Numer. Math. 35, 443–457 (1980)

Numerische Mathematik
© by Springer-Verlag 1980

Résultats négatifs en accélération de la convergence

J.P. Delahaye et B. Germain-Bonne

Université des Sciences et Techniques de Lille I, U.E.R d'I.E.E.A-Informatique
59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX - France

Negative Results on Acceleration of the Convergence

Summary. It is well known that some information is needed for accelerating efficiently the convergence of a sequence. We show in this article that, for several families of sequences, there is no algorithm accelerating the convergence of every sequence of the family.

Subject Classifications: AMS (MOS): 65 B; CR: 5.0.

Introduction

On ne peut être sûr qu'une méthode d'accélération de la convergence est efficace que si l'on possède une information suffisante sur la suite à accélérer; on sait, par expérience, que cette information doit être à la fois numérique (il faut connaître un certain nombre de termes de la suite à accélérer) et globale (une certaine propriété doit être vérifiée par tous les termes de la suite). Pour les divers algorithmes classiques d'accélération de la convergence, on connait bien le nombre de termes successifs ainsi que les propriétés de la suite nécessaires pour accélérer sa convergence ([1]). Ces propriétés sont d'ailleurs étroitement liées à l'algorithme utilisé.

Intuitivement, il est clair que si une suite possède une propriété très générale (comme par exemple être monotone bornée), il ne peut pas exister d'algorithme accélérant sa convergence. C'est cette idée, intuitive, que nous précisons dans cet article. Après avoir défini la classe de tous les algorithmes possibles, nous introduisons une propriété générale (la propriété de rémanence) permettant de prouver le théorème fondamental (théorème 1): «si un ensemble de suites convergentes possède la propriété de rémanence, il n'existe pas d'algorithme accélérant la convergence de toute suite de cet ensemble». Cette propriété de rémanence est attachée à un ensemble de suites et se trouve donc être indépendante de tout algorithme possible; elle est en outre de vérification assez aisée, ce qui permet au résultat négatif abstrait du théorème 1 de s'appliquer à de nombreux cas concrets; c'est ce que nous montrons à la fin de l'article où nous exhibons

0029-599X/80/0035/0443/$03.00

plusieurs ensembles de suites possèdant la propriété de rémanence, donc pour lesquels il est inutile de chercher un algorithme d'accélération de la convergence.

1. Notations-Définitions

Soit E un espace métrique. Notons:

$\mathscr{S}_f(E)$ ensemble des suites finies d'éléments de l'ensemble E (y compris la suite vide, notée $\emptyset$)

$\mathscr{S}(E)$ ensemble des suites d'éléments de E

x^* limite de la suite (x_n) lorsque (x_n) est convergente

$\mathscr{S}^*(E)$ ensemble des suites convergentes de E telles que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n \neq x^*$$

$(t_n) \ll (x_n)$ (x_n) est élément de $\mathscr{S}^*(E)$ et:

$$(t_n) \text{ converge et } \lim_{n \to +\infty} \frac{d(t_n, t^*)}{d(x_n, x^*)} = 0$$

Algorithmes pour suites

Description générale

On appelle algorithme pour suites d'éléments de E la donnée:

i) *d'un ensemble R appelé ensemble des réponses,*
ii) *d'une application* $\mathscr{R}: \mathbb{N} \times \mathscr{S}_f(E) \times \mathscr{S}_f(R) \to R$,
iii) *d'une application* $\mathscr{C} = (\alpha, \beta): \mathbb{N} \times \mathscr{S}_f(E) \times \mathscr{S}_f(R) \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Un tel algorithme $(R, \mathscr{R}, \mathscr{C})$ *fonctionne par convention de la façon suivante appliquée à une suite* (s_n) *donnée:*

Etape 0. On détermine $\mathscr{C}(0, \emptyset, \emptyset) = (\alpha(0), \beta(0)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On demande les points $s_{\alpha(0)}, s_{\alpha(0)+1}, \ldots, s_{\beta(0)}$ (si $\beta(0) < \alpha(0)$ on ne demande rien).

On détermine $\mathscr{R}(0, (s_{\alpha(0)}, s_{\alpha(0)+1}, \ldots, s_{\beta(0)}), \emptyset) = R_0 \in R$. R_0 est la première réponse.

Etape 1. On détermine $\mathscr{C}(1, (s_{\alpha(0)}, s_{\alpha(0)+1}, \ldots, s_{\beta(0)}), (R_0)) = (\alpha(1), \beta(1))$. On demande les points $s_{\alpha(1)}, s_{\alpha(1)+1}, \ldots, s_{\beta(1)}$.

On détermine $\mathscr{R}(1, (s_{\alpha(1)}, s_{\alpha(1)+1}, \ldots, s_{\beta(1)}), (R_0)) = R_1 \in R$. R_1 est la deuxième réponse etc.

Pour toute suite $(s_n) \in \mathscr{S}(E)$ on obtient donc une suite $(R_n) \in \mathscr{S}(R)$, appelée suite des réponses. R étant fixé, la donnée de $\mathscr{R}$ et $\mathscr{C}$ définit donc une application de $\mathscr{S}$(E) dans $\mathscr{S}(R)$. Parmi toutes les applications se $\mathscr{S}(E)$ dans $\mathscr{S}(R)$ seules certaines peuvent être obtenues à l'aide d'un algorithme au sens précédemment défini. Touze l'étude qui suit vise en fait à montrer que ces applications de $\mathscr{S}(E)$ dans $\mathscr{S}(R)$ définies par des algorithmes ne peuvent avoir certaines propriétés que l'on aurait souhaitées.

