

Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels

Frédéric Paulin

Bâtiment 425 (Mathématiques), Université Paris XI, F-91405 Orsay Cedex, France

Résumé. Les objets que nous étudions sont les espaces métriques munis d'une action par isométrie d'un groupe fixé Γ . Nous définissons une «topologie» naturelle sur «l'ensemble» de ces espaces. Nous montrons un critère de compacité séquentielle par des méthodes inspirées des travaux de M. Gromov. Nous utilisons ce critère pour donner une preuve plus courte et plus géométrique de deux théorèmes: celui de M. Culler et J. Morgan sur la compacité de l'espace des arbres réels à petits stabilisateurs d'arêtes; et celui de J. Morgan sur la compactification de l'espace des structures hyperboliques sur une variété par des arbres réels à petits stabilisateurs d'arêtes.

Introduction

Considérons un groupe Γ fixé. Nous allons nous intéresser aux actions isométriques de Γ sur les espaces métriques. Nous allons chercher une topologie naturelle sur tout ensemble donné d'actions de Γ sur des espaces métriques quelconques. Notre but est d'étudier la dégénérescence des structures hyperboliques vers les arbres réels par des moyens purement topologiques.

Par exemple, prenons Γ un groupe de type fini sans torsion et regardons ses actions isométriques sur l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n . L'ensemble $\mathcal{H}^n(\Gamma)$ de ces actions fidèles et discrètes modulo conjugaison est appelé l'ensemble des *structures hyperboliques* (de groupe fondamental Γ) (voir § 6). En dimension 2, cet espace est plus connu sous le nom d'espace de Teichmüller (voir par exemple [Ber]).

Citons quelques travaux les plus connus sur les structures topologiques de $\mathcal{H}^n(\Gamma)$ et leurs comportements asymptotiques. O. Teichmüller a défini une métrique sur $\mathcal{H}^2(\Gamma)$ en utilisant la géométrie complexe (voir par exemple [Ber]). W.P. Thurston a construit (en dimension 2) une compactification naturelle pour l'action des difféomorphismes de \mathbb{H}^2/Γ par des méthodes de topologie de petite dimension [Thu 1] [Thu 2] (voir [FLP] pour un traitement complet). Enfin, M. Culler, P.B. Shalen, J.W. Morgan ont généralisé le problème en toutes dimensions avec des outils de géométrie algébrique [CS] [MS 1] [MS 2] [MO] [Mor].

Lors de la compactification, les objets qui sont rajoutés à l'infini sont des actions isométriques de Γ sur des *arbres réels* (Il s'agit d'une généralisation

des arbres simpliciaux. Un arbre réel est par définition un espace métrique entre deux points duquel passe un arc unique, et qui est de plus isométrique à un intervalle de \mathbb{R} . Voir §2). C'est pourquoi les actions de Γ sur les espaces métriques peuvent servir de dénominateur commun.

Cherchons donc une topologie naturelle sur tout ensemble donné d'actions isométriques de Γ sur des espaces métriques.

Oublions tout d'abord l'action du groupe. L'un des premiers outils pour comparer les espaces métriques est la *distance de Hausdorff*. Elle fut d'abord définie entre parties d'un même espace métrique. M. Gromov en prolonge la définition [Gro2] page 35, [Gro3] de la manière suivante :

la distance de Hausdorff D_H entre deux espaces métriques X et X' est la borne inférieure des réels $\varepsilon > 0$ tels qu'il existe une métrique sur la réunion disjointe $X \vee X'$, induisant les métriques initiales sur X et X' , telle que X est contenu dans le ε -voisinage de X' , et X' est contenu dans le ε -voisinage de X .

La distance de Hausdorff vérifie les propriétés des distances en particulier pour les espaces métriques compacts [Gro2]. Elle peut ne pas être finie (sphère-plan), et deux espaces peuvent être à distance nulle sans être isométriques (espace métrique et son complété).

Il serait plus commode pour comparer deux espaces de trouver un moyen de passer de l'un à l'autre. La notion la plus forte est celle d'isométrie. En la relâchant un peu, nous pouvons penser aux ε -isométries. Il s'agit des applications f entre deux espaces métriques X et Y telles que pour tous x, x' dans X , alors $|d(f(x), f(x')) - d(x, x')| < \varepsilon$. Mais ceci n'est pas un outil symétrique. Nous aurions besoin ou bien de deux applications, ce qui serait peu maniable, ou bien d'une bijection. Mais alors nous ne pourrions comparer que des espaces homéomorphes. C'est pourquoi nous allons nous intéresser aux objets suivants (voir aussi [CEG]).

Définition 1. Soient X, X' deux espaces métriques, et $\varepsilon > 0$. Une ε -approximation entre X et X' est une relation \mathcal{R} dans $X \times X'$ surjective (i.e. $\text{pr}_1(\mathcal{R}) = X$ et $\text{pr}_2(\mathcal{R}) = X'$) telle que :

$$\forall x, y \in X, \forall x', y' \in X', \quad x \mathcal{R} x' \text{ et } y \mathcal{R} y' \Rightarrow |d(x, y) - d(x', y')| < \varepsilon.$$

Un exemple typique d'une ε -approximation est le graphe d'une application surjective $X \rightarrow X'$, perturbant la métrique de moins de ε . Nous pouvons alors définir la distance de Hausdorff-Gromov de la manière suivante. Il ne s'agit évidemment que d'une variation mineure par rapport à la distance de Hausdorff, mais qui la rend plus maniable (voir §1).

Définition 2. La *distance de Hausdorff-Gromov* $D(X, X')$ entre deux espaces métriques X et X' est la borne inférieure des $\varepsilon > 0$ pour lesquels il existe une ε -approximation entre X et X' .

Mais la distance de Hausdorff-Gromov est mal adaptée aux espaces non compacts. Par exemple, une sphère est toujours à distance infinie du plan, ce qui contredit l'idée intuitive de la «convergence» des sphères de grand rayon vers le plan.

Quand les boules fermées de nos espaces sont compactes, une bonne notion est la notion de convergence de Hausdorff pointée [Gro 3]:

une suite d'espaces pointés tend vers un espace métrique pointé si, pour tout r , il y a convergence pour la distance de Hausdorff-Gromov de la suite des boules de centre le point base et de rayon r , vers la boule de l'espace limite de centre le point base et de rayon r .

Cette convergence vérifie la propriété de séparation. Quand les espaces ne sont pas localement compacts, une suite peut par contre avoir plusieurs limites.

Introduisons maintenant sur nos espaces une action par isométries d'un groupe Γ fixé. Nous remplaçons les boules par des compacts (arbitrairement grands). L'action du groupe permettra dans certain cas de rigidifier les comportements. En s'inspirant de la définition ci-dessus, F. Bonahon nous a suggéré la notion de convergence suivante que nous appellerons *convergence au sens de Gromov*:

Définition 3. Une suite d'espaces métriques X_i munis d'une action de Γ par isométrie converge au sens de Gromov vers un espace X_∞ du même type si pour tout $\varepsilon > 0$, pour toute partie finie P de Γ , et tout compact K de X_∞ , il existe pour i suffisamment grand un compact K_i de X_i , et une ε -approximation \mathcal{R}_i qui est P -équivariante entre K et K_i au sens suivant:

$$\forall x \in K, \forall x_i \in K_i, \forall \alpha \in P, \alpha x \in K \text{ et } x \mathcal{R}_i x_i \Rightarrow \alpha x_i \in K_i \text{ et } \alpha x \mathcal{R}_i \alpha x_i.$$

En paraphrasant, ceci signifie que pour tout compact arbitrairement grand de X_∞ , nous pouvons trouver pour i suffisamment grand un compact dans X_i qui possède à peu près la même forme, et sur lequel l'action des parties finies de Γ est à peu près la même.

Cette convergence permet de définir une topologie sur tout ensemble \mathcal{E} d'espaces métriques munis d'une action de Γ .

Définition 4. Soit X un élément de \mathcal{E} . Soient un compact K de X , une partie finie P de Γ et $\varepsilon > 0$. Notons $V_X(K, P, \varepsilon)$ l'ensemble des éléments X' de \mathcal{E} tels qu'il existe un compact K' dans X' et une ε -approximation P -équivariante fermée \mathcal{R} entre K et K' .

Les $V_X(K, P, \varepsilon)$ forment une base d'ouverts de X pour une topologie sur \mathcal{E} (voir § 1), que nous appellerons *topologie de Gromov*.

La topologie de Gromov n'est pas forcément séparée. Par exemple, un espace métrique muni de l'action triviale de Γ est indiscernable (§ 1) de l'espace réduit à un point. Si les espaces possèdent de fortes propriétés de minimalité, de convexité et d'homogénéité, il est possible d'obtenir des résultats partiels (voir [Pau 2]).

Regardons nos deux exemples, les arbres réels et les structures hyperboliques. Alors la topologie de Gromov coïncide dans les cas non dégénérés avec les topologies usuelles (voir § 5 et § 6).

Les arbres réels et structures hyperboliques font partie d'une catégorie bien particulière d'espaces métriques. Leurs géodésiques vérifient de très bonnes conditions. (Une géodésique d'un espace métrique est un plus court chemin entre deux points.)

K. Menger [Men] et H. Busemann [Bus1] [Bus2] [Bus3] ont analysé la structure des espaces munis de géodésiques vérifiant certains axiomes. S'intéressant aux propriétés métriques des variétés riemanniennes, M. Gromov [Gro1] [Gro2] a ensuite introduit la notion d'espace de longueur (voir § 2). Il s'agit d'espaces métriques tels que par deux points passe une courbe de longueur minimale, égale à la distance entre ces deux points.

Par exemple, d'après le théorème de Hopf-Rinow, les variétés riemanniennes complètes sont des espaces de longueur. Les arbres réels sont par définition des espaces de longueur.

