Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl[1]).

Von **F. London** in Stuttgart.

(Eingegangen am 25. Februar 1927.)

Kapitel I. Die Theorie von Weyl.

Die Idee einer „reinen Nahgeometrie", zuerst von Riemann konzipiert, hat bekanntlich kürzlich durch Weyl eine außerordentlich schöne und einfache Vervollständigung erfahren. Man kann den Riemannschen Raumbegriff betrachten als die Aufhebung des Vorurteils, daß die Krümmungsverhältnisse an einer Stelle des Raumes verbindlich sein müßten für die Krümmung an allen anderen. Um dieser Aussage Riemanns einen Sinn zu geben, war zunächst die Annahme notwendig, daß der Maßstab, welcher an jeder Stelle zur Bestimmung der Koeffizienten g_{ik} der metrischen Fundamentalform

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

zur Anwendung gelangt, ein „starrer" Maßstab sei.

Demgegenüber macht Weyl mit Recht geltend, daß die Annahme eines solchen starren Maßstabes einer radikalen Nahgeometrie zuwider sei, daß nur die Verhältnisse der g_{ik} an einer Stelle, nicht ihre Absolutbeträge, sinngemäß festgelegt werden können, und dementsprechend setzt er für die Änderung dl eines Eichmaßstabes von der Länge l bei einer infinitesimalen Verschiebung dx^i an:

$$dl = l\,\varphi_i\, dx^i, \tag{1}$$

wobei die Proportionalitätsfaktoren φ_i Funktionen des Ortes sind, Charakteristika der Maßverhältnisse des Raumes — ähnlich den g_{ik}. Oder, wenn man (1) integriert:

$$l = l_0\, e^{\int \varphi_i\, dx^i} \tag{2}$$

[1]) Vorgetragen teilweise auf der Tagung des Gauvereins Württemberg der D. Phys. Ges. Stuttgart, am 18. Dezember 1926; vgl. auch einen vorläufigen zusammenfassenden Bericht in Naturwiss. **15**, 187, 1927.

($l_0 = l$ am Anfang der Verschiebung). Das Eichmaß ist im allgemeinen vom Wege abhängig (nicht integrabel), es sei denn, daß die Größen

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} \tag{3}$$

verschwinden. Über diese Größen f_{ik} kann man laut ihrer Definition (3) die Identität aussprechen (die Dimensionenzahl der Mannigfaltigkeit sei 4):

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial f_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x^k} = 0 \qquad i \neq k \neq l, \quad i, k, l = 1, 2, 3, 4. \tag{4}$$

Die formale Übereinstimmung dieser vier Gleichungen mit dem einen System der Maxwellschen Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{H}} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0,$$

sowie einige weitere formale Analogien haben Weyl zu dem Schluß geführt, die φ_i seien bis auf einen konstanten Proportionalitätsfaktor zu identifizieren mit den Komponenten Φ_i des elektromagnetischen Viererpotentials, die f_{ik} entsprechend mit den elektromagnetischen Feldstärken $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$. In folgerichtiger Ergänzung der geometrischen Deutung der Gravitation durch die variablen Krümmungen des Riemannschen Raumes dachte sich Weyl den noch übrigbleibenden Teil physikalischer Wirkungen, das elektromagnetische Feld, ebenfalls als eine Eigenschaft der Maßverhältnisse des Raumes, charakterisiert durch die Variabilität des Eichmaßes. Es ist also zu schreiben:

$$l = l_0 \, e^{\alpha \int \Phi_i \, d x_i} \qquad (\alpha = \text{Proportionalitätsfaktor}). \tag{2 a}$$

Man wird die ungeheure Kühnheit bewundern, mit welcher Weyl allein auf Grund dieser ganz formalen Zuordnung seine Lehre von der eichgeometrischen Deutung des Elektromagnetismus aufgespürt hat: In der Gravitationstheorie war es eine physikalische Tatsache, das Prinzip der Äquivalenz zwischen träger und schwerer Masse, welche Einstein zu seiner geometrischen Deutung anregte. In der Theorie der Elektrizität dagegen war eine solche Tatsache nicht bekannt: Es bestand keine Veranlassung, an einen universellen Einfluß des elektromagnetischen Feldes auf die sogenannten starren Maßstäbe (bzw. Uhren) zu denken. Ganz im Gegenteil, die Atomuhren z. B. repräsentieren Maßstäbe, deren Unabhängigkeit von der Vorgeschichte durch die Schärfe der Spektrallinien belegt ist, im Widerspruch zu dem nicht integrablen

Maße (2 a), welches Weyl im magnetischen Felde annimmt. Es bedurfte wohl einer ungewöhnlich klaren metaphysischen Überzeugung, die Weyl solchen elementarsten Erfahrungen zum Trotz nicht von dem Gedanken abgehen ließ, daß die Natur von diesen schönen ihr gebotenen geometrischen Möglichkeiten Gebrauch machen müsse. Er hielt an seiner Auffassung fest und entzog die eben geschilderten Widersprüche der Diskussion durch eine etwas dunkle Umdeutung des Begriffs „realer Maßangabe", womit nun allerdings seiner Theorie ihr so prägnanter physikalischer Sinn genommen war und sie dadurch sehr an Überzeugungskraft verlor.