La définition que nous avons donnée est en fait très large ([2]) car de façon imagée nous autorisons nos algorithmes.

– à utiliser autant de points qu'ils le veulent (à condition qu'il n'y en ait qu'un nombre fini) avant donner leur n-ième réponse,

– à se servir de tout le passé s'ils le veulent,
– à utiliser pour donner leurs réponses des fonctions quelconques (nous n'imposons pas de condition de continuité ou de calculabilité) qui éventuellement peuvent changer d'une étape à l'autre.

L'ensemble des algorithmes possibles n'est d'ailleurs pas dénombrable comme souvent en théorie algorithmique (si par exemple $E=R=\mathbb{N}$ le cardinal de l'ensemble des algorithmes possibles est $2^{\aleph_0}$).

Algorithmes d'accélération de la convergence

Supposons que $R=E$; les algorithmes pour suites transforment donc des suites de E (que nous noterons (s_n)) en suites de E (que nous noterons (t_n)), et un algorithme se réduit à la donnée de $\mathscr{R}$ et $\mathscr{C}$.

Nous dirons que l'algorithme $A=(\mathscr{R},\mathscr{C})$ accélère la suite $(s_n)\in\mathscr{S}^*(E)$ si la suite (t_n) obtenue par application de A à (s_n) vérifie:

$$(t_n)\ll(s_n) \quad \text{et} \quad t^*=s^*.$$

Procédés stationnaires pour suites

Lorsque l'espace métrique E est l'ensemble des réels, on peut obtenir une sous-classe de la classe des algorithmes pour suites en imposant à t_n d'être donné par la formule:

$$t_n=s_n+g(s_{n+1}-s_n, s_{n+2}-s_n, \ldots, s_{n+k}-s_n)$$

où $g\in G_k$, ensemble des fonctions continues à k variables telles que: $g(0,0,\ldots,0)=0$ (condition imposée pour avoir conservation de la limite). $G=\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ sera appelé l'ensemble des procédés stationnaires pour suites.

Propriété de rémanence

On dira que la famille $\mathscr{S}\subset\mathscr{S}^*(E)$ possède la propriété de rémanence si, par définition:

R
a) il existe $(\hat{x}_n)\in\mathscr{S}^*(E)$ telle que:
1° il existe $(x_n^0)\in\mathscr{S}$: $(x_n^0)\to\hat{x}_0$,
2° pour tout $m_0\in\mathbb{N}$ il existe $(x_n^1)\in\mathscr{S}$ tel que $(x_n^1)\to\hat{x}_1$ et $\forall n\leqq m_0\; x_n^1=x_n^0$
3° pour tout $m_1\geqq m_0$ il existe $(x_n^2)\in\mathscr{S}$ tel que $(x_n^2)\to\hat{x}_2$ et $\forall n\leqq m_1\; x_n^2=x_n^1$
... ...
b) $(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{m_0}^0, x_{m_0+1}^1, \ldots, x_{m_1}^1, x_{m_1+1}^2, \ldots, x_{m_2}^2, x_{m_2+1}^3, \ldots)\in\mathscr{S}$.

Cette propriété est vérifiée en particulier si:

R′
- a) il existe $(\hat{x}_n) \in \mathscr{S}^*(E)$
- b) il existe $(x_n^0) \in \mathscr{S}$, $(x_n^1) \in \mathscr{S}$, ... tels que $(x_n^0) \to \hat{x}_0$, $(x_n^1) \to \hat{x}_1, \ldots$
- c) pour toute suite strictement croissante d'entiers $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$
  $(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{m_0}^0, x_{m_0+1}^1, \ldots, x_m^1, \ldots) \in \mathscr{S}$
  $(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{m_0}^0, x_{m_0+1}^1, \ldots, x_{m_1}^1, x_{m_1+1}^2, \ldots, x_m^2, \ldots) \in \mathscr{S}$
  ... ...
- d) $(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{m_0}^0, x_{m_0+1}^1, \ldots, x_{m_1}^1, x_{m_1+1}^2, \ldots, x_{m_2}^2, x_{m_2+1}^3, \ldots) \in \mathscr{S}$

2. Résultats négatifs abstraits

Dans ce paragraphe nous nous posons la question de l'existence d'un algorithme pour suites, accélérant la convergence de toutes les suites d'une famille de suite $\mathscr{S}$. (Existence d'un algorithme universel pour $\mathscr{S}$). Nous montrons que cette existence est liée à la structure de $\mathscr{S}$ (théorème 1) ou à celle de l'espace métrique E lorsque $\mathscr{S} = \mathscr{S}^*(E)$ (théorème 2). Dans le cas particulier de $\mathscr{S}^*([a, b])$, on montre un résultat négatif supplémentaire (théorème 3).

Théorème 1. *Soit $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}^*(E)$ (E espace métrique) possédant la propriété de rémanence; il n'existe pas d'algorithme universel pour $\mathscr{S}$.*

Démonstration. Supposons donné un algorithme A accélérant la convergence de toutes les suites de $\mathscr{S}$.