Nous allons nous servir d'une certaine classe d'espaces métriques définis par M. Gromov [Gro1], les espaces convexes (voir § 2). Ce sont les espaces où la distance entre les points courants de deux géodésiques est une fonction convexe.

Ils vérifient donc de bonnes propriétés d'unicité de géodésiques minimisantes. Par exemple, les variétés riemanniennes simplement connexes à courbure sectionnelle négative ou nulle, et les arbres réels sont convexes. Cette propriété n'est pas fermée, et il nous faudra la renforcer en une convexité stricte uniforme (voir § 3 et § 4).

Pour la convergence de Hausdorff pointée, M. Gromov a montré ([Gro2] page 68, [Gro3]) un critère de compacité. En utilisant sa démonstration, nous montrons (§ 3, § 4) un critère de précompacité (séquentielle) pour les espaces métriques convexes munis d'une action de Γ .

Théorème. *Soit $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces de longueur complets, uniformément convexes. Soit Γ un groupe dénombrable agissant par isométrie sur les X_i . Supposons qu'il existe un point x_i dans X_i tel que :*

pour toute partie finie P de Γ , les enveloppes convexes fermées des images de x_i par P admettent pour tout $\varepsilon > 0$, un recouvrement par des boules de rayon ε , de cardinal uniformément borné.

Alors il existe une sous-suite convergente vers un espace convexe pour la convergence au sens de Gromov.

Nous appliquerons ce critère à nos exemples favoris. Si \mathcal{E} est un ensemble d'espaces métriques, alors son projectifié $\mathcal{P}\mathcal{E}$ est le quotient de \mathcal{E} où nous identifions deux espaces dont les métriques sont homothétiques.

Une première application de ce critère aux arbres réels nous permettra (§ 5) de redémontrer un théorème de M. Culler et J. Morgan [CM].

Théorème. *Soit Γ un groupe de type fini, contenant un groupe libre de rang 2. Soit $\mathcal{PT}(\Gamma)$ l'espace des arbres réels non réduits à un point, munis d'une action minimale de Γ , telle que les stabilisateurs d'arêtes ne contiennent pas de groupe libre de rang 2, modulo isométries équivariantes. Alors $\mathcal{P}\mathcal{PT}(\Gamma)$ est compact pour la topologie de Gromov.*

En particulier, quand Γ est un groupe d'isométries hyperboliques, discret et sans torsion, l'espace des arbres minimaux à stabilisateurs d'arêtes presque abéliens est projectivement compact.

Enfin, nous démontrons de manière simple et conceptuelle (voir § 6) un résultat de J. Morgan [Mor] sur la compactification de l'espace des structures hyper-

boliques. Nos résultats recourent certains des travaux de M. Bestvina [Bes] effectués indépendamment.

Notons Γ un groupe de type fini sans torsion, contenant un groupe libre de rang 2. La première étape nous dit que les actions de Γ modulo conjugaison sur \mathbb{H}^n sont «projectivement séquentiellement relativement compactes» parmi toutes les actions de Γ . La limite est de plus un arbre réel. Il s'agit d'une simple application du critère et de la formule de Gauss-Bonnet.

Théorème. *Toute suite d'éléments de $\mathcal{PH}^n(\Gamma)$ admet une sous-suite convergente au sens de Gromov vers un élément de cet ensemble, ou vers une action projectifiée de Γ sur un arbre réel.*

Si les actions sont discrètes et fidèles, alors l'arbre limite est de plus à stabilisateurs d'arêtes «petits» (i.e. qui ne contiennent pas de groupe libre à deux générateurs). C'est là que nous voyons toute la puissance des relations (ε -approximations). Celles-ci permettent en particulier de mettre en évidence le rôle joué par les commutateurs. Le seul résultat important utilisé est le lemme de Margulis (voir § 6).

Théorème. *Un arbre réel limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{PH}^n(\Gamma)$ est à petits stabilisateurs d'arêtes.*

La topologie de Gromov permet de voir cette convergence de manière géométrique et naturelle. Il est possible de montrer que les axes de translations dans \mathbb{H}^n «tendent» vers les axes de translation dans l'arbre réel limite (voir [Pau2]).

A cause des propriétés de courbure, l'espace $\mathcal{PH}^n(\Gamma)$ muni de la topologie de Gromov est canoniquement homéomorphe à $\mathcal{H}^n(\Gamma)$. Nous obtenons donc (§ 6) une compactification de $\mathcal{H}^n(\Gamma)$, qui coïncide en dimension 2 avec celles obtenues par W. Thurston [Thu1] et P. Shalen-J. Morgan [MS1] (voir [Pau2]).

Théorème. *L'ensemble $\mathcal{PH}^n(\Gamma) \cup \mathcal{PST}(\Gamma)$ muni de la topologie de Gromov est compact.*

Les résultats ci-dessous font partie de notre thèse [Pau2], dirigée par F. Bonahon. Nous le remercions chaleureusement de son aide. Nous remercions aussi le Groupe de Topologie d'Orsay, en particulier F. Laudenbach et J.P. Otal, et le Département de Mathématiques de l'«University of Southern California», où cet article a été rédigé.

1. Généralités sur la topologie de Gromov

Toutes nos actions sur les espaces métriques seront des actions isométriques à gauche.

Nous avons énoncé en introduction certains faits élémentaires sur la topologie de Gromov. Nous en donnons ici les démonstrations pour nous familiariser avec les approximations. Nous nous fixons un groupe Γ quelconque. Nous notons dans cette section \mathcal{E} un ensemble quelconque d'espaces métriques munis d'une action de Γ .

Le premier lemme nous dit que la distance de Hausdorff-Gromov D (Introduction, Définition 2) est équivalente à la distance de Hausdorff D_H (voir Introduction).

Lemme 1.1. *Pour tous les espaces métriques X et X' , nous avons*

$$D(X, X') = 2D_H(X, X').$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et δ une métrique sur la réunion disjointe $X \vee X'$ induisant les métriques initiales sur X et X' , telle que X est contenu dans le ε -voisinage de X' , et X' est contenu dans le ε -voisinage de X . Alors la relation définie par $x \mathcal{R} x'$ si et seulement si $\delta(x, x') < \varepsilon$ est une 2ε -approximation entre X et X' .

Réciproquement, donnons-nous une ε -approximation \mathcal{R} entre X et X' . Si $x \in X$ et $x' \in X'$, nous notons $\delta(x, x')$ la borne inférieure des sommes $d(x, y) + d'(x', y') + \varepsilon/2$ pour tous les $y \in X$, $y' \in X'$ tels que $y \mathcal{R} y'$. Nous définissons δ sur $(X \vee X') \times (X \vee X')$ en complétant par symétrie et de sorte que δ induise les métriques initiales d sur X et d' sur X' . Il est alors facile de voir que δ est une distance sur la réunion disjointe $X \vee X'$, telle que X est contenu dans le $\varepsilon/2$ -voisinage de X' , et X' est contenu dans le $\varepsilon/2$ -voisinage de X . \square

La distance de Hausdorff-Gromov est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire. Rappelons que deux espaces compacts sont à distance de Hausdorff-Gromov nulle si et seulement s'ils sont isométriques. Ceci découle du lemme précédent et du résultat analogue pour D_H (voir [Gro2] page 37).

Pour la Définition 4 de l'Introduction, il nous faut montrer que les $V_X(\varepsilon, P, K)$ forment bien une base d'ouverts d'une topologie sur l'ensemble \mathcal{E} . Nous dirons qu'une relation \mathcal{R} entre K et K' est *fermée* si elle est fermée en tant que partie de $K \times K'$.

Démonstration. Si Y appartient à $V_X(\varepsilon, P, K) \cap V_{X'}(\varepsilon', P', K')$, alors cette intersection contient $V_Y(\inf(\eta, \eta'), P \cup P', C \cup C')$ où η, C sont définis de la manière suivante. La partie C de Y est un compact tel qu'il existe une ε -approximation P -équivariante fermée \mathcal{R} entre K et C . Le réel $\eta > 0$ est tel que $\sup\{|d(x, y) - d(c, d)|\} < \varepsilon - \eta$, où la borne supérieure est prise sur les x, y de K et c, d de C tels que $x \mathcal{R} c$ et $y \mathcal{R} d$. Nous définissons η' et C' de manière similaire.

Notons que s'il existe une ε -approximation P -équivariante entre un compact K de X et un compact K' et X' , et une ε' -approximation P' -équivariante entre K' et un compact K'' de X'' , alors il existe une $(\varepsilon + \varepsilon')$ -approximation $(P \cap P')$ -équivariante entre K' et K'' . \square

La remarque suivante est immédiate.

Remarque 1.2. Si le groupe Γ est dénombrable, et si $X \in \mathcal{E}$ est réunion dénombrable de compacts, alors X possède une base dénombrable de voisinages dans \mathcal{E} . \square

Nous avons vu en Introduction que la topologie de Gromov n'est pas forcément séparée. Deux objets appartenant à \mathcal{E} sont dit *indiscernables* si tout voisinage de l'un rencontre tout voisinage de l'autre. En particulier, deux éléments

de \mathcal{E} qui sont isométriques par une isométrie commutant avec les actions sont trivialement indiscernables. Ils seront en général identifiés.

Observons que si C est un sous-espace de X invariant par Γ , tout voisinage de C pour la topologie de Gromov contient X . Donc X est indiscernable de C .

2. Espaces de longueur et espaces convexes

Pour que la topologie de Gromov vérifie de bonnes propriétés, nous serons amenés à nous restreindre à certains espaces métriques.

Sauf mention contraire, nous nous intéresserons uniquement aux espaces métriques *complets*. En effet, la distance de Hausdorff-Gromov entre un espace métrique et son complété est nulle. Dans toute la section 2, nous noterons Γ un groupe dénombrable fixé.