Auf diese abstrakte Ausgestaltung der Theorie brauche ich nicht einzugehen. Ich werde vielmehr zeigen, daß gerade der prägnanten ursprünglichen Fassung der Weylschen Theorie eine noch viel größere Spannkraft innewohnt, als ihr Urheber bereits wirksam gemacht hat, daß man nämlich in ihr nichts geringeres als einen folgerichtigen Weg zur Undulationsmechanik zu erblicken hat, unter deren Gesichtspunkten sie erst eine unmittelbar verständliche physikalische Bedeutung gewinnt.

Kapitel II. Die Undulationsmechanik von de Broglie und die Theorie von Weyl.

Als „Theorie von de Broglie" bezeichne ich jene noch unvollkommene Vorstufe der Undulationsmechanik, in welcher die Wellenfunktion der Bewegung eines Elektrons (auf welche wir uns hier beschränken)

$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h} W(x_i)} \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{5}$$

aus einer vollständigen Lösung W der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\,\Phi_i\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\,\Phi^i\right) = -\,m_0^2\,c^2 \tag{6}$$

hervorgeht, wobei die Integrationskonstanten in bekannter Weise so zu bestimmen sind, daß ψ eine eindeutige Funktion des Raumes, d. h. W additivperiodisch wird, mit einem ganzzahligen Multiplum der Planckschen Konstanten als Periode.

Wenn man Ernst macht mit der radikalen Kontinuumsauffassung der Materie, mit der Auflösung des diskontinuierlich abgegrenzten Elektrons in eine stetig in Raum und Zeit veränderliche Feldgröße, wie es durch diese de Brogliesche und konsequenter durch die später zu betrachtende Schrödingersche Theorie nahegelegt[1]) wird, so gelangt man in eine außerordentliche prinzipielle Schwierigkeit, wenn man untersucht, welchen Sinn man überhaupt metrischen Aussagen innerhalb des Undulationskontinuums beizulegen hat. Denn in diesem schwingenden und fluktuierenden unendlich ausgebreiteten Medium, welches an die Stelle des abgegrenzten Elektrons getreten ist, findet man keine unveränderlichen Diskontinuitäten, keine starren Körper, welche als reproduzierbare Maßstäbe die Festlegung einer Maßbestimmung gestatten könnten.

Ich vertrete durchaus nicht die Auffassung, daß, um von Geometrie im atomaren Gebiete zu reden, eine ausführbare Meßvorschrift angegeben werden müsse; von einer solchen kann ja auch in der Elektronentheorie nicht die Rede sein. Aber wenn man irgend einen definierten Sinn mit einer metrischen Angabe verbinden will, scheint mir, ist das mindeste, was man verlangen kann: die Angabe irgend eines realen Gegenstandes (als „Prototyp“), auf welchen die metrische Aussage bereits bezogen ist: Eines Elektronendurchmessers oder -abstands usw., wenngleich eine solche Aussage noch in einem sehr problematischen Zusammenhang zu einer ausführbaren Messung stehen mag.

Aber ein solcher realer Gegenstand ist in dem Undulationskontinuum nicht vorhanden. Der Satz der Identität ist in dem *πάντα ῥεῖ* entstehender und zerfließender Wellen nicht anzuwenden, kein Merkmal im Kontinuum festzuhalten, welches geeignet wäre, ein reproduzierbares Maß zu bilden. Die prinzipielle Lage, in die man hier versetzt ist, wäre völlig hoffnungslos, hätte nicht Weyl in seiner Verallgemeinerung des Riemannschen Raumbegriffs bereits einen Raumtypus geschaffen, in welchem gerade die Nichtreproduzierbarkeit der Eicheinheit als konsequentes Postulat einer radikalen Nahgeometrie vorgesehen ist. War bisher diese Theorie im Weltbild der diskontinuierlichen Elektronentheorie eine überflüssige Belastung, da man ja gerade in den Elektronen reproduzierbare Maßgrößen zu besitzen glaubte, so hat sich jetzt die Sachlage von Grund auf geändert. Man ist geradezu gezwungen, sich

[1]) Es sprechen bekanntlich wichtige Gründe dafür, auf welche vor allem von Born und seinen Mitarbeitern hingewiesen wurde, daß der ganze Undulationsformalismus statistisch umzudeuten ist. Insofern die Ladungsdichte als eine statistische Gewichtsfunktion umgedeutet wird, ist es unschwer einzusehen, daß dieselbe Unbestimmtheit hinsichtlich der Anwendbarkeit des Satzes der Identität, auf die wir hier hinweisen, sich hinüber übersetzt. Aber da jene Auffassung zunächst jede Interpretation in Raum und Zeit ablehnt, hat für sie die Beziehung zur Weylschen Raumlehre geringes Interesse.

auf den allgemeinen Weylschen Raumbegriff zurückzuziehen und zu versuchen, ihn auf das Schrödingersche Kontinuum anzuwenden. Da enthüllt sich nun ein einfacher Zusammenhang.