Soit la suite $(\hat{x}_n) \in \mathscr{S}^*(E)$ donnée par la propriété de rémanence. Notons $\hat{x}$ sa limite.

La suite $(x_n^0) \in \mathscr{S}$ converge vers $\hat{x}_0 \neq \hat{x}$; par hypothèse l'algorithme A transforme (x_n^0) en une suite (t_n^0) qui elle aussi converge vers $\hat{x}_0$ et donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\frac{d(t_{n_0}^0, \hat{x})}{d(x_{n_0}^0, \hat{x})} \geq \frac{1}{2}.$$

Jusqu'à l'étape n_0 l'algorithme A n'a fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite (x_n^0). Soit m_0 le plus grand indice des points intervenus. Pour toute suite (x_n) commençant par les mêmes m_0+1 premiers points que (x_n^0) l'algorithme donnera les mêmes n_0+1 premières réponses $t_0, t_1, \ldots, t_{n_0}$ et donc:

$$\frac{d(t_{n_0}, \hat{x})}{d(x_{n_0}, \hat{x})} \geq \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Soit maintenant la suite $(x_n^1) \in \mathscr{S}$ donnée par **R** pour le m_0 défini plus haut.

La suite $(x_n^1) \in \mathscr{S}$ converge vers $\hat{x}_1 \neq \hat{x}$; par hypothèse l'algorithme A transforme (x_n^1) en une suite (t_n^1) qui elle aussi converge vers $\hat{x}_1$ et donc il existe $n_1 \geqq n_0$ tel que:

$$\frac{d(t_{n_1}^1, \hat{x})}{d(x_{n_1}^1, \hat{x})} \geqq \frac{1}{2}.$$

Jusqu'à l'étape n_1 l'algorithme A n'a fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite (x_n^0).

Soit m_1 plus grand que le plus grand indice des points intervenus et tel que $m_1 > m_0$. Pour toute suite (x_n) commençant par les mêmes m_1+1 premiers points que (x_n^1) (et qui donc commencera aussi par les mêmes m_0+1 premiers points que (x_n^0)) l'algorithme donnera les mêmes n_1+1 premières réponses $t_0, t_1, \ldots, t_{n_1}$ (et donc en particulier les mêmes n_0+1 premières réponses) et donc:

$$\frac{d(t_{n_0}, \hat{x})}{d(x_{n_0}, \hat{x})} \geqq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{d(t_{n_1}, \hat{x})}{d(x_{n_1}, \hat{x})} \geqq \frac{1}{2}. \tag{2}$$

... ...

Une fois les suites (x_n^0), (x_n^1), ... introduites, et les indices n_0, m_0, n_1, m_1, ... définis on considère la suite

$$(x_n) = (x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{m_0}^0, x_{m_0+1}^1, \ldots, x_{m_1}^1, x_{m_1+1}^2, \ldots)$$

qui par hypothèse est dans $\mathscr{S}$.

Elle vérifie les relations (1), (2), ... et donc elle n'est pas accélérée par A. ■

Théorème 2. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un algorithme universel pour $\mathscr{S}^*(E)$ est que*

$$E'' = \emptyset.$$

(E' désignant l'ensemble des points d'accumulation de E et $E'' = (E')'$.)

Démonstration. Supposons que $E'' \neq \emptyset$ et montrons que la propriété de rémanence est vérifiée.

Soit $\hat{x} \in E''$. Soit $(\hat{x}_n)$ une suite de $\mathscr{S}^*(E)$ faite de points de E' deux à deux distincts. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$ on peut définir (x_n^m), une suite de $\mathscr{S}^*(E)$, convergente vers $\hat{x}_m$ et telle que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n^m \neq \hat{x} \quad \text{et} \quad d(\hat{x}_m, x_n^m) \leqq \frac{1}{m}$$
$$x_n^m \in E - \{\hat{x}_m \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

Il est facile de vérifier qu'avec un tel choix de $(\hat{x}_n)$, (x_n^0), (x_n^1), ... les propriétés c) et d) de R' sont satisfaites et donc $\mathscr{S}^*(E)$ possède la propriété de rémanence.

Supposons maintenant que $E'' = \emptyset$.

Si $E' = \emptyset$ alors $\mathscr{S}^*(E)$ aussi. On peut donc supposer $E' \neq \emptyset$. Soit alors l'algorithme qui à l'étape n utilise x_n et fournit comme réponse un point t_n vérifiant:

$$t_n \in E' \text{ et } \forall t \in E' \quad d(x_n, t_n) \leqq d(x_n, t) + 1/n.$$

Il est immédiat qu'un tel algorithme transforme une suite $(x_n) \in \mathscr{S}^*(E)$ convergeant vers $\overset{*}{x}$ (qui nécessairement appartient à E') en une suite (t_n) constante à partir d'un certain rang et égale à x^*. ■

Pour énoncer le théorème suivant nous allons imposer une condition supplémentaire aux algorithmes que nous considérons; nous allons supposer que:

$$(*) \begin{cases} \forall \lambda \in E,\ \exists (s_n) \in \mathscr{S}^*(E)\colon \overset{*}{s} = \lambda \quad \text{et} \quad (t_n) \ll (s_n) \\ \text{et} \\ \text{si } (s_n) \text{ est accélérée par } A \text{ alors toute suite } (s'_n) \in \mathscr{S}^*(E) \text{ obtenue en modi-} \\ \text{fiant un nombre fini de termes de } (s_n) \text{ est aussi accélérée par } A. \end{cases}$$

Ceci revient à supposer que les algorithmes que nous considérons ont une certaine efficacité (ceux qui ne vérifient pas cette condition ne sont pas intéressants).