Donnons quelques définitions motivées par les deux exemples que nous avons en vue, les arbres réels et les structures hyperboliques.

Définition 2.1. Une courbe entre deux points d'un espace métrique dont la longueur est égale à la distance entre ces points est appelée *géodésique*. Un espace métrique est un *espace de longueur* s'il existe une géodésique entre deux points quelconques.

Cette définition diffère légèrement de celle donnée en [Gro2]. Voir [Bus1] [Bus2] [Gro2] pour la définition de la longueur d'une application continue d'un intervalle de réels dans un espace métrique. Par extension, nous appellerons aussi géodésique une application continue d'un intervalle fermé non compact de \mathbb{R} dans un espace métrique dont la restriction à tout intervalle compact est une géodésique au sens précédent. Les géodésiques seront toutes paramétrées par l'abscisse curviligne, c'est-à-dire que $d(x(t), x(s)) = |t - s|$ (voir [Bus2]).

D'après le théorème de Hopf-Rinow, les variétés riemanniennes complètes sont des espaces de longueur. Les arbres réels sont des espaces de longueur. C'est une conséquence immédiate de leur définition :

Définition 2.2. Un *arbre réel* est un espace métrique T tel que pour tous x, y de T , il existe un unique arc entre x et y , qui est isométrique à un intervalle de \mathbb{R} . Nous noterons $[x, y]$ cet arc.

Par exemple, les 1-complexes simpliciaux connexes, simplement connexes sont des arbres réels. Considérons un peigne de Dirac sur un Cantor de l'intervalle $[0, 1]$, union cet intervalle. Munissons-le de la distance qui en fait un espace de longueur, et qui induit la distance usuelle sur les dents du peigne et sur $[0, 1]$. Nous obtenons ainsi un arbre réel non localement compact. Quitte à les compléter, nous supposerons que nos arbres réels sont complets.

Définitions 2.3. Un espace de longueur X est dit *fortement convexe* si pour toute paire de géodésiques $f: [a, b] \rightarrow X$ et $g: [c, d] \rightarrow X$, la fonction définie sur $[a, b] \times [c, d]$ par $(t_1, t_2) \mapsto d(f(t_1), g(t_2))$ est convexe.

Une *partie convexe* d'un espace de longueur X est une partie P de X telle que toute géodésique de X , dont les extrémités appartiennent à P , est contenue dans P .

Un espace fortement convexe est *uniquement géodésique* (i.e. deux points peuvent être joints par une et une seule géodésique). Il est de plus contractile. La rétraction sur un point se fait le long des rayons géodésiques issus de ce point.

Par exemple, une variété riemannienne est fortement convexe si et seulement si elle est simplement connexe et à courbure sectionnelle négative ou nulle. Un arbre réel est fortement convexe.

Remarque 2.4. Soit X un espace fortement convexe. Soient x et y deux points à distance plus petite que ε de x' et y' respectivement. Alors la géodésique entre x et y est contenue dans le ε -voisinage de la géodésique entre x' et y' , et vice-versa. En particulier, l'adhérence d'une partie convexe de X est encore une partie convexe.

La propriété de convexité forte n'est pas fermée pour la distance de Hausdorff-Gromov entre espaces métriques compacts.

En effet, notons d_1 la métrique euclidienne dans \mathbb{R}^2 et d_0 la distance induite par la norme $\|(x, y)\| = |x| + |y|$. Soit d_ε la distance $\varepsilon d_1 + (1 - \varepsilon) d_0$ pour tout ε dans $[0, 1]$. Puisqu'il s'agit d'une métrique induite par une norme, les segments de droites sont des géodésiques entre leurs extrémités.

Si $\varepsilon \neq 0$, la métrique d_ε est convexe. En effet, il y a d'abord unicité des géodésiques: si y n'appartient pas au segment de droite entre x et y , alors $d_\varepsilon(x, y) + d_\varepsilon(y, z) > d_\varepsilon(x, z)$. La formule explicite montre alors que la distance entre deux géodésiques est convexe.

Soit B_ε la boule unité de d_ε centrée en 0, munie de la métrique d_ε . Alors B_ε tend vers B_0 pour la distance Hausdorff-Gromov. Mais d_0 n'est pas uniquement géodésique. (Voir Figure 1).

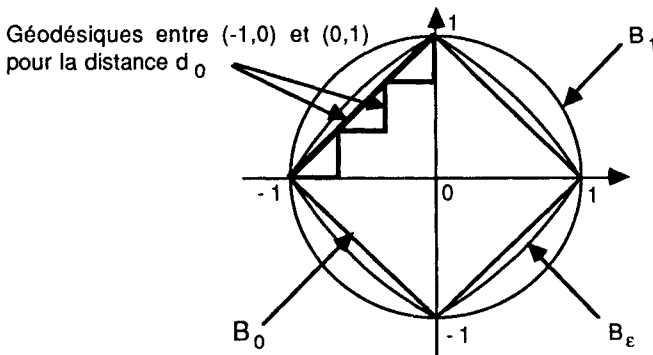


Figure 1

Définition 2.5. Un espace de longueur est dit *minimal* si ses seuls sous-ensembles convexes fermés invariants par Γ sont \emptyset et lui-même. L'*enveloppe convexe*, notée $\text{Conv}_X(Z)$, d'une partie Z d'un espace de longueur X est le plus petit convexe fermé la contenant. Un *cœur convexe* d'un espace de longueur est un convexe fermé invariant non vide, minimal pour l'inclusion.

Remarquons que tout espace est indiscernable d'un éventuel cœur convexe pour la topologie de Gromov.

Dans [Pau2], nous donnons des hypothèses assez simples qui entraînent l'existence d'un cœur convexe unique, et certaines propriétés de séparation après avoir identifié un espace et son cœur convexe. Elles utilisent en particulier la notion suivante, due à M. Gromov. Celle-ci est légèrement plus forte que la définition originale de [Gro1].

Définition 2.6. Un espace fortement convexe X est dit *strictement convexe* s'il vérifie :

⟨1⟩ Pour tout x de X , pour tout convexe fermé C de X , il existe une et une seule projection $p(x)$ de x sur C (i.e. $p(x) \in C$ minimise la distance de x à un point de C).

⟨2⟩ Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 \leq \delta < 1$ tel que, pour tout convexe fermé C de X , la projection $p: X \rightarrow C$ ainsi définie vérifie :

pour toute courbe γ dans X , telle que $d(\gamma, C) \geq \varepsilon$, alors $\text{long}(p(\gamma)) \leq \delta \text{long}(\gamma)$.

Un *module de convexité stricte* d'un espace strictement convexe X est une application $\varepsilon \mapsto \delta = \delta(\varepsilon)$ de $]0, +\infty[$ dans $[0, 1[$ vérifiant la propriété ⟨2⟩ ci-dessus.

Par exemple, une variété riemannienne à courbure sectionnelle $K \leq -\varepsilon < 0$, est strictement convexe. Un arbre réel est évidemment strictement convexe : l'application nulle est un module de convexité stricte pour tout arbre réel.

Dans le cas où l'espace est localement compact, l'existence d'une projection est immédiate. En effet, dans un espace de longueur localement compact, les boules fermées sont compactes ([Gro2] pages 5–6). De plus, dans une variété riemannienne fortement convexe, une sphère ne contient pas de géodésique, et la propriété ⟨1⟩ est vérifiée.

La propriété ⟨2⟩ nous dit en particulier que la projection sur un convexe fermé est contractante (i.e. diminue les distances). Elle sera en général utilisée pour ε fixé, valant 1 par exemple. Mais elle a aussi un intérêt pour les ε petits : elle évite que les espaces possèdent de petits endroits «plats». Nous n'aurions pas suffisamment d'estimations locales, en particulier dans le cas non localement compact (voir [Pau2]).

La propriété ⟨2⟩ implique la notion de δ -hyperbolicité de [Gro4].

Le critère de compacité que nous allons démontrer s'applique essentiellement à des espaces strictement convexes.

Remarquons que M. Gromov [Gro3] construit aussi des isométries à la limite, de la manière suivante. Considérons une suite d'espaces de longueur localement compacts ayant une limite au sens de Hausdorff pointé (voir Introduction). Après extraction éventuelle, une suite d'isométries qui ne bougent pas trop les points bases «converge» vers une isométrie de l'espace limite.

3. Critère de compacité pour la topologie de Gromov

Dans toute la section 3, nous notons Γ un groupe dénombrable quelconque. Pour les espaces de longueur pointés, complets et localement compacts, la définition de la convergence de Hausdorff pointée utilise l'existence de compacts canoniques, à savoir les boules centrées au point base.

Pour les espaces fortement convexes munis d'une action de Γ , les candidats sont les compacts enveloppes convexes des images par les parties finies de Γ d'un point convenablement choisi. Une des raisons pour prendre des compacts qui dépendent de l'action de Γ est un problème de convergence d'actions « partielles ».

Définition 3.1. Nous appelons *espace Γ -convexe* un espace de longueur X complet, fortement convexe, muni d'une action isométrique de Γ , tel que l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est compacte.

Il existe une manière récursive de construire l'enveloppe convexe d'une partie Z de X . Notons $C_1(Z)$ la réunion des géodésiques entre les points de Z . Pour $n \geq 1$, soit $C_{n+1}(Z)$ la réunion des géodésiques entre les points de $C_n(Z)$. Notons $C(Z)$ la réunion des $C_n(Z)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $\text{Conv}_X(Z)$ est égal à l'adhérence de $C(Z)$. En effet, $C(Z)$ est convexe, et contenu dans tout convexe contenant Z .

Nous appellerons $C_n(Z)$ le *n -squelette* de l'enveloppe convexe $\text{Conv}_X(Z)$.

Lemme 3.2. Donnons-nous X un espace Γ -convexe et Z une partie finie de X . Alors pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout n suffisamment grand, le ε -voisinage du n -squelette de $\text{Conv}_X(Z)$ contient $\text{Conv}_X(Z)$.

