Numer. Math. 24, 355—374 (1975)

Diskrete Approximation von Eigenwertproblemen

I. Qualitative Konvergenz

Rolf Dieter Grigorieff

Eingegangen am 11. März 1975

1. Einleitung

Das Anliegen dieser dreiteiligen Arbeit ist es, verschiedene der auftretenden Fragen bei der Approximation des Eigenwertproblems

$$Au = \lambda Bu \tag{1}$$

durch eine Folge von Eigenwertproblemen

$$A_\iota u_\iota = \lambda B_\iota u_\iota, \quad \iota \in \Lambda_0, \tag{2}$$

gleicher Bauart zu studieren, wobei A, B Abbildungen von $X \to Y$ und A_ι, B_ι Abbildungen von $X_\iota \to Y_\iota$ für eine Folge Λ_0 von Indizes sind mit Banachräumen X, X_ι bzw. Y, Y_ι, $\iota \in \Lambda_0$, die diskrete Approximationen im Sinne von [30] bilden.

Während in den beiden folgenden Teilen dieser Arbeit Abschätzungen für die Konvergenzordnung und Existenzsätze für asymptotische Entwicklungen der Eigenwerte und verallgemeinerten Eigenvektoren bewiesen werden, beschäftigt sich der vorliegende Teil mit einer Abrundung der qualitativen Konvergenztheorie, wie sie hauptsächlich in [12, 20, 31] entwickelt worden ist.

Im zweiten Abschnitt werden die grundsätzlichen qualitativen Konvergenzresultate entwickelt. Wichtigstes Ergebnis ist der Satz 2. (15), in dem notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz der Eigenwerte von (2) der algebraischen Vielfachheit nach gegen einen isolierten Eigenwert von (1) gegeben werden, der dann als stabil bezeichnet wird. Der Beweis dieses Satzes verwendet neuere Resultate aus [18] bzw. [37]. Zur Illustration seiner Reichweite wird gezeigt, wie sich einige in der Literatur bisher untersuchte Fälle (gleichmäßige Konvergenz [22], kollektiv kompakte Operatorfolgen [1—3], diskret kompakte Operatorfolgen [31]) als hinreichende Bedingungen für die Stabilität deuten lassen. Hierbei zeigt sich der Vorteil, ebenso wie in [20] nur die Approximation von isolierten Teilen des Spektrums von (1) zu untersuchen, was die Voraussetzung B vollstetig, $(B_\iota)_{\Lambda_0}$ diskret kompakt (s. [31]) entbehrlich macht.

Im dritten Abschnitt geben wir einige ergänzende Resultate über Konvergenzeigenschaften der Pole der Resolventen und der Dimensionen gewisser ausgezeichneter Teilräume der algebraischen Eigenräume, die entsprechend im Zusammenhang mit kollektiv kompakten Operatorfolgen in [1] bewiesen worden sind. Außerdem machen wir einige Bemerkungen zur Konstruktion von konvergenten Basissystemen von Hauptvektoren.

Der letzte Teil der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich mit den Approximationseigenschaften der zu (1), (2) adjungierten Probleme, die im fünften Abschnitt zu finden sind. Sie finden ihre angemessene Formulierung in der Verwendung von diskreten Approximationen von Dualsystemen, die im vorhergehenden Abschnitt soweit wie nötig studiert werden.

Angeregt durch die große praktische Bedeutung der Spline-Funktionen sowie der finiten Elemente bei der näherungsweisen Lösung von Integral- und Differentialgleichungen sind in der letzten Zeit einige Untersuchungen über das Konvergenzverhalten von Methoden vom Projektionstyp bei Eigenwertproblemen mit besonderer Betonung auf nicht notwendig symmetrischen Problemen veröffentlicht worden (s. [4, 6—8, 21, 23, 29]). Die grundlegenden Resultate für Methoden dieses Typus sind in den etwas weiter zurückliegenden Arbeiten [24, 35, 36] erzielt worden. Für symmetrische Aufgaben liegen derartige Untersuchungen in [5, 10, 21, 27, 28] vor. Etwas allgemeinere Approximationsschemata sind in [9, 11, 25] studiert worden.

Leider machen die neueren Arbeiten unter ihnen keinen Gebrauch von der vor allem in [31] (s. auch [1—3, 12, 13, 15, 19, 20]) entwickelten Konvergenztheorie für (1), (2). Hier werden nicht nur keine Symmetrievoraussetzungen oder Annahmen der Art $X=Y$, $B=I$ oder $X_\iota \subset X$, $Y_\iota \subset Y$ benötigt, sondern gleichzeitig wird die allgemeine Struktur der Diskretisierungsmethoden zur näherungsweisen Lösung von (1) erfaßt und durchleuchtet. Dies bedeutet u.a. einen wesentlichen systematischen, verständnismäßigen und arbeitsökonomischen Vorteil. Erstaunlicherweise sind die mit der allgemeinen Diskretisierungstheorie erzielten Aussagen so weitreichend, daß sie bei Spezialisierung auf den strukturell einfachen Fall der Projektionsmethode die dafür bekannten Resultate, mit ganz wenigen Ausnahmen, in voller Allgemeinheit ergeben. Aber ebensogut kann man die Theorie auch auf Differenzenverfahren, Quadraturformelmethoden, singuläre Störungen, simultane Gebiet- und Koeffizientenstörungen u.a. anwenden und erhält damit für diese Methoden ebenfalls Ergebnisse gleicher Tiefe.

2. Approximation des Spektrums und der algebraischen Eigenräume

Zu Beginn dieses Abschnitts führen wir die benötigten Begriffe ein. Es folgt dann die einfache Aussage (11) über die Oberhalbstetigkeit des Spektrums. Das Hauptresultat über die Konvergenz von Eigenwerten der algebraischen Vielfachheit nach ist in Satz (15) enthalten. Es schließen sich dann eine Reihe von Bemerkungen an, welche die Reichweite der erzielten Ergebnisse etwas beleuchten.

Es seien X, Y Banachsche Räume. Vorgelegt sei das Eigenwertproblem

$$(\lambda B - A)u = 0, \qquad u \in D(A), \tag{1}$$

mit Operatoren $A \in C(X, Y)$, der Menge der dicht definierten, abgeschlossenen Operatoren und $B \in B(X, Y)$, dem Banachraum der beschränkten Operatoren von X nach Y. Gesucht werden Punkte des Spektrums, insbesondere Eigenwerte, die in einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ liegen, und zugehörige Hauptvektoren. Zur näherungsweisen Berechnung wird eine Folge von Eigenwertproblemen

$$(\lambda B_\iota - A_\iota)u_\iota = 0, \qquad u_\iota \in D(A_\iota), \ \iota \in \Lambda_0, \tag{2}$$

verwendet, wobei Λ_0 eine Folge von Indizes ist und für jedes $\iota\in\Lambda_0$ gilt $A_\iota\in C(X_\iota, Y_\iota)$, $B_\iota\in B(X_\iota, Y_\iota)$. X_ι, Y_ι, $\iota\in\Lambda_0$, sind Banachsche Räume, von denen wir annehmen, daß sie diskrete normierte Approximationen $\mathscr{A}(X, \Pi X_\iota, \lim)$ bzw. $\mathscr{A}(Y, \Pi Y_\iota, \lim)$ mit konvergenten Metriken bilden (s. [30, 1.1. (A)]). Damit ist eine diskrete Konvergenz einer Folge $(u_\iota)_\Lambda$ von Elementen $u_\iota\in X_\iota$ bzw. Y_ι, $\iota\in\Lambda$, gegen $u\in X$ bzw. Y erklärt. Hier und im folgenden bezeichnet Λ bzw. Λ_1 stets eine Teilfolge bzw. ein Endstück von Λ_0, nicht jedesmal notwendig dieselben. Wir schreiben oft nur $A(\lambda)$ anstelle von $\lambda B - A$, $\lambda\in G$, und bezeichnen mit $\sigma(A)$ bzw. $\varrho(A) := G\backslash\sigma(A)$ die Resolventenmenge bzw. das Spektrum von (1). Für die Definition der Resolventenmenge und der Hauptvektoren s. [12, S. 47].

Beim Studium der Konvergenzeigenschaften von (2) spielen die Klasse der *diskret kompakten* (s. [14, 30]) und der *approximationsregulären*, kurz: a-regulären Operatorfolgen (s. [16]) eine grundlegende Rolle, die wie folgt definiert sind.

(3) *Eine Folge $(A_\iota)_{\Lambda_0}$ von Operatoren $A_\iota\colon X_\iota\to Y_\iota$ heißt diskret kompakt, wenn für jede Teilfolge $\Lambda\subset\Lambda_0$ und jede beschränkte Folge $(u_\iota)_\Lambda$ von Elementen $u_\iota\in X_\iota$, $\iota\in\Lambda$, die Folge $(A_\iota u_\iota)_\Lambda$, für eine Teilfolge $\Lambda'\subset\Lambda$ konvergent ist.*

(4) *Ein Paar A, $(A_\iota)_{\Lambda_0}$ von Operatoren $A\in C(X, Y)$, $A_\iota\in C(X_\iota, Y_\iota)$, $\iota\in\Lambda_0$, heißt a-regulär, wenn für jede Teilfolge $\Lambda\subset\Lambda_0$ und jede beschränkte Folge $(u_\iota)_\Lambda$ von Elementen $u_\iota\in D(A_\iota)$ aus der Konvergenz $A_\iota u_\iota\to v$ $(\iota\in\Lambda)$ die Existenz einer Teilfolge $\Lambda'\subset\Lambda$ und eines $u\in D(A)$ folgt mit*

$$u_\iota\to u \quad (\iota\in\Lambda'), \qquad Au=v.$$

Die grundlegende Bedeutung der a-regulären Operatorenpaare bei Diskretisierungsprozessen von inhomogenen Aufgaben ist in [16—18] gezeigt worden.

Um Konvergenzresultate zu erhalten, wird man mindestens benötigen, daß (1) durch die Folge (2) approximiert wird, was sich z.B. durch die Konsistenz von $(A_\iota)_{\Lambda_0}$ bzw. $(B_\iota)_{\Lambda_0}$ mit A bzw. B ausdrücken läßt (s. [30, 1.2. (c)]). Aber selbst unter der Voraussetzung von $A_\iota\to A$, $B_\iota\to B$ $(\iota\in\Lambda_0)$ (für die Konvergenzdefinition s. [30, 1.2. (2)]) ist i.allg. nicht einmal die Oberhalbstetigkeit der Spektren gegeben (s. [22, p. 431]). Eine dies sichernde Voraussetzung ist die Bedingung

(aF) *Für jedes $\lambda\in\varrho(A)$ sei $A(\lambda)$, $(A_\iota(\lambda))_{\Lambda_0}$ a-regulär und für jedes $\iota\in\Lambda_0$ folge aus $N(A_\iota(\lambda))=\{0\}$, daß $R(A_\iota(\lambda))=Y_\iota$ ist. Ferner konvergiere $B_\iota\to B$ $(\iota\in\Lambda_0)$.*

(5) *Ist $K\subset\varrho(A)$ kompakt, so gilt unter der Voraussetzung* (aF), *daß für ein Endstück Λ_1 gilt $K\subset\varrho(A_\iota)$, $\iota\in\Lambda_1$, und $A_\iota^{-1}(\lambda)$ gleichmäßig für $\iota\in\Lambda_1$ sowie $\lambda\in K$ beschränkt ist.*

Den Beweis führt man leicht mit einer Widerspruchsannahme (vgl. [16, 2. (5)], [20, 3. (2)]). Ist $\lambda\in G$ Limes einer Folge $(\lambda_\iota)_\Lambda$ von Punkten $\lambda_\iota\in\sigma(A_\iota)$, so folgt unter der Voraussetzung (aF) aus (5), daß λ in $\sigma(A)$ liegt.

