# Zur Schrödingerschen Wellenmechanik.

Von V. Fock in Leningrad.

(Eingegangen am 11. Juni 1926.)

Die Schrödingersche Wellengleichung wird auf den Fall der Anwesenheit der (in den Geschwindigkeiten) linearen Glieder in der Lagrangeschen Funktion verallgemeinert, und es werden einige Beispiele der Quantisierung betrachtet.

In seiner bedeutungsvollen Arbeit[1]) leitet E. Schrödinger eine Wellengleichung ab, die als Grundgleichung der „undulatorischen“ Mechanik und als Ersatz der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung (H. P.) der gewöhnlichen Mechanik anzusehen ist. Die Ableitung wird unter der Voraussetzung geführt, daß die Lagrangesche Funktion keine in den Geschwindigkeiten linearen Glieder enthält. Schrödinger schreibt (Fußnote auf S. 514 l. c.):

„In der Relativitätsmechanik und mit Berücksichtigung des Magnetfeldes wird die Aussage der H. P. komplizierter. Im Falle eiues einzigen Elektrons sagt sie aus, daß der vierdimensionale Gradient der Wirkungsfunktion, vermindert um einen vorgegebenen Vektor (das Viererpotential), einen konstanten Betrag hat. Die wellentheoretische Übersetzung dieser Aussage bietet ziemliche Schwierigkeiten.“

Im folgenden werden wir versuchen, einige dieser Schwierigkeiten zu beseitigen und die betreffende Wellengleichung für den allgemeineren Fall einer Lagrangeschen Funktion mit linearen Gliedern abzuleiten

Unsere Arbeit zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teile wird die Wellengleichung abgeleitet; der zweite Teil enthält Beispiele der Schrödingerschen Quantisierungsmethode. Schrödinger hat bereits einige dieser Beispiele durchgerechnet, jedoch nur die Resultate und nicht die Rechnungen mitgeteilt.

## Erster Teil.

Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung für ein System mit $f$ Freiheitsgraden sei

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \tag{1}$$

[1]) E. Schrödinger, Quantisierung als Eigenwertproblem, Ann. d. Phys. **79**, 361 (I. Mitteilung) und **79**, 489 (II. Mitteilung), 1926.

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine quadratische Funktion der Ableitungen der Wirkungsfunktion $W$ nach den Koordinaten [1]).

Wir ersetzen hier

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial t} \quad \text{durch} \quad -E = -E\,\frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial t}}{\dfrac{\partial \psi}{\partial t}}, \\ &\frac{\partial W}{\partial q_i} \quad \text{durch} \quad -E\,\frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial q_i}}{\dfrac{\partial \psi}{\partial t}} \qquad (i = 1, 2 \cdots f), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wo $E$ die Energiekonstante des Systems bezeichnet. Nach Multiplikation mit $\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2$ erhalten wir eine homogene quadratische Funktion der ersten Ableitungen von $\psi$ nach den Koordinaten und der Zeit:

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{f} \sum_{i=1}^{f} Q^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \sum_{i=1}^{f} P^i \frac{\partial \psi}{\partial q_i} + R \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2. \tag{3}$$

Zur Aufstellung der Wellengleichung betrachten wir das Integral

$$J = \int Q \, d\Omega \, dt. \tag{4}$$

$d\Omega$ bezeichnet hier das Volumenelement des mehrdimensionalen Koordinatenraumes; falls das System aus $n$ Massenpunkten mit den Koordinaten $x_i\, y_i\, z_i$ besteht, kann man unter $d\Omega$ das Produkt der eigentlichen Volumenelemente

$$d\tau_i = dx_i\, dy_i\, dz_i$$

verstehen, also:

$$d\Omega = d\tau_1\, d\tau_2 \cdots d\tau_n.$$

Das Produkt $d\Omega\, dt$ ist also nicht das Volumenelement eines Raumzeitgebietes, in welchem $2\,Q$ das Quadrat des Gradienten einer Funktion $\psi$ ist.

Die Integration nach den Koordinaten ist über den ganzen Koordinatenraum und nach der Zeit über ein beliebiges Intervall $t_2 - t_1$ zu erstrecken.

---

[1]) Dieses in der klassischen Mechanik. Auch in der relativistischen Mechanik eines Massenpunktes läßt sich die Gleichung (wenigstens bei Abwesenheit des Magnetfeldes) auf diese Form bringen; jedoch erscheinen uns die mit der transformierten Gleichung vorzunehmenden Operationen nicht als ganz einwandfrei.

