RICHERT, H.-E.
Math. Annalen 169, 97—101 (1967)

Zur Abschätzung der Riemannschen Zetafunktion in der Nähe der Vertikalen $\sigma = 1$

C. L. SIEGEL zum 70. Geburtstag gewidmet

H.-E. RICHERT

1. Die Riemannsche Zetafunktion, allgemeiner die Hurwitzsche Zetafunktion und damit die Dirichletschen L-Reihen sowie eine Klasse Dedekindscher Zetafunktionen schätzt man in der Nähe der Vertikalen $\sigma = 1$ am wirksamsten mittels der Vinogradovschen Methode ab. Die Konsequenzen solcher Abschätzungen für die Zahlentheorie sind hinlänglich bekannt.

Mit der Frage, die besten derartigen Abschätzungen mittels der letzten (und in einem gewissen Sinne endgültigen) Version der Vinogradovschen Methode aus dem Jahre 1958 zu erhalten, beschäftigen sich die Arbeiten von L. SCHOENFELD ([3]) und W. STÁS ([4]).

In der Arbeit von SCHOENFELD (vor der erwähnten Arbeit VINOGRADOVs veröffentlicht, jedoch jenes Ergebnis bereits vorsehend) werden die Abschätzungen nicht gleichmäßig in σ durchgeführt, vielmehr die Probleme in Gestalt der entsprechenden Lindelöfschen μ-Funktionen behandelt, auch wird der Gültigkeitsbereich in σ nicht explizit entschieden.

Die Arbeit von STÁS behandelt die Aufgabe, diese noch verbliebenen Lücken zu schließen, und es wird mit einer numerischen Konstanten c

$$|\zeta(\sigma + it)| < c\,t^{2^{15}(1-\sigma)^{3/2}} \log^{\frac{5}{2}} t \qquad \text{für } 1 - \frac{1}{2^{13}} \leqq \sigma \leqq 1,\ t \geqq 3 \tag{1}$$

bewiesen. Allerdings wird damit der Vorteil der Unabhängigkeit der Konstanten c von σ auf Kosten der Qualität der Abschätzung bei der Bewegung $\sigma \to 1 - 0$ gewonnen, zumal die Frage der Gleichmäßigkeit bezüglich σ nur bei dieser Bewegung relevant ist.

Ziel der vorliegenden Note ist zu zeigen, daß die Abschätzung (1) so verbessert werden kann, daß sie bei $\sigma \to 1 - 0$ in das Vinogradovsche Resultat

$$\zeta(1 + it) = O(\log^{\frac{2}{3}} t)$$

übergeht, wie es sich gehört. Indem statt der ursprünglichen Form der Vinogradovschen Methode eine Bearbeitung derselben durch A. WALFISZ und dem Verf. zugrundegelegt wird, ergibt sich außerdem eine Verbesserung im Exponenten von 2^{15} zu 100. Lediglich auf die Verfolgung der numerischen O-Konstanten haben wir zugunsten eines einfaches Beweises verzichtet.

Durchweg bezeichnen r, N, N' natürliche Zahlen und c_0, c_1, ... positive absolute Konstanten; die O-Konstanten sind ebenfalls absolut. Ferner seien stets $s=\sigma+it$, $0<w\leqq 1$ und $\zeta(s,w)$ die für $\sigma>1$ durch $\zeta(s,w)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+w)^{-s}$ erklärte sog. Hurwitzsche Zetafunktion.

Wir beweisen den

Satz. *Für*

$$\frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq 1, \qquad t\geqq 2$$

gilt mit einer numerischen Konstanten c_0

$$|\zeta(s,w)-w^{-s}|<c_0\,t^{100(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}}\log^{\frac{2}{3}}t.$$

Wegen $\zeta(s)=\zeta(s,1)$ folgt hieraus sofort die Abschätzung für die Riemannsche Zetafunktion:

$$|\zeta(\sigma+it)|<c\,t^{100(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}}\log^{\frac{2}{3}}t \qquad \text{für } \frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq 1,\ t\geqq 2.$$

Aufgrund der bekannten Relationen liefert der Satz ebenfalls entsprechende Abschätzungen für die Dirichletschen L-Reihen und damit auch für diejenigen Dedekindschen Zetafunktionen, die sich als Produkt solcher L-Reihen schreiben lassen.

2. Aus der Vinogradovschen Methode in der Bearbeitung von A. Walfisz und dem Verf. ([5], p. 57, Satz 2) ergibt sich (nach partieller Summation)

Hilfssatz 1. *Es seien*

$$r\geqq 19,\ N\leqq N'\leqq 2N,\ t^{\frac{1}{r}}\leqq N\leqq t^{\frac{1}{r-1}},\ a=6\cdot 10^4,\ \sigma>0.$$

Dann gilt

$$\Bigl|\sum_{N\leqq n\leqq N'}(n+w)^{-s}\Bigr|<c_1 N^{1-\sigma-\frac{1}{ar^2}}.$$

Hiermit bekommen wir den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 2. *Es seien*

$$0<\sigma\leqq 1, \qquad 21\leqq r\leqq\sqrt{\log t}.$$

Dann gilt

$$\Bigl|\sum_{t^{\frac{1}{r}}<n\leqq t^{\frac{1}{r-1}}}(n+w)^{-s}\Bigr|<c_2\,t^{100(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}}\log^{\frac{1}{3}}t.$$

Beweis. Die zu behandelnde Summe können wir in $O\left(\frac{\log t}{r^2}\right)$ Summen des in Hilfssatz 1 behandelten Typs zerlegen.