Sei nun σ eine kompakte Spektralmenge von A, d.h. $\sigma\subset\sigma(A)$ ist kompakt und $\sigma(A)\backslash\sigma$ ist relativ abgeschlossen in G. Ist Δ ein Cauchygebiet zu σ mit Rand $\partial\Delta$ (s. [34, p. 288]), so heißt

$$P(\sigma) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} A^{-1}(\xi)\, B\, d\xi\colon X\to X \tag{6}$$

die *Spektralprojektion* von A zu σ. Für den Fall, daß σ aus einer endlichen Zahl von Polen von $A^{-1}(\cdot)B$ besteht, ist der Wertebereich von $P(\sigma)$ gleich der direkten

Summe der zugehörigen algebraischen Eigenräume (s. [12, S. 54]). In unseren Untersuchungen spielt auch noch der Operator

(7) $$Q(\sigma) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} BA^{-1}(\xi)\, d\xi : Y \to Y$$

eine Rolle. Aus der sog. Resolventengleichung

(8) $$A^{-1}(\lambda') - A^{-1}(\lambda) = (\lambda - \lambda') A^{-1}(\lambda') BA^{-1}(\lambda), \qquad \lambda', \lambda \in \varrho(A),$$

folgt die Beziehung

(9) $$A^{-1}(\alpha) Q(\sigma) = P(\sigma) A^{-1}(\alpha), \qquad \alpha \in \varrho(A),$$

woraus man entnimmt, daß $Q(\sigma)$ eine stetige Projektion in Y ist mit

(10) $$R(Q(\sigma)) = A(\alpha) R(P(\sigma)), \qquad \alpha \in \varrho(A).$$

Für weitere Eigenschaften von $Q(\sigma)$ vgl. [12, 1.(14)], [20, 1.(17)], [31, 1.3.].

Wir kommen jetzt zur Frage der Bestimmung von $\sigma(A)$ aus der Kenntnis von $\sigma(A_\iota)$. Dies ist i.allg. selbst bei Vorliegen gleichmäßiger Konvergenz nicht möglich (s. [22, p. 210]). Man hat nurmehr das folgende Ergebnis (vgl. [1, Th. 4.16], [12, 3.(15)], [20, 4.(1)], [22, IV-3.16], [31, 3.2.(2)]).

(11) *Sei* (aF) *erfüllt, und sei σ eine kompakte Spektralmenge von A mit zugehörigem Cauchygebiet Δ. Dann gilt*

(12) $$\inf\{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma) \mid \lambda \in \sigma(A_\iota)\} \to 0 \qquad (\iota \in \Lambda_0).$$

Für ein Endstück Λ_1 ist $\partial\Delta \subset \varrho(A_\iota)$, so daß mit $\sigma_\iota := \sigma(A_\iota) \cap \Delta$ die Projektionen $P_\iota(\sigma_\iota)$, $Q_\iota(\sigma_\iota)$, $\iota \in \Lambda_1$, existieren. Es gilt

(13) $$P_\iota(\sigma_\iota) \to P(\sigma), \qquad Q_\iota(\sigma_\iota) \to Q(\sigma) \qquad (\iota \in \Lambda_1)$$

sowie $\operatorname{rank} Q(\sigma) = \operatorname{rank} P(\sigma)$, $\operatorname{rank} Q_\iota(\sigma_\iota) = \operatorname{rank} P_\iota(\sigma_\iota)$, $\iota \in \Lambda_1$, *und*

(14) $$\liminf_{\Lambda_1} \operatorname{rank} P_\iota(\sigma_\iota) \geq \operatorname{rank} P(\sigma).$$

$\mathscr{A}(R(P(\sigma)), \Pi R(P_\iota(\sigma_\iota)), \lim)$ *bzw.* $\mathscr{A}(R(Q(\sigma)), \Pi R(Q_\iota(\sigma_\iota)), \lim)$ *bilden eine diskrete Approximation mit der durch* $X, \Pi X_\iota, \lim$ *bzw.* $Y, \Pi Y_\iota, \lim$ *induzierten Konvergenz. Ist $\sigma \neq \emptyset$, dann ist auch $\sigma_\iota \neq \emptyset$ für fast alle $\iota \in \Lambda_0$.*

Beweis. Gemäß (5) ist $\partial\Delta \subset \varrho(A_\iota)$, $\iota \in \Lambda_1$. In [16, 2.(6)] ist $A_\iota^{-1}(\lambda) \to A^{-1}(\lambda)$ $(\iota \in \Lambda_1)$, $\lambda \in \partial\Delta$, gezeigt worden. Die für A_ι^{-1} angeschriebene Resolventengleichung (8) ergibt zusammen mit (5) die gleichgradige Stetigkeit der Folge $(A_\iota^{-1}(\lambda))_{\Lambda_1}$ für $\lambda \in \partial\Delta$. Dann entnimmt man [31, 2.3.(4)] die Aussagen $P_\iota(\sigma_\iota) \to P(\sigma)$, $Q_\iota(\sigma_\iota) \to Q(\sigma)$ $(\iota \in \Lambda_1)$. Es ist leicht zu sehen, daß hieraus folgt, daß die Wertebereiche der Projektionen eine diskrete Approximation bilden, und [31, 3.1.(1)] zieht dann die Beziehung (14) nach sich. Da $A(\alpha)$ bijektiv ist, entnimmt man aus (9) die vor (14) genannten Gleichungen. Ist $\sigma \neq \emptyset$, dann wird $P(\sigma) \neq 0$, so daß wegen (13) für fast alle $\iota \in \Lambda_0$ auch $P_\iota(\sigma_\iota) \neq 0$, also $\sigma_1 \neq \emptyset$, ist. Zusammen mit (5) erschließt man dann (12).

Die Eigenschaft von $R(P(\sigma)), \Pi R(P_\iota(\sigma_\iota)), \lim$ eine diskrete Approximation zu sein, hat insbesondere auch zur Folge, daß der Limes einer konvergenten Folge von Elementen $u_\iota \in R(P_\iota(\sigma_\iota))$ in $R(P(\sigma))$ liegt.

Wir wenden uns nun dem Fall zu, daß die Spektralmenge σ aus einem isolierten Punkt $\lambda \in \sigma(A)$ besteht. Unter den Voraussetzungen von (11) ist dann λ Limes einer Folge von Punkten $\lambda_\iota \in \sigma(A_\iota)$, $\iota \in \Lambda_1$. Wenn $R(P(\lambda))$ unendlichdimensional ist, so konvergieren gemäß (14) die Dimensionen der Wertebereiche der Spektralprojektionen $P_\iota(\sigma_\iota)$. Was läßt sich nun diesbezüglich im Falle $\dim R(P(\lambda)) < \infty$ sagen?

(15) *Sei* (aF) *erfüllt, und sei λ ein isolierter Punkt aus $\sigma(A)$. Mit den Bezeichnungen von* (11) *sind dann die folgenden Bedingungen paarweise äquivalent.*

(i) $\operatorname{rank} P(\lambda) < \infty$, $\operatorname{rank} P_\iota(\sigma_\iota) \to \operatorname{rank} P(\lambda)$ $(\iota \in \Lambda_1)$.

(ii) $R(P(\lambda))$ *ist separabel, und die Folge* $(P_\iota(\sigma_\iota))_{\Lambda_1}$ *ist diskret kompakt.*

(iii) $\operatorname{rank} Q(\lambda) < \infty$, $\operatorname{rank} Q_\iota(\sigma_\iota) \to \operatorname{rank} Q(\lambda)$ $(\iota \in \Lambda_1)$.

(iv) $R(Q(\lambda))$ *ist separabel, und die Folge* $(Q_\iota(\sigma_\iota))_{\Lambda_1}$ *ist diskret kompakt.*

Trifft eine der Bedingungen zu, so ist λ ein Pol von $A^{-1}(\cdot)B$ und von $BA^{-1}(\cdot)$ mit übereinstimmender Ordnung. Für ein Endstück Λ_2 besteht σ_ι aus $m := \operatorname{rank} P(\lambda)$ *algebraisch wiederholten Eigenwerten $\mu_\iota^{(1)}, \ldots, \mu_\iota^{(m)}$ mit*

$$\mu_\iota^{(j)} \to \lambda \qquad (\iota \in \Lambda_2),\ j = 1, \ldots, m. \tag{16}$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) Gemäß (11) ist $R(P), \Pi R(P_\iota(\sigma_\iota))$, lim eine diskrete Approximation, deren Konvergenz sich vermöge [31, 3.3.(7)] mit Hilfe des dort eingeführten Operators $J_\iota: R(P_\iota) \to R(P)$ charakterisieren läßt. Sei $u_\iota \in R(P_\iota)$, $\iota \in \Lambda$, eine beschränkte Folge. Dann ist $(J_\iota u_\iota)_\Lambda$ in $R(P)$ beschränkt, da $(J_\iota)_\Lambda$ stabil ist (s. [31, 3.3.(11)]). Daher geht $J_\iota u_\iota \to u$ $(\iota \in \Lambda')$ für ein $u \in R(P)$ und eine Teilfolge $\Lambda' \subset \Lambda$, und somit auch $u_1 \to u$ $(\iota \in \Lambda')$ (vgl. auch den Beweis von 4(9)). Damit ist (ii) gezeigt.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Diese Beweisrichtung kann man aus [37, 2.(8)] entnehmen. Wir folgen hier einer anderen Argumentation. Da $R(P), \Pi R(P_\iota)$, lim eine diskret kompakte Approximation ist, bildet die Folge der Nulloperatoren in ihnen trivialerweise ein a-reguläres Paar. Aus [18, 1.(2)] folgt dann $\operatorname{rank} P(\lambda) = \dim N(0) < \infty$. Weiter entnimmt man [18, 1.(7)] die Beziehung $\limsup_{\Lambda_1} \operatorname{rank} P_\iota(\sigma_\iota) \leqq \operatorname{rank} P(\lambda)$, so daß bei Beachtung von (14) die Bedingung (i) nachgewiesen ist.

Die Äquivalenz von (i) mit (iii) folgt aus (11), und die von (iii) mit (iv) ergibt sich mit demselben Argument wie vorangehend.

Den Überlegungen im ersten Abschnitt von [12] entnimmt man, daß aus $\operatorname{rank} P(\lambda) < \infty$ folgt, daß λ ein Pol von $A^{-1}(\cdot)B$ ist. Für die Koeffizienten A_j bzw. B_j, $j \in \mathbb{N}$, in der Laurententwicklung von $A^{-1}(\cdot)B$ bzw. $BA^{-1}(\cdot)$ um λ erhält erhält man entsprechend zu (9) die Beziehung

$$A^{-1}(\alpha)\, B_j = A_j A^{-1}(\alpha), \qquad \alpha \in \sigma(A),\ j \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Dies zeigt $A_j = 0$ dann und nur dann, wenn $B_j = 0$ ist, so daß λ auch ein Pol von $BA^{-1}(\cdot)$ ist und die Ordnungen übereinstimmen. Schließlich folgt wie oben, daß σ_ι, $\iota \in \Lambda_2$, aus endlich vielen Polen von $A_\iota^{-1}(\cdot)B_\iota$ besteht. da $P_\iota(\sigma_\iota)$ auf die direkte Summe der zugehörigen algebraischen Eigenräume projiziert, folgt $\sigma_\iota = \{\mu_\iota^{(1)}, \ldots, \mu_\iota^{(m)}\}$ bei algebraischer Wiederholung der Eigenwerte. Die Konvergenz (16) ergibt sich mit Hilfe von (5). Damit ist alles bewiesen.

Einen isolierten Punkt $\lambda \in \sigma(A)$ wollen wir (bezüglich der betrachteten Approximation) *stabil* nennen, (s. [22, p. 437]), wenn (aF) und eine der Bedingungen

(15) (i)—(iv) erfüllt ist. Wir führen einige Kriterien für die Stabilität eines isolierten Punktes $\lambda\in\sigma(A)$ auf.

1. Sei (aF) erfüllt. Ist dann die Folge $(B_\iota)_{\Lambda_0}$ diskret kompakt und $R(P(\lambda))$ separabel, so ist λ stabil. Dies ergibt sich aus (17) bzw. (15), wenn man beachtet, daß wegen

$$\int_{\partial\Delta} A_\iota^{-1}(\xi)\,d\xi \to \int_{\partial\Delta} A^{-1}(\xi)\,d\xi \qquad (\iota\in\Lambda_1)$$

aus der diskreten Kompaktheit von $(B_\iota)_{\Lambda_0}$ auch die von $(P_\iota(\sigma_\iota))_{\Lambda_1}$ folgt.