§ 1. Nehmen wir einmal an, wir besäßen bereits einen Maßstab l der sich nach der Weylschen Vorschrift (2a) verändert, und führen ihn im ψ-Felde herum. Und zwar werde er mit der Strömungsgeschwindigkeit der Materie, der Gruppenvierergeschwindigkeit

$$u^i = \frac{d x^i}{d \tau} = \frac{1}{m_0}\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\,\Phi^i\right) \tag{7}$$

geführt.

Ich behaupte, mit dieser naheliegenden Vorschrift über den Weg wird Weyls Skalar l numerisch identisch mit dem de Broglieschen Feldskalar ψ. Hierzu sind noch zwei Präzisierungen zu treffen:

In dem Weylschen Eichmaß war noch ein Faktor α unbestimmt gelassen; für diesen mache ich die Hypothese, er sei gleich $\frac{2\pi i e}{h c}$. Also

$$l = l_0\, e^{\frac{2\pi i}{h}\int \frac{e}{c}\Phi_i\, d x^i}. \tag{2a}$$

Schließlich noch: ich benutze nicht genau das ψ aus Gleichung (5), sondern das mit dem Faktor $e^{\frac{2\pi i}{h} m_0 c^2 \tau}$ versehene fünfdimensionale ψ, wie es den Vorschlägen von Klein, Fock und Kudar entspricht, wobei unter τ die Eigenzeit[1]) zu verstehen ist. Es sei also jetzt

$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h}(W + m_0 c^2 \tau)} \tag{5a}$$

oder

$$= e^{\frac{2\pi i}{h}\left\{\int \frac{\partial W}{\partial x^i} d x^i + m_0 c^2 \tau\right\}}.$$

Diese Größe ψ ist zu vergleichen mit dem entlang der Strömung des Kontinuums geführten Weylschen Eichmaße (2a). Man erhält:

$$\frac{\psi}{l} = \frac{1}{l_0}\, e^{\frac{2\pi i}{h}\left\{\int\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi^i\right) d x^i + m_0 c^2 \tau\right\}},$$

hier sind die $d x^i$ gemäß der durch (7) angegebenen Strömung zu führen:

$$= \frac{1}{l_0}\cdot e^{\frac{2\pi i}{h}\left\{\int\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi^i\right)\frac{d\tau}{m_0} + m_0 c^2 \tau\right\}}.$$

[1]) Diese Auffassung von τ, die auf Kudar, Ann. d. Phys. **81**, 632, 1926, zurückgeht, steht durchaus in Übereinstimmung mit der kürzlich diskutierten Deutung als Winkelkoordinate der Eigenrotationsbewegung des Elektrons (Naturwissenschaften **15**, 15, 1927). Denn dieser Drehwinkel ist als eine vom Elektron mitgeführte Uhr anzusehen. Er transformiert sich wie die Eigenzeit.

Infolge der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung (6) ist der Integrand $= -m_0 c^2$, man erhält:

$$\frac{\psi}{l} = \frac{1}{l_0} \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} \cdot \mathrm{const}} = \mathrm{const.} \tag{8}$$

Der physikalische Gegenstand ist gefunden, der sich so verhält wie das Weylsche Maß: die komplexe Amplitude der de Broglieschen Welle; sie also erfährt im elektromagnetischen Felde genau den Einfluß, welchen Weyl für sein Eichmaß postuliert hat und dem er — als ein leerlaufendes Glied der damaligen Physik — eine metaphysikalische Existenz zuweisen mußte. Sie also ist sozusagen das Prototyp des Weylschen Maßes. Und ähnlich wie es in der Gravitationstheorie in unserem Belieben steht, von abgelenkten Lichtstrahlen und Massen oder aber von ihrer geodätischen Bewegung in einem Riemannschen Raum zu reden, so gibt uns (8) die Möglichkeit, den de Broglieschen Schwingungsvorgang der Materie und seine Beeinflussung durch die elektrischen Potentiale geometrisch zu deuten durch einen homogen mit Materie ausgefüllten Weylschen Raum, dessen metrischer Zusammenhang jedoch nicht integrabel ist.

Bei fehlendem elektromagnetischen Felde soll nach (2a) das Eichmaß eine Konstante sein. Man müßte also auch einen konstanten Wert der de Broglieschen Wellenfunktion erhalten, wenn man sie mit der zugehörigen Strom-, d. h. Gruppengeschwindigkeit (v stets $< c$) verfolgt. Das scheint ein Widerspruch zu den grundlegendsten Ergebnissen de Broglies zu sein, nach welchen die Phasen seiner Wellen mit einer sehr viel größeren Phasengeschwindigkeit $\left(u = \frac{c^2}{v}\right)$ fortschreiten. Aber das ist hier nicht zutreffend, denn oben wurde nicht genau das de Brogliesche, sondern das fünfdimensional erweiterte ψ verwandt, welches dispersionsfrei ist und demgemäß fällt hier die Unterscheidung zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit fort. Man überzeugt sich auch leicht unmittelbar, daß die ebene Welle

$$\psi = e^{-\frac{2\pi i}{h}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} t - \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} x - m_0 c^2 \tau\right)} \qquad \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$$

in der Tat beim Verfolgen mit der Geschwindigkeit v konstante Phase zeigt.

