}_h, \psi_h^* \rangle &= \langle T_h \boldsymbol{v}_h, \psi_h^* \rangle = \langle \boldsymbol{v}_h, T_h^t \psi_h^* \rangle \\ &= \mathscr{U}^*(\boldsymbol{v}_h) = [u_h^*, \boldsymbol{v}_h] + [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h] \qquad \forall \boldsymbol{v}_h \in N_h^{\perp}. \end{aligned}$$

On a donc démontré que (2.1.9) a au moins une solution; avec une technique identique à celle utilisée dans la démonstration du théorème 1.2, on obtient ensuite qu'une telle solution est unique, ce qui achève la démonstration. Donnons maintenant le «theorème de convergence».

Théorème 2.2. *Sous l'hypothèse* $H1$, *il existe une constante* $\gamma > 0$ *indépendante de* (d) *telle que si* $(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{\psi})$ *et* $(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\psi}_h)$ *sont les solutions de* (1.3.8) *et de* (2.1.9) *respectivement, on a*:

(2.1.16) $$\|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_h\|_V + \|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h\|_W \leqq \gamma \left(\inf_{\boldsymbol{v}_h \in V_h} \|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{v}_h\| + \inf_{\boldsymbol{\phi}_h \in W_h} \|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\phi}_h\|_W \right).$$

Démonstration. Nous montrerons que pour tout $(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\phi}_h)$ dans $V_h \times W_h$ tel que

(2.1.17) $$\|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{v}_h\|_V \leqq \|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_h\|_V,$$

(2.1.18) $$\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\phi}_h\|_W \leqq \|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h\|_W,$$

on a

(2.1.19) $$\|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_h\|_V + \|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h\|_W \leqq \gamma \, (\|\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{v}_h\|_V + \|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\phi}_h\|_W),$$

avec $\gamma>0$ constante indépendante de $(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\phi}_h)$ et de (d). On commence d'abord par vérifier qu'il existe une constante $k>0$ indépendante de (d) telle que pour tout $\boldsymbol{\phi}_h$ dans W_h qui vérifie (2.1.18) on a

$$\|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\psi}_h\|_W \leqq k(\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_h\|_V+\|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\phi}_h\|_W). \tag{2.1.20}$$

On peut évidemment se borner à démontrer (2.1.20) dans le cas $\boldsymbol{\phi}_h \neq \boldsymbol{\psi}_h$; notons alors que

$$\|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\psi}_h\|_W \leq \|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\phi}_h\|_W+\|\boldsymbol{\phi}_h-\boldsymbol{\psi}_h\|_W \tag{2.1.21}$$

et que, d'après l'hypothèse $H1$, il existe un $\boldsymbol{v}_h \neq 0$ dans V_h tel que

$$\langle \mathscr{C}\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\phi}_h-\boldsymbol{\psi}_h\rangle \geqq \alpha \|\boldsymbol{v}_h\|_V \|\boldsymbol{\phi}_h-\boldsymbol{\psi}_h\|_W. \tag{2.1.22}$$

On a

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{C}\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\phi}_h-\boldsymbol{\psi}_h\rangle &\leqq |\langle \mathscr{C}\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\phi}_h\rangle| + |\langle \mathscr{C}\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\psi}_h\rangle|\\ &\leqq \|\boldsymbol{v}_h\|_V \|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\phi}_h\|_W + |[\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_h, v_h]|\\ &\leqq \|\boldsymbol{v}_h\|_V(\|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\phi}_h\|_W+\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_h\|_V).\end{aligned} \tag{2.1.23}$$

De (2.1.22) et (2.1.23) on a alors

$$\|\boldsymbol{\phi}_h-\boldsymbol{\psi}_h\|_W \leqq \frac{1}{\alpha}(\|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\phi}_h\|_W+\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_h\|_V) \tag{2.1.24}$$

et de (2.1.21) et (2.1.24) on a (2.1.20) avec $k=\frac{1}{\alpha}+1$.

A partiir de (2.1.20) on va maintenant démontrer (2.1.19). Pour cela notons que pour tout $\boldsymbol{v}_h$ dans V_h on a:

$$\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_h\|_V^2 = [\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_h] + [\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h]; \tag{2.1.25}$$

en utilisant le fait que $\langle \mathscr{C}\boldsymbol{u}_h, \chi_h\rangle = \langle \mathscr{C}\boldsymbol{u}_0, \chi_h\rangle = 0$ pour tout χ_h dans W_h, on a d'ailleurs, pour tout $\boldsymbol{\phi}_h$ dans W_h,

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h] = \langle \mathscr{C}(\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h), \boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\psi}_h\rangle = \langle \mathscr{C}(\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h), \boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\phi}_h\rangle\\ &\quad + \langle \mathscr{C}(\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_0), \boldsymbol{\phi}_h-\boldsymbol{\psi}_h\rangle \leqq \|\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h\|_V \|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\phi}_h\|_W + \|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_h\|_V \|\boldsymbol{\phi}_h-\boldsymbol{\psi}_h\|_W.\end{aligned} \tag{2.1.26}$$

On a alors de (2.1.17), (2.1.18) et (2.1.26)

$$[\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h] \leqq 2\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_h\|_V \|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\phi}_h\|_W + 2\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_h\|_V \|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\psi}_h\|_W, \tag{2.1.27}$$

et de (2.1.20) on déduit:

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h] &\leqq 2\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_h\|_V \|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\phi}_h\|_W\\ &\quad + 2k\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_h\|_V(\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_h\|_V+\|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\phi}_h\|_W)\\ &\leqq 2(k+1)\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_h\|(\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_h\|_V+\|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\phi}_h\|_W).\end{aligned} \tag{2.1.28}$$

On a alors de (2.1.25) et (2.1.28):

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_h\|_V^2 &\leqq \|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_h\|_V\big(\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_h\|_V + 2(k+1)(\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_h\|_V+\|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\phi}_h\|_W)\big)\\ &\leqq k_1\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_h\|(\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_h\|_V+\|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\phi}_h\|_W),\end{aligned} \tag{2.1.29}$$

avec $k_1=2k+3$. De (2.1.20) et (2.1.29) on a enfin:

$$\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_h\|_V+\|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\psi}_h\|_W \leqq \big(1+k(1+k_1)\big)(\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_h\|_V+\|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\phi}_h\|_W), \tag{2.1.30}$$

c'est-à-dire (2.1.18) avec $\gamma=2k^2+4k+1=\alpha^{-2}(3\alpha^2+8\alpha+7)$. On a donc en particulier que $7\alpha^{-2}\leqq\gamma\leqq 18\alpha^{-2}$.