2. Es sei $X_\iota = Y_\iota = X = Y$, $B_\iota = B = I$, $\iota\in\Lambda_0$, und die Folge $(A_\iota - A)_{\Lambda_0}$ sei stark konvergent gegen den Nulloperator sowie kollektiv kompakt im Sinne von Anselone [1], d.h. für jede beschränkte Menge $M\subset X$ ist $\bigcup(A_\iota - A)M$ relativ kompakt in X. Dann ist λ stabil, falls rank $P(\lambda)<\infty$ ist. Dies sieht man wie folgt ein. Trivialerweise bilden die Räume X, ΠX, lim mit der starken Konvergenz in X als diskreter Konvergenz eine diskrete Approximation. Es läßt sich unschwer zeigen, daß aus der kollektiven Kompaktheit der Folge $(A_\iota - A)_{\Lambda_0}$ ihre diskrete Kompaktheit sowie die Kompaktheit jedes $A_\iota - A$, $\iota\in\Lambda_0$, folgt. (In der Tat sind diese beiden Eigenschaften äquivalent.) Vermöge der Identität

$$A_\iota - \lambda I = (I - K_\iota)A(\lambda), \qquad K_\iota := (A - A_\iota)A^{-1}(\lambda), \qquad \lambda\in\varrho(A),$$

erkennt man dann, daß (aF) gilt; denn da $(K_\iota)_{\Lambda_0}$ diskret kompakt und konvergent ist, folgt die a-Regularität aus [17, 2.(2)], und da K_ι, $\iota\in\Lambda_0$, kompakt ist, folgt aus $N(A_\iota - \lambda I) = \{0\}$ auch $R(A_\iota - \lambda I) = X$. Schließlich ist

$$(\lambda I - A_\iota)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1} + (\lambda I - A)^{-1}(A_\iota - A)(\lambda I - A_\iota)^{-1}, \qquad \lambda\in\partial\Delta,\ \iota\in\Lambda_1.$$

Integriert man über $\partial\Delta$, so ergibt der erste Summand gerade die Spektralprojektion $P(\lambda)$, die kompakt und damit als konstante Folge aufgefaßt auch diskret kompakt ist. Die Folge der zweiten Summanden ist für jedes $\lambda\in\partial\Delta$ diskret kompakt. Daß sie es auch nach Integration über $\partial\Delta$ bleibt, folgt aus dem folgenden Lemma, das ein für unsere Zwecke ausreichender Spezialfall eines allgemeineren Satzes über die diskrete Kompaktheit von Limites diskret kompakter Folgen ist.

(18) *Sei Γ eine rektifizierbare Jordankurve, und sei $(K_\iota(\cdot))_{\Lambda_0}$ gleichgradig stetig auf Γ sowie an jeder Stelle $\lambda\in\Gamma$ diskret kompakt. Dann ist auch die Folge der längs Γ erstreckten Integrale über $K_\iota(\cdot)$ diskret kompakt.*

Beweis. Sei $(u_\iota)_\Lambda$ beschränkt. Sei $(Z_j)_{\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von Γ mit Feinheitsmaß $|Z_j|\to 0$ $(j\in\mathbb{N})$ sowie $S(Z_j, K_\iota)$ eine zu Z_j gehörige Riemannsche Summe des Integrals über K_ι. Da die Folge $(S(Z_j, K_\iota))_{\Lambda_0}$ für jedes j diskret kompakt ist, findet man Folgen $\Lambda_{j+1}\subset\Lambda_j\subset\Lambda$ und Elemente $v_j\in Y$ mit

$$S(Z_j, k_\iota)u_\iota \to v_j \qquad (\iota\in\Lambda_j),\ j\in\mathbb{N}. \tag{19}$$

Nach einem Diagonalprozeß kommt man zu einer Teilfolge $\Lambda'\subset\Lambda$, so daß (19) mit Λ' anstelle von Λ_j gilt. Sei $\varepsilon>0$ beliebig. Aufgrund der gleichgradigen Stetigkeit existiert dann ein j_0, so daß gilt

$$\|S(Z_j, K_\iota)u_\iota - S(Z_k, K_\iota)u_\iota\| < \varepsilon, \qquad \iota\in\Lambda',\ j, k\geqq j_0.$$

Hieraus folgt nach dem Grenzübergang $(\iota\in\Lambda')$ auch $\|v_j - v_k\|\leqq\varepsilon$, $j, k\geqq j_0$, so daß es ein $v\in Y$ mit $v_j\to v$ $(j\in\mathbb{N})$ gibt. Läßt man $k\to\infty$ gehen, so sieht man die

Gültigkeit von

$$\|v-v_{j_0}\| \leqq \varepsilon, \qquad \limsup_{\Lambda'} \|S(Z_{j_0}, K_\iota)\, u_\iota - \int_\Gamma K_\iota(\lambda)\, d\lambda\, u_\iota\| \leqq \varepsilon,$$

woraus die diskrete Konvergenz der vorstehenden Integrale für $(\iota \in \Lambda')$ gegen v aus dem Kriterium [30, 1.1.(10)] folgt.

3. Als weiteres Beispiel betrachten wir den Fall, daß eine Folge linearer Operatoren $R_\iota: X \to X_\iota$, $\iota \in \Lambda_0$, mit der Eigenschaft

$$(20) \qquad u^{(\iota)} \to u \quad (\iota \in \Lambda) \quad \text{in} \quad X \Rightarrow R_\iota u^{(\iota)} \to u \quad (\iota \in \Lambda) \quad \text{in} \quad \mathscr{A}(X, \Pi X_\iota, \lim),$$

und eine beschränkte Folge von Operatoren $J_\iota: X_\iota \to X$ existieren, mit denen gilt

$$(21) \qquad \|A_\iota^{-1}(\lambda)\, B_\iota - R_\iota A^{-1}(\lambda)\, B J_\iota\| \to 0 \qquad (\iota \in \Lambda)$$

für jedes $\lambda \in \varrho(A) \cap \varrho(A_\iota)$, $\iota \in \Lambda$. Ist dann (aF) erfüllt, so ist jeder isolierte Punkt $\lambda \in \sigma(A)$ mit rank $P(\lambda) < \infty$ stabil, wovon man sich leicht überzeugt. In diese Situation paßt sich insbesondere die gleichmäßige Konvergenz $\|A_\iota - A\| \to 0$, $\|B_\iota - B\| \to 0$ $(\iota \in \Lambda_0)$ ein, wenn man $X_\iota = X$, $Y_\iota = Y$, $R_\iota = J_\iota = I$, $\iota \in \Lambda_0$ wählt.

Wir beenden diesen Abschnitt mit zwei Bemerkungen.

Bemerkung. In [20] sind Eigenwertprobleme der Gestalt (1) mit nicht notwendig beschränkten Operatoren A und$B$ betrachtet worden unter den Bedingungen $D(A) \subset D(B)$, $A(\lambda) \in C(X, Y)$, $\lambda \in G$, und

$$(22) \qquad \|Bu\| \leqq \alpha(\lambda_0)\, (\|u\| + \|A(\lambda_0)\, u\|), \qquad u \in D(A),\ \lambda_0 \in \varrho(A),$$

wobei $\alpha(\lambda_0)$ eine von u unabhängige Zahl ist. Führt man in $D(A)$ die Graphennorm $\|u\|_A = \|u\|_X + \|Au\|_Y$ ein, so wird $D(A)$ ein Banachraum, und die durch A, B induzierten Operatoren $\tilde{A}, \tilde{B}: D(A) \to Y$ sind beschränkt, was man für $\tilde{B}$ aus der Beschränktheit von $\tilde{A}(\lambda)$, $\lambda \in G$, erschließt, die ihrerseits aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen folgt. Die Bedingung (22) hat zur Folge, daß $\sigma(\tilde{A}) = \sigma(A)$ ist. Außerdem stimmen offenbar die Hauptvektoren von A und $\tilde{A}$ sowie ihre Stufe überein. Damit hat man ein äquivalentes Eigenwertproblem $(\lambda \tilde{B} - \tilde{A})\, u = 0$ mit beschränkten Operatoren gefunden. Daß wir trotzdem die Theorie für unbeschränktes A entwickelt haben, findet seine Begründung darin, daß Eigenschaften wie die Selbstadjungiertheit oder die Normalität von A sich nicht unbedingt auf $\tilde{A}$ übertragen. Außerdem ist die vorliegende Form für manche Anwendung angepaßter, zumal die Beweise für beschränktes A keine Verkürzung mit sich bringen.

Bemerkung. Für manche Anwendung ist es bequem, in nicht notwendig vollständigen Räumen X, Y arbeiten zu können. In [31] ist gezeigt worden, daß dies unter der Voraussetzung beschränkter Operatoren A, A_ι, $\iota \in \Lambda_0$, und vollstetiger Operatoren B, B_ι, $\iota \in \Lambda_0$, möglich ist. Wir geben eine Schlußweise an, mit der man diesen Fall in den von uns behandelten einpassen kann.

Mit $\tilde{X}$ bzw. $\tilde{Y}$ bezeichnen wir die vollständigen Hüllen von X bzw. Y und identifizieren X bzw. Y mit einem dichten Teilraum von $\tilde{X}$ bzw. $\tilde{Y}$. Die Operatoren A, B können dann in eindeutiger Weise durch Stetigkeit zu Operatoren $A, B \in B(\tilde{X}, \tilde{Y})$ fortgesetzt werden, wobei B ebenfalls vollstetig ist. Das folgende Lemma zeigt, daß sich dabei das Spektrum und die algebraischen Eigenräume nicht ändern.

(23) *Sei $\varrho(A) \neq \emptyset$. Dann bestehen $\sigma(A)$ bzw. $\sigma(\tilde{A})$ aus isolierten Eigenwerten endlicher algebraischer Vielfachheit, die Pole von $A^{-1}(\cdot)B$ bzw. $\tilde{A}^{-1}(\cdot)\tilde{B}$ sind. Es ist $\sigma(A)=\sigma(\tilde{A})$, und die algebraischen Eigenräume von A und $\tilde{A}$ sowie die Ordnung der Pole der zugehörigen Resolvente zu denselben Eigenwerten stimmen überein.*

Beweis. Sei $\alpha \in \varrho(A)$. Es ist leicht zu sehen, daß dann auch $\alpha \in \varrho(\tilde{A})$ ist, wobei $[\tilde{A}(\alpha)]^{-1}$ durch die stetige Fortsetzung von $A^{-1}(\alpha)$ auf $\tilde{Y}$ gegeben ist. Daher ist $\varrho(A) \subset \varrho(\tilde{A})$. Es ist auch nicht schwer einzusehen, daß $\varrho(\tilde{A}) \subset \varrho(A)$ ist, so daß $\sigma(A)=\sigma(\tilde{A})$ gilt. Aus [12, 1.(17)] folgt die Struktur von $\sigma(\tilde{A})$. Sei $\lambda_0 \in \sigma(\tilde{A})$ und $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ein genügend kleiner Kreis mit Mittelpunkt λ_0. Ist $\varphi \in C(\Gamma)$, so existiert gemäß [31, 1.2.(6)] das Resolventenintegral

$$\int_\Gamma \varphi(\lambda) A^{-1}(\lambda) B \, d\lambda$$

als Operator in $B(X)$. Beachtet man die Gültigkeit von $R(\tilde{A}_{-1})=\tilde{A}_{-1}X$, was aus der Dichtheit von X in $\tilde{X}$ und der Eigenschaft $\dim R(\tilde{A}_{-1}) < \infty$ folgt, so erkennt man $R(\tilde{A}_{-1}) \subset X$, so daß λ_0 auch ein Eigenwert von A ist und die algebraischen Eigenräume von A und $\tilde{A}$ zu λ_0 übereinstimmen. Restringiert man die in einer punktierten Umgebung von λ_0 gültige Laurententwicklung von $\tilde{A}^{-1}(\cdot)\tilde{B}$ auf X, so erhält man die Laurententwicklung von $A^{-1}(\cdot)B$, so daß λ ein Pol von $A^{-1}(\cdot)B$ ist mit einer Ordnung p, die nicht größer als die Ordnung p_0 von λ_0 als Pol von $\tilde{A}^{-1}(\cdot)\tilde{B}$ ist. Da aber mindestens ein Hauptvektor u von $\tilde{A}$ zu λ_0 der Stufe p_0 existiert und u in X liegt, ist $p=p_0$.