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$, puisque $\text{Conv}_X(Z)$ est un espace compact, il admet un recouvrement fini par des boules $\{B_i\}_{i=1 \dots m}$ de rayons $\varepsilon/2$. Choisissons pour tout i un élément y_i de la réunion $C(Z)$, qui est à distance inférieure ou égale à $\varepsilon/2$ du centre de B_i . Ceci est possible, car $\text{Conv}_X(Z)$ est l'adhérence de $C(Z)$.

Pour tout n suffisamment grand, le n -squelette $C_n(Z)$ contient tous les y_i , et satisfait à la condition souhaitée. \square

Les hypothèses du critère de compacité reposeront essentiellement sur les notions suivantes.

Définition 3.3. Un ε -réseau d'un espace métrique X est une partie Z de X telle que tout point de X est à distance inférieure ou égale à ε d'un point de Z .

Définition 3.4. Une famille $\{K_\alpha\}$ d'espaces métriques compacts est dite *uniformément compacte* si les diamètres des K_α sont uniformément bornés, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout α , il existe dans K_α un ε -réseau de cardinal inférieur ou égal à N .

Remarquons que si les compacts K_α sont des espaces de longueur vérifiant la seconde propriété, alors leurs diamètres sont uniformément bornés.

Définition 3.5. Une famille $\{X_\alpha\}$ d'espaces métriques est dite *uniformément convexe* si les espaces X_α sont strictement convexes et possèdent un module de convexité stricte ne dépendant pas de α .

Voici quelques résultats préliminaires en vue du critère de compacité.

Lemme 3.6. Soit X un espace strictement convexe. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mu > 0$, ne dépendant que d'un module de convexité stricte de X , tel que pour tout chemin γ de $x \in X$ à $y \in X$, de longueur λ vérifiant $\lambda - d(x, y) \leq \mu$, alors tout point z de γ est à distance inférieure ou égale à ε de la géodésique A entre x et y .

Démonstration. Supposons que la distance de z à A soit strictement supérieure à ε . Alors il existe une partie du chemin γ , de longueur $\geq \varepsilon$, à distance de A supérieure à $\varepsilon/2$. Soit δ le réel associé à $\varepsilon/2$ par la convexité stricte. Notons qu'une géodésique de A est une partie convexe de A . Alors la longueur de γ est supérieure à $d(x, y) + (1 - \delta)\varepsilon$. \square

Ce lemme permet de montrer le résultat suivant. Tout d'abord, si \mathcal{R} est une relation entre deux ensembles X_1 et X_2 , et si Z est une partie de X_1 , nous appellerons *image* de Z par \mathcal{R} dans X_2 l'ensemble $\text{pr}_2(\text{pr}_1^{-1}(Z) \cap \mathcal{R})$.

Proposition 3.7. *Soit $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques compacts uniformément convexes. Supposons qu'elle tende vers un espace de longueur compact X_∞ pour la distance de Hausdorff-Gromov. Alors X_∞ est strictement convexe.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que l'espace X_∞ est uniquement géodésique.

En effet, soit \mathcal{R}_i une ε_i -approximation entre X_∞ et X_i avec ε_i tendant vers 0 quand i tend vers $+\infty$. Supposons par l'absurde qu'il existe deux géodésiques distinctes A_1 et A_2 entre les points x_∞ et y_∞ de X_∞ . Prenons une subdivision de pas petit de l'un de ces segments, disons A_1 . Fixons-nous pour i suffisamment grand une image par \mathcal{R}_i dans X_i de chaque point de cette subdivision. Notons x_i et y_i les images respectivement de x_∞ et y_∞ .

Alors le chemin géodésique par morceaux entre les images de la subdivision a une longueur arbitrairement proche de la distance entre x_i et y_i . Par le lemme précédent, il est donc uniformément proche de la géodésique entre x_i et y_i . Il en est de même pour la géodésique A_2 , ce qui contredit le fait qu'elles soient distinctes.

Maintenant X_∞ est fortement convexe, car un graphe limite (au sens de Hausdorff-Gromov) d'une suite de graphes de fonctions convexes est convexe.

Si un espace X est strictement convexe, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mu > 0$ ne dépendant que d'un module de convexité stricte de X , tel que :

pour tout convexe C de X et pour tout point x de X , alors tout point z de C vérifiant $d(z, x) - d(p(x), x) \leq \mu$ est à distance $\leq \varepsilon$ de la projection $p(x)$.

En effet, notons $[t, y]$ la géodésique entre deux points t et y de X . Alors la projection d'un point z' de $[x, p(x)]$ sur C est aussi $p(x)$. Puisque les projections diminuent les distances, la longueur du segment $[z, z']$ est supérieure à $d(z, p(x))$. Par conséquent, la projection du point z sur $[x, p(x)]$ est précisément $p(x)$. Par un raisonnement similaire à la démonstration du Lemme 3.6, si le point z est trop loin de $p(x)$, alors la distance $d(z, x)$ est bien plus grande que $d(p(x), x)$.

Remarquons que l'existence d'une projection sur un convexe fermé de X_∞ est assurée par la compacité. L'unicité de cette projection découle de la propriété précédente appliquée aux X_i .

Soit γ une courbe et C un convexe fermé de X_∞ , avec $d(\gamma, C) \geq \varepsilon$. Pour tout $\eta > 0$, pour i suffisamment grand, il existe alors une courbe γ_i dans X_i à distance $\geq \varepsilon - \eta$ d'un convexe C_i telle que

$$|\text{long}(\gamma_i) - \text{long}(\gamma)| \leq \eta \quad \text{et} \quad |\text{long}(p(\gamma_i)) - \text{long}(p(\gamma))| \leq \eta.$$

La courbe γ_i est la géodésique par morceaux entre des «relevés» des points d'un réseau fini de la courbe γ . De même, C_i est l'enveloppe convexe de «relevés» des points d'un réseau fini du compact C . Ceci achève de montrer la Proposition 3.7. \square

Voici l'énoncé du critère de compacité.

Théorème 3.8. *Soit $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces Γ -convexes uniformément convexes. Supposons qu'il existe des points $x_i \in X_i$ tels que, pour toute partie finie P de Γ , la famille de compacts $\{\text{Conv}_{X_i}(P x_i)\}$ est uniformément compacte. Alors il existe une sous-suite de $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ qui tend vers un espace Γ -convexe X_∞ pour la convergence au sens de Gromov.*

Remarquons que ce critère est en fait un critère de précompacité séquentielle. Il nous suffira de montrer que la topologie de Gromov sur chacun des ensembles que nous considérons est métrisable pour avoir une véritable compacité.

Mais le principe de la démonstration est d'utiliser une extraction diagonale. Il est possible de modifier légèrement cette démonstration, en utilisant le théorème de Tykhonov. Nous aurions ainsi un vrai critère de compacité sur tout ensemble d'espaces Γ -convexes, du moins après l'avoir rendu séparé.

Si nous ne nous intéressions pas à obtenir des espaces convexes à la limite, les hypothèses de convexité ne seraient pas vraiment nécessaires. Dans les espaces de longueur généraux, nous avons défini des sous-espaces convexes (voir le paragraphe suivant la définition 2.3). Les hypothèses du critère de compacité seraient alors que les enveloppes convexes des images en nombre fini du point base sont uniformément compactes. La démonstration copierait alors celle de M. Gromov, en faisant converger les actions partielles sur des réseaux par considération des distances relatives.

4. Démonstration du critère de compacité

Soit P une partie finie de Γ . D'après la démonstration du critère de compacité de [Gro2] page 63, quitte à extraire une sous-suite, les compacts $\text{Conv}_i(P) = \text{Conv}_{X_i}(P x_i)$ tendent vers un espace de longueur compact $K_\infty(P)$ pour la distance de Hausdorff-Gromov.

Fixons nous une suite croissante P_k de parties finies de Γ , dont la réunion est égale à Γ . Nous supposons que P_0 est réduit à l'élément neutre e du groupe. Fixons nous pour tout k et pour i suffisamment grand une $\varepsilon_{k,i}$ -approximation $\mathcal{R}_{k,i}$ entre $K_\infty(P_k)$ et $\text{Conv}_i(P_k)$, avec $\varepsilon_{k,i}$ tendant vers 0 quand $i \rightarrow +\infty$.

Pour i suffisamment grand, les adhérences des images de $\text{Conv}_i(P_k)$ dans $K_\infty(P_{k+1})$ par la relation $\mathcal{R}_{k+1,i}$ définissent une suite de compacts dans $K_\infty(P_{k+1})$. Mais l'ensemble des sous-espaces compacts d'un même espace métrique compact est compact pour la distance de Hausdorff-Gromov (voir par exemple [Gro2]). Comme dans [Gro2], nous pouvons donc supposer, quitte à extraire, que cette suite de compacts converge. Or deux espaces compacts à distance de Hausdorff-Gromov nulle sont isométriques.

Nous pouvons donc supposer, après extraction diagonale de la suite $\{X_i\}$, que $K_\infty(P_{k+1}) \supset K_\infty(P_k)$ de telle sorte que les adhérences des images de $\text{Conv}_i(P_k)$

dans $K_\infty(P_{k+1})$ par la relation $\mathcal{R}_{k+1,i}$ convergent vers $K_\infty(P_k)$ quand i tend vers $+\infty$.

Soit alors Y_∞ la réunion des compacts $K_\infty(P_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. D'après la Proposition 3.7, l'espace Y_∞ est fortement convexe. Il suffit en effet de remarquer que les $K_\infty(P_k)$ sont strictement convexes, et que les inclusions $K_\infty(P_k) \subset K_\infty(P_{k+1})$ préservent les structures de longueur. Ceci montre au passage que l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est compacte.