Ein weiterer Einwand, daß wir hier ψ, eine Dichte, mit einer Länge l vergleichen, scheint mir ebenfalls keine Schwierigkeit zu bieten.

Man müßte ψ von vornherein mit l^{-3} vergleichen, was nur eine Änderung in der Wahl des unbestimmten Faktors α bedeuten würde. Naturgemäßer wäre es wohl, aus dem hier aufgedeckten Zusammenhang zu entnehmen, daß der Weylschen Eichgröße l von vornherein dieselbe Dimension beizulegen ist, wie dem de Broglieschen ψ. Innerhalb der Weylschen Theorie konnte eine solche Aussage nicht getroffen werden, da in ihr nichts über die „Natur“ von l bekannt war.

Eine ernstlichere Schwierigkeit scheint die komplexe Form der Streckenübertragung dem Verständnis aufzugeben. Es ist hierbei durchaus nicht zulässig, sich etwa auf den Realteil zu beschränken. Man hat hierin ein Gegenstück dafür zu sehen, daß die Wellenfunktion ψ selbst wesentlich komplex aufzufassen ist, besser gesagt, eine Zusammenfassung von zwei physikalischen Zustandsgrößen, nämlich $\psi\overline{\psi}$ und dem Realteil von $\frac{h}{2\pi i}\ln\psi$, darstellt. In diesem Sinne ist es auch zu verstehen, daß im Variationsproblem der Wellenmechanik ψ und $\overline{\psi}$ unabhängig voneinander zu variieren sind. Was es aber nun bedeuten soll, daß jede Strecke als eine komplexe Größe aufzufassen ist, und daß sich die ganze Weylsche Variabilität des Streckenmaßes als eine Änderung einzig der Phase unter Beibehaltung des Absolutbetrages herausstellt, das möchte ich noch nicht zur Diskussion bringen.

§ 2. Aber noch besteht der Einwand, auf den wir oben hinwiesen, daß die Erfahrung gegen die Nichtintegrabilität des Eichmaßes spricht. Man sieht jetzt bereits voraus, wie sich diese Schwierigkeit lösen muß: Die Quantentheorie erlaubt der Materie nur eine diskrete Reihe von Bewegungszuständen, und man vermutet, daß diese ausgezeichneten Bewegungen das Eichmaß nur derartig zu transportieren gestatten, daß die Phase bei Rückkehr an den Ausgangspunkt gerade eine ganzzahlige Anzahl von Umläufen durchgemacht hat, so daß trotz der Nichtintegrabilität der Streckenübertragung das Eichmaß an jeder Stelle stets in eindeutiger Weise realisiert wird. In der Tat erinnert man sich an die Resonanzeigenschaft der de Broglieschen Wellen, dieselbe, durch welche die alte Sommerfeld-Epsteinsche Quantenbedingung von de Broglie zuerst so folgenreich umgedeutet wurde. Diese ist allerdings an die Phasengeschwindigkeit geknüpft; aber infolge der fünfdimensionalen Erweiterung der Wellenfunktion ist der Schwingungsvorgang dispersionsfrei, und unsere Stromgeschwindigkeit wird infolgedessen identisch mit der Phasengeschwindigkeit. Hierdurch und infolge der Identität der Wellenfunktion ψ mit dem Weylschen Maße erscheint es also bereits erwiesen[1]), daß auch das Weylsche Maß, wenn ich es nur entlang der quantentheoretisch möglichen Materieströmung führe, an der Resonanz der de Broglieschen Wellen teil hat und trotz der Nichtintegrabilität des Differentialausdrucks (2a) im elektromagnetischen Felde dennoch zu einer eindeutigen Maßbestimmung an jeder Stelle führt. Hätte man die Eindeutigkeit des Maßbegriffes als eine allgemein anerkannte Erfahrungstatsache der Weylschen Theorie axiomatisch angeschlossen, so wäre man folgerichtig auf das System der diskreten Bewegungszustände der „klassischen" Quantentheorie und ihre de Broglieschen Wellen geführt worden.

Ich möchte diesen Gegenstand nicht verlassen, ohne darauf aufmerksam zu machen, daß diese Resonanzeigenschaft des Weylschen Streckenmaßes, die uns hier als charakteristischer Satz der Undulationsmechanik entgegentritt, von Schrödinger[2]) bereits 1922 als eine „bemerkenswerte Eigenschaft der Quantenbahnen" vermutet und an einer Anzahl von Beispielen demonstriert worden ist, ohne daß sie damals in ihrer Bedeutung erkannt wurde. Es wurde auch die Möglichkeit von $\alpha = 2\pi i \cdot \frac{e}{hc}$ ins Auge gefaßt, aber ihr nicht der Vorzug vor einer anderen Wahl von α zuerkannt. Schon damals also hatte Schrödinger die charakteristischen wellenmechanischen Periodizitäten in der Hand, welchen er später unter so ganz anderen Gesichtspunkten wieder begegnen sollte.