3. Weitere Konvergenzresultate

Dieser Abschnitt bringt einige Ergänzungen zu den Ergebnissen des zweiten Abschnitts. Nach einer Bemerkung über symmetrische Eigenwertaufgaben beweisen wir Beziehungen zwischen den Ordnungen der Pole und den Dimensionen gewisser Teilräume der algebraischen Eigenräume. Derartige Resultate sind von Anselone [1] im Zusammenhang mit kollektiv kompakten Operatorfolgen bewiesen worden und lassen sich auf den von uns betrachteten Fall verallgemeinern. Zum Ende dieses Abschnitts schließen wir einige Überlegungen zur Konstruktion einer konvergenten Basis von Hauptvektoren an.

Das Eigenwertproblem 2.(1) heißt *J-symmetrisch*, wenn eine Abbildung $J: D(A) \to Y^*$ existiert mit der Eigenschaft

$$(1) \qquad (Ju, Av)=\overline{(Jv, Au)}, \qquad (Ju, Bv)=\overline{(Jv, Bu)}, \qquad u, v \in D(A).$$

Es heißt *J-definit*, wenn Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ existieren mit

$$(2) \qquad (Ju, \alpha Au+\beta Bu) \neq 0, \qquad 0 \neq u \in D(A).$$

Dann sind die Eigenwerte von 2.(1) reell, und es existieren keine Hauptvektoren einer Stufe größer als eins (s. [31, S. 241], vgl. auch [12, 1.(18)]). Mit Hilfe von 2.(15) beweist man leicht das folgende Ergebnis (s. [12, S. 68], [31, S. 258]).

(3) *Das Problem* 2. (1) *sei* J*-symmetrisch und* J*-definit. Sei* $c<d$ *und*

$$(c,d)\cap\sigma(A)=[c,d]\cap\sigma(A)=\{\mu^{(1)},\ldots,\mu^{(m)}\},$$

wobei $\mu^{(1)}\leqq\mu^{(2)}\leqq\cdots\leqq\mu^{(m)}$ *ihrer geometrischen Vielfachheit nach wiederholte stabile Eigenwerte von* (1) *sind. Sei* $\beta>0$ *beliebig gewählt. Dann besteht*

$$\sigma(A_\iota)\cap\{\lambda\in G\,|\,\operatorname{Re}\lambda\in(c,d),\ |\operatorname{Im}\lambda|\leqq\beta\}$$

für ein Endstück Λ_1 *aus* m *algebraisch wiederholten Eigenwerten* $\mu_\iota^{(1)}$, $j=1,\ldots,m$. *Ordnet man sie nach der Vorschrift*

$$\operatorname{Re}\mu_\iota^{(1)}\leqq\operatorname{Re}\mu_\iota^{(2)}\leqq\cdots\leqq\operatorname{Re}\mu_\iota^{(m)},\qquad \iota\in\Lambda_1,$$

so konvergiert $\mu_\iota^{(j)}\to\mu^{(j)}$ $(\iota\in\Lambda_1)$, $j=1,\ldots,m$.

Sind die approximierenden Probleme 2. (2) J_ι-symmetrisch und J_ι-definit, so hat (2) nur reelle Eigenwerte mit übereinstimmender geometrischer und algebraischer Vielfachheit, so daß sich (3) entsprechend vereinfachen läßt.

(4) *Sei* $\lambda\in\sigma(A)$ *ein stabiler Eigenwert, und seien* σ_ι, $\iota\in\Lambda_1$, *die gegen* λ *konvergierenden Eigenwerte aus* $\sigma(A_\iota)$. *Seien* $q_\iota\colon\sigma_\iota\to\mathbb{Z}_+$, $\iota\in\Lambda_1$ *Funktionen mit*

$$q:=\limsup_{\Lambda_1}\sum_{\lambda_\iota\in\sigma_\iota}q_\iota(\lambda_\iota)<\infty.$$

Ist $s_\iota(\lambda_\iota)$ *bzw.* s *die Dimension des Teilraums* $M_\iota(\lambda_\iota)$ *bzw.* M *der Hauptvektoren von* A_ι *zu* λ_ι *bzw. von* A *zu* λ *der Stufe höchstens* $q_\iota(\lambda_\iota)$ *bzw.* q, *dann gilt*

$$\limsup_{\Lambda_1}\sum_{\lambda_\iota\in\sigma_\iota}s_\iota(\lambda_\iota)\leqq s.$$

Beweis. O.B.d.A. kann man $q=\sum q_\iota(\lambda_\iota)$, $\iota\in\Lambda_1$, annehmen. Sei M_ι die direkte Summe der $M_\iota(\lambda_\iota)$, $\lambda_\iota\in\sigma_\iota$. Ist $u_\iota\in M_\iota$, $\iota\in\Lambda$, eine beschränkte Folge, so gilt

$$u_\iota=\sum_{\lambda_\iota\in\sigma_\iota}u_\iota(\lambda_\iota),\qquad \iota\in\Lambda,$$

mit Elementen $u_\iota(\lambda_\iota)\in M_\iota(\lambda_\iota)$. Seien $\alpha\in\varrho(A)$ und $T:=-A^{-1}(\alpha)B$, $T_\iota:=-A_\iota^{-1}(\alpha)B_\iota$, $\iota\in\Lambda$, wobei wir o.B.d.A. $\alpha\in\varrho(A_\iota)$, $\iota\in\Lambda$, angenommen haben. Aus [12, 1.(6)] folgt, daß $u_\iota(\lambda_\iota)$ im Teilraum der Hauptvektoren der Stufe kleiner gleich $q_\iota(\lambda_\iota)$ von T_ι zum Eigenwert $\phi(\lambda_\iota)$ liegt mit $\phi(\lambda):=(\lambda-\alpha)^{-1}$. Damit gilt

$$\prod_{\lambda_\iota\in\sigma_\iota}(T_\iota-\phi(\lambda_\iota)I_\iota)^{q_\iota(\lambda_\iota)}u_\iota=0,\qquad \iota\in\Lambda.$$

Für eine Teilfolge $\Lambda'\subset\Lambda$ konvergiert $u_\iota\to u$ $(\iota\in\Lambda')$. Wegen $T_\iota\to T$ und $\phi(\lambda_\iota)\to\phi(\lambda)$ $(\iota\in\Lambda')$ ergibt sich $(T-\phi(\lambda)I)^q u=0$, und u liegt, wiederum wegen [12, 1.(6)], im Teilraum der Hauptvektoren der Stufe höchstens q von A zu λ. Hieraus erschließt man mit der in [31, 3.1.(5)] verwendeten Argumentation die Behauptung.

Mit dem vorangehenden Beweis haben wir auch gleich die Gültigkeit des folgenden Korollars gezeigt.

(5) *Sei* $\lambda\in\sigma(A)$ *ein stabiler Eigenwert, und sei* $\lambda_\iota\in\sigma(A_\iota)$ *mit* $\lambda_\iota\to\lambda$ $(\iota\in\Lambda)$. *Sei* $q_\iota\in\mathbb{N}$, $\iota\in\Lambda$, *und*

$$q:=\limsup_{\Lambda}q_\iota<\infty.$$

Ist M_ι bzw. M der Teilraum der Hauptvektoren von A_ι zu λ_ι bzw. von A zu λ der Stufe kleiner gleich q_ι bzw. q, so gilt

$$\limsup_\Lambda \dim M_\iota \leqq \dim M.$$

Ist $u_\iota \in M_\iota$, $\iota \in \Lambda$, eine beschränkte Folge, so konvergiert für eine Teilfolge $\Lambda' \subset \Lambda$ und ein $u \in M$

$$u_\iota \to u \qquad (\iota \in \Lambda').$$

Unter den Voraussetzungen von (5) kann demnach insbesondere aus jeder Folge von Eigenvektoren u_ι von A_ι zu λ_ι mit $\|u_\iota\| = 1$ stets eine gegen einen Eigenvektor u von A zu λ konvergente Teilfolge ausgewählt werden, wobei gilt

$$\limsup_\Lambda \dim N(\lambda_\iota B_\iota - A_\iota) \leqq \dim N(\lambda B - A).$$

(6) *Sei $\lambda \in \sigma(A)$ ein stabiler Eigenwert der algebraischen Vielfachheit m und der Ordnung p. Seien σ_ι, $\iota \in \Lambda_1$, die gegen λ konvergierenden Eigenwerte aus $\sigma(A_\iota)$ und $p_\iota(\lambda_\iota)$ ihre Ordnungen. Dann gilt*

$$p \leqq \liminf_{\Lambda_1} \sum_{\lambda_\iota \in \sigma_\iota} p_\iota(\lambda_\iota) \leqq \limsup_{\Lambda_1} \sum_{\lambda_\iota \in \sigma_\iota} p_\iota(\lambda_\iota) \leqq m.$$

Beweis. Hauptvektoren verschiedener Stufen sind linear unabhängig, und die Summe über die algebraischen Eigenräume $M_\iota(\lambda_\iota)$ zu λ_ι, $\lambda_\iota \in \sigma_\iota$, ist direkt. Da es einen Hauptvektor von A_ι zu λ_ι der Stufe $p_\iota(\lambda_\iota)$ gibt (s. [12, 1.(16)]) und gemäß (15) die Summe der algebraischen Vielfachheit der λ_ι für fast alle $\iota \in \Lambda_0$ gleich m ist, folgt die letzte der behaupteten Ungleichungen. Zum Beweis der ersten sei u ein Hauptvektor von A zu λ der Stufe p, und sei $u_\iota \in M_\iota$ mit $u_\iota \to u$ $(\iota \in \Lambda_1)$. Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von (5) gilt dann

$$\prod_{\lambda_\iota \in \sigma_\iota} (T_\iota - \phi(\lambda_\iota) I_\iota)^{p_\iota(\lambda_\iota)} u_\iota = 0, \qquad \iota \in \Lambda_1.$$

Ist $\Lambda \subset \Lambda_1$ eine Teilfolge, so daß $p_0 := \liminf_{\Lambda_0} \sum p_\iota(\lambda_\iota) = \sum p_\iota(\lambda_\iota)$, $\iota \in \Lambda$, ist, so folgt das Bestehen von $(T - \phi(\lambda) I)^{p_0} u = 0$, also $p_0 \geqq p$.

Der zweite Teil der Behauptung in (6) ist in [20, 4.(11)] mit etwas anderer Schlußweise bewiesen worden.

Im Zusammenhang mit dem letzten Teil von (5) stellt sich die Frage nach der Bestimmung einer Basis von Hauptvektoren von A_ι, die gegen eine Basis von Hauptvektoren von A zu λ konvergiert. Für unsere diesbezüglichen Aussagen benötigen wir die diskrete schwache Konvergenz $f_\iota \rightharpoonup f$ $(\iota \in \Lambda)$ einer Folge von Funktionalen $f_\iota \in X_\iota^*$ gegen ein $f \in X^*$, die definiert ist durch (s. [30, 2.1.(1)])

$$\text{(7)} \qquad u_\iota \to u \ \ (\iota \in \Lambda) \Rightarrow (f_\iota, u_\iota) \to (f, u) \ \ (\iota \in \Lambda).$$

(8) *Sei $\lambda \in \sigma(A)$ ein geometrisch einfacher, stabiler Eigenwert, sei $\lambda_\iota \in \sigma(A_\iota)$ mit $\lambda_2 \to \lambda$ $(\iota \in \Lambda)$ und konvergiere $f_\iota \rightharpoonup f$ $(\iota \in \Lambda)$. Sind u_1, $\iota \in \Lambda$, Eigenvektoren von A_ι zu λ_ι mit*

$$\|u_\iota\| = 1, \qquad \liminf_\Lambda (f_\iota, u_\iota) > 0,$$

so konvergiert $u_\iota \to u$ $(\iota \in \Lambda)$, wobei u ein Eigenvektor von A zu λ ist.

Beweis. Gemäß (5) gibt es zu jeder Teilfolge $\Lambda' \subset \Lambda$ eine weitere Teilfolge $\Lambda'' \subset \Lambda'$ und einen Eigenvektor u von A zu λ mit $u_\iota \to u$ $(\iota \in \Lambda'')$. Dieses u genügt den beiden Bedingungen $\|u\|=1$ und $(f, u)>0$, wodurch u eindeutig bestimmt ist. Mit bekannter Schlußweise folgt hieraus die Behauptung.

Wie man leicht sieht, lassen sich Eigenvektoren mit der in (8) verlangten Normierung genau dann finden, wenn für einen Eigenvektor u_0 von A zu λ gilt $(f, u_0)\neq 0$. Dies weiß man ohne Kenntnis des ja noch zu berechnenden u_0 nicht unbedingt von vornherein, doch wird $(f, u_0)\neq 0$ automatisch gesichert, wenn man die u_ι wie in (8) verlangt normalisieren kann. Eine Variante zu (8) in der nicht verlangt wird, daß $\|u_\iota\|=1$ ist, lautet wie folgt.