Cette propriété sera en particulier vérifiée par tous les algorithmes raisonnables A c'est-à-dire:

i) accélérant au moins une suite,

ii) transformant la suite $(s_n + s)$ en $(t_n + s)$ si ils transforment la suite (s_n) en (t_n) (invariance par translation),

iii) tels que le fait que (s_n) est accélérée ou non par A ne dépend pas du début de la suite (s_n).

Théorème 3. *L'ensemble $\mathscr{S}^*([a,b])$ $(a, b \in \mathbb{R}, a<b)$ ne peut pas s'écrire comme réunion dénombrable d'ensembles $\mathscr{S}_0, \mathscr{S}_1, \ldots, \mathscr{S}_n \ldots$ tels que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe un algorithme accélérant la convergence de toute suite de $\mathscr{S}_n$.*

Démonstration. Montrons le théorème avec $[a,b] = [0,2]$.

Soient $A_0, A_1, \ldots$ accélérant respectivement toutes les suites de $\mathscr{S}_0, \mathscr{S}_1, \ldots$ avec:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathscr{S}_i = \mathscr{S}^*([0,2]).$$

Etape par étape nous allons construire des suites de $\mathscr{S}^*([0,2])$

$(s_n^1), (s_n^2), \ldots$ et nous noterons,

$({}^0t_n^1), ({}^0t_n^2), \ldots$ leurs transformées respectives par A_0,

$({}^1t_n^1), ({}^1t_n^2), \ldots$ leurs transformées respectives par A_1

etc....

A l'étape $p \in \mathbb{N}$ nous construisons les 2^p suites $(s_n^{2^p})_{n \in \mathbb{N}}, (s_n^{2^p+1})_{n \in \mathbb{N}}, \ldots, (s_n^{2^{p+1}-1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Etape 0. Construction de $(s_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pas 0. Prenons pour $(s_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{S}_0$ convergente vers $\frac{1}{2}$ et telle que:

$$\forall n \in \mathbb{N}: |\tfrac{1}{2} - s_n^1| < \tfrac{1}{2}, \qquad s_n^1 \notin \{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \ldots\}$$

(ceci est possible d'après (∗)).

Il existe n_0^0 tel que:

$$\frac{{}^0t^1_{n_0^0}}{s^1_{n_0^0}} \geqq \frac{1}{2}.$$

Jusqu'à l'étape n_0^0 l'algorithme A_0 n'a fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite (s_n^1). Soit m_0^0 le plus grand indice des points intervenus.

Pour toute suite (s_n) commençant par les mêmes m_0^0+1 premiers points, l'algorithme A_0 donnera les mêmes n_0^0+1 premières réponses ${}^0t_0, {}^0t_1, \ldots, {}^0t_{n_0^0}$ et donc:

$$\frac{{}^0t_{n_0^0}}{s_{n_0^0}} \geqq \frac{1}{2}.$$

Etape 1. Construction de $(s_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n^3)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pas 0. Soit $(s_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{S}_0$ telle que:

$$s_n^2 = s_n^1 \text{ pour tout } n \leqq m_0^0,$$
$$(s_n^2) \text{ converge vers } \tfrac{1}{4},$$
$$\forall n \geqq m_0^0: |s_n^2 - \tfrac{1}{4}| \leqq \tfrac{1}{4} \quad \text{et} \quad s_n^2 \notin \{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \ldots\}.$$

Une telle suite existe d'après (∗).

Il existe $n_0^1 \geqq n_0^0$ tel que:

$$\frac{{}^0t^2_{n_0^1}}{s^2_{n_0^1}} \geqq \frac{1}{2}.$$

Jusqu'à l'étape n_0^1 l'algorithme A_0 n'a fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite $(s_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit m_0^1 $(> m_0^0)$ plus grand que le plus grand indice des points intervenus.

Pour toute suite (s_n) commençant par les mêmes m_0^1+1 premiers points, l'algorithme A_0 donnera les mêmes n_0+1 premières réponses ${}^0t_0, {}^0t_1, \ldots, {}^0t_{n_0^1}$ et donc:

$$\frac{{}^0t_{n_0^0}}{s_{n_0^0}} \geqq \frac{1}{2}; \qquad \frac{{}^0t_{n_0^1}}{s_{n_0^1}} \geqq \frac{1}{2}.$$

Pas 1. Soit $(s_n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{S}_1$ telle que:

$$s_n^3 = s_n^2 \text{ pour tout } n \leqq m_0^1,$$
$$(s_n^3) \text{ converge vers } \tfrac{1}{8},$$
$$\forall n \geqq m_0^1: |s_n^3 - \tfrac{1}{8}| < \tfrac{1}{8}, \qquad s_n^3 \notin \{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \ldots\}.$$