Nous voulons maintenant construire une action de Γ sur Y_∞ . Nous posons $\{x_\infty\} = K_\infty(P_0)$.

Soit $\gamma \in \Gamma$. Pour tout $k \geq k_\gamma$, la partie P_k contient γ . Choisissons un $y_{k,i}(\gamma)$ dans $K_\infty(P_k)$ tel que $y_{k,i}(\gamma) \mathcal{R}_{k,i} \gamma x_i$. Puisque $K_\infty(P_k)$ est compact, quitte à extraire, nous pouvons supposer que $y_{k,i}(\gamma)$ tend vers un $y_{k,\infty}$ quand $i \rightarrow \infty$. Les points $y_{m,\infty}$ de Y_∞ sont en fait contenus dans un même compact, à savoir $K_\infty(P_{k_\gamma})$. En effet, le point $y_{k+1,i}(\gamma)$ tend à appartenir à $K_\infty(P_k)$ quand $i \rightarrow \infty$. Quitte à extraire la suite des $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, nous pouvons supposer que $y_{k,\infty}$ tend vers y_∞ quand $k \rightarrow \infty$. Nous posons alors $\gamma \cdot x_\infty = y_\infty$.

Par extraction diagonale, nous définissons ainsi $\gamma \cdot x_\infty$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Il est clair que $e \cdot x_\infty = x_\infty$. En posant $\beta(\gamma \cdot x_\infty) = (\beta\gamma) \cdot x_\infty$, nous définissons une action isométrique de Γ sur l'ensemble $\{\gamma \cdot x_\infty, \gamma \in \Gamma\}$.

Fixons nous $\gamma \in \Gamma$, et P une partie finie de Γ . Notons $\text{Conv}_\infty(P)$ l'enveloppe convexe de Px_∞ dans Y_∞ . Pour prolonger l'action de γ , nous allons montrer qu'il existe une isométrie γ_P de $\text{Conv}_\infty(P)$ sur $\text{Conv}_\infty(\gamma P)$ qui coïncide avec γ sur Px_∞ .

L'idée de la démonstration est simple. Pour k entier suffisamment grand, P_k contient P et γP . Alors $\text{Conv}_\infty(P)$ et $\text{Conv}_\infty(\gamma P)$ sont contenues dans $K_\infty(P_k)$. Par la presque-isométrie $\mathcal{R}_{k,i}$, nous remontons $\text{Conv}_\infty(P)$ dans X_i , puis nous appliquons l'isométrie γ de X_i , puis nous redescendons dans Y_∞ . Si nous aboutissons dans $\text{Conv}_\infty(\gamma P)$, nous obtenons ainsi une presque-isométrie entre $\text{Conv}_\infty(P)$ et $\text{Conv}_\infty(\gamma P)$. En utilisant le théorème d'Ascoli, nous extrayons quand $i \rightarrow \infty$ et quand $k \rightarrow \infty$ pour obtenir l'isométrie souhaitée.

Il s'agit de reprendre la démonstration de [Gro2] montrant que deux espaces compacts à distance de Hausdorff-Gromov nulle sont isométriques, pour bien voir que les constructions sont «naturelles». Le problème principal consiste à garder trace des «sommets» $\gamma \cdot x_\infty$ de $\text{Conv}_\infty(P)$.

Notons $\text{Conv}_\infty^n(P)$ (resp. $\text{Conv}_i^n(P)$) le n -squelette de l'enveloppe convexe $\text{Conv}_\infty(P)$ (resp. $\text{Conv}_i(P)$).

Lemme 4.1. *Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour k suffisamment grand, puis pour i suffisamment grand, tout point de l'image de $\text{Conv}_\infty^n(P)$ par $\mathcal{R}_{k,i}$ est à distance inférieure ou égale à ε de $\text{Conv}_i^n(P)$, et tout point de $\text{Conv}_i^n(P)$ est à distance inférieure ou égale à ε de cette image.*

Démonstration. Supposons k suffisamment grand pour que, pour tout i suffisamment grand et tout $\beta \in P$, nous ayons $\beta \in P_k$ et $d(\beta x_\infty, y_{k,i}(\beta)) \leq \varepsilon/4n$, où $y_{k,i}(\beta)$ est le point de $\text{Conv}_\infty(P_k)$ qui a servi (voir début de la section) à la construction de βx_∞ . Supposons de plus i suffisamment grand pour que $\varepsilon_{k,i} \leq \inf\{\mu/3, \varepsilon/4n\}$ où μ est associé à $\varepsilon/4n$ par le Lemme 3.6.

Montrons par récurrence sur s que:

(1) tout point de l'image par $\mathcal{R}_{k,i}$ de $\text{Conv}_\infty^s(P)$ est à distance inférieure ou égale à $s\varepsilon/n$ d'un point de $\text{Conv}_i^s(P)$,

(2) tout point de $\text{Conv}_i^s(P)$ est à distance inférieure ou égale à $s\varepsilon/n$ d'un point de cette image.

Soient $\alpha, \beta \in P$. Notons $z^{k,i}(\alpha)$ et $z^{k,i}(\beta)$ deux images par $\mathcal{R}_{k,i}$ de respectivement αx_∞ et βx_∞ . Notons R^i l'image par $\mathcal{R}_{k,i}$ dans X_i de la géodésique $[\alpha x_\infty, \beta x_\infty]$. D'après la Remarque 2.4, tout point de la géodésique $[z^{k,i}(\alpha), z^{k,i}(\beta)]$ est à distance inférieure ou égale à $\varepsilon/4n + \varepsilon_{k,i} \leq \varepsilon/2n$ d'un point de la géodésique $[\alpha x_i, \beta x_i]$, et réciproquement. Tout point w^i de R^i vérifie :

$$d(z^{k,i}(\alpha), w^i) + d(w^i, z^{k,i}(\beta)) - d(z^{k,i}(\alpha), z^{k,i}(\beta)) \leq 3\varepsilon_{k,i} \leq \mu.$$

D'après le Lemme 3.6, tout point de R^i est donc à distance inférieure ou égale à $\varepsilon/4n$ d'un point de $[z^{k,i}(\alpha), z^{k,i}(\beta)]$. Ceci montre la première assertion pour les 1-squelettes.

Réciproquement, prenons une subdivision de pas $\varepsilon/4n$ de $[\alpha x_\infty, \beta x_\infty]$. Projétons leurs images par $\mathcal{R}_{k,i}$ sur $[z^{k,i}(\alpha), z^{k,i}(\beta)]$. Puisque les projections diminuent les distances, nous obtenons un réseau de $[z^{k,i}(\alpha), z^{k,i}(\beta)]$, de pas $\leq \varepsilon/4n + \varepsilon_{k,i}$. Donc tout point de $[z^{k,i}(\alpha), z^{k,i}(\beta)]$ est à distance $\leq \frac{1}{2}(\varepsilon/4n + \varepsilon_{k,i}) + \varepsilon/4n \leq \varepsilon/2n$ d'un point de R^i . Ceci montre la seconde assertion pour les 1-squelettes.

Maintenant, chaque niveau ajoute l'erreur du niveau précédent et l'erreur du niveau 1. \square

Lemme 4.2. Soient $\varepsilon', \varepsilon > 0$ et $\{u_1, \dots, u_m\}$ un ε -réseau de $\text{Conv}_\infty(P)$. Soit k un entier suffisamment grand. Alors pour i suffisamment grand, nous avons la propriété suivante :

il existe un $(\varepsilon + \varepsilon')$ -réseau $\{z_1, \dots, z_m\}$ de $\text{Conv}_\infty(\gamma P)$ dépendant de (k, i) tel que

$$|d(u_j, u_k) - d(z_j, z_k)| \leq \varepsilon'$$

$$\text{et si } u_j \mathcal{R}_{k,i} u_j^i \text{ et } z_j \mathcal{R}_{k,i} z_j^i, \text{ alors } d(\gamma u_j^i, z_j^i) \leq \varepsilon'.$$

Démonstration. Prenons ε'' suffisamment petit devant ε' . Soit n un entier tel que les ε'' -voisinages de $\text{Conv}_\infty^n(P)$ et $\text{Conv}_\infty^n(\gamma P)$ contiennent $\text{Conv}_\infty(P)$ et $\text{Conv}_\infty(\gamma P)$ respectivement, d'après le Lemme 3.2. Soit $j \in \{1, \dots, m\}$.

Il existe donc $v_j \in \text{Conv}_\infty^n(P)$ à distance inférieure à ε'' de u_j . Notons v_j^i une image de v_j par $\mathcal{R}_{k,i}$. D'après le Lemme 4.1, pour k suffisamment grand, et pour tout i suffisamment grand, il existe $w_j^i \in \text{Conv}_i^n(P)$ à distance inférieure à ε'' de v_j^i .

L'isométrie γ de X_i respecte les n -squelettes des enveloppes convexes. Donc le point γw_j^i appartient à $\text{Conv}_i^n(\gamma P)$.

Appliquons alors la partie réciproque du Lemme 4.1. Pour k suffisamment grand, il existe un point $z_j \in \text{Conv}_\infty^n(\gamma P)$ dont une des images par $\mathcal{R}_{k,i}$, disons z_j^i , est à distance inférieure à ε'' de γw_j^i .

Notons que $\mathcal{R}_{k,i}$ est une ε'' -approximation pour i suffisamment grand, et γ une isométrie. En faisant une petite chasse dans le diagramme, il est facile de voir que les conditions sont remplies. \square

Maintenant, nous appliquons des techniques dues à M. Gromov. Nous nous fixons un ε -réseau $\{u_1, \dots, u_m\}$. Les points $z_j = z_j(i, k, \varepsilon')$ définis ci-dessus dépendent à la fois de i , de k et de ε' . Nous extrayons quand i tend vers $+\infty$. Les points $z_j(i, k, \varepsilon')$ convergent alors vers des points $z_j(k, \varepsilon')$. Nous extrayons quand k tend vers $+\infty$. Les points $z_j(k, \varepsilon')$ convergent alors vers des points $z_j(\varepsilon')$. En prenant ε' de la forme $1/n$, la suite $z_j(\varepsilon')$ à valeurs dans le compact $\text{Conv}_\infty(\gamma P)$ converge quitte à extraire vers un point que nous noterons γw_j .