Im Falle $1-\sigma\leqq\frac{1}{2ar^2}$ ergibt sich

$$\sum_{t^{\frac{1}{r}}<n\leqq t^{\frac{1}{r-1}}}(n+w)^{-s}=O\left(t^{-\frac{1}{2ar^3}}\frac{\log t}{r^2}\right)=O(\log^{\frac{1}{3}}t),$$

da die Funktion $\exp\left\{-\frac{\log t}{2ax^3}\right\}\frac{\log t}{x^2}$ ihr Maximum an der Stelle $x=\left(\frac{3\log t}{4a}\right)^{\frac{1}{3}}$ besitzt. Sei jetzt also

$$\frac{1}{2ar^2}<1-\sigma. \tag{2}$$

Ist nun $1-\sigma\geqq\frac{1}{ar^2}$, so können wir wegen $\frac{r}{r-1}\leqq\frac{21}{20}$ jede Teilsumme dem Betrage nach durch

$$c_1 t^{\frac{1-\sigma}{r-1}-\frac{1}{a(r-1)r^2}}\leqq c_1 t^{\frac{21}{20}\left(\frac{1-\sigma}{r}-\frac{1}{ar^3}\right)}\leqq c_1 t^{\frac{7}{10}\sqrt{\frac{a}{3}}(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}}$$

abschätzen, denn die Funktion $\frac{1-\sigma}{x}-\frac{1}{ax^3}$ nimmt hier ihr Maximum bei $x=\left(\frac{3}{a(1-\sigma)}\right)^{\frac{1}{2}}$ an. Die letzte Schranke bleibt offensichtlich auch für $\frac{1}{2ar^2}<1-\sigma<\frac{1}{ar^2}$ gültig, und daher gilt in diesem Falle

$$\sum_{t^{\frac{1}{r}}<n\leqq t^{\frac{1}{r-1}}}(n+w)^{-s}=O\left(t^{\frac{7}{10}\sqrt{\frac{a}{3}}(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}}\frac{\log t}{r^2}\right). \tag{3}$$

Wir setzen schließlich

$$b=100-\frac{7}{10}\sqrt{\frac{a}{3}}=100\left(1-\frac{7}{10}\sqrt{2}\right)\quad(>0)$$

und benutzen mit der Abkürzung $y=(1-\sigma)^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{1}{3}}t$ die Ungleichung $b^{\frac{2}{3}}y^2\leqq e^{by^3}$. Dann erhalten wir wegen (2)

$$\frac{\log t}{r^2}=O(y^2\log^{\frac{1}{3}}t)=O(t^{b(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}}\log^{\frac{1}{3}}t),$$

womit (3) unsere Behauptung liefert.

3. Wir verwenden die van der Corput-Methode in der folgenden Form ([1], p. 15, Lemma 6).

Hilfssatz 3. *Es seien*

$$t>1,\ \sigma\geqq 0,\ r\geqq 2,\ N\leqq N'\leqq 2N,\ 1\leqq N\leqq t^{\frac{2}{3}}.$$

Dann gilt

$$\left|\sum_{N\leqq n\leqq N'}(n+w)^{-s}\right|<c_3 N^{1-\sigma-\frac{r}{2^r-2}}t^{\frac{1}{2^r-2}}.$$

Hieraus erhält man den

Hilfssatz 4. *Für*

$$1-\sigma\leqq\frac{1}{2^{r+1}},\qquad 4\leqq r\leqq\log\log t$$

gilt

$$\left|\sum_{t^{\frac{1}{r-1}}<n\leqq t^{\frac{1}{2}}}(n+w)^{-s}\right|<c_4.$$

Beweis. Unsere Summe läßt sich in $O(\log t)$ Teilsummen von der in Hilfssatz 3 angegebenen Art zerlegen. Dabei ist der Exponent von N

$$1-\sigma-\frac{r}{2^r-2}\leqq\frac{1}{2^{r+1}}-\frac{r}{2^r-2}<0,$$

so daß wir

$$\sum_{t^{\frac{1}{r-1}}<n\leqq t^{\frac{1}{2}}}(n+w)^{-s}=O\left(t^{\frac{1}{r-1}\left(1-\sigma-\frac{r}{2^r-2}\right)+\frac{1}{2^r-2}}\log t\right)$$

erhalten. Hierin ist der Exponent von t

$$\leqq\frac{1}{r-1}\left(\frac{1}{2^{r+1}}-\frac{r}{2^r-2}\right)+\frac{1}{2^r-2}=\frac{1}{r-1}\left(\frac{1}{2^{r+1}}-\frac{1}{2^r-2}\right)<-\frac{1}{r2^{r+1}}.$$