Die gesuchte Wellengleichung erhält man durch Nullsetzen der ersten Variation des Integrals $J$:

$$\delta \int Q \, d\Omega \, dt = 0. \tag{5}$$

Dabei kann man das Verschwinden der Variation $\delta \psi$ entweder an den Grenzen des gesamten Integrationsgebietes oder aber nur für die Zeitpunkte $t_1$ und $t_2$ fordern.

Die explizite Darstellung der Wellengleichung ist wohl überflüssig; wir werden sie lieber an mehreren Beispielen erläutern.

Fragt man nun nach periodischen Lösungen, und setzt man

$$\psi = e^{2\pi i \nu t} \psi_1 = e^{2\pi i \frac{E}{h} t} \psi_1, \tag{6}$$

so erhält man für $\psi_1$ eine Gleichung, welche die Zeit nicht enthält. Die Energie $E$ tritt als Parameter auf, und zwar in der nichtrelativistischen Mechanik linear. Speziell im Falle verschwindender $P^i$ der Formel (3) fällt die Gleichung mit der von Schrödinger aufgestellten zusammen. Falls die $P^i$ nicht verschwinden, sind die Koeffizienten einiger Glieder der (zeitfreien) Wellengleichung komplex.

Die ausgezeichneten Energiewerte werden dann nach Schrödinger durch die Forderung der Eindeutigkeit, Endlichkeit, und Stetigkeit der Lösung bestimmt.

Für rein periodische Lösungen (6) darf man die Ausdrücke in (2) direkt gleich $\frac{\partial W}{\partial q_i}$ setzen und man erhält

$$\psi = \text{const} \, . \, e^{-\frac{2\pi i}{h} W}, \tag{7}$$

wodurch die Bedeutung der Wirkungsfunktion $W$ als Phase eines Wellenvorganges klar zutage tritt.

## Zweiter Teil.

1. Keplerbewegung im Magnetfeld. Das Magnetfeld vom Betrage $H$ sei längs der $z$-Achse gerichtet. Die Lagrangesche Funktion ist bekanntlich

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eH}{2c} (x \dot{y} - y \dot{x}) + \frac{e^2}{r}, \tag{8}$$

und die H. P. lautet

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left\{ (\operatorname{grad} W)^2 + \frac{eH}{c} \left( y \frac{\partial W}{\partial x} - x \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{e^2 H^2}{4 c^2} (x^2 + y^2) \right\} \\ - \frac{e^2}{r} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die quadratische Form $Q$ ist

$$\left.\begin{aligned} Q = \frac{E^2}{2m}(\operatorname{grad}\psi)^2 - \frac{eHE}{2mc}\left(y\frac{\partial\psi}{\partial x} - x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi}{\partial t} \\ -\left[E + \frac{e^2}{r} - \frac{e^2H^2}{8mc^2}(x^2+y^2)\right]\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

und die Wellengleichung lautet

$$\left.\begin{aligned} \varDelta\psi - \frac{eH}{Ec}\left(y\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t} - x\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial t}\right) \\ -\frac{2m}{E^2}\left[E + \frac{e^2}{r} - \frac{e^2H^2}{8mc^2}(x^2+y^2)\right]\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

($\varDelta$ Laplacescher Operator). Führt man die Funktion $\psi_1$ ein,

$$\psi = \psi_1 e^{2\pi i\frac{E}{h}t},$$

und setzt man zur Abkürzung

$$\frac{eH}{2mc} = \omega, \quad \frac{h^2}{4\pi^2e^2m} = a, \tag{12}$$

so erhält man für $\psi_1$ die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} \varDelta\psi_1 - \frac{4\pi i m}{h}\,\omega\left(y\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - x\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right) \\ +\left[\frac{2E}{ae^2} + \frac{2}{ar} - \frac{4\pi^2m^2\omega^2}{h^2}(x^2+y^2)\right]\psi_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Führt man sphärische Koordinaten ein und wählt man $a$ als Längeneinheit, so erhält man (mit einer abgeänderten Bedeutung von $r$)

$$\varDelta\psi_1 + 2i\omega_1\frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi} + \left[\alpha + \frac{2}{r} - \omega_1^2r^2\sin^2\vartheta\right]\psi_1 = 0 \tag{14}$$

mit den Abkürzungen

$$\frac{2\pi m}{h}\,\omega a^2 = \omega_1, \quad \frac{2Ea}{e^2} = \alpha. \tag{15}$$