Sur le ε -réseau $\{u_1, \dots, u_m\}$, nous avons ainsi défini une application γ qui conserve les distances.

Nous prenons ensuite des réseaux finis croissants, en quantité dénombrable, dont la réunion est dense dans $\text{Conv}_\infty(P)$. Nous extrayons diagonalement pour définir leurs images. En complétant par densité, nous définissons une isométrie (surjective d'après le Lemme 4.2) γ_P de $\text{Conv}_\infty(P)$ sur $\text{Conv}_\infty(\gamma P)$, induisant γ sur $P \cdot x_\infty$.

Remarquons que si $P' \supset P$, alors $\gamma_{P'}$ induit γ_P entre $\text{Conv}_\infty(P)$ et $\text{Conv}_\infty(\gamma P)$.

Notons X_∞ la réunion des compacts $\text{Conv}_\infty(P)$ pour P parties finies de Γ . Nous avons ainsi défini une isométrie γ de X_∞ dans lui-même. Nous extrayons pour tous les $\gamma \in \Gamma$, de manière à avoir à notre disposition des réseaux satisfaisant les conditions du Lemme 4.2 pour toute partie finie d'éléments de Γ .

Nous avons bien défini une action isométrique de Γ sur X_∞ . En effet, le groupe Γ agit sur l'ensemble $\{\gamma \cdot x_\infty, \gamma \in \Gamma\}$. Le résultat découle alors de la construction récursive des enveloppes convexes (voir Définition 3.1).

Il nous reste à montrer que les espaces X_i tendent bien vers X_∞ pour la topologie de Gromov. Or ceci découle des deux remarques ci-dessous.

Remarque 4.3. Soient K et K' deux compacts contenus respectivement dans X et X' , espaces métriques munis d'action de Γ . S'il existe une $\varepsilon/3$ -approximation fermée \mathcal{R} entre K et K' telle que

$$\forall x \in K, \forall x', y' \in K', \forall \gamma \in P, \quad \gamma x \in K, x \mathcal{R} x' \text{ et } \gamma x \mathcal{R} y' \Rightarrow d(\gamma x', y') < \varepsilon/3,$$

alors il existe une ε -approximation P -équivariante entre K et un sous-espace compact K'' de X' .

Remarque 4.4. Tout compact K de X_∞ est «naturellement» proche de l'un des réseaux contenu dans un $\text{Conv}_\infty(P)$ qui a servi à la construction des isométries γ .

Démonstration. Si A est un $\varepsilon/6$ -réseau fini de K , il est contenu dans un $\text{Conv}_\infty(P)$ pour P suffisamment grand. La relation entre K et A définie par:

$$x \in K \text{ est en relation avec } y \in A \text{ si } d(x, y) \leq \varepsilon/6,$$

est une $\varepsilon/3$ -approximation. Elle vérifie la condition de la Remarque 4.3. \square

Ceci termine la démonstration du Théorème 3.8. \square

5. Compacité des arbres réels à petits stabilisateurs

Nous allons appliquer le critère de compacité 3.8 pour montrer un théorème de M. Culler et J. Morgan [CM].

Rappelons tout d'abord des notations et résultats de l'article [MS1] de J. Morgan et P. Shalen. La terminologie qui suit est inspirée par une analogie entre les isométries d'un arbre réel et celles de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n . Cette analogie peut être expliquée par des phénomènes de passage à la limite (voir [Pau2]).

Dans un espace métrique, un *segment* est par définition un sous-ensemble isométrique à un intervalle de l'espace des réels \mathbb{R} . Nous appellerons *rayon* un segment isométrique à $[0, +\infty[$. Soit γ une isométrie d'un arbre réel T dans lui-même. Nous appellerons *axe de translation* de γ , et noterons A_γ un segment de T vérifiant: A_γ est invariant par γ et isométrique à \mathbb{R} ; la restriction de γ à A_γ est une translation différente de l'identité.

La distance $d(x, \gamma x)$ ne dépend ni de l'isométrie choisie entre A_γ et \mathbb{R} , ni du point x de A_γ . Nous l'appellerons *distance de translation* de γ , et nous la noterons $l_T(\gamma)$, ou $l(\gamma)$ s'il n'y a pas de confusion possible.

Une isométrie de T sans point fixe dans T est dite *hyperbolique*. Une isométrie de T qui n'est pas hyperbolique est dite *elliptique*. J. Morgan et P. Shalen ont montré [MS1] que si γ est une isométrie d'un arbre réel T non vide, alors γ possède un axe de translation si et seulement si γ est hyperbolique. De plus [MS1], si A_γ est un axe de translation de γ , il est unique et

$$l_T(\gamma) = \min_{x \in T} d(x, \gamma x)$$

$$A_\gamma = \{x \in T / d(x, \gamma x) = l_T(\gamma)\}.$$

Fixons-nous Γ un groupe de type fini. Une action de Γ sur un arbre réel T est dite à *petits stabilisateurs* si le stabilisateur d'un segment non dégénéré de T ne contient pas de groupe libre de rang 2.

Définition 5.1. Considérons l'ensemble des arbres réels non réduits à un point, munis d'une action de Γ minimale à petits stabilisateurs. Nous noterons $\mathcal{ST}(\Gamma)$ cet ensemble modulo isométries équivariantes. Nous appellerons $\mathcal{PST}(\Gamma)$ l'espace quotient de $\mathcal{ST}(\Gamma)$, où deux arbres sont identifiés s'il existe une bijection équivariante $\varphi: T \rightarrow T'$ et un réel λ non nul tel que $\forall x, y \in T, d(\varphi(x), \varphi(y)) = \lambda \cdot d(x, y)$.

Nous remarquons que $\mathcal{ST}(\Gamma)$ est bien un ensemble. En effet, un arbre minimal non réduit à un point est le complété de la réunion de ses axes de translations (voir [MS1] [Pau1]).

Nous dirons qu'une action de Γ sur un arbre réel est *irréductible* si elle ne fixe pas de bout (ou point à l'infini [Gro4]) de T (au sens de Freudenthal). Elle est dite *réductible* sinon.

Notons qu'une action à petits stabilisateurs est irréductible dès que le groupe Γ contient un groupe libre $\langle \alpha, \beta \rangle$ de rang 2 (voir [Pau1]). En effet, si l'action était réductible, il existerait un rayon sur lequel α, β agiraient par l'identité ou par translation. Le groupe libre $\langle [\alpha, \beta], [\alpha^2, \beta] \rangle$ de rang 2 fixerait alors un rayon.

Une action à petits stabilisateurs ne peut non plus être *diédrale* (au sens de [CM], i.e. irréductible et fixant une paire de points à l'infini distincts). En effet, la géodésique joignant ces deux points à l'infini serait invariante par Γ .

Les éléments du groupe agirait sur cette droite soit par translation, soit par symétrie par rapport à un point. Le groupe libre $\langle [\alpha^2, \beta^2], [\alpha^4, \beta^4] \rangle$ agirait alors par l'identité sur cet axe.

Dans [MS1] [CM], l'espace $\mathcal{PT}(\Gamma)$ est muni de la *topologie des axes*, qui est la topologie la plus faible qui rend continues les fonctions $T \mapsto l_T(\gamma)$. Nous avons montré dans [Pau1] que cette topologie est la même que la topologie de Gromov. Notons que la topologie de Gromov décrit de manière plus géométrique la «forme» d'un arbre T muni d'une action de Γ . En particulier, pour les actions réductibles, elle est beaucoup plus fine que la topologie des axes.

Théorème 5.2. *Soit Γ un groupe de type fini, contenant un groupe libre de rang deux. Alors l'espace $\mathcal{PT}(\Gamma)$, muni de la topologie de Gromov, est compact.*

En toute rigueur, nous allons montrer que $\mathcal{PT}(\Gamma)$ est séquentiellement compact pour la topologie de Gromov. Il suffira donc de remarquer qu'il est métrisable, ce qui est immédiat si nous considérons cette topologie sous l'aspect topologie des axes.

Démonstration. Donnons nous une suite $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{PT}(\Gamma)$, et une suite $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de représentants. Nous allons montrer qu'il existe un choix de points bases $x_i \in T_i$, et des facteurs normalisants λ_i tels que $\{((\lambda_i)^{-1} T_i, x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ satisfait le critère de compacité 3.8. Nous notons ici μX l'espace métrique X où la métrique est multipliée par μ .

Lemme 5.3. *Soit Γ un groupe de type fini, agissant par isométrie sur l'arbre réel T . Soit G une partie génératrice de Γ stable par passage à l'inverse. Posons*

$$\lambda_T = \sup \{l_T(h) / h \text{ produit sans répétition d'éléments de } G\}.$$

Alors pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe une constante M_γ , ne dépendant pas de T , telle que

$$l_T(\gamma) \leq M_\gamma \lambda_T.$$

En particulier, si λ_T est nul, alors l'arbre possède un point fixe global.

Démonstration. Il s'agit de copier une preuve de [CS] dans le cas des arbres réels. Nous utilisons le résultat suivant (dû à [CM]):

Lemme 5.4. *Soient h_1, h_2 deux éléments d'un groupe Γ , agissant par isométrie sur un arbre réel T . Alors $l_T(h_1 h_2) \leq l_T(h_1) + l_T(h_2)$ ou $l_T(h_1 h_2) = l_T(h_1 (h_2)^{-1})$.*

Démonstration. Nous avons $l_T(h_1 h_2) > l_T(h_1) + l_T(h_2)$ seulement dans les trois cas suivants [Pau1]: h_1 et h_2 sont hyperboliques, d'axes de translation disjoints; h_1 (resp. h_2) est hyperbolique, h_2 (resp. h_1) elliptique et l'axe de translation de h_1 (resp. h_2) ne contient pas de point fixe par h_2 (resp. h_1); h_1 et h_2 sont elliptiques et n'ont pas de point fixe commun.