2.2. *Exemples*

On va faire maintenant quelques exemples de schémas qui vérifient l'hypothèse $H1$; on va traiter soit des éléments triangulaires soit des éléments rectangulaires; pour simplifier, nous donnerons les démonstrations en détaille seulement dans le cas des éléments triangulaires, pour lesquels les notations sont un peu moins lourdes, et on exposera après deux exemples de schémas relatifs à des éléments rectangulaires (ou, plus en générale, des parallèlogrammes) qui vérifient aussi l'hypothèse $H1$, en donnant une idée très synthétique des démonstrations.

Supposons donc, d'abord, que toute décomposition (d) vérifie les hypothèses suivantes:

i) *Les Ω_i sont des triangles;*

ii) *si $i\neq j$ et $\bar{\Omega}_i\cap\bar{\Omega}_j\neq\emptyset$ alors les triangles Ω_i et Ω_j ont un sommet commun ou bien un côté commun*;

iii) *si l'on pose $\sigma_i=$diamètre de Ω_i et $\varrho_i=$diamètre du cercle inscript dans Ω_i, il existe une constante $\vartheta>0$ telle que pour toute décomposition (d) et pour tout Ω_i dans (d) on a*:

$$\frac{\sigma_i}{\varrho_i}\leqq\vartheta. \tag{2.2.1}$$

En utilisant la nomenclature de Ciarlet-Raviart on peut résumer i), ii) et iii) en disant que on considère une *famille régulière de triangulations.*

On définit alors pour toute (d) dans la famille:

$$V_h=\{\boldsymbol{v}\in(L^2(\Omega))^3,\ v_j \textit{ est linéaire dans chaque } \Omega_i\ (j=1,2,3)\}, \tag{2.2.2}$$

$$\tilde{W}_h=\{z\in H_0^2(\Omega),\ \Delta^2 z=0 \textit{ dans chaque } \Omega_i,\ z \textit{ est cubique}^3 \textit{ sur chaque côté de chaque } \Omega_i,\ \frac{\partial z}{\partial n_i} \textit{ est linéaire sur chaque côté de chaque } \Omega_i\}, \tag{2.2.3}$$

$$W_h=\mathcal{G}(W_h)=\left\{\textit{restrictions à } \Sigma=\bigcup_{i=1}^{N}\partial\Omega_i \textit{ des triplets } (z,z_x,z_y) \text{ où } z\in\tilde{W}_h\right\}. \tag{2.2.4}$$

Remarque 2.4. Avec cette choix, V_h a $9N$ degrés de liberté (avec toujours $N=$nombre des Ω_i); $\tilde{W}_h$, et donc W_h, a $3M$ degrés de liberté, M étant le nombre de sommets de la triangulation qui sont à l'intérieur de Ω. En effet toute z_h de $\tilde{W}_h$, est définie de manière unique, dans chaque Ω_i, par les valeurs de z_h et $\frac{\partial z_h}{\partial n_i}$ sur $\partial\Omega_i$ (puisque $\Delta^2 z=0$ à l'intérieur). En plus, si l'on connait la valeur de z_h, $z_{h,x}$ et $z_{h,y}$ dans les trois sommets de Ω_i, on connait par conséquence, pour chaque côté, la valeur, dans les deux buts de z_h, de sa derivée tangentielle et de sa derivée normale; on connait donc sur le côté tout entier soit z_h, qui est cubique (4 conditions), soit $\frac{\partial z_h}{\partial n_i}$, qui est linéaire (2 conditions).

On va maintenant démontrer que l'hypothèse $H1$ est vérifiée avec cette choix de V_h et W_h. De façon plus précise on montrera que la vérification de l'hypothèse $H1$

3 On appelle «fonction cubique» tout polynôme de degré $\leqq 3$.

est liée à une certaine *condition de compatibilité* qui dépend seulement du schéma et non des décompositions choisies; on pourra donc se borner à vérifier que cette condition de compatibilité est remplie sur un élément de référence $\hat{T}$ choisi une fois pour toutes.

Soit donc dans le plan $\hat{x}, \hat{y}$ le triangle $\hat{T}$ de sommets $S_1 = (0, 0)$, $S_2 = (1, 0)$ et $S_3 = (0, 1)$. On munit l'espace

(2.2.5) $$\hat{L} = L^2(\hat{T}))^3$$

de la norme

(2.2.6) $$\|(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3)\|_{\hat{L}}^2 = \int_{\hat{T}} (\hat{v}_1^2 + 2\hat{v}_2^2 + \hat{v}_3^2)\, d\hat{x}\, d\hat{y}$$

et on définit

(2.2.7) $$\mathscr{V} = (P_1(\hat{T}))^3 \subset \hat{L},$$ [4]

(2.2.8) $$\widetilde{\mathscr{W}} = \left\{\textit{fonctions } \zeta \textit{ biharmoniques dans } \hat{T}\textit{, telles que } \zeta \textit{ est cubique sur chaque coté et } \frac{\partial \zeta}{\partial n} \textit{ est linéaire sur chaque côté}\right\},$$

(2.2.9) $$\mathscr{Q} = \boldsymbol{D}(\widetilde{\mathscr{W}}) \subset \hat{L},$$

(2.2.10) $$\hat{\pi} = \textit{projection dans } \hat{L} \textit{ sur } \mathscr{V}.$$

La vérification de l'hypothèse $H1$ découlera du lemme suivant.

Lemme 2.1. *Les espaces $\mathscr{V}$ et $\mathscr{Q}$ vérifient la condition de compatibilité suivante:*

(2.2.11) *Il existe une constante $\beta > 0$ telle que pour tout $\boldsymbol{q}$ dans $\mathscr{Q}$ on a:*
$$\|\pi \boldsymbol{q}\|_{\hat{L}} \geqq \beta \|\boldsymbol{q}\|_{\hat{L}}.$$

Démonstration. L'espace $\mathscr{Q}$ étant de dimension finie, il suffit de démontrer que pour tout $\boldsymbol{q}$ dans $\mathscr{Q}$ on a

(2.2.12) $$\|\boldsymbol{q}\|_{\hat{L}} \neq 0 \Rightarrow \|\pi \boldsymbol{q}\|_{\hat{L}} \neq 0,$$

c'est-à-dire

(2.2.13) $$[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}]_{\hat{L}} = 0 \;\; \forall \boldsymbol{v} \in \mathscr{V} \Rightarrow \|\boldsymbol{q}\|_{\hat{L}} = 0.$$