Vernachlässigt man hier $\omega_1^2$, so läßt sich Gleichung (14) durch den Ansatz

$$\psi_1 = e^{in_1\varphi}P_n^{n_1}(\cos\vartheta)\,r^n\,\psi_2(r) \tag{16}$$

lösen, wo $P_n^{n_1}(\cos\vartheta)$ die „zugeordnete Kugelfunktion“ bezeichnet. Man erhält nämlich für $\psi_2(r)$ die Gleichung

$$r\frac{d^2\psi_2}{dr^2} + 2(n+1)\frac{d\psi_2}{dr} + [2 + (\alpha - 2n_1\omega_1)r]\psi_2 = 0, \tag{17}$$

deren Eigenwerte bereits von Schrödinger gefunden sind. Man bekommt

$$\alpha = 2 n_1 \omega_1 - \frac{1}{(n+p)^2}. \tag{18}$$

Für die Verschiebung $\varDelta \nu$ der Spektralterme ergibt sich der Wert

$$\varDelta \nu = n_1 \cdot \frac{\omega}{2\pi} = n_1 \cdot \frac{e H}{4 \pi m c} \tag{19}$$

in Übereinstimmung mit der älteren Theorie.

2. Bewegung des Elektrons im elektrostatischen Felde der Kernladung und im Magnetfelde eines Dipols, das im Zentrum der Kernladung liegt[1]).

Bei der Lösung dieses Problems stößt man auf eine Schwierigkeit allgemeinen Charakters, die wir hier nicht überwinden konnten. Das Beispiel ist gewählt, um auf die Möglichkeit des Auftretens von Schwierigkeiten dieser Art aufmerksam zu machen.

Die $z$-Achse falle mit der Richtung des Dipolmomentes zusammen; der Betrag des letzteren sei $M$. Die Lagrangesche Funktion ist

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{e M}{c r^3} (x \dot{y} - y \dot{x}) + \frac{e^2}{r}, \tag{20}$$

und die H. P. in sphärischen Koordinaten lautet, unter Vernachlässigung von $M^2$:

$$\frac{1}{2m} (\operatorname{grad} W)^2 + \frac{e M}{m c r^3} \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{e^2}{r} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \tag{21}$$

Bildet man die Wellengleichung

$$\varDelta \psi + \frac{2 e M}{E c r^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \, \partial \varphi} - \frac{2 m}{E^2} \left( E + \frac{e^2}{r} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \tag{22}$$

so erkennt man, daß der Punkt $r = 0$ für alle Integrale ein wesentlich singulärer Punkt (Stelle der Unbestimmtheit) ist. Um dies deutlicher hervortreten zu lassen, wählen wir die Größe $a$ (12) als Längeneinheit, bezeichen

$$\beta = \frac{8 \pi^3 e^3}{h^3} \cdot \frac{M m}{c} \tag{23}$$

und führen durch den Ansatz

$$\psi = r^n P_n^{n_1} (\cos \vartheta) \, e^{2 \pi i \frac{E}{h} t + i n_1 \varphi} F(r) \tag{24}$$

[1]) Über die Behandlung dieses Problems nach den gewöhnlichen Quantisierungsvorschriften siehe G. Krutkow, Adiabatische Invarianten und ihre Anwendungen in der theoretischen Physik. Verhandl. d. Staatl. Opt. Instituts in Petrograd 2, Nr. 12, S. 38. Berlin 1922 (russisch).

die Gleichung (22) auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 F}{d r^2} + \frac{2n+2}{r}\frac{dF}{dr} + \left(\alpha + \frac{2}{r} - \frac{2 n_1 \beta}{r^3}\right) F = 0 \tag{25}$$

zurück. Der wesentlich singuläre Charakter des Punktes $r = 0$ ist durch das Glied $\frac{2 n_1 \beta}{r^3}$ bedingt; andererseits muß dieses Glied dem physikalischen Sinne nach die Rolle eines kleinen Korrektionsgliedes spielen [1]) und keineswegs für den Charakter der Lösung ausschlaggebend sein. Diese Schwierigkeit ist nicht nur für das gewählte Beispiel, sondern überhaupt für alle Fälle, wo man sich einer angenäherten Darstellung der Kräfte bedient, charakteristisch; in der Theorie der Schrödingerschen Wellengleichung muß nämlich die Näherung für den ganzen Raum und nicht nur im Gebiet der Elektronenbahn gelten. In einem „natürlichen" mechanischen System (Elektronen und Kerne) kann diese Schwierigkeit vermutlich nicht vorkommen. Wie diese Schwierigkeit zu überwinden ist, bleibt vorläufig unklar. Vielleicht muß man verschiedene Näherungsdarstellungen der Kräfte für verschiedene Teilgebiete des Koordinatenraumes benutzen, und an den Grenzen der Teilgebiete gewisse Stetigkeitsforderungen für die Wellenfunktion $\psi$ aufstellen. Ob dabei jede Willkür in der Bestimmung der Energiewerte ausgeschlossen werden kann, bleibt unentschieden. Überhaupt bedarf die hier berührte Frage einer eingehenden Untersuchung.