Dans ces cas-là, nous avons $l_T(h_1 h_2) = l_T(h_1 (h_2)^{-1}) = l_T(h_1) + l_T(h_2) + 2D$, où D est selon le cas: la distance entre les deux axes de translation; le minimum des distances entre l'axe de translation de l'un et un point de l'autre; le minimum des distances entre un point fixe de h_1 et un point fixe de h_2 . \square

Reprenons maintenant la démonstration du Lemme 5.3. Montrons d'abord que $l_T(\gamma) \leq M_\gamma \lambda_T$, quand $\gamma = g_{i_1}^{n_1} \dots g_{i_r}^{n_r}$ où i_1, \dots, i_r sont des entiers *distincts* entre 1 et n , et $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$.

Procédons par récurrence sur l'entier naturel $v = \sum_{j=1}^r k_j$ où k_j vaut $-n_j$ si $n_j \leq 0$, et vaut $n_j - 1$ sinon. Si $v=0$, alors le résultat est vrai, par définition de λ_T . Si $v > 0$, alors après conjugaison (les distances de translation ne dépendent que des classes de conjugaison), nous pouvons supposer que n_r est différent de 0 et 1. Si $n_r < 0$, nous avons d'après le lemme ci-dessus

$$l_T(\gamma) \leq l_T(g_{i_1}^{n_1} \dots g_{i_r}^{n_r} g_{i_r}) + l_T(g_{i_r}^{-1}) \quad \text{ou} \quad l_T(\gamma) = l_T(g_{i_1}^{n_1} \dots g_{i_r}^{n_r} g_{i_r}^2)$$

et nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence. Le cas $n_r > 0$ se traite de manière identique.

Supposons maintenant que $\gamma \in \Gamma$ est quelconque. Ecrivons donc $\gamma = g_{i_1}^{n_1} \dots g_{i_r}^{n_r}$ avec i_1, \dots, i_r des entiers quelconques entre 1 et n , et $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$.

Raisonnons par récurrence sur l'entier r . Nous pouvons supposer d'après ce qui précède que les i_1, \dots, i_r ne sont pas tous distincts. Après avoir éventuellement remplacé γ par un de ses conjugués, il existe des entiers s, r avec $1 \leq s-1 < r \leq n$ tels que $i_{s-1} = i_r$. Posons $h_1 = g_{i_1}^{n_1} \dots g_{i_{s-1}}^{n_{s-1}}$ et $h_2 = g_{i_s}^{n_s} \dots g_{i_r}^{n_r}$.

Par le lemme précédent, nous avons $l_T(\gamma) \leq l_T(h_1) + l_T(h_2)$ ou $l_T(\gamma) = l_T(h_1(h_2)^{-1})$. Le résultat découle alors de l'hypothèse de récurrence.

Nous pouvons prendre pour valeur de M_γ la longueur minimale d'un mot en les générateurs représentant γ . Ceci termine la preuve de 5.3. \square

Le lemme suivant est démontré dans [CM] et [Pau 1].

Lemme 5.5. *Si g et h sont deux isométries de T telles que $A_g \cap A_h = \emptyset$, alors*

$$d(A_g, A_h) = \frac{1}{2}(l_T(g \circ h) - l_T(h) - l_T(g)). \quad \square$$

Revenons à la démonstration du Théorème 5.2. Fixons nous une partie génératrice $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ de Γ , stable par passage à l'inverse. Puisque Γ contient un groupe libre de rang 2, nous pouvons supposer que les éléments g_1, g_2 engendrent un tel groupe.

Posons $\lambda_i = \lambda_{T_i}$, où λ_{T_i} est défini dans le Lemme 5.3. Nous notons $l_i(\cdot) = l_{T_i}(\cdot)$ la fonction distance de translation de T_i . Notons h_e un élément réalisant le maximum $\lambda_i = l_i(h_e)$. Après extraction éventuelle d'une sous-suite, il ne dépend plus de i . Puisque l'action est sans point fixe global, le réel λ_i est non nul, et h_e possède un axe de translation $A_{h_e}^i$ dans T_i .

Si γ est une isométrie elliptique d'un arbre réel T , nous noterons (jusqu'à la fin de la démonstration du Théorème 5.2) A_γ l'ensemble convexe fermé de ses points fixes.

Nous allons alors définir cas par cas le point base x_i . Fixons nous $\gamma \in \Gamma$. Dans chacun de ces cas, nous montrerons que la distance de x_i à sa projection y_i sur le convexe fermé A_γ^i , divisée par λ_i , est bornée. Le nombre élevé de cas provient de la nécessité de prendre le point x_i sur l'axe de translation $A_{h_e}^i$ pour assurer de la minimalité de l'arbre limite.

(1) Supposons que g_1 (ou g_2 , quitte à changer d'indice) vérifie $A_{h_e}^i \cap A_{g_1}^i = \emptyset$. Prenons alors comme point base x_i le point qui est la projection de $A_{g_1}^i$ sur $A_{h_e}^i$. Si le segment connectant $A_{g_1}^i$ à $A_{h_e}^i$ rencontre le segment entre x_i et y_i en un point autre que x_i , alors nous avons $d(x_i, y_i) = d(A_{g_1}^i, A_{h_e}^i) \leq l_i(\gamma h_e)$. Sinon, nous avons la majoration $d(x_i, y_i) \leq d(A_{g_1}^i, A_{g_2}^i) \leq l_i(\gamma g_1)$.

(2) Considérons maintenant le cas où g_1 et g_2 ont dans T_i un axe de translation ou un ensemble de points fixes qui rencontre $A_{h_e}^i$.

i) Supposons que $A_{g_1}^i \cap A_{g_2}^i = \emptyset$. Définissons x_i comme le milieu du segment connectant entre ces convexes. Alors

$$d(x_i, y_i) \leq \sup \{d(A_{g_1}^i, A_{g_2}^i), d(A_{g_1}^i, A_{g_2}^i)\} \leq \sup \{l_i(\gamma g_1), l_i(\gamma g_2)\}.$$

ii) Sinon, $A_{g_1}^i$ et $A_{g_2}^i$ ont une intersection non vide. La plus grande longueur d'un segment contenu dans celle-ci est inférieure ou égale à $l_i(g_2) + 2l_i(g_1)$. En effet, le groupe libre $\langle [g_1, g_2], [g_1^2, g_2] \rangle$ fixerait sinon un segment non dégénéré. Définissons donc x_i comme étant le milieu du segment $A_{g_1}^i \cap A_{g_2}^i \cap A_{h_e}^i$. Nous avons alors la majoration $d(x_i, y_i) \leq \sup \{d(A_{g_1}^i, A_{g_2}^i), d(A_{g_1}^i, A_{g_2}^i), d(A_{g_1}^i, A_{h_e}^i)\} + 2l_i(g_1) + l_i(g_2)$, qui montre le résultat cherché.

Pour tout $\gamma \in \Gamma$, les distances $d(x_i, \gamma x_i)$ sont bornées uniformément en i après normalisation, car elles sont égales à $2d(x_i, A_{g_1}^i) + l_i(\gamma)$. L'enveloppe convexe de x_i et des γx_i pour les γ dans P , avec P une partie finie de Γ , est réunion des segments entre x_i et γx_i . Il est alors facile de voir que les hypothèses du critère de compacité (Théorème 3.8) sont vérifiées.

Il nous reste maintenant à montrer que l'espace limite T_∞ est un arbre réel minimal à petits stabilisateurs.

J.P. Otal nous a fait remarquer que les distances $\|\gamma\| = d(x_\infty, \gamma x_\infty)$ définissent une fonction de Γ dans \mathbb{R}^+ qui est une fonction de longueur au sens de R. Lyndon [Lyn] et I. Chiswell [Chi 1] [Chi 2]. C'est-à-dire qu'elle vérifie les axiomes suivants:

$$A1': \|e\| = 0$$

$$A2: \|\alpha\| = \|\alpha^{-1}\|$$

$$A4: \chi(\alpha, \beta) < \chi(\alpha, \gamma) \text{ implique } \chi(\beta, \gamma) = \chi(\alpha, \beta), \text{ où nous posons}$$

$$\chi(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\|\alpha\| + \|\beta\| - \|\alpha^{-1}\beta\|).$$

En effet, ces conditions sont linéaires et passent bien à la limite. Ceci nous assure donc de l'existence d'un arbre invariant par Γ dans T_∞ . Mais nous allons plutôt utiliser le lemme suivant dont la formulation un peu générale nous servira de nouveau au § 6.

Lemme 5.6. *Soient $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces uniformément convexes. Soit X_∞ un espace fortement convexe. Supposons qu'il existe une suite μ_i tendant vers 0 telle que pour tout triangle $\{a_i, b_i, c_i\}$ dans X_i , tout point de l'un des trois cotés est à distance inférieure ou égale à μ_i de l'un des deux autres cotés.*

Supposons que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout compact K de X_∞ , il existe une ε -approximation entre K et un compact K_i de X_i pour tout i suffisamment grand. Alors X_∞ est un arbre réel.

Démonstration. D'après le § 3, nous savons que tout point de X_∞ admet une unique projection sur toute géodésique compacte. Il suffit alors de vérifier qu'un espace fortement convexe X , tel que

- tout coté d'un triangle est contenu dans la réunion des deux autres,
- tout point admet une unique projection sur toute géodésique compacte,

est un arbre réel.