Pour vérifier (2.2.13) il suffit en général de prendre une base $\boldsymbol{q}_{(1)}, \ldots, \boldsymbol{q}_{(r)}$ dans $\mathscr{Q}$ et une base $\boldsymbol{w}_{(1)}, \ldots, \boldsymbol{w}_{(s)}$ dans $\mathscr{V}$ et de vérifier *que la matrice de compatibilité* $\{c_{i,j}\}$, définie par

(2.2.14) $$c_{i,j} = [\boldsymbol{w}_{(i)}, q_{(j)}]_{\hat{L}},$$

a rang égal à r. Dans notre cas on a $r = 6$ et $s = 9$. On peut choisir alors, par exemple,

(2.2.15) $$\boldsymbol{w}_{(1)} = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{w}_{(2)} = (\hat{x}, 0, 0), \quad \boldsymbol{w}_{(3)} = (\hat{y}, 0, 0), \quad \boldsymbol{w}_{(4)} = (0, 1, 0),$$
$$\boldsymbol{w}_{(5)} = (0, \hat{x}, 0), \quad \boldsymbol{w}_{(6)} = (0, \hat{y}, 0), \quad \boldsymbol{w}_{(7)} = (0, 0, 1), \quad \boldsymbol{w}_{(8)} = (0, 0, \hat{x}),$$
$$\boldsymbol{w}_{(9)} = (0, 0, \hat{y}),$$

4 Ici et dans la suite $P_r(E)$ désignera l'ensemble des polynômes de degré $\leqq r$ dans E.

ce qui nous donne une base pour $\mathscr{V}$. Pour trouver une base dans $\mathscr{Q}$ on construit d'abord une base dans $\widetilde{\mathscr{W}}$, par exemple de la façon suivante:

$$\begin{aligned} &\zeta_{(1)}=1, \quad \zeta_{(2)}=\hat{x}, \quad \zeta_{(3)}=\hat{y}, \quad \zeta_{(4)}=\hat{x}^2, \quad \zeta_{(5)}=\hat{x}\hat{y}, \quad \zeta_{(6)}=\hat{y}^2,\\ &\zeta_{(7)}=\phi(\hat{x},\hat{y}), \quad \zeta_{(8)}=\psi(\hat{x},\hat{y}), \quad \zeta_{(9)}=\chi(\hat{x},\hat{y}), \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

où ϕ, ψ et χ sont des fonctions de $\widetilde{\mathscr{W}}$ définies par les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} &\phi(S_1)=\phi(S_2)=1, \quad \phi(S_3)=0, \qquad \psi(S_k)=0, \quad k=1,2,3,\\ &\phi_{\hat{x}}(S_k)=0, \quad k=1,2,3, \qquad \psi_{\hat{x}}(S_1)=1, \quad \psi_{\hat{x}}(S_2)=\psi_{\hat{x}}(S_3)=0,\\ &\phi_{\hat{y}}(S_k)=0, \quad k=1,2,3; \qquad \psi_{\hat{y}}(S_k)=0, \quad k=1,2,3;\\ &\chi(S_k)=0, \quad k=1,2,3,\\ &\chi_{\hat{x}}(S_k)=0, \quad k=1,2,3,\\ &\chi_{\hat{y}}(S_1)=1, \quad \chi_{\hat{y}}(S_2)=\chi_{\hat{y}}(S_3)=0. \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

On peut vérifier sans peine que les valeurs de $\zeta_{(j)}$, $\zeta_{(j),\hat{x}}$ et $\zeta_{(j),\hat{y}}$ dans S_1, S_2, S_3 donnent un système ($j=1,\ldots,9$) de vecteurs linéairement indépendants, et donc les $\zeta_{(j)}$ sont une base. Il suffit maintenant de remarquer que

$$\boldsymbol{D}\zeta_{(1)}=\boldsymbol{D}\zeta_{(2)}=\boldsymbol{D}\zeta_{(3)}=(0,0,0) \tag{2.2.18}$$

pour avoir que le système

$$\boldsymbol{q}_{(j)}=\boldsymbol{D}\zeta_{(j+3)} \qquad (j=1,\ldots,6)$$

est une base de $\mathscr{Q}$. On doit donc seulement calculer les coefficients $[w_{(i)}, q_{(j)}]_{\hat{L}}$ de la matrice. On remarque qu'on ne connait pas explicitement la valeur de ϕ, ψ, χ à l'intérieur de $\hat{T}$; le calcul doit alors être fait, dans ces cas, en utilisant la formule de Green

$$[\boldsymbol{D}\zeta, \boldsymbol{v}]_{\hat{L}}=\int_{\partial\hat{T}}\left(m_{\hat{x}}(\boldsymbol{v})\zeta_{\hat{x}}+m_{\hat{y}}(\boldsymbol{v})\zeta_{\hat{y}}-Q_{\hat{n}}(\boldsymbol{v})\zeta\right)d\hat{l}, \tag{2.2.19}$$

où $m_{\hat{x}}(\boldsymbol{v})$, $m_{\hat{y}}(\boldsymbol{v})$ et $Q_{\hat{n}}(\boldsymbol{v})$ sont toujours donnés par (1.1.7).

Nous ne donnerons pas les calculs ici; il suffit de dire qu'on obtient, par exemple, une matrice 6×6 non singulière en éliminant dans $\{c_{i,j}\}$ la prémière, la quatrième et la septième ligne.

Remarque 2.5. L'hypothèse $\Delta^2\zeta=0$ qu'on a mis dans la définition de $\widetilde{\mathscr{W}}$ n'est pas essentielle, ainsi que le choix des directions normales comme directions lelong desquelles la derivée de ζ doit être linéaire sur chaque côté. En effet on peut montrer très aisément que si $\tilde{\Delta}$ est un opérateur elliptique du quatrième ordre à coefficients constants et réduit à sa partie principale (c'est-à-dire contenant seulement des derivations d'ordre quatre) du type

$$\tilde{\Delta}=D^* A^* A\boldsymbol{D}, \tag{2.2.20}$$

A étant une matrice réelle 3×3 inversible et A^* étant la matrice adjointe de A par rapport à la norme

$$\|(a_1, a_2, a_3)\|^2=a_1^2+2a_2^2+a_3^2, \tag{2.2.21}$$

et si

(2.2.22) $$\boldsymbol{\nu} = \tilde{\boldsymbol{n}}_1, \tilde{\boldsymbol{n}}_2, \tilde{\boldsymbol{n}}_3$$

est un triplet de vecteurs unitaires dans R^2 tels que

(2.2.23) $$\tilde{\boldsymbol{n}}_1 \neq \tilde{\boldsymbol{n}}_2, \qquad \tilde{\boldsymbol{n}}_1 \neq \tilde{\boldsymbol{n}}_3, \qquad \tilde{\boldsymbol{n}}_2 \neq \tilde{\boldsymbol{n}}_3,$$

en considérant les espaces

(2.2.24) $$\widetilde{\mathscr{W}}_{A,\boldsymbol{\nu}} = \Big\{\zeta \in H^2(\hat{T}),\ \tilde{\Delta}\zeta = 0,\ \zeta \textit{ est cubique sur chaque côté et } \frac{\partial \zeta}{\partial \tilde{\boldsymbol{n}}_i} \textit{ est linéaire sur le côté } \hat{l}_i\ (i=1,2,3)\Big\},$$

avec $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3 =$ côtés de $\hat{T}$, *et*