(9) *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von* (8) *sei* $(f, u_0)\neq 0$ *für einen Eigenvektor* u_0 *von* A *zu* λ. *Dann gibt es für ein Endstück* Λ_1 *eindeutig bestimmt Eigenvektoren* u_ι *von* A_ι *zu* λ_ι *mit*

(10) $$(f_\iota, u_\iota)=1, \qquad \iota\in\Lambda_1,$$

und es konvergiert $u_\iota\to u$ $(\iota\in\Lambda_1)$ *gegen einen Eigenvektor* u *von* A *zu* λ.

Beweis. Gemäß (5) ist λ_ι für fast alle $\iota\in\Lambda$ geometrisch einfach, und mit Hilfe der Vorbemerkungen erschließt man die Existenz und Eindeutigkeit der u_ι. Wir zeigen als nächstes die Beschränktheit von $(u_\iota)_{\Lambda_1}$. Im anderen Falle konvergiert $\|u_\iota\|\to\infty$ $(\iota\in\Lambda)$ für eine Teilfolge Λ. Dann ist die Folge $v_\iota := u_\iota/\|u_\iota\|$, $\iota\in\Lambda$, auf eins normiert, und wegen (5) geht $v_\iota\to v$ $(\iota\in\Lambda')$, wobei v ein Eigenelement von A zu λ ist. Offenbar ist $\|v\|=1$ aber $(f, v)=0$, was ein Widerspruch ist. Nunmehr kann man zu jeder Teilfolge $\Lambda\subset\Lambda_0$ eine weitere Teilfolge $\Lambda'\subset\Lambda$ und ein Eigenelement u von A zu λ finden mit $u_\iota\to u$ $(\iota\in\Lambda')$, $(f, u)=1$. Durch die letzte Bedingung ist u eindeutig bestimmt, und man erschließt in bekannter Weise $u_\iota\to u$ $(\iota\in\Lambda_1)$.

Die in (9) verwendete Schlußweise kann leicht verallgemeinert werden, um den folgenden Satz zu beweisen.

(11) *Sei* $\lambda\in\sigma(A)$ *ein stabiler Eigenwert der algebraischen Vielfachheit* m, *sei* M *der zugehörige algebraische Eigenraum, und sei* M_ι, $\iota\in\Lambda_1$, *die Summe der algebraischen Eigenräume zu den gegen* λ *konvergierenden Eigenwerten von* A_ι. *Seien* $f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}\in X^*$, *so daß für jedes* $u\in M$ *gilt*

(12) $$(f^{(j)}, u)=0, \qquad j=1, \ldots, m \Rightarrow u=0,$$

und konvergiere $f_\iota^{(j)}\to f^{(j)}$ $(\iota\in\Lambda_0)$. *Dann gibt es für ein Endstück* Λ_1 *eine eindeutig bestimmte Basis* $u_\iota^{(1)}, \ldots, u_\iota^{(m)}$ *von* M_ι *mit*

(13) $$(f_\iota^{(j)}, u_\iota^{(k)})=\delta_{jk}, \qquad j, k=1, \ldots, m, \ \iota\in\Lambda_1,$$

und es konvergiert $u_\iota^{(j)}\to u^{(j)}$ $(\iota\in\Lambda_1)$, $j=1, \ldots, m$, *gegen eine Basis* $u^{(1)}, \ldots, u^{(m)}$ *von* M.

4. Diskrete Approximationen von Dualsystemen

Dieser Abschnitt dient als Vorbereitung für das Studium diskreter Approximationen des adjungierten Eigenwertproblems.

Für das Folgende benötigen wir einige Definitionen. Wir beginnen mit der Einführung einer Variante der diskreten schwachen Approximation aus [16, 1.(4)].

(1) *Die Räume* E, E_ι, $\iota\in\Lambda_0$, *bilden eine diskrete schwache normierte Approximation, kurz: sn-Approximation, wenn* E, E_ι, $\iota\in\Lambda_0$ *normierte Räume sind und eine*

Konvergenz „$\rightharpoonup$" von Folgen $(u_\iota)_\Lambda$ von Elementen $u_\iota \in E_\iota$, $\iota\in\Lambda$, gegen Elemente $u\in E$ erklärt ist mit den folgenden Eigenschaften

(i) $u_\iota \rightharpoonup u\ (\iota\in\Lambda) \Rightarrow u_\iota \rightharpoonup u\ (\iota\in\Lambda')$, $\Lambda'\subset\Lambda$.

(ii) $u_\iota \rightharpoonup u$, $v_\iota \rightharpoonup v\ (\iota\in\Lambda) \Rightarrow \alpha u_\iota + \beta v_\iota \rightharpoonup \alpha u + \beta v\ (\iota\in\Lambda)$, $\alpha, \beta\in\mathbb{C}$.

(iii) $\|u_\iota\| \to 0\ (\iota\in\Lambda) \Rightarrow u_\iota \rightharpoonup 0\ (\iota\in\Lambda)$.

(iv) $u_\iota \rightharpoonup u\ (\iota\in\Lambda) \Rightarrow \|u\| \leqq \liminf_\Lambda \|u_\iota\|$.

(v) $u_\iota \rightharpoonup u\ (\iota\in\Lambda) \Rightarrow \exists\alpha\colon \|u_\iota\| \leqq \alpha$, $\iota\in\Lambda$.

(vi) $\forall u\in E\, \exists u_\iota\in E_\iota$, $\iota\in\Lambda_0$, mit $u_\iota \rightharpoonup u\ (\iota\in\Lambda_0)$.

Eine einfache Eigenschaft, die bei Approximationen mit konvergenter Metrik bekannt ist (s. [31, 3.1.(1)]), überträgt sich auf den hier betrachteten Fall.

(2) *Ist $E, \Pi E_\iota$ eine sn-Approximation, so gilt* $\dim E \leqq \liminf_{\Lambda_0} \dim E_\iota$.

Beweis. Seien $u^{(1)}, \ldots, u^{(m)}$ linear unabhängige Elemente aus E. Dann gibt es $u_\iota^{(j)} \in E_\iota$ mit $u_\iota^{(j)} \rightharpoonup u^{(j)}\ (\iota\in\Lambda_0)$, $j=1,\ldots,m$. Die Elemente $u_\iota^{(j)}$, $j=1,\ldots,m$, sind für fast alle $\iota\in\Lambda_0$ linear unabhängig. Anderenfalls gibt es eine Teilfolge Λ und Zahlen $c_\iota^{(j)}$ mit

$$\sum_{j=1}^{m} c_\iota^{(j)} u_\iota^{(j)} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{m} |c^{(j)}| = 1, \qquad \iota\in\Lambda.$$

O.B.d.A. kann man $c_\iota^{(j)} \to c^{(j)}\ (\iota\in\Lambda)$ annehmen. Damit gilt $|c^{(1)}| + \cdots + |c^{(m)}| = 1$, und man erhält den Widerspruch

$$0 = \sum_{j=1}^{m} c_\iota^{(j)} u_\iota^{(j)} \rightharpoonup \sum_{j=1}^{m} c^{(j)} u^{(j)} \neq 0 \qquad (\iota\in\Lambda).$$

Ziel dieses Abschnitts ist es, diskrete Approximationen von Dualsystemen $\langle E, F\rangle$ zu studieren. Ein Dualsystem $\langle E, F\rangle$ wird gebildet aus normierten Räumen E, F, für die eine beschränkte Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $E\times F$ existiert mit den beiden Eigenschaften (i) $\langle u, v\rangle = 0$, $v\in F \Rightarrow u = 0$ und (ii) $\langle u, v\rangle = 0$, $u\in E \Rightarrow v = 0$.

(3) *$\langle E, F\rangle, \Pi\langle E_\iota, F_\iota\rangle$ heißt diskrete Dualapproximation, wenn $\langle E, F\rangle$ ein Dualsystem ist und die folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

(i) *$E, \Pi E_\iota$ und $F, \Pi F_\iota$ bilden sn-Approximationen.*

(ii) *Ist $\Lambda\subset\Lambda_0$ und $u_\iota\in E_\iota$, $\iota\in\Lambda$, so konvergiert $u_\iota \rightharpoonup u\ (\iota\in\Lambda)$ genau dann, wenn für jede Teilfolge $\Lambda'\subset\Lambda$ und für $v_\iota\in F_\iota$, $\iota\in\Lambda'$, gilt,*

(4) $$v_\iota \rightharpoonup v \quad (\iota\in\Lambda') \Rightarrow \langle u_\iota, v_\iota\rangle \to \langle u, v\rangle \quad (\iota\in\Lambda').$$

(iii) *Ist $\Lambda\subset\Lambda_0$ und $v_\iota\in F_\iota$, $\iota\in\Lambda$, so konvergiert $v_\iota \rightharpoonup v\ (\iota\in\Lambda)$ genau dann, wenn für jede Teilfolge $\Lambda'\subset\Lambda$ und für $u_\iota\in E_\iota$, $\iota\in\Lambda'$, gilt*

(5) $$u_\iota \rightharpoonup u\,(\iota\in\Lambda') \Rightarrow \langle u_\iota, v_\iota\rangle \to \langle u, v\rangle\,(\iota\in\Lambda').$$

Wir bringen zwei Beispiele zu diesen Begriffsbildungen. Sei $X, \Pi X_\iota$, lim eine diskrete Approximation mit konvergenten Metriken. Insbesondere ist dann $X, \Pi X_\iota$ auch ein sn-Approximation. In [16, 1.(12)] ist gezeigt worden, daß bei separablem X die Räume $X^*, \Pi X_\iota^*$ mit der in 3.(7) verwendeten schwachen Konvergenz eine sn-Approximation sind. Mit den Sätzen 2.3.(4), 2.1.(6) aus [30] folgt dann, daß $\langle X^*, X\rangle, \Pi\langle X_\iota^*, X_\iota\rangle$ eine Dualapproximation definieren.

Eine Verallgemeinerung dieses Beispiels ist in der folgenden Nummer enthalten, in der wir wie vorangehend annehmen, daß $\mathscr{A}(X, \Pi X_\iota, \lim)$ eine diskrete Approximation mit konvergenten Metriken ist und $X^*, \Pi X_\iota^*$ mit der in 3. (7) definierten schwachen Konvergenz versehen ist.

(6) *Seien $P, P_\iota, \iota\in\Lambda_0$, lineare Projektionen in X bzw. X_ι mit $P_\iota \to P\,(\iota\in\Lambda_0)$. Dann sind P sowie $P_\iota, \iota\in\Lambda_1$, stetig, und $\langle R(P^*), R(P)\rangle$ bildet ein Dualsystem mit der natürlichen Dualität. Ist $R(P)$ separabel, so ist $\Pi\langle R(P_\iota^*), R(P_\iota)\rangle$ eine diskrete Dualapproximation von $\langle R(P^*), R(P)\rangle$, und zu jeder beschränkten Folge von Funktionalen $f_\iota\in R(P_\iota^*)$, $\iota\in\Lambda$, gibt es ein $\Lambda'\subset\Lambda$ und ein $f\in R(P^*)$ mit $f_\iota \rightharpoonup f\,(\iota\in\Lambda')$.*

Beweis. Aus $P_\iota\to P\,(\iota\in\Lambda_0)$ folgt die Stabilität der Folge $(P_\iota)_\Lambda$ und die Stetigkeit von P (s. [30, 1.2. (6), (7)]). Offenbar stellt $\langle R(P^*), R(P)\rangle$ ein Dualsystem dar. Es ist leicht zu sehen, daß $R(P), \Pi R(P_\iota)$ eine diskrete Approximation mit der durch $X, \Pi X_\iota$, lim induzierten Konvergenz bildet.

Sei nun $f\in R(P^*)$, $f_\iota\in R(P_\iota^*)$, $\iota\in\Lambda$, und gelte für $v_\iota\in R(P_\iota)$ und $\Lambda'\subset\Lambda$

$$v_\iota\to v\quad(\iota\in\Lambda')\Rightarrow\langle f_\iota, v_\iota\rangle\to\langle f, v\rangle\quad(\iota\in\Lambda').$$

Ist dann $u\in X$, $u_\iota\in X_\iota$ und konvergiert $u_\iota\to u\,(\iota\in\Lambda)$, so berechnet man

$$(f_\iota, u_\iota)=(P_\iota^* f_\iota, u_\iota)=(f_\iota, P_\iota u_\iota)\to(f, Pu)=(f, u)\qquad(\iota\in\Lambda).$$

Dies zeigt $f_\iota\rightharpoonup f\,(\iota\in\Lambda)$, womit Bedingung (3) (iii) als erfüllt nachgewiesen ist.