3. Relativistische Keplerbewegung [2]). Die H. P.-Gleichung (von Quadratwurzeln befreit) lautet

$$(\operatorname{grad} W)^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 - 2\left(m + \frac{e}{c^2 r}\right)\frac{\partial W}{\partial t} + 2m\frac{e^2}{r} + \frac{e^4}{c^2 r^2}, \tag{26}$$

und die entsprechende Wellengleichung

$$\varDelta \psi = \frac{1}{E^2}\left[2mE + \frac{E^2}{c^2} + 2\left(m + \frac{E}{c^2}\right)\frac{e^2}{r} + \frac{e^4}{c^2 r^2}\right]\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \tag{27}$$

Wir bezeichnen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a_1} &= \frac{4\pi^2 e^2}{h^2}\left(m + \frac{E}{c^2}\right), \quad \alpha_1 = a_1^2 \frac{4\pi^2}{h^2}\left(2mE + \frac{E^2}{c^2}\right), \\ \gamma &= \frac{2\pi e^2}{hc} \text{ (Konstante der Feinstruktur)}, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

---

[1]) Wir haben ja Quadrate von $\beta$ bereits vernachlässigt.

[2]) Siehe Fußnote auf S. 243.

führen die Größe $a_1$ als Längeneinheit ein und machen den Ansatz (6). Die Gleichung für $\psi_1$ wird:

$$\Delta\psi_1 + \left(\alpha_1 + \frac{2}{r} + \frac{\gamma^2}{r^2}\right)\psi_1 = 0. \tag{29}$$

Setzt man nun

$$\psi_1 = r^{n'} Y_n(\vartheta, \varphi) \, . \, F(r) \tag{30}$$

mit

$$n' = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{(n+\tfrac{1}{2}+\gamma)(n+\tfrac{1}{2}-\gamma)} \tag{31}$$

(also $n'$ nicht ganz), so bekommt man für $F(r)$ die Differentialgleichung

$$r\frac{d^2 F}{d r^2} + 2(n'+1)\frac{dF}{dr} + (2+\alpha_1 r)F = 0, \tag{32}$$

also wieder die Gleichung (17). Es gilt also

$$\alpha_1 = -\frac{1}{(n'+p)} \quad (p = 1, 2 \ldots). \tag{33}$$

Berechnet man daraus die Energie, so bekommt man

$$E = m c^2\left(\frac{n'+p}{\sqrt{(n'+p)^2+\gamma^2}} - 1\right), \tag{34}$$

also die Sommerfeldsche Formel mit dem einzigen Unterschiede, daß die Teilquanten halbzahlig sind, wie schon Schrödinger auf S. 372 l. c. bemerkt hat.

4. Starkeffekt. Die Richtung des elektrischen Feldes vom Betrage $D$ falle mit der $z$-Achse zusammen. Wir führen in üblicher Weise parabolische Koordinaten

$$z + i\varrho = \frac{a}{2}(\xi + i\eta)^2 \tag{35}$$

ein, benutzen die Abkürzungen

$$a = \frac{h^2}{4\pi^2 e^2 m}, \quad \alpha = \frac{2Ea}{e^2}, \quad \varepsilon = D\cdot\frac{a^2}{e} \tag{36}$$

und erhalten für die zeitfreie Funktion $\psi_1$ die Wellengleichung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi_1}{\partial\eta} + \left(\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\varphi^2} \\ &\quad + [4 + \alpha(\xi^2+\eta^2) - \varepsilon(\xi^4-\eta^4)]\psi_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Wir setzen

$$\psi_1 = X(\xi)\,Y(\eta)\,(\xi\eta)^n e^{in\varphi} \tag{38}$$

und erhalten für $X$ und $Y$ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 X}{d\xi^2} + \frac{2n+1}{\xi}\frac{dX}{d\xi} + (2 + A + \alpha\xi^2 - \varepsilon\xi^4)X = 0, \\ &\frac{d^2 Y}{d\eta^2} + \frac{2n+1}{\eta}\frac{dY}{d\eta} + (2 - A + \alpha\eta^2 + \varepsilon\eta^4)Y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Wir führen neue Veränderliche $x$, $y$ und neue Parameter $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\mu$ ein, indem wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} \xi^2 &= \frac{2}{\sqrt{-\alpha}}\,x, & \eta^2 &= \frac{2}{\sqrt{-\alpha}}\,y, \\ 2\varepsilon &= \mu\left(\sqrt{-\alpha}\right)^3, & \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} &= \frac{\lambda^{(1)}-\lambda^{(2)}}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