(2.2.25) $$\mathscr{Q}_{A,\boldsymbol{\nu}} = A\,\boldsymbol{D}(\widetilde{\mathscr{W}}_{A,\boldsymbol{\nu}}),$$

on a encore

(2.2.26) $$\mathscr{Q}_{A,\boldsymbol{\nu}} \subset \hat{L},$$

et

(2.2.27) $$\|\hat{\pi}\boldsymbol{q}\|_{\hat{\mathscr{L}}} \geqq \beta_{A,\boldsymbol{\nu}} \|\boldsymbol{q}\|_{\hat{L}} \qquad \forall \boldsymbol{q} \in \mathscr{Q}_{A,\boldsymbol{\nu}},$$

$\beta_{A,\boldsymbol{\nu}}$ étant une constante >0 qui dépend seulement de A et de $\boldsymbol{\nu}$. En effet, $\mathscr{Q}_{A,\boldsymbol{\nu}}$ étant toujours de dimension finie, tout revient à démontrer que si l'on a $\boldsymbol{q}$ dans $\mathscr{Q}_{A,\boldsymbol{\nu}}$ avec

(2.2.28) $$[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}]_{\hat{L}} = 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$$

alors

(2.2.29) $$\boldsymbol{q} = 0,$$

ce qui est facile.

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.3. *Les espaces V_h et W_h définis par* (2.2.2) *et* (2.2.4) *vérifient l'hypothèse $H1$.*

Démonstration. Soit $\chi_h \neq 0$ dans W_h et soient $z_h = \mathscr{I}(\chi_h)$ (c'est-à-dire $z_h \in \widetilde{W}_h$ et $\mathscr{G} z_h = \chi_h$) et $\boldsymbol{q}_h = \boldsymbol{D} z_h$. Soit maintenant, pour chaque Ω_i, F_i la transformation affine inversible qui envoie $\hat{T}$ sur Ω_i et soient

(2.2.30) $$\boldsymbol{q}^i(\hat{x}, \hat{y}) = \boldsymbol{q}_h(F_i(\hat{x}, \hat{y}));$$

on aura que $\boldsymbol{q}^i$ appartient à un espace du type $\mathscr{Q}_{A,\boldsymbol{\nu}}$ où A et $\boldsymbol{\nu}$ dépendent de la transformation F_i et donc, essentiellement, de la *forme* de Ω_i (à une homethétie et à un déplacement rigide près).

Grâce à l'hypothèse iii) on a alors que A et $\boldsymbol{\nu}$ varient dans des ensembles compacts, et donc dès que la constante $\beta_{A,\boldsymbol{\nu}}$ dépend continument de A et de $\boldsymbol{\nu}$, il existe une constante β^* telle que, pour tout $\boldsymbol{q}_h$ et pour tout Ω_i on a:

(2.2.31) $$\|\hat{\pi}\boldsymbol{q}^i\|_{\hat{\mathscr{L}}} \geqq \beta_* \|\boldsymbol{q}^i\|_{\hat{L}}.$$

Soient

(2.2.32) $$\boldsymbol{v}^i = \hat{\pi}\boldsymbol{q}^i,$$

$$v_h^i(x,y) = v^i(F_i^{-1}(x,y)), \tag{2.2.33}$$

et soit v_h dans V_h défini par:

$$v_{h|\Omega_i} = v_h^i \quad (i=1,\ldots,N). \tag{2.2.34}$$

On vérifie sans peine que v_h, construit à l'aide des fomules (2.2.30) et (2.2.32)—(2.2.34), est la projection (dans V) de q_h sur V_h; on a en plus (cfr. e.g. Ciarlet-Raviart [1]) que:

$$\|v_h\|^2 \geqq \frac{\hat{\varrho}}{\sigma_i}\|v^i\|_{\hat{L}}^2 \geqq \beta_*^2 \frac{\hat{\varrho}}{\sigma_i}\|q^i\|_{\hat{L}}^2 \geqq \beta_*^2 \frac{\hat{\varrho}\,\varrho_i}{\sigma_i\hat{\sigma}}\|q_h\|_i^2 \tag{2.2.35}$$

pour tout $i=1,\ldots,N$, $\hat{\varrho}$ et $\hat{\sigma}$ étant des constantes que dépendent seulement de $\hat{T}$ (en particulier on a $\hat{\sigma}=$diamètre de $\hat{T}$ et $\hat{\varrho}=$diamètre du cercle inscript dans $\hat{T}$). On obtient donc de (2.2.35) que

$$\|v_h\|_V^2 \geqq \frac{\beta_*^2}{\vartheta\hat{\vartheta}}\|q_h\|_V^2, \quad \left(\hat{\vartheta} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varrho}}\right). \tag{2.2.36}$$

On a alors:

$$[v_h, q_h] = \|v_h\|_V^2 \geqq \frac{\beta_*^2}{\vartheta\hat{\vartheta}}\|q_h\|_V^2 = \alpha\|q_h\|_V^2. \tag{2.2.37}$$

D'ailleurs on a

$$\|v_h\|_V \leqq \|q_h\|_V, \quad \|q_h\|_V = \|\chi_h\|_W \tag{2.2.38}$$

et

$$\langle \mathscr{C} v_h, \chi_h\rangle = [v_h, q_h]; \tag{2.2.39}$$

donc

$$\langle \mathscr{C} v_h, \chi_h\rangle \geqq \alpha\|q_h\|_V^2 \geqq \alpha\|v_h\|_V\|\chi_h\|_W \tag{2.2.40}$$

et l'hypothèse $H1$ est vérifiée.