Une telle suite existe d'après (∗). Il existe $n_1^1 \geqq n_0^1$ tel que:

$$\frac{{}^1t^3_{n_1^1}}{s^3_{n_1^1}} \geqq \frac{1}{2}.$$

Jusqu'à l'étape n_1^1 les algorithmes A_1 et A_2 n'ont fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite $(s_n^3)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit m_1^1 ($>m_0^1$) plus grand que le plus grand des indices intervenus. Pour toute suite (s_n) commençant par les mêmes m_1^1+1 premiers points les algorithmes A_0 et A_1 donneront les mêmes m_1^1+1 premières réponses ${}^0t_0$, ${}^0t_1$, ${}^0t_2, \ldots {}^0t_{n_1^1}$ et ${}^1t_0$, ${}^1t_1$, ${}^1t_2, \ldots, {}^1t_{n_1^1}$ et donc:

$$\frac{{}^0t_{n_0^0}}{s_{n_0^0}} \geqq \frac{1}{2}; \quad \frac{{}^0t_{n_0^1}}{s_{n_0^1}} \geqq \frac{1}{2},$$
$$\frac{{}^1t_{n_1^1}}{s_{n_1^1}} \geqq \frac{1}{2}.$$

Etape 2. Construction de $(s_n^4)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n^5)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n^6)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n^7)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pas 0. Soit $(s_n^4)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{S}_0$ telle que:

$$s_n^4 = s_n^3 \text{ pour tout } n \leqq m_1^1,$$

$$(s_n^4) \text{ converge vers } \frac{1}{2^4},$$

$$\forall\, n \geqq m_1^1: \left|s_n^4 - \frac{1}{2^4}\right| \leqq \frac{1}{2^4}, \qquad s_n^4 \notin \{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \ldots\}.$$

Il existe $n_0^2 \geqq n_1^1$ tel que $\dfrac{{}^0t^4_{n_0^2}}{s^4_{n_0^2}} \geqq \dfrac{1}{2}$.

Jusqu'à l'étape n_0^2 les algorithmes A_0 et A_1 n'ont fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite (s_n^4). Soit m_0^2 ($>m_1^1$) plus grand que le plus grand indice des points intervenus.

Pour toute suite (s_n) commençant par les mêmes m_0^2+1 premiers points les algorithmes A_0 et A_1 donneront les mêmes n_0^2+1 premières réponses ${}^0t_0$, ${}^0t_1, \ldots, {}^0t_{n_0^2}$ et ${}^1t_0$, ${}^1t_1, \ldots, {}^1t_{n_0^2}$ et donc:

$$\frac{{}^0t_{n_0^0}}{s_{n_0^0}} \geqq \frac{1}{2}; \quad \frac{{}^0t_{n_0^1}}{s_{n_0^1}} \geqq \frac{1}{2}; \quad \frac{{}^0t_{n_0^2}}{s_{n_0^2}} \geqq \frac{1}{2},$$
$$\frac{{}^1t_{n_1^1}}{s_{n_1^1}} \geqq \frac{1}{2}.$$

Pas 1. ... ...

Pas 3. Soit $(s_n^7)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{S}_3$ telle que:

$$s_n^7 = s_n^6 \text{ pour tout } n \leqq m_2^2,$$

$$s_n \text{ converge vers } \frac{1}{2^7},$$

$$\forall\, n \geqq m_2^2: \left|s_n^7 - \frac{1}{2^7}\right| \leqq \frac{1}{2^7}, \qquad s_n^7 \notin \{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \ldots\}.$$

Il existe $n_3^2 \geqq n_2^2$ tel que:

$$\frac{{}^3t^7_{n_3^2}}{s^7_{n_3^2}} \geqq \frac{1}{2}.$$

Jusqu'à l'étape n_3^2 les algorithmes A_0, A_1, A_2 et A_3 n'ont fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite s_n^7. Soit m_3^2 ($>m_2^2$) plus grand que le plus grand indice des points intervenus.

Pour toute suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ commençant par les mêmes m_3^2+1 premiers points les algorithmes A_0, A_1, A_2 et A_3 donneront les mêmes n_3^2+1 premières réponses ${}^0t_0, {}^0t_1, \dots, {}^0t_{n_3^2}$ respectivement ${}^1t_0, {}^1t_2, \dots, {}^1t_{n_3^2}$, respectivement ${}^2t_0, {}^2t_1, \dots, {}^2t_{n_3^2}$ respectivement ${}^3t_0, {}^3t_1, \dots, {}^3t_{n_3^2}$ et donc:

$$\frac{{}^0t_{n_0^0}}{s_{n_0^0}} \geqq \frac{1}{2}; \quad \frac{{}^0t_{n_0^1}}{s_{n_0^1}} \geqq \frac{1}{2}; \quad \frac{{}^0t_{n_0^2}}{s_{n_0^2}} \geqq \frac{1}{2},$$

$$\frac{{}^1t_{n_1^1}}{s_{n_1^1}} \geqq \frac{1}{2}; \quad \frac{{}^1t_{n_1^2}}{s_{n_1^2}} \geqq \frac{1}{2},$$

$$\frac{{}^2t_{n_2^2}}{s_{n_2^2}} \geqq \frac{1}{2},$$

$$\frac{{}^3t_{n_3^2}}{s_{n_3^2}} \geqq \frac{1}{2}.$$

Etape 3. Construction de (s_n^8), (s_n^9), (s_n^{10}), …, (s_n^{15}). etc…

Une fois les suites (s_n^0), (s_n^1), … construites, une fois déterminés les indices m_0^0, m_0^1, m_1^1, m_0^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_0^3, m_1^3, …, on définit une suite (s_n) en posant:

$$\begin{aligned}
&s_n = s_n^1 \text{ si } n \in \{0, 1, \dots, m_0^0\},\\
&s_n = s_n^2 \text{ si } n \in \{m_0^0+1, m_0^0+2, \dots, m_0^1\},\\
&s_n = s_n^3 \text{ si } n \in \{m_0^1+1, m_0^1+2, \dots, m_1^1\},\\
&s_n = s_n^4 \text{ si } n \in \{m_1^1+1, m_1^1+2, \dots, m_0^2\}\\
&\text{etc} \dots .
\end{aligned}$$