Es ist deshalb vielleicht nicht überflüssig, wenn ich diese Schrödingersche Vermutung auch unabhängig von den wellenmechanischen Zusammenhängen, wie sie ursprünglich gemeint war, als einen Satz der „klassischen" Quantentheorie beweise. Es ist also behauptet: Der Streckenexponent des Weylschen Maßes, geführt über eine räumlich geschlossene Quantenbahn, ist ein ganzzahliges Multiplum der Planckschen Konstanten:

$$\oint \frac{e}{c} \Phi_i \, dx^i = n h. \tag{9}$$

Um das zu beweisen, benutzt man die bereits in § 1 verwendete Relation:

$$\int \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right) dx^i = - \int m_0 c^2 \, d\tau = - \int m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \, dt.$$

[1]) Diese Schlußweise ist nicht präzise, sie wird sogleich richtiggestellt werden.

[2]) E. Schrödinger, ZS. f. Phys. **12**, 13, 1922.

Infolge der Quantenbedingungen

$$\sum_1^3 i \oint \frac{\partial W}{\partial x^i} d x^i = n h$$

erhält man hieraus:

$$\oint\left(\frac{\partial W}{\partial x_4} d x_4 - \frac{e}{c} \Phi_i d x^i\right) = -n h - \oint m_0 c^2 \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} d t.$$

Vorausgesetzt, daß ein Energieintegral existiert, ist

$$\frac{\partial W}{\partial x_4} d x_4 = -(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) d t,$$

also:

$$-\oint \frac{e}{c} \Phi_i d x^i = -n h + \oint\left(-m_0 c^2 \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} + E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}\right) d t.$$

Hier verschwinden die Integrale auf der rechten Seite infolge der relativistischen Verallgemeinerung des Virialsatzes [1]) unter der Voraussetzung, daß das Potential homogen vom Grade -1 in den x^i ist, woraus die Behauptung (9) unmittelbar folgt.

Man sieht aus dieser Ableitung, daß nur unter zwei Voraussetzungen der Eindeutigkeitsbeweis des Weylschen Eichmaßes gelingt. Diese Voraussetzungen (insbesondere die erste) sind offenbar sehr wesentlich und sie werden sich sicher nicht völlig umgehen lassen. Sie garantieren gewisse stationäre Verhältnisse im Raume, die es überhaupt erst

[1]) Mir ist ein Beweis der relativistischen Verallgemeinerung des Virialsatzes in der Literatur nicht bekannt, deshalb will ich ihn hier mitteilen. Es ist

$$\oint\left(-m_0 c^2 \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} + E_{\text{pot}}\right) d t = \oint\left(\frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} + E_{\text{pot}}\right) d t$$

$$= \oint\left(\sum_1^3 i\, p_i \frac{d x^i}{d t} + E_{\text{pot}}\right) d t.$$

Hieraus durch Produktintegration unter Beachtung der Periodizitätsbedingung:

$$= \oint\left(-\sum_1^3 x^i \frac{d p_i}{d t} + E_{\text{pot}}\right) d t,$$

$\frac{d p_i}{d t}$ ist infolge der Bewegungsgleichungen $= -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x^i}$, man erhält also

$$= \oint\left(\sum_1^3 x^i \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x^i} + E_{\text{pot}}\right) d t.$$

Hier verschwindet der Integrand infolge des Eulerschen Satzes über homogene Funktionen.

gestatten, von räumlich geschlossenen Bahnen in der Minkowskischen Welt zu reden, eine Aussage, welche im allgemeinen vom Bezugssystem durchaus abhängig ist. Man wird deshalb diese Voraussetzungen als Bedingungen der Möglichkeit für die Anwendung des Satzes der Identität auf den Raum zu bezeichnen haben.

Meist werden die Bahnkurven nicht exakt periodisch, sondern nur quasiperiodisch sein. Dann kann man unter geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen beweisen, daß bei hinreichend guter Annäherung an die Ausgangspunkte das Weylsche Maß bis auf einen vorgegebenen beliebig kleinen Betrag mit seinem ursprünglichen Wert übereinstimmt. Mehr braucht man auch nicht zu verlangen.