Remarque 2.6. On voit bien que la démonstration du théorème 2.3 utilise seulement: a) la condition de compatibilité (2.2.11), b) le fait que les F_i soient des transformations affines inversibles et c) la condition de régularité iii). Cela va nous permettre d'adapter sans difficulté la démonstration à des situations beaucoup plus générales, par example en changeant les définitions de V_h et de W_h, et aussi en supposant que les Ω_i soient des parallèlogrammes, ou bien qu'il y ait des triangles et des parallèlogrammes enseamble etc. Dans tous les cas, on doit simplement vérifier qu'il n'y ait pas des éléments trop «aplatis» et que la condition de compatibilité (2.2.11) soit vérifiée sur l'élément de référence (ou sur les éléments de référence si par exemple on utilise triangles et parallèlogrammes ensemble). On va voir des exemples tout de suite.

Donnons maintenant, de façon très synthètique, d'autres exemples de schémas qui vérifient l'hypothèse $H1$. On se bornera, pour simplifier, au cas des éléments rectangulaires, qui est d'ailleurs l'un des plus utilisés en pratique. Supposons, cette fois, que chaque décomposition (d) soit du type suivant:

j) *chaque Ω_i est un rectangle avec des côtés parallèles aux axes, de longueurs h_1^i et h_2^i;*

jj) *si $i \neq j$ et $\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j \neq \emptyset$ alors Ω_i et Ω_j ont un sommet commun ou bien un côté commun;*

jjj) *il existe une constante $\vartheta' > 0$ telle que pour toute (d) et pour tout Ω_i dans (d) on ait:*

$$\frac{\max\{h_1^i, h_2^i\}}{\min\{h_1^i, h_2^i\}} \leq \vartheta'. \tag{2.2.41}$$

On choisit alors V_h et W_h de la façon suivante.

$$V_h = \{\boldsymbol{v} \in (L^2(\Omega))^3;\ v_1 \textit{ et } v_2 \textit{ sont bilinéaires}^5 \textit{ dans chaque } \Omega_i \textit{ et } v_2 \textit{ est linéaire dans chaque } \Omega_i\}; \tag{2.2.42}$$

$$\widetilde{W}_h = \left\{\zeta \in H_0^2(\Omega);\ \Delta^2\zeta = 0 \textit{ dans chaque } \Omega_i,\ \zeta \textit{ est cubique sur chaque côté de chaque } \Omega_i \textit{ et } \frac{\partial\zeta}{\partial n_i} \textit{ est linéaire sur chaque côté de chaque } \Omega_i\right\}, \tag{2.2.43}$$

$$W_h = G(\widetilde{W}_h). \tag{2.2.44}$$

Remarque 2.7. On peut vérifier sans peine, de façon analogue à ce qu'on a fait dans la remarque 2.4, que dans ce cas V_h est de dimension $11N$ et W_h est de dimension $3M$, en indiquant toujours par N le nombre des Ω_i et par M le nombre de sommets des Ω_i qui sont à l'intérieur de Ω.

Avec les mêmes raisonnements qu'on a fait précédemment, on trouve sans difficulté qu'on peut se ramener à l'étude de la matrice de compatibilité sur un élément de référence $\hat{R}$ fixé. Pour cela soit maintenant $\hat{R}$ le carré $]0,1[\times]0,1[$; posons:

$$\hat{L} = (L^2(\hat{R}))^3, \qquad \|v\|_{\hat{L}}^2 = \int_{\hat{R}} (v_1^2 + 2v_2^2 + v_3^2)\,dx\,dy, \tag{2.2.45}$$

$$\mathscr{V} = \{\boldsymbol{v} \in \hat{L};\ v_1 \textit{ et } v_3 \textit{ sont bilinéaires et } v_2 \textit{ est linéaire}\}. \tag{2.2.46}$$

$$\widetilde{\mathscr{W}} = \left\{\zeta \in H^2(\hat{R});\ \Delta^2\zeta = 0 \textit{ dans } \hat{R},\ \zeta \textit{ est cubique et } \frac{\partial\zeta}{\partial n} \textit{ est linéaire sur chaque côté}\right\}, \tag{2.2.47}$$

$$\mathscr{Q} = \boldsymbol{D}(\widetilde{\mathscr{W}}). \tag{2.2.48}$$

On doit maintenant choisir une base dans $\mathscr{V}$ et une base dans $\widetilde{\mathscr{W}}$ (ce qui nous donnera une base dans $\mathscr{Q}$); prenons

$$\begin{array}{lll} v^{(1)} = (1,0,0), & v^{(5)} = (0,1,0), & v^{(8)} = (0,0,1), \\ v^{(2)} = (x,0,0), & v^{(6)} = (0,x,0), & v^{(9)} = (0,0,x), \\ v^{(3)} = (y,0,0), & v^{(7)} = (0,y,0), & v^{(10)} = (0,0,y), \\ v^{(4)} = (xy,0,0), & & v^{(11)} = (0,0,xy), \end{array} \tag{2.2.49}$$

ce qui nous donne une base pour $\mathscr{V}$. Posons maintenant $S_1 = (0,0)$, $S_2 = (0,1)$, $S_3 = (1,0)$, $S_4 = (1,1)$ et prenons $\phi^{(1)} \ldots \phi^{(12)}$ dans $\widetilde{\mathscr{W}}$ définies par

$$\begin{array}{ll} \phi^{(j)}(S_k) = \delta_{j,k}, & \phi_x^{(j+4)}(S_k) = \delta_{j,k}, \\ \phi_x^{(j)}(S_k) = \phi_y^{(j)}(S_k) = 0; & \phi^{(j+4)}(S_k) = \phi_y^{(j+4)}(S_k) = 0; \\ \multicolumn{2}{c}{\phi_y^{(j+8)}(S_k) = \delta_{j,k},} \\ \multicolumn{2}{c}{\phi^{(j+8)}(S_k) = \phi_x^{(j+8)}(S_k) = 0} \end{array} \tag{2.2.50}$$

---

5. On appelle «fonction bilinéaire» toute polynôme du type $a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$.

(j et k pouvant varier indépendemment de 1 à 4, et $\delta_{j,k}$ étant le symbol de Kronecker), qui sont évidemment une base pour $\widetilde{\mathscr{W}}$. Notons qu'on a encore

$$\dim(\mathscr{Q}) = \dim(\widetilde{\mathscr{W}}) - 3 \tag{2.2.51}$$

toujours grace au fait que la dimension du noyau de $\boldsymbol{D}$ (en tant que opérateur de $\widetilde{\mathscr{W}}$ dans $\mathscr{Q}$) est égal à 3 (avec les fonctions $\zeta = 1$, $\zeta = x$, $\zeta = y$ comme base du noyau). On doit donc montrer que le rang de la matrice

$$c_{i,j} = [v^{(i)}, \boldsymbol{D}\phi^{(j)}]_{\hat{L}} \qquad (i = 1, \ldots, 11; j = 1, \ldots, 12) \tag{2.2.52}$$

est égal à la dimension de $\mathscr{Q}$, c'est-à-dire égal à $12 - 3 = 9$. En calculant alors les $c_{i,j}$, toujours à l'aide de la formule de Green (2.2.19) on peut s'apercevoir qu'on obtient une matrice 9×9 non singulière par exemple en éliminant dans (2.2.52) les lignes $i = 3$ et $i = 9$ et les colonnes $j = 4$, $j = 6$, $j = 9$.