und erhalten statt (39):

$$\left.\begin{aligned} x^2\frac{d^2X}{dx^2} + (n+1)\,x\,\frac{dX}{dx} + (\lambda^{(1)}x - x^2 - \mu x^3)\,X &= 0, \\ y^2\frac{d^2Y}{dy^2} + (n+1)\,y\,\frac{dY}{dy} + (-\lambda^{(2)}y - y^2 + \mu y^3)\,Y &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Die beiden Gleichungen sind von der Form

$$t^2\frac{d^2F}{dt^2} + (n+1)\,t\,\frac{dF}{dt} + (\lambda t - t^2 - \mu t^3)\,F = 0, \tag{42}$$

und zwar muß man für die erste Gleichung (41) den Parameter $\lambda$ in (42) so bestimmen, daß $F(t)$ endlich und stetig für $t \geqq 0$ wird, und für die zweite Gleichung (41) so, daß dasselbe für $t \leqq 0$ gilt.

Benutzt man die Laplacesche Transformation

$$F(t) = \int e^{tz} f(z)\,dz, \tag{43}$$

so erhält man für $f(z)$ die Differentialgleichung

$$\mu f''(z) + (z^2 - 1)\,f'(z) - [(n-1)\,z + \lambda]\,f(z) = 0. \tag{44}$$

$\mu$ ist ein kleiner Parameter von der Ordnung der elektrischen Feldstärke. Wir suchen nun für $\lambda$, $F(t)$, $f(z)$ Entwicklungen nach Potenzen von $\mu$

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \mu\lambda_1 + \mu^2\lambda_2 + \cdots, \\ F(t) &= F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \cdots, \\ f(z) &= f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Die Reihe für $f(z)$ ist jedenfalls divergent, aber als asymptotische Entwicklung brauchbar. Für $f_0(z)$ erhält man den Ausdruck

$$f_0(z) = (z-1)^{\frac{n-1+\lambda_0}{2}} \cdot (z+1)^{\frac{n-1-\lambda_0}{2}}, \tag{46}$$

und für $f_1(z)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dz}\,\frac{f_1(z)}{f_0(z)} = \frac{\lambda_1}{z^2-1} - \frac{f_0''(z)}{(z^2-1)\,f_0(z)}. \tag{47}$$

Nun folgt aus Schrödingers Untersuchung der Differentialgleichung (17), daß $f_0(z)$ eine rationale Funktion sein muß, damit $F_0(t)$

eine ganze Transzendente wird; und zwar muß für die erste Gleichung (41) $\lambda_0$ den Wert

$$\lambda_0^{(1)} = n - 1 + 2p_1 \qquad (p_1 = 1, 2 \ldots), \tag{48a}$$

und für die zweite Gleichung (41) den Wert

$$\lambda_0^{(2)} = -n + 1 - 2p_2 \qquad (p_2 = 1, 2 \ldots) \tag{48b}$$

haben. Eine analoge Überlegung zeigt, daß auch $f_1(z)$ rational sein muß. Das ist aber nur dann möglich, wenn das Residuum der rechten Seite von (47) für $z = \pm 1$ verschwindet. Eine leichte Rechnung zeigt, daß dies für

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{8}(3\lambda_0^2 - n^2 + 1) \tag{49}$$

eintritt. Begnügen wir uns mit der ersten Näherung, so können wir also schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= n - 1 + 2p_1 + \frac{\mu}{8}[3(n - 1 + 2p_1)^2 - n^2 + 1], \\ \lambda^{(2)} &= -n + 1 - 2p_2 + \frac{\mu}{8}[3(-n + 1 - 2p_2)^2 - n^2 + 1]. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Berechnet man aus (50) und (40) den Wert von $\alpha$, so erhält man

$$-\alpha = \frac{1}{(n - 1 + p_1 + p_2)^2} - 3\varepsilon(p_1 - p_2)(n - 1 + p_1 + p_2) \tag{51}$$

in Übereinstimmung mit der Epsteinschen Formel.

Leningrad, Physikalisches Institut der Universität, 5. Juni 1926.