Par construction on a:

$$\frac{{}^0t_{n_0^0}}{s_{n_0^0}} \geqq \frac{1}{2}, \quad \frac{{}^0t_{n_0^1}}{s_{n_0^1}} \geqq \frac{1}{2}, \quad \frac{{}^0t_{n_0^2}}{s_{n_0^2}} \geqq \frac{1}{2}, \dots, \tag{0}$$

$$\frac{{}^1t_{n_1^1}}{s_{n_1^1}} \geqq \frac{1}{2}, \quad \frac{{}^1t_{n_1^2}}{s_{n_1^2}} \geqq \frac{1}{2}, \quad \frac{{}^1t_{n_1^3}}{s_{n_1^3}} \geqq \frac{1}{2}, \dots, \tag{1}$$

$$\frac{{}^2t_{n_2^2}}{s_{n_2^2}} \geqq \frac{1}{2}, \quad \frac{{}^2t_{n_2^3}}{s_{n_2^3}} \geqq \frac{1}{2}, \quad \frac{{}^2t_{n_2^4}}{s_{n_2^4}} \geqq \frac{1}{2}, \dots . \tag{2}$$

… … …

Et donc

$$(s_n) \notin \mathscr{S}_0, \quad (s_n) \notin \mathscr{S}_1, \quad (s_n) \notin \mathscr{S}_2, \dots$$

ce qui est une contradiction car par construction

$$(s_n) \in \mathscr{S}^{(*)}([0,2])$$

et par hypothèse

$$\mathscr{S}^*([0,2]) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathscr{S}_i. \quad \blacksquare$$

3. Applications

Dans ce paragraphe, nous donnons, à titre d'exemple quelques applications des résultats précédents; dans une première partie, les espaces de suites sont caractérisés par une propriété simple permettant d'établir assez facilement la propriété de rémanence. En seconde partie, nous envisageons l'espace des suites accélérables par des procédés stationnaires; après en avoir donné une caractérisation, nous établissons la propriété de rémanence.

Espaces de suites définis par une propriété caractéristique

Nous examinons ici l'espace des suites réelles strictement monotones et celui des suites à convergence logarithmique.

Théorème 4. *Il n'existe pas d'algorithme accélérant la convergence de toute suite strictement décroissante de points de* $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$.

Démonstration. Pour $(\hat{x}_n)$ on prend une suite strictement décroissante de $[a, b[$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$ on prend pour (x_n^m) une suite strictement décroissante de points de $[\hat{x}_m, \hat{x}_{m-1}[$, convergeant vers $\hat{x}_m$ (on convient $\hat{x}_{-1} = b$).

Il est immédiat que c) et d) dans R′ sont satisfaites, et donc la propriété de rémanence. $\blacksquare$

Remarque. Le résultat du théorème 4 permet d'affirmer qu'il n'existe pas d'algorithme universel pour l'ensemble des suites strictement monotones.

Théorème 5. *Il n'existe pas d'algorithme accélérant la convergence de toute suite de points de* $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ *à convergence logarithmique.*

Démonstration. Démontrons le théorème avec $[a, b] = [0, 2]$. Pour $(\hat{x}_n)$ on prend la suite définie par:

$$\hat{x}_n = \frac{1}{n+1}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on prend (x_n^m) définie par:

$$x_n^m = \frac{1}{m+1}\left(1 + \frac{1}{(n+1)(m+1)}\right).$$

Toutes ces suites sont à convergence logarithmique. La propriété c) de R′ est évidemment vérifiée car la propriété d'être à convergence logarithmique se conserve quand on ne modifie qu'un nombre fini de points d'une suite. Montrons que d) est vérifiée.

Il faut montrer que la suite:

$$(x_n)=(x_0^0, x_1^0, \dots, x_{m_0}^0, x_{m_0+1}^1, \dots, x_{m_1}^1, x_{m_1+1}^2, \dots)$$

est à convergence logarithmique.

Si $m_{i-1}<n<m_i$ alors:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{x_{n+1}^i}{x_n^i}=\frac{1+\dfrac{1}{(n+2)(i+1)}}{1+\dfrac{1}{(n+1)(i+1)}}\xrightarrow[i\to+\infty]{}1.$$

Si $m_i=n$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{x_{n+1}^{i+1}}{x_n^i}=\frac{1+\dfrac{1}{(n+2)(i+2)}}{1+\dfrac{1}{(n+1)(i+1)}}\times\left(\frac{i+1}{i+2}\right)\xrightarrow[i\to+\infty]{}1$$

et donc $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\xrightarrow[i\to\infty]{}1$, et donc $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$. ■

Espace des suites accélérables par procédés stationnaires

Dans cette partie nous caractérisons l'espace de toutes les suites que l'on peut espérer accélérer au moyen d'un type particulier d'algorithmes (ceux définis par des procédés stationnaires). Bien que l'on puisse démontrer directement qu'il n'existe pas d'algorithme universel pour cet espace (cf. [3]), il nous a paru intéressant d'établir la propriété de rémanence.