Remarque 2.8. On peut voir que, si l'on veut réduire la dimension de $\mathscr{V}$ (et donc de V_h) on peut utiliser des $\boldsymbol{v}$ du type

$$\boldsymbol{v} = (a_0 + a_1 x + a_3 xy,\ b_0 + b_1 x + b_2 y,\ c_0 + c_2 y + c_3 xy). \tag{2.2.53}$$

Cette choix nous donne alors la «condition d'optimalité».

$$\dim(\mathscr{V}) = \dim(\mathscr{Q}) = \dim(\widetilde{\mathscr{W}}) - 3 \tag{2.2.54}$$

trouvée de façon expérimentale dans Henshall [1][6]. Soulignons explicitement que, d'ailleurs, le choix

$$\boldsymbol{v} = (a_0 + a_1 x + a_2 y,\ b_0 + b_1 x + b_2 y,\ c_0 + c_1 x + c_2 y) \tag{2.2.55}$$

qui vérifie (2.2.54) et qui a été utilisé très souvent en pratique (cfr. e.g. Pian [1], [2] et bibliographie de ces articles) aboutit à une matrice de compatibilité qui a rang 7 et donc qui ne satisfait pas la «condition suffisante»:

$$\operatorname{rang}(\{c_{i,j}\}) = \dim(\mathscr{Q}) = \dim(\widetilde{\mathscr{W}}) - 3 \tag{2.2.56}$$

qu'on utilise ici de façon systématique. On n'a pas vérifié, d'ailleurs, si le choix (2.2.55) donne un schéma qui satisfait à l'hypothèse $H1$ (qui est, elle même, une condition suffisante).

Un autre schéma relatif à des décompositions qui vérifient j), jj), jjj) et qui vérifie l'hypothèse $H1$ peut s'obtenir de la façon suivante; on prend:

$$\mathscr{V} = \{\boldsymbol{v} \in \hat{L},\ \boldsymbol{v} \textit{ est du type } (\mathscr{Q})\}, \tag{2.2.57}$$

$$\begin{aligned}(\mathscr{Q})\ \boldsymbol{v} = (&a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_5 y^2,\ b_0 + b_1 x + b_2 y + b_4 x^2 + b_5 y^2,\\ &c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy + c_4 x^2),\end{aligned} \tag{2.2.58}$$

$$\widetilde{\mathscr{W}} = \left\{\zeta \in H^2(\hat{R}), \Delta^2\zeta = 0, \zeta \textit{ et } \frac{\partial\zeta}{\partial n} \textit{ sont cubiques sur chaque côté}\right\}. \tag{2.2.59}$$

---

6 En général on peut toujours, à partir de deux espaces $\mathscr{V}$ et $\mathscr{Q}$ de ce type et vérifiants la condition de compatibilité (2.2.11) (ou, si l'on préfère, (2.2.56) qui est équivalante), construire un sousespace $\mathscr{V}'$ de $\mathscr{V}$ tel que $\mathscr{V}'$ et $\mathscr{Q}$ vérifient aussi bien (2.2.11) que (2.2.54). Par exemple dans le cas des triangles on pouvait prendre, au lieu de $\mathscr{V}$ défini par (2.2.7), l'espace $\mathscr{V}'$ des éléments du type

$$\boldsymbol{v}(x, y) = (a_0 + a_1(x+y),\ b_0 + b_1(x+y),\ c_0 + c_1(x+y)).$$

On vérifie sans peine que $\widetilde{\mathscr{W}}$ a, dans ce cas, dimension 16 (par exemple en prenant comme degrés de liberté les valeurs de ζ, ζ_x, ζ_y, ζ_{xy} dans les quatres sommets de $\hat{R}$). On peut aussi vérifier que la matrice de compatibilité liée à ce schéma à rang 13 et donc la condition (2.2.56) est remplie[7]. On en déduit que les espaces:

$$V_h=\{\boldsymbol{v}\in(L^2(\Omega))^3,\ \boldsymbol{v} \text{ est de type } (\mathcal{Q}) \text{ dans chaque } \Omega_i\}, \tag{2.2.60}$$

$$\widetilde{W}_h=\left\{\zeta\in H_0^2(\Omega),\ \Delta^2\zeta=0 \text{ dans chaque } \Omega_i,\ \zeta \text{ et } \frac{\partial\zeta}{\partial n_i} \text{ sont cubiques sur chaque côté de chaque } \Omega_i\right\}, \tag{2.2.61}$$

$$W_h=\mathscr{G}(\widetilde{W}_h) \tag{2.2.62}$$

vérifient l'hypothèse $H1$. On remarque que dans ce cas on a $\dim(V_h)=15N$ et $\dim(W_h)=4M$.

Remarque 2.9. On n'a pas traité ici le cas des parallèlogrammes; on peut appliquer la théorie même à ce cas, mais la traitation devient beaucoup plus compliquée; en effet il n'est pas immédiat de appliquer aux parallèlogrammes les raisonnements de la remarque 2.5, à cause du fait que $\mathscr{V}$ n'est pas invariante, dans ces cas, par rapport à des transformations A^* du type (par exemple) $v_1'=v_1+v_2$, $v_2'=v_2$, $v_3'=v_3$. Dans le cas des rectangles à côtés parallèles aux axes, par contre, on arrive seulement à des transformations A du type $v_1'=k_1v_1$, $v_2'=k_2v_2$, $v_3'=k_3v_3$ avec $k_j=$ constantes, qui sont bien des isomorphismes de $\mathscr{V}$ sur soi même.