Daß hierbei stets der Transport der Eichstrecke mit der Geschwindigkeit (7) der Materie zu erfolgen hat, erscheint außerordentlich befriedigend; denn ein Transport mit anderer Geschwindigkeit wäre quantentheoretisch (bzw. mechanisch) garnicht möglich. Eine nähere Rechtfertigung dieser Zusammenhänge und ihren Einbau in eine erkenntnistheoretisch begründete Theorie des Maßes möchte ich jedoch noch verschieben, da hierzu noch wesentlich andere Gesichtspunkte namhaft gemacht werden müssen. Wenn wir auch gesehen haben, wie die Weylschen Ideen eine nicht vorauszuahnende Verkörperung in den gegenwärtigen physikalischen Anschauungen gefunden haben, so glaube ich doch nicht, daß man sich mit dem Gewonnenen bereits zufrieden geben kann. Ich habe die Kontinuumsauffassung der Quantenmechanik hier mit einer Einseitigkeit in den Vordergrund gestellt, welche nicht meiner Überzeugung entspricht. Immerhin schien es mir wünschenswert, zunächst diesen Gedanken mit einiger Konsequenz bis zu Ende zu verfolgen. In diesem Sinne sind die Ausführungen des folgenden Kapitels durchaus als Provisorium zu betrachten. Ich hoffe, auf den ganzen Zusammenhang unter allgemeineren physikalischen Gesichtspunkten demnächst zurückzukommen.

Kapitel III. Quantenmechanische Umdeutung der Theorie von Weyl.

Die Untersuchungen des vorigen Kapitels erstreckten sich ausdrücklich auf die als „de Brogliesche Theorie" gekennzeichnete Vorstufe der Quantenmechanik. Sie werden daher falsch, wenn man sie unmittelbar auf die Schrödingersche Theorie übertragen wollte — wenigstens in dem Gebiete, wo beide Theorien auseinandergehen. Man kann aber jedenfalls bereits sagen, daß unsere Resultate asymptotisch richtig bleiben müssen in der Grenze großer Quantenzahlen, da beide Theorien dort ineinander übergehen.

Man kann den Fortschritt zur Schrödingerschen Form der Wellenmechanik dahin charakterisieren, daß sie der Tatsache der „Eingemeindung“ der Trajektorien der klassischen Mechanik, denen de Broglie zunächst nur äußerlich durch (5) eine Welle aufgeprägt hatte, zu einem zusammenhängenden Wellenkontinuum Rechnung trägt. In der geometrischen Optik ist die Betrachtung der einzelnen losgelösten Trajektorien und die der Wellenfronten physikalisch äquivalent. In der Wellenoptik dagegen erfährt ein einzelner Wellenstrahl, wenn er einer Front von Strahlen einverleibt wird, einen gewissen Einfluß durch seine Nachbarn. Daß dieser Einfluß zum Ausdruck kommt, ist die charakteristische Aussage der Schrödingerschen Theorie, wenn sie die Wellenfunktion ψ anstatt durch eine Jacobische Differentialgleichung (6) durch eine Wellengleichung beschreibt. Bei Zerlegung in imaginären und reellen Bestandteil lautet die Schrödingersche Wellengleichung für $\psi = |\psi| e^{\frac{2\pi i}{h} W}$ (W reell):

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \frac{\Box |\psi|}{|\psi|} + \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\Phi_i\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\Phi^i\right) + m^2 c^2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{|\psi|^2 \frac{e}{m}\left(\frac{\partial W}{\partial x_k} - \frac{e}{c}\Phi_k\right)\right\} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

In dieser Darstellung erkennt man den Gegensatz zur de Broglieschen Theorie in dem Auftreten des Gliedes $\frac{\Box |\psi|}{|\psi|}$. Zugleich wird hier auch sichtbar, daß es sich um ein Problem mit zwei unbekannten reellen Funktionen handelt. Die zweite Gleichung ist die Kontinuitätsgleichung des Stromes, dessen vier Komponenten durch die geschweiften Klammern eingefaßt werden.

Es ist keine Frage, daß wir gegenwärtig der Schrödingerschen Theorie ihrer Idee nach und wegen ihrer besseren Übereinstimmung mit der Erfahrung unbedingt vor der de Broglieschen den Vorzug zu geben haben. In ihrer Diskrepanz mit der Weylschen Theorie haben wir gewiß keinen Mangel der Schrödingerschen Theorie zu sehen.

Wenn man beachtet, daß sich die Abweichungen charakteristisch bei kleinen Quantenzahlen einstellen, so kann kein Zweifel sein, worauf die Schwierigkeit zurückzuführen sein wird: Die Weylsche Theorie ist ihrer ganzen Kompetenz nach sozusagen auf die klassische Mechanik und somit auch auf die ihr zugeordnete de Brogliesche Theorie zugeschnitten. Es ist demzufolge von ihr gar nicht zu erwarten oder zu verlangen, daß sie auf die Schrödingersche Theorie bereits paßt. Die Aufgabe muß vielmehr sein, an der jetzt veralteten Weylschen Theorie den entsprechenden Schritt zu vollziehen, welcher von de Broglie zu Schrödinger führt, sie muß ihrerseits entsprechend der quantenmechanischen Korrektur der klassischen Gesetze modifiziert werden.