Définition. g étant un procédé stationnaire, désignons par $\mathcal{S}(g)$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}^*(\mathbb{R})$, ce toutes les suites dont la convergence est accélérée par le procédé g.

Posons: $\mathcal{S}_k=\bigcup_{g\in G_k}\mathcal{S}(g)$ (suites accélérables par procédés stationnaires à k variables)

$\mathcal{S}=\bigcup_{g\in G}\mathcal{S}(g)$ (suites accélérables par procédés stationnaires).

Théorème 6. *$\mathcal{S}$ est strictement inclus dans $\mathcal{S}^*(\mathbb{R})$. (Aucune confusion n'étant possible, nous écrirons $\mathcal{S}^*$ au lieu de $\mathcal{S}^*(\mathbb{R})$.)*

Démonstration. Soit $s=(s_1, s_2, \dots, s_n \dots)$ une suite de $\mathcal{S}^*$ (c.a.d telle que $\forall n\ s_n \neq s^*$) Fabriquons à partir de s la suite t:

$$t=(s_1, s_2, s_2, \dots, \underbrace{s_n, s_n, \dots, s_n}_{n \text{ fois}}, \dots).$$

Dans la suite t les termes successifs d'indices

$$\frac{n(n-1)}{2}+1, \quad \frac{n(n-1)}{2}+2, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}$$

sont égaux à s_n.

Cette suite appartient évidemment à $\mathscr{S}^*$ et n'est accélérée par aucun $g \in G$. Supposons que ce soit le cas et soit $g \in G_p$ accélérant la convergence de la suite t.

La suite de terme général $u_i = \dfrac{t_i + g(t_{i+1}-t_i, \ldots, t_{i+p}-t_i) - s^*}{t_i - s^*}$ ne peut tendre vers zéro; en effet:

$$\forall N \;\; \exists i > N: t_i = t_{i+1} = \ldots = t_{i+p}.$$

Comme $g(0, \ldots, 0) = 0$, on a $g(t_{i+1}-t_i, \ldots, t_{i+p}-t_i) = 0$. D'où: $\forall N \exists i > N$: $u_i = 1$; la suite t ne peut donc être accélérée par aucun $g \in G_p$. Il s'ensuit que t ne peut avoir sa convergence accélérée par aucun $g \in G$; $\mathscr{S}$ est donc strictement inclus dans $\mathscr{S}^*$. ■

Remarque. La conclusion du théorème 6 nous amène à poser la question de l'existence d'un algorithme d'accélération de convergence universel pour $\mathscr{S}$; si $\mathscr{S} = \mathscr{S}^*$ en vertu du théorème 2 il aurait été inutile de chercher un algorithme universel pour $\mathscr{S}$.

Définition. Suites voisines. Soit (s_n) de limite s^*. $((s_n) \in \mathscr{S}^*)$. (s'_n) de limite s^* est *voisine* de (s_n) si:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s'_n - s_n}{s_n - s^*} = 0.$$

Il est facile de voir que dans $\mathscr{S}^*$ la relation de voisinage ainsi définie est une relation d'équivalence.

Théorème 7. *Caractérisation des suites de $\mathscr{S}_k$. Soit (a_n) une suite appartenant à $\mathscr{S}^*$; notons B_n la suite d'éléments de $\mathbb{R}^k$ de composantes:*

$$B_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} - a_n \\ a_{n+2} - a_n \\ \vdots \\ a_{n+k} - a_n \end{pmatrix}.$$

Une C.N.S. *pour que $(a_n) \in \mathscr{S}_k$ est que les conditions* (1) *et* (2) *soient réalisées:*

(1) $\exists N, \forall n > N \quad B_n \neq 0$,

(2) *il existe (a'_n) voisine de (a_n) telle que:*

$$\forall p, q, B_p = B_q \Rightarrow a'_p = a'_q.$$

Démonstration. Condition nécessaire.

Soit $(a_n) \in \mathscr{S}_k$. Notons $e_n = a_n - a^*$. Il existe g continue par rapport à chacun de ses arguments (vérifiant $g(0,0, \ldots 0) = 0$) telle que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(e_{n+1}-e_n, \ldots, e_{n+k}-e_n)}{e_n} = -1.$$

* Il existe bien N tel que pour $n>N$: $B_n \neq 0$.
En effet, supposons que ce ne soit pas le cas.

$$\forall N, \quad \exists n>N: B_n=0$$

$$\forall N, \quad \exists n>N: \frac{g(e_{n+1}-e_n, \ldots, e_{n+k}-e_n)}{e_n}=0.$$

Ceci est en contradiction avec $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{g(e_{n+1}-e_n, \ldots, e_{n+k}-e_n)}{e_n} = -1$.

* Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{g(e_{n+1}-e_n, \ldots, e_{n+k}-e_n)}{e_n} = -1$, on peut écrire:

$$\frac{g(e_{n+1}-e_n, \ldots, e_{n+k}-e_n)}{e_n} = -1+\varepsilon_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n=0,$$

$$\forall n, g(e_{n+1}-e_n, \ldots, e_{n+k}-e_n)=e_n(-1+\varepsilon_n).$$

Posons $e'_n=e_n(1-\varepsilon_n)$.
(e'_n) est voisine de (e_n) et vérifie:

$$\forall n: g(e_{n+1}-e_n, \ldots, e_{n+k}-e_n)=-e'_n.$$

On a donc: $B_p=B_q$, donc $e'_p=e'_q$, donc $a'_p=a'_q$.