2.3. Evaluation de l'erreur-convergence

Nous avons démontré dans le théorème 2.1 que si le choix de V_h et W_h satisfait l'hypothèse $H1$ alors on a:

$$\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_h\|_V+\|\psi-\psi_h\|_W\le\gamma\left(\inf_{\boldsymbol{v}_h\in V_h}\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_h\|_V+\inf_{\phi_h\in W_h}\|\psi-\phi_h\|_W\right). \tag{2.3.1}$$

Nous avons montré dans le paragraphe précédant des exemples de familles de couples (V_h, W_h) qui vérifient l'hypothèse $H1$. On a donc, dans chacun de ces exemples, la majoration (2.3.1); on va évaluer maintenant, dans les différents cas, les quantités

$$\inf_{\boldsymbol{v}_h\in V_h}\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_h\|_V, \tag{2.3.2}$$

$$\inf_{\phi_h\in W_h}\|\psi-\phi_h\|_W. \tag{2.3.3}$$

On va aussi déduire de (2.3.1) et de l'évaluation de (2.3.2), (2.3.3) un résultat de convergence. Ceci n'est pas automatique; soulignons en effet encore une fois que les espaces V et W, ainsi que la solution $(\boldsymbol{u}_0, \psi)$ de (1.3.8) dépendent de façon essentielle de la décomposition (d). Nous considérons une suite de décompositions et pour chaque décomposition on a 1) *un* problème de point de selle (1.3.8) équivalent à (1.1.1) dans le sens qu'on a précisé; 2) *un* problème approchè (2.1.9).

---

7 Même dans ce cas $\mathscr{V}$ peut être «amelioré»; il suffit de prendre, au lieu du type (Q), le type:

$$(Q')\quad \boldsymbol{v}=(a_0+a_1x+a_2y+a_3xy+d_1y^2,\ b_0+b_1x+b_2y+d_2(x^2+y^2),\ c_0+c_1x+c_2y+c_3xy+d_1x^2).$$

Si l'hypothèse $H1$ est vérifiée, on a, pour chaque décomposition (d), la majoration (2.3.1) pour la distance entre solution de (1.3.8) et solution de (2.1.9), avec γ indépendante de (d); mais la formule (2.3.1) *ne peut pas être considérée comme un résultat de convergence*, même si l'on a que les quantités (2.3.2), (2.3.3) tendent vers zero uniformement lorsque un souhaitable «paramètre de décomposition» tend vers zero.

Commençons donc par ce dernier point; on veut transformer (2.3.1) dans une formule qui nous donne une majoration de la distance entre $(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\psi}_h)$, solution de (2.1.9), et w, solution de (1.1.1), dans des normes indépendantes de (d); ceci peut se faire assez facilement à l'aide du lemme suivant.

Lemme 2.2. *Si les décompositions* (d) *vérifient* i), ii), iii) (*ou bien* j), jj), jjj)), *on a*

$$|w-\mathscr{I}(\boldsymbol{\psi})|_{2,\Omega}=|w-\mathscr{I}\mathscr{G}w|_{2,\Omega}\leqq K|h|^{2-r}|w|_{4-r,\Omega} \tag{2.3.4}$$

avec r *entrier* $\leqq 2$, K *constante indépendante de* (d) *et*

$$|h|=\max_i\{\text{diamètre de } \Omega_i\}. \tag{2.3.5}$$

Démonstration. Sans entrer dans les détailles, il suffit de remarquer que les applications

$$\Pi_i w=w-\mathscr{I}_i\mathscr{G}_i w \qquad (i=1,\ldots,N) \tag{2.3.6}$$

sont identiquement nulles si w est un polynôme de dégré $\leqq 3$. En appliquant le lemme de Bramble-Hilbert (v. Bramble-Hilbert [1], [2] et aussi Ciarlet-Raviart [1], Raviart [1]) on en déduit (2.3.4) avec des raisonnements du même type de ce qu'on a fait dans la démonstration du théorème 2.2. On signale que la démonstration se simplifie beaucoup si l'on suppose aussi, ce qui d'ailleurs est très raisonnable, qu'on travaille avec «un nombre fini de géometries», c'est-à-dire si les Ω_i, lorsque (d) varie, assument seulement un nombre fini de formes différentes (à une homothétie et à un déplacement rigide près).

A l'aide du lemme 2.2 on obtient donc, en utilisant les formules (1.3.9), (1.3.10) et (2.3.1)

$$\begin{aligned}&\|(w_{xx}, w_{xy}, w_{yy})-(\boldsymbol{u}_h+\boldsymbol{f})\|_{(L^2(\Omega))^3}+|w-\mathscr{I}(\boldsymbol{\psi}_h)|_{2,\Omega}\\ &\qquad\leqq K|h|^{2-r}|w|_{4-r,\Omega}+\gamma\left(\inf_{\boldsymbol{v}_h\in V_h}\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{v}_h\|_V+\inf_{\boldsymbol{\phi}_h\in W_h}\|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\phi}_h\|_W\right).\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Il suffit donc, maintenant, d'evaluer (2.3.2), (2.3.3) dans les différents cas. Ceci peut ce faire avec des techniques qui sont désormais classiques dans la théorie des éléments finis (v.e.g. Cialet-Raviart [1—4], Strang-Fix [1] etc.). On remarque en particulier que pour évaluer (2.3.3) il est convénient de la presenter comme

$$\inf_{\boldsymbol{\phi}_h\in W_h}\|\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\phi}_h\|_W=\inf_{\zeta_h\in\tilde{W}_h}|\mathscr{I}(\psi)-\zeta_h|_{2,\Omega}=\inf_{\zeta_h\in\tilde{W}_h}|\mathscr{I}\mathscr{G}w-\zeta_h|_{2,\Omega},$$

et d'appliquer ensuite le lemme de Bramble-Hilbert. En appellant $E(h)$ la somme de (2.3.2) et de (2.3.3) on obtient alors dans les différents cas:

a) Pour le schéma (2.2.2), (2.2.4) et pour le schéma (2.2.42), (2.2.44):

$$E(h)\leqq \text{cost}\,|h|\,(\|w\|_{H^3(\Omega)}+\|\boldsymbol{f}\|_{(H^1(\Omega))^3}).$$

b) Pour le schéma (2.2.60), (2.2.62):

$$E(h) \leqq \text{cost}\,|h|^2 (\|w\|_{H^4(\Omega)} + \|f\|_{(H^2(\Omega))^4}).$$

On voit donc, en particulier, que le schéma (2.2.60), (2.2.62) est convénient, à priori, seulement si l'on connait explicitement un f assez régulier.

Appendice

Résultats numériques

On a consideré le cas d'une plaque carrée, encastrée sur le bord de $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ et soumise à une charge distribuée $p(x, y) = 24(y^4 - 2y^3 + y^2 + x^4 - 2x^3 + x^2) + 2(6x^2 - 12x + 2)(6y^2 - 12y + 2)$. On peut alors vérifier facilement que dans ce cas le déplacement transversal de la plaque, $w(x, y)$, est solution de:

$$\text{(A1)} \qquad \begin{aligned} \Delta^2 w &= p && \text{dans } \Omega \\ w = \frac{\partial w}{\partial n} &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

et donc est donné par

$$w(x, y) = (x^4 - 2x^3 + x^2)(y^4 - 2y^3 + y^2).$$

Le tableau suivant montre les résultats obtenus par L. D. Marini[8] en approchant le problème A1 par les schémas (2.2.42)—(2.2.44) et (2.2.60)—(2.2.62), en prenant pour Ω_i des carrés.