Als nächstes zeigen wir, daß $R(P^*), \Pi R(P_\iota^*)$ mit der durch $X^*, \Pi X_\iota^*$ induzierten Konvergenz eine sn-Approximation ist. Wir bemerken als erstes, daß wegen $P_\iota^*\rightharpoonup P^*\,(\iota\in\Lambda_0)$ (s. [30, 2.2. (3)]) aus $f_\iota\in R(P_\iota^*)$, $f_\iota\rightharpoonup f\,(\iota\in\Lambda)$ folgt $f\in R(P^*)$. Wir müssen noch zeigen, daß jedes $f\in R(P^*)$ schwacher Limes ist. Dazu folgen wir dem Beweis von 1. (12) aus [16]. Sei $u^{(j)}$, $j\in\mathbb{N}$, ein linear unabhängiges System, dessen lineare Hülle in $R(P)$ dicht liegt (der Fall $\dim R(P)<\infty$ ist bei sinngemäßer Deutung im Beweis mitenthalten). Sei $u_\iota^{(j)}\in R(P_\iota)$ und konvergiere

$$z_\iota^{(j)}\to u^{(j)}\qquad(\iota\in\Lambda_0).$$

Mit $M^{(m)}$ bzw. $M_\iota^{(m)}$ bezeichnen wir die von den jeweils m ersten Elementen aufgespannten Teilräume. Wie im Beweis von [16, 1. (12)] findet man zu jedem $m\in\mathbb{N}$ ein Endstück $\Lambda_m\subset\Lambda_0$ mit $\Lambda_m\subset\Lambda_{m-1}$, so daß

$$J_\iota^{(m)}: M_\iota^{(m)}\ni u_\iota=\sum_{j=1}^{m}\alpha^{(j)}u_\iota^{(j)}\to\sum_{j=1}^{m}\alpha^{(j)}u^{(j)}\in M^{(m)},\qquad\iota\in\Lambda_m,$$

eine umkehrbar eindeutige lineare Abbildung definiert mit der Eigenschaft

$$\|J_\iota^{(m)}u_\iota\|\leqq\left(1+\frac{1}{m}\right)\|u_\iota\|,\qquad u_\iota\in M_\iota^{(m)},\ \iota\in\Lambda_m,$$

sowie

$$(J_\iota^{(m)})^{-1}u\to u\quad(\iota\in\Lambda_m),\qquad J_\iota^{(n)}(J_\iota^{(m)})^{-1}u=u,\quad n\geqq m,\ u\in M^{(m)}.$$

Sei $f\in R(P^*)$ gegeben. Wir definieren Funktionale $f_\iota^{(m)}$ auf der direkten Summe $N(P_\iota)\oplus M_\iota^{(m)}$ durch

$$(f_\iota^{(m)}, v_\iota)=(f, J_\iota^{(m)}P_\iota v_\iota),\qquad v_\iota\in N(P_\iota)\oplus M_\iota^{(m)},\ \iota\in\Lambda_m,\ m\in\mathbb{N}.$$

Offenbar ist $f_\iota^{(m)}$ beschränkt auf $N(P_\iota)\oplus M_\iota^{(m)}$, und die Norm gestattet die Abschätzung

$$\|f_\iota^{(m)}\| \leqq \left(1+\frac{1}{m}\right)\|P_\iota\|\|f\|, \qquad \iota\in\Lambda_m,\ m\in\mathbb{N}. \tag{7}$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach kann man diese Funktionale unter Erhaltung ihrer Norm auf X_ι fortsetzen. Für die fortgesetzten Funktionale verwenden wir wieder dieselbe Bezeichnung. Nach Konstruktion gilt $f_\iota^{(m)}\in N(P_\iota)^\perp$, also $f_\iota^{(m)}\in R(P_\iota^*)$, $\iota\in\Lambda_m$. Wir definieren

$$f_\iota=0,\quad \iota\in\Lambda_0\setminus\Lambda_1,\qquad f_\iota=f_\iota^{(m)},\quad \iota\in\Lambda_m\setminus\Lambda_{m+1},\ m\in\mathbb{N}.$$

Dann ist $f_\iota\in R(P_\iota^*)$, $\iota\in\Lambda_0$, und wir behaupten $f_\iota\rightharpoonup f\ (\iota\in\Lambda_0)$. In der Tat gilt für $u_\iota\in R(P_\iota)$ mit $u_\iota\to u\ (\iota\in\Lambda)$, für $v\in M^{(m)}$ und $\iota\in\Lambda_m\cap\Lambda$

$$|(f_\iota,u_\iota)-(f,u)|\leqq\|f_\iota\|\|u_\iota-(J_\iota^{(m)})^{-1}v\|+\|f\|\|u-v\|,$$

woraus man nach Ausführung des Grenzübergangs $(\iota\in\Lambda)$ bei Ausnutzung der Eigenschaft, daß die Vereinigung der $M^{(m)}$, $m\in\mathbb{N}$, in $R(P)$ dicht liegt, die Konvergenz $(f_\iota,u_\iota)\to(f,u)$ erhält. Mit dem bereits Bewiesenen ist somit $f_\iota\rightharpoonup f\ (\iota\in\Lambda_0)$ gezeigt. Wir bemerken noch, daß aus (7) durch Grenzübergang folgt

$$\limsup_{\Lambda_0}\|f_\iota\|\leqq\|f\|\limsup_{\Lambda_0}\|P_\iota\|. \tag{8}$$

Als nächstes zeigen wir die schwache Kompaktheit beschränkter Folgen von Funktionalen $f_\iota\in R(P_\iota^*)$. Da $R(P)$ separabel ist, entnehmen wir [30, 2.3.(1)], daß daß es ein $f_0\in R(P)^*$ gibt mit

$$f_\iota\,|\,R(P)\rightharpoonup f_0\qquad(\iota\in\Lambda').$$

Sei f_1 eine Fortsetzung von f_0 auf X, und sei $f:=P^*f_1$. Man überzeugt sich leicht von $f_\iota\rightharpoonup f\ (\iota\in\Lambda')$.

Es bleibt noch (3) (ii) nachzuweisen. Sei $u\in R(P)$, $u_\iota\in R(P)$, $\iota\in\Lambda$, und für $f_\iota\in R(P_\iota^*)$ und $\Lambda'\subset\Lambda$ gelte

$$f_\iota\rightharpoonup f\quad(\iota\in\Lambda')\Rightarrow(f_\iota,u_\iota)\to(f,u)\quad(\iota\in\Lambda').$$

Sei $R_\iota u\in R(P_\iota)$, $\iota\in\Lambda_0$, mit $R_\iota u\to u\ (\iota\in\Lambda_0)$. Dann gibt es Funktionale $f_\iota\in R(P_\iota^*)$ mit

$$\|f_\iota\|\leqq\|P_\iota\|,\qquad\|u_\iota-R_\iota u\|=|(f_\iota,u_\iota-R_\iota u)|,\qquad\iota\in\Lambda_0.$$

Sei $\Lambda\subset\Lambda_0$ beliebig. Dann existiert ein $f\in R(P^*)$ und eine Teilfolge $\Lambda'\subset\Lambda$ mit $f\rightharpoonup f\ (\iota\in\Lambda')$. Daher konvergiert

$$(f_\iota,u_\iota-R_\iota u)\to(f,u)-(f,u)=0\qquad(\iota\in\Lambda').$$

Damit ist $\|u_\iota-R_\iota u\|\to 0\ (\iota\in\Lambda_0)$ bewiesen, was noch zu zeigen war.

Wir kehren nun zurück zu den allgemeinen Eigenschaften diskreter Duallimesräume. Eine sn-Approximation $E,\Pi E_\iota$ nennen wir diskret schwach kompakt, wenn für jedes $\Lambda\subset\Lambda_0$ jede beschränkte Folge von Elementen $u_\iota\in E_\iota$, $\iota\in\Lambda$, eine diskret schwach konvergente Teilfolge enthält. Der Hauptsatz dieses Abschnitts lautet dann.

(9) *Für eine diskrete Dualapproximation* $\langle E, F\rangle, \Pi\langle E_\iota, F_\iota\rangle$ *sind die folgenden Aussagen paarweise äquivalent.*

(i) *E ist separabel, $E, \Pi E_\iota$ ist schwach diskret kompakt, und es gibt eine Zahl $\gamma > 0$, so daß aus*

$$u_\iota \rightharpoonup u \quad (\iota\in\Lambda) \Rightarrow \gamma \limsup_\Lambda \|u_\iota\| \leqq \|u\|. \tag{10}$$

(ii) $\dim E < \infty$, $\dim E_\iota \to \dim E \ (\iota\in\Lambda_0)$.

(iii) $\dim E < \infty$, $\limsup_{\Lambda_0} \dim E_\iota \leqq \dim E$.

(iv) *Es gilt eine der Bedingungen* (i)—(iii) *mit E_ι bzw. E ersetzt durch F_ι bzw. F.*

Für den Beweis von (9) stellen wir einige Hilfssätze bereit.

(12) *Sei $E, \Pi E_\iota$ eine diskrete schwach kompakte sn-Approximation mit separablem E. Dann ist E endlichdimensional, falls es eine Zahl $\gamma > 0$ gibt, so daß* (10) *gilt.*

Beweis. Die Beweisidee geht auf [37, 2.(4)] zurück. Wir zeigen, daß die Menge

$$M_0 := \{u\in E \mid \exists \Lambda\subset\Lambda_0, \exists u_\iota\in E_\iota \text{ mit } \|u_\iota\| \leqq 1 : u_\iota \rightharpoonup u \ (\iota\in\Lambda)\}$$

präkompakt ist. Da $E, \Pi E_\iota$ eine Approximation ist und (10) gilt, ist die Kugel um den Nullpunkt mit Radius $\gamma/2$ in M_0 enthalten und daher ebenfalls präkompakt, woraus $\dim E < \infty$ folgt.

Sei $u^{(j)}$, $j\in\mathbb{N}$, eine in M_0 dichte Folge, und sei $u_\iota^{(j)}\in E_\iota$ mit $u_\iota^{(j)} \rightharpoonup u^{(j)}$ $(\iota\in\Lambda_0)$, $j\in\mathbb{N}$. Wenn wir annehmen, daß M_0 nicht präkompakt ist, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und Elemente $w^{(k)}\in M_0$ mit

$$\|u^{(j)} - w^{(k)}\| \geqq \varepsilon, \qquad j = 1, \ldots, k, \ k\in\mathbb{N}.$$

Dazu existieren Teilfolgen $\Lambda_k \subset \Lambda_0$ und Folgen $w_\iota^{(k)}$, $\iota\in\Lambda_k$, mit $\|w_\iota^{(k)}\| \leqq 1$ sowie $w_\iota^{(k)} \rightharpoonup w^{(k)}$ $(\iota\in\Lambda_k)$, $k\in\mathbb{N}$. Wegen 1.(iv) können wir annehmen, daß für $\iota\in\Lambda_k$ gilt

$$\|u_\iota^{(j)} - w_\iota^{(k)}\| \geqq \varepsilon/2, \qquad j = 1, \ldots, k, \ k\in\mathbb{N}.$$

Sei $\Lambda = (\iota_1, \iota_2, \ldots)$ eine Teilfolge von Λ_0 mit der Eigenschaft $\iota_k\in\Lambda_k$. Wir setzen

$$w_{\iota_k} := w_{\iota_k}^{(k)}, \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Die Folge $(w_\iota)_\Lambda$ ist beschränkt, und es konvergiert $w_\iota \rightharpoonup w$ $(\iota\in\Lambda')$ für eine Teilfolge $\Lambda' \subset \Lambda$. Es ist $w\in M_0$, aber gleichzeitig $\|u^{(j)} - w\| \geqq \gamma\varepsilon/2$, $j\in\mathbb{N}$, was ein Widerspruch ist.

(13) *Unter den Voraussetzungen von* (12) *gilt* $\limsup_{\Lambda_0} E_\iota \leqq \dim E$.