Condition suffisante

Soit (a_n) vérifiant (1) et (2), et (a'_n) la suite voisine de (a_n). [Notons $e'_n=a'_n-a^*$ et $e_n=a_n-a^*$]. Utilisons le théorème de Tietze.

Dans $\mathbb{R}^k$, sur le fermé constitué par les éléments de la suite (B_n) et de sa limite $(0, 0, \ldots 0)$, définissons la fonction $\bar{g}$ par:

(i) $\bar{g}(0, \ldots, 0)=0$,
(ii) $\forall n, \bar{g}(a_{n+1}-a_n, \ldots, a_{n+k}-a_n)=-e'_n$.

La construction (i) est possible à cause de (1) et (ii) à cause de (2).

$\bar{g}$ est continue

En effet $\bar{g}$ est évidemment continue en tout point B_n; montrons la continuité en $(0, 0, \ldots 0)$.

ε étant fixé $\exists N \ \forall n>N \Rightarrow |e'_n|<\varepsilon$.
Soit $\eta \ \operatorname{Inf}\limits_{i<N} |\Delta a_i| = \operatorname{Inf}\limits_{i<N} |\Delta e_i|$.
Normons $\mathbb{R}^k$ par la norme du maximum

$$\|B_j\|<\eta \Rightarrow |\Delta e_j|<\eta \Rightarrow j>N \Rightarrow |e'_j|<\varepsilon;$$

d'où la continuité de $\bar{g}$ en $(0, 0, \ldots, 0)$.

D'après le théorème de Tietze, $\bar{g}$ peut être prolongée en g continue telle que:

$$\begin{cases} g(0, \ldots, 0)=0 \\ \forall n: \quad g(a_{n+1}-a_n, \ldots, a_{n+k}-a_n)=-e'_n. \end{cases}$$

Comme (e'_n) est voisine de (e_n)

$$\lim \frac{e_n-e'_n}{e_n}=0 \Rightarrow \lim \frac{e_n+g(e_{n+1}-e_n, \ldots, e_{n+k}-e_n)}{e_n}=0.$$

Ceci montre que g accélère la convergence de (a_n). Comme $g \in G_k$, $(a_n) \in \mathscr{S}_k$. ■

Remarque. Soit (b_n) une suite de $\mathscr{S}$ vérifiant:

(i) $m \neq n \Rightarrow \Delta b_m \neq \Delta b_n$,
(ii) $\forall n$: $\quad \Delta b_n \neq 0$.

Il résulte du théorème précédent que cette suite appartient à tout $\mathscr{S}_k$ $(k=1, 2, \ldots)$. Pour les besoins du théorème suivant, nous aurons à utiliser l'ensemble $\mathscr{B}$ des suites de $\mathscr{S}^*$ vérifiant (i) et (ii).

Théorème 8. *Il n'existe pas d'algorithme accélérant la convergence de toute suite de $\mathscr{S}_1$ (et donc de $\mathscr{S}$).*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'ensemble $\mathscr{B}$ (remarque ci-dessus) possède la propriété de rémanence.

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\hat{x}_k=\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{3^i},$$

$$(x_n^k)=\hat{x}_k+\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^{i+1}}.$$

Toutes ces suites sont dans $\mathscr{B}$ (qui est inclus dans $\mathscr{S}_1$). Pour établir que les propriétés c) et d) de R′ sont satisfaites il faut montrer que si (y_n) est l'une des suites considérées dans c) ou d) de R′ alors:

(i) $\Delta y_n \neq 0$,
(ii) $m \neq n \Rightarrow \Delta y_m \neq \Delta y_n$.

(y_m) étant croissante strictement (i) est vérifié.

Δy_m est ou bien la forme $\frac{1}{2^m}$ $(m \geqq 1)$ ou bien la forme $\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^i}$ $(m \geqq 1,\ i \geqq 0)$ et deux tels nombres ne peuvent pas être égaux car:

$$\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2^n} \Rightarrow m=n$$

$$\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^i} \Rightarrow 2^m \underbrace{(2^n+3^i)}_{\text{impair}}=2^n \underbrace{3^i}_{\text{impair}} \Rightarrow n=m$$

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^i}=\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^j} \Rightarrow 2^n \underbrace{3^i(2^m+3^j)}_{\text{impair}}=2^m \underbrace{3^j(2^n+3^i)}_{\text{impair}} \Rightarrow n=m. \quad ■$$

Références

1. Brezinski, C.: Accélération de la convergence en analyse numérique. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 584. Berlin Heidelberg New York: Springer 1977
2. Delahaye, J.P.: Quelques problèmes posés par les suites de points non convergentes et algorithmes pour traiter de telles suites. Thèse de 3° cycle - Université de Lille I - 1979
3. Delahaye, J.P., Germain-Bonne, B.: Quelques résultats négatifs en accélération de la convergence. Pub. ANO 6. Bât. Informatique - 59655 Villeneuve d'Ascq - Cédex - France (1979)

Reçu le 20 Novembre 1979