Man kann voraussehen, in welcher Richtung die Korrektur des Weylschen Maßes geschehen wird. Bisher war angenommen, daß die vier Potentiale Φ_i, welche eine vollständige Beschreibung des elektromagnetischen Feldes liefern, einzig für die Streckenverschiebung maßgebend seien (2a). Jetzt hat sich die Sachlage insofern geändert, als zu den vier Zustandsgrößen des Feldes Φ_i als fünfte das Schrödingersche ψ getreten ist, welches in vieler Hinsicht — vor allem in der Darstellung durch ein Variationsproblem [1]) — symmetrisch den Feldgrößen Φ_i gegenübersteht. Die Materie, in der elektronentheoretischen Auffassung hinter undurchdringliche Grenzflächen aus dem Felde verbannt oder in die Singularitäten desselben verwiesen, ist jetzt über den ganzen Raum ausgebreitet, und während man in der Weylschen Theorie sich mit Recht einen Maßstab im „leeren" Raum nur von den dort herrschenden elektromagnetischen Potentialen beeinflußt dachte, wird jetzt dem Umstand Rechnung zu tragen sein, daß die alte Trennung zwischen der „undurchdringlichen" Materie und dem κενὸν aufgehoben ist und man sich stets sozusagen im Innern der alles durchdringenden [2]) neuen Substanz $|\psi|$ befindet.

Es ist also zu erwarten, daß außer den äußeren elektromagnetischen Feldgrößen noch eine innere, die allein von $|\psi|$ abhängt, zu berücksichtigen sein wird. Madelung [3]) hat das „Potential" dieser inneren Wirkung des ψ-Feldes auf sich selbst angegeben. Ich möchte als relativistische Verallgemeinerung desselben vorschlagen:

$$e\Phi_5 = m_0 c^2 \left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \frac{\Box |\psi|}{m_0^2 c^2 |\psi|}}\right). \tag{11}$$

[1]) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **82**, 265, 1927.

[2]) Denn ψ genügt einer linearen Differentialgleichung. Superpositionsprinzip! Dennoch scheint die Eigenschaft der Undurchdringlichkeit in Form des Pauliverbots ihren quantenmechanischen Ausdruck zu finden. (P. Ehrenfest, Naturwissenschaften **15**, 161, 1927.)

[3]) E. Madelung, ZS. f. Phys. **40**, 322, 1926.

Das Wort „Potential" ist mit Vorsicht zu gebrauchen. Φ_5 entspricht nicht etwa dem „skalaren" Potential Φ_4, welches relativistisch als zeitliche Komponente eines Vierervektors figuriert, sondern ist auch relativistisch ein invarianter Skalar. Dementsprechend kann Φ_5 auch nicht die Streckenänderung längs einer bestimmten Weltrichtung regieren. Wenn man überhaupt einen Einfluß auf das Eichmaß annehmen will, so kann er nur vom Betrage der vierdimensionalen Streckenverschiebung abhängen, nicht von ihrer Richtung. Führt man dementsprechend durch das Weltlinienelement $d x_5 = c\, d\tau$ (τ = Eigenzeit) eine fünfte Koordinate ein, welche nicht unabhängig von den übrigen $d x_i$ ist, sondern sich ihnen durch die Bedingung

$$d x_1^2 + d x_2^2 + d x_3^2 + d x_4^2 + d x_5^2 = 0 \tag{12}$$

gleichberechtigt zugesellt [1]), so wird man vermuten, daß

$$l = l_0 e^{\frac{2\pi i}{h} \int \sum_1^5 \frac{e}{c} \Phi_i d x^i} \tag{13}$$

die quantenmechanische Verallgemeinerung des Weylschen Streckenmaßes darstellt.

Um die Identität von (13) mit der Schrödingerschen Wellenfunktion nachzuweisen, müssen wir zunächst angeben, längs welchen Weges das verallgemeinerte Streckenmaß (13) zu führen ist. Man wird wieder den Transport mit der Strömungsgeschwindigkeit der Materie vorschreiben wollen. Hierbei ist aber zu beachten, daß jetzt die Komponenten u^i der Vierergeschwindigkeit nicht durch (7) gegeben werden, obwohl die Darstellung des Stromes in der zweiten Gleichung (10) die Abtrennung des Faktors $e \psi \bar{\psi}$ als Ruhladungsdichte nahe legt. Die derart abgetrennten Geschwindigkeitskomponenten würden nämlich wegen (10_1) nicht die Identität der Vierergeschwindigkeit [2])

$$u_k u^k = \frac{d x_k}{d\tau} \frac{d x^k}{d\tau} = -c^2 \tag{12'}$$

---

[1]) Das Auftreten dieser fünfdimensionalen quadratischen Form ist im Sinne der Weylschen Forderung der Eichinvarianz ganz konsequent. Das Weltlinienelement $d\tau$ bzw. $d x_5$ ist zwar eine relativistische Invariante, aber keine Eichinvariante (Übergang zu einer anderen Eicheinheit ändert $d\tau$), wohl aber ist das Verschwinden der quadratischen Form (12) eichinvariant. — Offenbar sind in diesem Sinne die fünfdimensionalen Ansätze von Kaluza zu verstehen.