Beweis. Ist die Behauptung nicht richtig, so ist $\dim E_\iota > m := \dim E$ für eine Teilfolge Λ. Sei $u_\iota^{(1)}\in E_\iota$, $\iota\in\Lambda$, mit $\|u_\iota^{(1)}\| = 1$. Dann hat man für ein $u^{(1)}\in E$ und eine Teilfolge $\Lambda_1 \subset \Lambda$

$$u_\iota^{(1)} \rightharpoonup u^{(1)} \quad (\iota\in\Lambda_1), \qquad \|u^{(1)}\| \geqq \gamma.$$

Ist $m \geqq 1$, so findet man $u_\iota^{(2)}\in E_\iota$, $\iota\in\Lambda_1$, mit $\|u_\iota^{(2)}\| = 1$ und

$$\|u_\iota^{(2)} - c u_\iota^{(1)}\| \geqq 1, \qquad \iota\in\Lambda_1, \ c\in\mathbb{C}.$$

Es gibt dann eine Teilfolge $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$ und ein $u^{(2)}\in E$ mit

$$u_\iota^{(2)} \rightharpoonup u^{(2)} \quad (\iota\in\Lambda_2), \qquad \|u^{(2)} - c u^{(1)}\| \geqq \gamma, \quad c\in\mathbb{C}.$$

Damit sind $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ linear unabhängig. Im Falle $m \geqq 2$ kann man die Schlußweise fortsetzen und kommt schließlich zu einem Widerspruch.

Beweis von (9). Die Äquivalenz von (ii) mit (iii) ist eine Konsequenz von (2). Die Implikation (i)$\Rightarrow$(iii) ist in (12), (13) enthalten.

(ii)$\Rightarrow$(i). Sei $u^{(1)}, \ldots u^{(m)}$ eine Basis in E, sei $u_\iota^{(j)} \in E_\iota$ und konvergiere

$$u_\iota^{(j)} \rightharpoonup u^{(j)} \qquad (\iota \in \Lambda_0),\ j=1, \ldots, m.$$

In (2) ist gezeigt worden, daß die $u_\iota^{(j)}, j=1, \ldots, m$, für ein Endstück Λ_1 linear unabhängig sind. Es kann dann Λ_1 noch so gewählt werden, daß sie eine Basis von E_ι bilden. Wir definieren eine lineare bijektive Abbildung J_ι: $E_\iota \to E$ durch

$$J_\iota u_\iota^{(j)} = u^{(j)}, \qquad j=1, \ldots, m,\ \iota \in \Lambda_1.$$

Da $(u^{(j)})_{\Lambda_1}$ als schwach konvergente Folge beschränkt ist, erkennt man leicht die Gültigkeit von

(14) $$J_\iota u_\iota \to u \ (\iota \in \Lambda) \quad \text{in} \quad E \Rightarrow u_\iota \rightharpoonup u \ (\iota \in \Lambda).$$

Die Folge $(J_\iota)_{\Lambda_1}$ ist auch stabil. Denn anderenfalls gäbe es Elemente $u_\iota \in E_\iota$ mit $\|J_\iota u_\iota\| = 1$, $\|u_\iota\| \to 0\ (\iota \in \Lambda)$. Wegen $\dim E < \infty$ gilt $J_\iota u_\iota \to u\ (\iota \in \Lambda')$ in E für eine Teilfolge $\Lambda' \subset \Lambda$ und ein $u \in E$ mit $\|u\| = 1$. Vermöge (14) erkennt man $u_\iota \rightharpoonup u\ (\iota \in \Lambda')$, und daher ist

$$\|u\| \leqq \liminf_{\Lambda'} \|u_\iota\| = 0,$$

was einen Widerspruch ergibt. Ist nun $(u_\iota)_\Lambda$ beschränkt, so auch $(J_\iota u_\iota)_\Lambda$ in E, und es geht $J_\iota u_\iota \to u\ (\iota \in \Lambda')$ für eine Teilfolge $\Lambda' \subset \Lambda$, woraus mit (14) die diskrete schwache Kompaktheit folgt. Der zweite Teil von (i) ergibt sich mit der Konstanten $\gamma^{-1} := \limsup_{\Lambda_1} \|J_\iota^{-1}\|$, die wegen (14) endlich ist.

Die Bedingungen (i)—(iii) mit E_ι bzw. E ersetzt durch F_ι bzw. F_ι sind untereinander aus Symmetriegründen ebenfalls paarweise äquivalent. Wir zeigen noch, daß aus der Gültigkeit von (ii) mit E, E_ι die Gültigkeit von (iii) mit F, F_ι folgt. Da $\langle E, F\rangle$ ein Dualsystem ist, gilt $m := \dim E = \dim F$. Ist die zweite Bedingung in (iii) mit F, F_ι nicht erfüllt, so gibt es wegen $\dim E_\iota = m$, $\iota \in \Lambda_1$, eine Teilfolge $\Lambda \subset \Lambda_1$ und Elemente $v_\iota \in F_\iota$ mit

$$\langle u_\iota, v_\iota\rangle = 0, \quad u_\iota \in E_\iota,\ \iota \in \Lambda, \qquad \|v_\iota\| \to \infty \quad (\iota \in \Lambda).$$

Hieraus folgt offenbar, daß (3) (iii) gegeben ist mit $v=0$, so daß $v_\iota \rightharpoonup 0\ (\iota \in \Lambda)$ geht. Dies ergibt einen Widerspruch zu $\|v_\iota\| \to \infty$, und der Beweis ist vollständig.

An (9) können wir noch den folgenden Zusatz anfügen. Für jedes $\iota \in \Lambda_0$ definieren E bzw. E_ι in natürlicher Weise einen linearen Teilraum von F^* bzw. F_ι^*. Wir schreiben $\|u|F\|$ bzw. $\|u_\iota|F_\iota\|$ für die Normen der als Elemente von F^* bzw. F_ι^* aufgefaßten $u \in E$ bzw. $u_\iota \in E_\iota$, d.h.

$$\|u|F\| := \sup_{\substack{v \in F \\ \|v\| \leqq 1}} |\langle u, v\rangle|, \qquad \|u_\iota|F_\iota\| := \sup_{\substack{v_\iota \in F_\iota \\ \|v_\iota\| \leqq 1}} |\langle u_\iota, v_\iota\rangle|.$$

Dann läßt sich noch die folgende Behauptung aussprechen.

(15) *Sei $\langle E, F\rangle, \Pi\langle E_\iota, F_\iota\rangle$ eine diskrete Dualapproximation, so daß für jedes $v \in F$ eine Folge $v_\iota \in F_\iota$ mit*

(16) $$v_\iota \rightharpoonup v, \quad \|v_\iota\| \to \|v\| \quad (\iota \in \Lambda_0)$$

existiert. Ferner sei E versehen mit der Norm $\|u|F\|$, $u\in E$, separabel. Dann ist (9) (ii) *äquivalent mit der folgenden Bedingung.* (i) *$E, \Pi E_\iota$ ist diskret schwach kompakt und aus*

$$(17) \qquad u_\iota \rightharpoonup u \quad (\iota\in\Lambda) \Rightarrow \|u_\iota|F_\iota\| \to \|u|F\| \quad (\iota\in\Lambda).$$

Beweis. (9) (ii)$\Rightarrow$(i) Die erste der Bedingungen in (i) folgt aus (9) (i). Zum Beweis der zweiten sei zunächst $v\in F$ gegeben und $(v_\iota)_{\Lambda_0}$ die Folge aus (16). Dann gilt

$$|\langle u, v\rangle| = \lim_{\Lambda_0} |\langle u_\iota, v_\iota\rangle| \leqq \liminf_{\Lambda_0} \|u_\iota|F_\iota\| \quad \|v\| v\in F.$$

Seien weiter $v_\iota\in F_\iota$, $\iota\in\Lambda_0$, Elemente mit $\|v_\iota\|=1$ und $\|u_\iota|F_\iota\| - \langle u_\iota, v_\iota\rangle \to 0$ $(\iota\in\Lambda_0)$. Ist $\Lambda\subset\Lambda_0$ so gewählt, daß

$$\|u_\iota|F_\iota\| \to \limsup_{\Lambda_0} \|u_\iota|F_\iota\| \qquad (\iota\in\Lambda)$$

geht, so gibt es eine weitere Teilfolge $\Lambda'\subset\Lambda$ und ein $v\in F$ mit $v_\iota \rightharpoonup v$ $(\iota\in\Lambda')$. Es ist $\|v\|\leqq 1$, und daher erhält man unter Ausnutzung von $\langle u_\iota, v_\iota\rangle \to \langle u, v\rangle$ $(\iota\in\Lambda')$ auch

$$\limsup_{\Lambda_0} \|u_\iota|F_\iota\| = \limsup_{\Lambda'} |\langle u_\iota, v_\iota\rangle| \leqq \|u|F\|.$$

Zusammen mit der zuerst bewiesenen Ungleichung ist damit (17) gezeigt.

(i)$\Rightarrow$(9) (ii) Wir beginnen mit der Bemerkung, daß durch $\|u_\iota|F_\iota\|$, $u_\iota\in E_\iota$, für ein Endstück Λ_1 eine Norm in E_ι definiert wird. Anderenfalls gibt es eine Teilfolge $\Lambda'\subset\Lambda$ und Elemente $u_\iota\in E_\iota$ mit

$$\langle u_\iota, v_\iota\rangle = 0, \quad v_\iota\in F_\iota,\ \iota\in\Lambda, \quad \|u_\iota\|\to\infty \quad (\iota\in\Lambda).$$

Damit ist (3) (ii) mit $u=0$ erfüllt, was $u_\iota \rightharpoonup 0$ $(\iota\in\Lambda)$ zur Folge hat und einen Widerspruch ergibt. Wenn wir uns E_ι, $\iota\in\Lambda_1$, in dieser Weise und E entsprechend normiert denken, so besagt (i), daß $E, \Pi E_\iota$ mit der schwachen Konvergenz eine diskrete Approximation mit konvergenter Metrik ergibt. Die Behauptung folgt dann aus [37, 2. (7)].

Der Kürze halber bezeichnen wir eine diskrete Dualapproximation $\langle E, F\rangle \Pi \langle E_\iota, F_\iota\rangle$, welche einer der Bedingungen (9) (i)—(iv) genügt, als *diskret stark kompakt*.

5. Approximation des adjungierten Problems

Mit Hilfe der Ergebnisse des vorangehenden Abschnitts fügen wir jetzt einige Bemerkungen über die Approximation des zu 2. (1) adjungierten Eigenwertproblems

$$(1) \qquad (\lambda B^* - A^*) f = 0, \quad f\in D(A^*),\ \lambda\in G,$$

durch die Folge der zu 2. (2) adjungierten Probleme

$$(2) \qquad (\lambda B_\iota^* - A_\iota^*) f_\iota = 0, \quad f_\iota\in D(A_\iota^*),\ \lambda\in G,$$

an. In den Räumen $X^*, \Pi X_\iota^*$ und $Y^*, \Pi Y_\iota^*$ steht jetzt i.allg. nur die schon weiter oben verwendete diskrete schwache Konvergenz zur Verfügung.

Es ist bekannt, daß $\sigma(A^*) = \sigma(A)$ und $(A^*)^{-1}(\lambda) = (A^{-1}(\lambda))^*$, $\lambda\in\varrho(A) = \varrho(A^*)$ gilt. Damit beweist man das zu 2. (5) analoge Ergebnis.

(3) *Ist $K\subset\varrho(A^*)$ kompakt, so gilt unter der Voraussetzung* (aF) *für ein Endstück Λ_1 auch $K\subset\varrho(A_\iota^*)$ und $(A_\iota^*)^{-1}(\lambda)$ ist gleichmäßig für $\iota\in\Lambda_1$ und $\lambda\in K$ beschränkt.*

Beweis. Aus 2.(5) folgt $K \subset \varrho(A_\iota)$, $\iota \in \Lambda_1$, und die gleichgradige Beschränktheit von $(A_\iota^{-1})_{\Lambda_1}$ auf K. Die Bemerkung vor (3) ergibt dann die Behauptung.

Ist σ eine kompakte Spektralmenge von A, dann ist es auch eine von A^*. Die zu σ gehörige Spektralprojektion von A^* bezeichnen wir zur Unterscheidung von $P(\sigma)$ aus 2.(6) mit $\overline{P}(\sigma)$, und entsprechend zu $Q(\sigma)$ aus 2.(7) ist $\overline{Q}(\sigma)$ für A^* definiert.