Daher gilt unter Beachtung von $r\leqq\log\log t$

$$\sum_{t^{\frac{1}{r-1}}<n\leqq t^{\frac{1}{2}}}(n+w)^{-s}$$

$$=O\left(t^{-\frac{1}{2r2^r}}\log t\right)=O\left(\exp\left\{-\frac{\log t}{2\log\log t(\log t)^{\log 2}}+\log\log t\right\}\right)=O(1).$$

4. *Beweis des Satzes.* Der Satz ist nur in hinreichender Nähe von $\sigma=1$ interessant und die Begrenzung $\sigma\geqq\frac{1}{2}$ lediglich eine Frage der bequemen Formulierung. Tatsächlich liefert sonst die van der Corput-Methode allein bessere Resultate. So ist nach VAN DER CORPUT-KOKSMA ([1], p. 4)

$$|\zeta(s,w)-w^{-s}|<c_5\,t^{\frac{1-\sigma}{\log\frac{1}{1-\sigma}}\log 2}\frac{\log t}{\log\log t}\quad\text{für }\frac{1}{2}\leqq\sigma<1,\ t>e.$$

Für $\frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq 1-\frac{1}{2^{22}}$ ist

$$\frac{1}{(1-\sigma)^{3/2}}\,\frac{1-\sigma}{\log\frac{1}{1-\sigma}}\log 2\leqq\frac{2^{10}}{11}<100,$$

so daß wir hiernach sogleich

$$1-\frac{1}{2^{22}}<\sigma\leqq 1$$

voraussetzen dürfen. Auch können wir wegen der Holomorphie von $\zeta(s,w)$

$$t>t_0,$$

t_0 eine genügend große absolute Konstante, annehmen. Dann gilt (sogar für $1-\frac{1}{2^5} \leqq \sigma \leqq 1$, $t \geqq 3$, vgl. [2], p. 270—271)

$$
(4) \qquad \begin{aligned} &|\zeta(s,w)-w^{-s}|< \\ &< \Big|\sum_{1 \leqq n \leqq t^{\frac{1}{R}}} (n+w)^{-s}\Big| + \Big|\sum_{t^{\frac{1}{R}} < n \leqq t^{\frac{1}{20}}} (n+w)^{-s}\Big| + \Big|\sum_{t^{\frac{1}{20}} < n \leqq t^{\frac{1}{2}}} (n+w)^{-s}\Big| + c_6, \end{aligned}
$$

wo wir

$$R = [\log^{\frac{1}{3}} t] + 1$$

gewählt haben.

Die letzte Summe in (4) ist nach Hilfssatz 4 ($r=21$) beschränkt. Für die zweite Summe verwenden wir Hilfssatz 2 mit $r=21, \ldots, R$ und erhalten

$$\Big|\sum_{t^{\frac{1}{R}} < n \leqq t^{\frac{1}{20}}} (n+w)^{-s}\Big| < c_2 t^{100(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}} \log^{\frac{1}{3}} t (R-20) < c_2 t^{100(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}} \log^{\frac{2}{3}} t .$$

Schließlich ist die erste Summe in trivialer Abschätzung

$$\Big|\sum_{1 \leqq n \leqq t^{\frac{1}{R}}} (n+w)^{-s}\Big| < 1 + t^{\frac{1-\sigma}{R}} \frac{\log t}{R} < 1 + \exp\{(1-\sigma)\log^{\frac{2}{3}} t\} \log^{\frac{2}{3}} t .$$

Für $(1-\sigma)\log^{\frac{2}{3}} t \leqq 1$ ist nun die Behauptung klar, und im anderen Falle gilt

$$(1-\sigma)\log^{\frac{2}{3}} t < (1-\sigma)^{\frac{3}{2}} \log t < 100(1-\sigma)^{\frac{3}{2}} \log t .$$

Literatur

[1] VAN DER CORPUT, J.-G., et J.-F. KOKSMA: Sur l'ordre de grandeur de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann dans la bande critique. Ann. Fac. Sci. Toulouse (3) **22**, 1—39 (1930).

[2] PRACHAR, K.: Primzahlverteilung. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1957.

[3] SCHOENFELD, L.: The order of the zeta function near the line $\sigma=1$. Duke Math. J. **24**, 601—610 (1957).

[4] STÁS, W.: Über das Verhalten der Riemannschen ζ-Funktion und einiger verwandter Funktionen in der Nähe der Geraden $\sigma=1$. Acta Arithm. **7**, 217—224 (1962).

[5] WALFISZ, A.: Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1963.

Prof. Dr. H.-E. RICHERT
Department of Mathematics, University of Syracuse
Syracuse, N.Y.

(Eingegangen am 10. März 1966)