[2]) Wenn nichts anderes angegeben, sind im folgenden die Summationen über gleiche Indizes stets von 1 bis 4 wie bisher zu verstehen.

erfüllen. Es ist vielmehr zu schreiben

$$\frac{d x_k}{d x_5} \equiv \frac{u_k}{c} = \frac{\psi \overline{\psi}}{\varrho} \cdot \frac{e}{m_0 c} \left(\frac{\partial W}{d x} - \frac{e}{c} \Phi_k\right), \tag{7a}$$

wobei der Faktor

$$\varrho = e \psi \overline{\psi} \sqrt{1 + \left(\frac{h}{2 \pi i}\right)^2 \frac{\Box |\psi|}{m_0^2 c^2 |\psi|}} = e \psi \overline{\psi} \left(1 - \frac{e}{m_0 c^2} \Phi_5\right) \tag{14}$$

als „Ruhladungsdichte" abgetrennt ist.

In dieser Bezeichnung erhält man

$$e \Phi_5 = m_0 c^2 \left(1 - \frac{\varrho}{e \psi \overline{\psi}}\right) \tag{11a}$$

und die erste Schrödingersche Gleichung lautet in fünfdimensionaler Fassung [1]):

$$\sum_1^5{}_i \left(\frac{\partial W}{d x_i} - \frac{e}{c} \Phi^i\right)\left(\frac{\partial W}{d x^i} - \frac{e}{c} \Phi_i\right) = 0. \tag{10a}$$

Wir vergleichen jetzt die Strecke l (13) entlang der Strömung (7a) mit dem Schrödingerschen Skalar ψ. Man erhält für ψ/l

$$\frac{\psi}{l} = \frac{|\psi|}{l_0} e^{\frac{2 \pi i}{h} \int \sum\limits_1^5 \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi^i\right) d x_i},$$

(7a) ergibt:

$$= \frac{|\psi|}{l_0} e^{\frac{2 \pi i}{h} \int \sum\limits_1^4 \frac{\psi \overline{\psi}}{\varrho} \frac{e}{m c} \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi^i\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c} \Phi_i\right) d x_5 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_5} - \frac{e}{c} \Phi_5\right) d x_5},$$

(11a) ergibt:

$$= \frac{|\psi|}{l_0} e^{\frac{2 \pi i}{h} \int \frac{\psi \overline{\psi}}{\varrho} \frac{e}{m c} \sum\limits_1^5 \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi^i\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c} \Phi_i\right) \cdot d x_5}$$

$$= \frac{|\psi|}{l_0}.$$

Letzteres wegen (10a). Man erhält also zunächst nicht $\psi/l =$ konst, sondern

$$\frac{\psi}{l} = \frac{|\psi|}{l_0}, \tag{8a}$$

[1]) Hierbei ist zu beachten, daß Φ_5 seinerseits noch selbst eine erst zu bestimmende Unbekannte ist. Bekanntlich ist es ein noch unverstandenes Wunder, warum das gleiche nicht für die Potentiale Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 gilt, wie man erwarten müßte. (E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **82**, 265, 1927.) $\frac{\partial W}{\partial x_5}$ ist $= m_0 c$ [vgl. (5a)].

welches eine eindeutige Ortsfunktion ist[1]). Aber die Potentiale Φ_k sind nur bis auf einen additiven Gradienten physikalisch festgelegt; führe ich statt ihrer

$$\Phi_k^* = \Phi_k - \frac{h c}{2 \pi i e} \frac{\partial}{\partial x^k} \ln |\psi|$$

als Potentiale ein, was die elektromagnetischen Feldstärken unberührt läßt, so folgt $\psi/l =$ konst.

Die auf der Resonanz der Wellen beruhende Eindeutigkeit des mit der Strömung mitgeführten Eichmaßes überträgt sich natürlich jetzt ohne weiteres aus der de Broglieschen auf die Schrödingersche Theorie, so daß wir den Überlegungen des 2. Kapitels hier nichts hinzuzufügen haben.

Stuttgart, Physik. Inst. d. techn. Hochschule, 27. Februar 1927.

---

1) Man kann diese Beweisführung im Sinne der fünfdimensionalen Geometrie sinngemäßer folgendermaßen aussprechen:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\,\Phi_i\right) \text{ ist parallel dem Fünferstrom } j_i = \frac{e}{m}\psi\bar{\psi}\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\,\Phi_i\right),$$

$$d x^i \text{ soll parallel dem Fünferstrom } j^i \text{ gewählt werden.}$$

Der Fünferstrom ist orthogonal auf sich selbst $\left(\sum_1^5 j_i j^i = 0\right)$; also ist j_i auch orthogonal auf $d x^i$ und also $\sum_1^5 \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\,\Phi_i\right) d x^i = 0.$

Ich verdanke diese schöne Formulierung einer Mitteilung von Herrn A. Landé. Hierbei ist die 5. Komponente des Fünferstroms $j_5 = \varrho c$.