Les calculs ont étés effectués sur l'ordinateur Honeywell 6030 du Centro di Calcoli Numerici dell'Università di Pavia.

h	ERR (1)	ERR (2)
1/4	0.017	0.00095
1/5	0.012	0.00056
1/6	0.0085	0.00032
1/7	0.0058	0.00018
1/8	0.0041	0.00012
1/9	0.0029	0.000082
1/10	0.0022	0.000041
1/11	0.0017	0.000044
1/12	0.0013	0.000041
1/13	0.001	0.000044

h = pas de discrétisation = longueur des cotés des Ω_i

$$\text{ERR}(1) = \|w - w_h\|_{L^2(\Omega)} / \|w\|_{L^2(\Omega)},$$

où w = solution exacte de A1 et w_h = solution approchée de A1 calculée par le schéma (2.2.42)—(2.2.44);

$$\text{ERR}(2) = \|w - w_h\|_{L^2(\Omega)} / \|w\|_{L^2(\Omega)},$$

où w = solution exacte de A1 et w_h = solution approchée de A1 calculée par le schéma (2.2.60)—(2.2.62).

8 Cfr. F. Brezzi - L. D. Marini: «On the numerical solution of plate bending problems by hybrid methods» (à paraître sur R.A.I.R.O.).

Bibliographie

Aubin, J. P. [1]: Approximation of elliptic boundary-value problems. New York: Wiley 1972

Babuška, I. [1]: The rate of convergence for the finite element method. SIAM J. Numer. Anal. **8**, 304—315 (1971)

Babuška, I. [2]: Error bounds for finite element method. Numer. Math. **16**, 322—333 (1971)

Babuška, I. [3]: The finite element method with lagrangian multipliers. Numer. Math. **20**, 179—192 (1973)

Bensoussan, A., Lions, J. L., Temam, R. [1]: Sur les méthodes de décomposition, de décentralisation et de coordination, et applications. Cahier N. 11 de l'I.R.I.A. Paris: Rocquencourt 1972

Bramble, J. H., Hilbert, R. S. [1]: Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with applications to Fourier transforms and spline interpolation. SIAM J. Numer. Anal. **7**, 112—124 (1970)

Bramble, J. H., Hilbert, R. S. [2]: Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation. Numer. Math. **16**, 362—369 (1971)

Brezzi, F. [1]: A paraître.

Cea, J. [1]: Optimization. Paris: Dunod 1971

Ciarlet, P. G., Raviart, P. A. [1]: General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods. Arch. Rat. Mech. Anal. **46**, 177—189 (1972)

Ciarlet, P. G., Raviart, P. A. [2]: Interpolation theory over curved elements with applications to finite element methods. Computer Math. Appl. Mech. Engin. **1**, 217—249 (1972)

Ciarlet, P. G., Raviart, P. A. [3]: The combined effect of curved boundaries and numerical integration in isoparametric finite element methods. The Mathematical Foundation of the finite element method with applications to partial differential equations — (A. K. Aziz, ed.) 409—474. New York: Academic Press 1972

Ciarlet, P. G., Wagschal, C. [1]: Multipoint Taylor formulas and applications to the finite element method. Numer. Math. **17**, 84—100 (1971)

Cook, R. D. [1]: Two hybrid elements for analysis of thick, thin and sandwich plates. Int. J. Numer. Meth. Eng. **5**, 277—288 (1972)

Crouzeix, M., Raviart, P. A. [1]: Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. I (à paraître)

Glowinski, R., Lions, J. L., Tremolieres, R. [1]: Ouvrage en préparation

Grisvard, P. [1]: Caractérisation de quelques espaces d'interpolation. Arch. Rat. Mech. Anal. **25**, 40—63 (1967)

Hensall, R. D. [1]: On hybrid finite elements. The mathematics of finite elements and applications (ed. Whiteman). New York: Acad. Press 1973

Kikuchi, F., Ando, Y. [1]: On the convergence of a mixed finite element scheme for plate bending. Nucl. Eng. Des. **24**, 357—373 (1973)

Lions, J. L. [1]: Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires. Paris: Dunod 1968

Lions, J. L., Magenes, E. [1]:Nonhomogeneous boundary value problems and applications. I, II, Grund. B. 181—182. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970

Lions, J. L., Stampacchia, G. [1]: Variational inequalities. Comm. Pure Applied Math. XX, 43—96 (1967)

Pian, T. H. H. [1]: Hybrid models. Int. Symp. on Numerical and Computer Methods in structural mechanics. Urbana-Illinois, Sept. (1971)

Pian, T. H. H. [2]: Finite element formulation by variational principles with relaxed continuity requirements. The Mathematical Foundation of the finite element method with applications to partial differential equations (A. K. Aziz, ed.). New York: Academic Press 1972

Pian, T. H. H., Tong, P. [1]: A variational principle and the convergence of a finite element method based on assumed stress distribution. Int. J. Solids & Struct. **5**, 463—472 (1969)

Pian, T. H. H., Tong, P. [2]: Rationalization in Deriving element stiffness Matrix by assumed stress approach. Proceedings Second Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics—AFFDL TR-68-150—Wright Patterson, AFB, Ohio, (1968), 441—469

Raviart, P. A. [1]: Cours de troisième cycle. E.R.A. 215 de l'Université de Paris VI (1971--72)

Rockafellar, R. T. [1]: Monotone operators associated with saddle-functions and minimax problems. Proc. Symposium A.M.S. on non linear Functional Analysis, Avril (1968)

Sander, G. [1]: Applications de la méthode des éléments finis à la flexion des Plaques. Université de Liege-Fac. de Sci. Appl. Pubblic. N. 15 (1969)

Strang, G. [1]: Approximation in the finite element method. Numer. Math. **19**, 81—98 (1972)

Strang, G., Fix, G. [1]: An analysis of the finite element method. New York: Prentice Hall 1973

Zienkiewicz, O. C. [1]: The finite element method in engineering Science. London: McGraw-Hill 1971

Zlámal, M. [1]: On the finite element method. Numer. Math. **12**, 394—409 (1968)

Franco Brezzi
Laboratorio di Analisi Numerica
Universitá di Pavia
Corso Carlo Alberto 5
27100 Pavia, Italy