(4) *Sei* (aF) *erfüllt, und sei σ eine kompakte Spektralmenge von A^* mit zugehörigem Cauchygebiet Δ. Dann gilt*

(5) $$\inf\{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma) \mid \lambda \in \sigma(A_\iota^*)\} \to 0 \qquad (\iota \in \Lambda_0).$$

Für ein Endstück Λ_1 ist $\partial\Delta \subset \varrho(A_\iota^*)$, *und es gilt mit* $\sigma_\iota := \sigma(A_\iota^*) \cap \Delta$

(6) $$\overline{P}_\iota(\sigma_\iota) \rightharpoonup \overline{P}(\sigma), \quad \overline{Q}_\iota(\sigma_\iota) \rightharpoonup \overline{Q}(\sigma) \quad (\iota \in \Lambda_1)$$

sowie $\operatorname{rank} \overline{Q}(\sigma) = \operatorname{rank} \overline{P}(\sigma)$, $\operatorname{rank} \overline{Q}_\iota(\sigma_\iota) = \operatorname{rank} \overline{P}_\iota(\sigma_\iota)$, $\iota \in \Lambda_1$, *und*

(7) $$\liminf_{\Lambda_1} \operatorname{rank} \overline{P}_\iota(\sigma_\iota) \geqq \operatorname{rank} \overline{P}(\sigma).$$

Wenn $R(P(\sigma))$ oder $R(Q(\sigma))$ separabel ist, so bildet $\langle R(\overline{Q}(\sigma)), R(P(\sigma))\rangle$, $\Pi_{\Lambda_1}\langle R(\overline{Q}_\iota(\sigma_\iota)), R(P_\iota(\sigma_\iota))\rangle$ eine diskrete Dualapproximation mit der durch $X^*, \Pi X_\iota^*$ bzw. $X, \Pi X_\iota$ induzierten Konvergenz und $\langle R(\overline{P}(\sigma)), R(Q(\sigma))\rangle$, $\Pi_{\Lambda_1}\langle R(\overline{P}_\iota(\sigma_\iota)), R(Q_\iota(\sigma_\iota))\rangle$ eine diskrete Dualapproximation mit der durch $Y^*, \Pi Y_\iota^*$ bzw. $Y, \Pi Y_\iota$ induzierten Konvergenz.

Beweis. Die Behauptung (5) ist eine Folge von 2.(12). Da die adjungierten Operatoren diskret stark konvergenter Folgen diskret schwach konvergieren (s. [30, 2.2.(3)]) und da

(8) $$\overline{Q}(\sigma) = P(\sigma)^*, \quad \overline{P}(\sigma) = Q(\sigma)^*$$

sowie die entsprechenden Beziehungen für die mit ι induzierten Projektoren bestehen, folgt (6)—(7) aus 2.(13)—(14). Aus 2.(10) erkennt man, daß $R(P(\sigma))$ genau dann separabel ist, wenn $R(Q(\sigma))$ es ist. Der Rest der Behauptung folgt dann aus 4.(6).

(9) *Sei* (aF) *erfüllt, und sei λ ein isolierter Punkt in $\sigma(A^*)$. Dann sind die folgenden drei Bedingungen paarweise äquivalent.*

(i) *λ ist ein stabiler Punkt aus $\sigma(A)$.*

(ii) *$R(P(\lambda))$ ist separabel, und $\langle R(\overline{Q}(\lambda)), R(P(\lambda))\rangle$, $\Pi_{\Lambda_1}\langle R(\overline{Q}_\iota(\sigma_\iota)), R(P_\iota(\sigma_\iota))\rangle$ bildet eine diskrete stark kompakte Dualapproximation mit der durch $X^*, \Pi X_\iota^*$ bzw. $X, \Pi X_\iota$ induzierten Konvergenz.*

(iii) *$R(Q(\lambda))$ ist separabel, und $\langle R(\overline{P}(\lambda)), R(Q(\lambda))\rangle$, $\Pi_{\Lambda_1}\langle R(\overline{P}_\iota(\sigma_\iota)), R(Q_\iota(\sigma_\iota))\rangle$ bildet eine diskrete stark kompakte Dualapproximation mit der durch $Y^*, \Pi Y_\iota^*$ bzw. $Y, \Pi Y_\iota$ induzierten Konvergenz.*

Trifft einer der Fälle zu, so ist $m := \operatorname{rank} P(\lambda) < \infty$, *und σ_ι besteht für ein Endstück Λ_2 aus m algebraisch wiederholten Eigenwerten $\mu_\iota^{(1)}, \ldots, \mu_\iota^{(m)}$ mit*

(10) $$\mu_\iota^{(j)} \to \lambda \quad (\iota \in \Lambda_2),\ j = 1, \ldots, m.$$

Beweis. Aus (i) folgt 2.(15)(i), und damit ergibt 4.(9) bei der Setzung $E = R(P(\lambda))$, $E_\iota = R(P_\iota(\sigma_\iota))$ die Bedingung (ii). Die Umkehrung folgt durch

Umkehr der Schlüsse. Aus (i) folgt auch 2. (15) (iii), und damit erhält man (iii) aus 4. (9) mit der Setzung $E = R(Q(\lambda))$, $E_\iota = R(Q_\iota(\sigma_\iota))$. Da die algebraischen Vielfachheiten von λ als Eigenwert von A bzw. A^* wegen $\operatorname{rank} P(\lambda) = \operatorname{rank} \overline{P}(\lambda)$ übereinstimmen und das Entsprechende für die $\lambda_\iota \in \sigma(A_\iota)$ zutrifft, sind die restlichen Behauptungen des Satzes eine Folge von 2. (15). (Da A^* nicht notwendig dicht definiert ist, muß man sich bei Verwendung dieser Argumentation noch überlegen, daß auch in diesem Fall $\overline{P}(\lambda)$ auf den algebraischen Eigenraum von A^* zu λ projiziert, was etwa durch Betrachtung von A^*, B^* als Abbildungen von $\overline{D(A^*)}$ in X^* leicht geschehen kann.)

Literatur

1. Anselone, P. M., Palmer, T. W.: Spectral analysis of collectively compact, strongly convergent operator sequences. Pac. J. Math. **25**, 423—431 (1968)
2. Anselone, P. M.: Collectively compact operator approximation theory. Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1971
3. Atkinson, K. E.: The numerical solution of the eigenvalue problem for compact integral operators. Trans. Am. Math. Soc. **129**, 458—465 (1967)
4. Aziz, A. K., Babuska, I.: Foundations of the finite element method; in A. K. Aziz (ed.): The mathematical foundations of the finite element method (p. 13—59) Academic Press 1972
5. Birkhoff, G., de Boor, C., Swartz, B., Wendroff, B.: Rayleigh-Ritz approximation by piecewise cubic polynomials. J. SIAM Num. Anal. **3**, 188—203 (1966)
6. Bramble, J. H.: On the approximation of eigenvalues of nonselfadjoint operators. Equadiff III, 15—19 (1973)
7. Bramble, J. H., Osborn, J. E.: Approximation of Steklov eigenvalues of nonselfadjoint second order elliptic operators; in A. K. Aziz (ed.): The mathematical foundations of the finite element method (p. 387—408). Academic Press 1972
8. Bramble, J. H., Osborn, J. E.: Rate of convergence estimates for nonselfadjoint eigenvalue approximations. Math. Comp. **27**, 525—549 (1973)
9. Chatelin, F.: Approximation du spectre d'un operateur lineaire; application aux operateurs differentiels elliptiques non autoadjoints. Num. Math. **20**, 193—204 (1973)
10. Ciarlet, P. G., Schultz, M. H., Varga, R. S.: Numerical methods of high-order accuracy for nonlinear boundary value problems. III. Eigenvalue problems. Num. Math. **12**, 120—133 (1968)
11. Fix, G. J.: Effects of quadrature errors in finite element approximation of steady state, eigenvalue and parabolic problems; in A. K. Aziz (ed.): The mathematical foundations of the finite element method (p. 525—556). Academic Press 1972
12. Grigorieff, R. D.: Approximation von Eigenwertproblemen und Gleichungen zweiter Art in Hilbertschen Räumen. Math. Ann. **183**, 45—77 (1969)
13. Grigorieff, R. D.: Über die Lösung regulärer koerzitiver Rand- und Eigenwertaufgaben mit dem Galerkinverfahren. Manuscripta math. **1**, 385—411 (1969)
14. Grigorieff, R. D.: Verallgemeinerte approximativ-kompakte Operatoren. Habilitationsschrift Frankfurt a.M. 1969
15. Grigorieff, R. D.: Die Konvergenz des Rand- und Eigenwertproblems linearer gewöhnlicher Differenzengleichungen. Num. Math. **15**, 15—48 (1970)
16. Grigorieff, R. D.: Zur Theorie linearer approximationsregulärer Operatoren I. Math. Nachr. **55**, 233—249 (1972)
17. Grigorieff, R. D.: II. ibid 251—263
18. Grigorieff, R. D.: Über die Fredholm-Alternative bei linearen approximationsregulären Operatoren. Appl. Analysis **2**, 217—227 (1972)
19. Jeggle, H.: Bemerkungen zur näherungsweisen Lösung von Operatorgleichungen der mathematischen Physik. Meth. Verf. math. Phys. **3**, 1—28 (1970)

20. Jeggle, H.: Über die Approximation von linearen Gleichungen zweiter Art und Eigenwertproblemen in Banach-Räumen. Math. Z. **124**, 319—342 (1972)
21. Jerome, J. W., Varga, R. S.: Generalizations of spline functions and applications to nonlinear boundary value and eigenvalue problems; in T. N. E. Greville (ed.): Theory and applications of spline functions (p. 103—155). Academic Press 1969
22. Kato, T.: Perturbation theory for linear operators. Berlin: Springer 1966
23. Knauer, B.: Über das Galerkinverfahren bei Eigenwertproblemen unbeschränkter Operatoren. Math. Z. **123**, 113—121 (1971)
24. Krasnosel'skii, M. A., Vainikko, G. M.: Approximate solution of operator equations. Groningen: Wolters-Noordhoff 1969
25. Kreiss, H.-O.: Difference approximations for boundary and eigenvalue problems for ordinary differential equations. Math. Comp. **26**, 605—624 (1972)
26. Kuttler, J. R.: Finite difference approximations for eigenvalues of uniformly elliptic operators. SIAM J. Num. Anal. **7**, 206—232 (1970)
27. Pierce, J. G., Varga, R. S.: Higher order convergence results for the Rayleigh-Ritz method applied to eigenvalue problems. I: Estimates relating Rayleigh-Ritz and Galerkin approximations to eigenfunctions. SIAM J. Num. Anal. **9**, 137—151 (1972)
28. Pierce, J. G., Varga, R. S.: II. Improved error bounds for eigenfunctions. Num. Math. **19**, 155—169 (1972)
29. Strang, G., Fix, G. F.: An analysis of the finite element method. Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1973
30. Stummel, F.: Diskrete Konvergenz linearer Operatoren. I.: Math. Ann. **190**, 45—92 (1970)
31. Stummel, F.: II. Math. Z. **120**, 231—264 (1971)
32. Stummel, F.: III. ISNM **20**, 196—216 (1972)
33. Stummel, F.: Singular perturbations of elliptic sesquilinear forms. Proc. Conference on Differential Equations, Dundee, March 1972. Lecture Notes in Mathematics **280**, 155—180. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
34. Taylor, A. E.: Functional analysis. New York: Wiley 1961
35. Vainikko, G. M.: On the speed of convergence of approximate methods in the eigenvalue problem. USSR Comp. Math. Math. Phys. **7**, 18—32 (1967)
36. Vainikko, G. M.: On the rate of convergence of certain approximation methods of Galerkin type in an eigenvalue problem. Amer. Math. Soc. Transl. **86**, 249—259 (1970)
37. Wolf, R.: Über lineare approximationsreguläre Operatoren. Math. Nachr.
38. Chatelin, F.: Convergence of approximation methods to compute eigenelements of linear operations. SIAM J. Num. Anal. **10**, 939—948 (1973)

Rolf Dieter Grigorieff
Technische Universität Berlin
Fachbereich Mathematik
D-1000 Berlin 12
Straße des 17. Juni 135