Remarquons que dans un espace uniquement géodésique, un point z appartient à la géodésique $\alpha = [x, y]$ d'extrémités x et y , si et seulement si $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$.

Supposons qu'il existe un arc continu ψ allant de x à y dans X , distinct de la géodésique $[x, y]$. Quitte à raccourcir cette géodésique, nous pouvons supposer que ψ ne rencontre $[x, y]$ qu'en x et y . Nous paramétrons ψ par $t \in [0, 1]$. Nous notons $]x, y[$ la géodésique $[x, y]$ privée de ses extrémités, et p la projection de X sur $]x, y[$, qui est continue, à cause de l'unicité de la projection (voir [Bus 1]).

Il existe un élément t_* de $[0, 1]$ tel que $p \circ \psi(t_*) \in]x, y[$. Notons t_∞ la borne supérieure de la composante connexe du fermé $(p \circ \psi)^{-1}(p \circ \psi(t_*))$ contenant t_* . Alors $p \circ \psi(t_\infty) = p \circ \psi(t_*)$, donc $t_\infty \neq 1$. Par conséquent, il existe une suite $t_i \in]t_\infty, 1[$ tendant vers t_∞ et vérifiant $p \circ \psi(t_i) \neq p \circ \psi(t_\infty)$.

Soient w et z deux points de X qui se projettent sur $]x, y[$ en deux points distincts. D'après notre hypothèse sur les triangles, la géodésique entre w et z est constituée de trois arcs consécutifs: de la géodésique de w à $p(w)$, de la géodésique de $p(w)$ à $p(z)$, et de la géodésique de $p(z)$ à z . Pour voir ceci, regarder les côtés du triangle $\{w, p(w), p(z)\}$, puis ceux du triangle $\{w, p(z), z\}$. Remarque aussi que la géodésique entre un point v et sa projection $p(v)$ ne rencontre la géodésique $]x, y[$ qu'en $p(v)$.

Donc $d(w, z) = d(w, p(w)) + d(p(w), p(z)) + d(p(z), z)$. Maintenant,

$$d(\psi(t_i), \psi(t_\infty)) = d(\psi(t_i), p \circ \psi(t_i)) + d(p \circ \psi(t_i), p \circ \psi(t_\infty)) + d(p \circ \psi(t_\infty), \psi(t_\infty)).$$

Or $d(\psi(t_i), \psi(t_\infty))$ tend vers 0 quand i tend vers $+\infty$. Donc $d(p \circ \psi(t_\infty), \psi(t_\infty)) = 0$, et $\psi(t_\infty)$ appartient à $]x, y[$, ce qui est une contradiction. \square

Ceci démontre que notre espace limite T_∞ est un arbre réel. Montrons maintenant que l'action de Γ sur T_∞ est minimale.

Tout d'abord, puisque le point x_i appartient toujours à l'axe de translation de h_e , la géodésique par morceaux passant par les $(h_e)^n \cdot x_\infty$ pour $n \in \mathbb{Z}$ est une géodésique, sur laquelle l'isométrie h_e agit par translation, de longueur 1. Il s'agit donc de l'axe de translation de h_e . L'enveloppe convexe des images par Γ d'un point d'un axe de translation étant égal à adhérence de la réunion de tous les axes de translation, l'action est bien minimale ([CM] [Pau 1]).

Il nous reste à montrer l'assertion suivante:

Lemme 5.7. *Soit $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'arbres réels minimaux à petits stabilisateurs. Supposons que T_i tend vers T_∞ pour la convergence au sens de Gromov. Alors T_∞ est lui aussi à petits stabilisateurs.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un segment compact $S = [x_\infty, y_\infty]$ de T_∞ , avec $x_\infty \neq y_\infty$ dont le stabilisateur contienne un sous-groupe libre G de rang

2. Un sous-groupe d'indice deux du stabilisateur de S fixe les extrémités x_∞ et y_∞ de S . Nous pouvons donc supposer que $G = \langle \alpha, \beta \rangle$ fixe S point par point. Pour i suffisamment grand, il existe une ε -approximation P -équivariante \mathcal{R}_i entre S et un compact de T_i , avec $\varepsilon < \frac{1}{10} \text{long}(S)$ et $P = \{\alpha, \beta\}$. Soient $x_i, y_i \in T_i$ tels que $x_\infty \mathcal{R}_i x_i$ et $y_\infty \mathcal{R}_i y_i$.

Alors $d(x_i, \alpha x_i) < \varepsilon$. De même, $d(y_i, \alpha y_i) < \varepsilon$. Comme $d(x_i, y_i) > d(x_\infty, y_\infty) - \varepsilon > 3\varepsilon$, les segments $[x_i, \alpha x_i]$ et $[y_i, \alpha y_i]$ ne se rencontrent pas. Tous deux contiennent un point de A_α^i . Par convexité, le segment connectant S_α^i entre ces segments est contenu dans A_α^i . La longueur de S_α^i est strictement supérieure à 7ε . Puisque βx_i est proche de x_i , et βy_i de y_i , le segment S_β^i rencontre S_α^i sur une distance d'au moins 3ε . (Voir Fig. 2).

Nous avons $2l_i(\alpha) + l_i(\beta) \leq 2d(x_i, \alpha x_i) + d(y_i, \alpha y_i) < 3\varepsilon$. La longueur du segment $S_\alpha^i \cap S_\beta^i$ est alors supérieure strictement à $2l_i(\alpha) + l_i(\beta)$. Donc il existe un segment non dégénéré, contenu dans $S_\alpha^i \cap S_\beta^i$, qui est stable par le groupe libre $\langle [\alpha, \beta], [\alpha^2, \beta] \rangle$, ce qui contredit les hypothèses.

Ceci termine la démonstration du Lemme 5.7 et du Théorème 5.2. \square

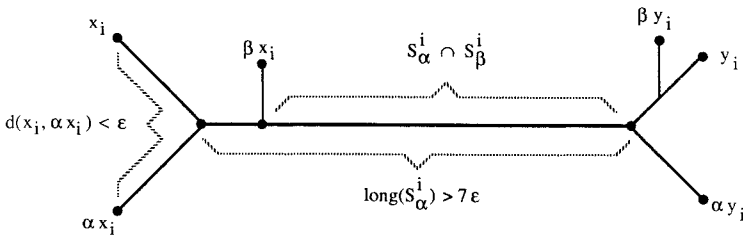


Figure 2

Remarques. (1) Considérons une suite d'arbres réels minimaux qui sont seulement irréductibles. En adaptant la démonstration, nous pouvons montrer que s'il n'y a pas de sous-suite qui converge au sens de Gromov, alors les distances de translation tendent vers celles d'un arbre réductible (quitte à normaliser et extraire). En effet, nous pouvons montrer que ces distances de translation convergent et valent 0 à la limite sur le groupe dérivé. Il est alors facile de construire une action sur \mathbb{R} ayant pour fonction distance de translation la limite ainsi obtenue (voir [CM]).

(2) Supposons que G est un groupe discret d'isométries de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n . Alors G est presque abélien (i.e. contient un sous-groupe abélien d'indice fini) si et seulement s'il ne contient pas de groupe libre de rang 2.

En effet, il contient un groupe libre de rang 2, sauf si tous ses éléments sont paraboliques et fixent un même point à l'infini (voir par exemple [EON]). Dans ce cas-là, il respecte les horisphères (voir rappels § 6) passant par ce point, qui sont isométriques à \mathbb{R}^n . D'après les théorèmes de Bieberbach, les sous-groupes discrets de \mathbb{R}^n sont presque abéliens.

Donc l'espace des actions d'un groupe hyperbolique discret de type fini sur les arbres réels à stabilisateurs presque abéliens est compact.

6. Dégénérescence des structures hyperboliques

Les rappels suivants de géométrie hyperbolique pourront être trouvés chez S.S. Chen et L. Greenberg [CG], L. Greenberg [Gre], N. Wielenberg [Wie] et A. Beardon [Bea] en dimension 2.

Nous noterons \mathbb{H}^n la boule unité de \mathbb{R}^n , munie de la métrique riemannienne

$$ds = \frac{2dx}{(1 - \|x\|^2)}$$

à courbure constante -1 , où dx est la métrique euclidienne. Nous notons S_∞^{n-1} l'espace à l'infini de \mathbb{H}^n , c'est-à-dire la sphère euclidienne dans \mathbb{R}^n de rayon 1. Les géodésiques sont les cercles et droites perpendiculaires à S_∞^{n-1} au sens euclidien. Les *horisphères* sont les sphères euclidiennes contenues dans $\mathbb{H}^n \cup S_\infty^{n-1}$ et tangentes à S_∞^{n-1} , privées du point de tangence. Nous dirons que cette horisphère est centrée en ce point de S_∞^{n-1} . Les horisphères sont des hypersurfaces à courbure nulle, isométriques à \mathbb{R}^n .

Un autre modèle de l'espace hyperbolique est

$$\mathbb{H}_0^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 = 1, x_0 \geq 1\},$$

muni de la métrique riemannienne induite par la forme quadratique $q = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2$ sur l'espace tangent à \mathbb{H}_0^n . Une isométrie entre les deux modèles est fournie par $(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto ((x_0 + 1)^{-1} x_1, \dots, (x_0 + 1)^{-1} x_n)$. Soit $O(n, 1)$ le groupe des transformations linéaires réelles préservant q . Le groupe $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ des isométries de \mathbb{H}^n s'identifie donc avec $O^+(n, 1)$, sous-groupe d'indice deux de $O(n, 1)$ formé des éléments conservant le demi-hyperboloïde supérieur \mathbb{H}_0^n .

Une isométrie de \mathbb{H}^n possède au moins un point fixe dans $\mathbb{H}^n \cup S_\infty^{n-1}$, d'après le théorème de Brouwer. Elle est de l'un des types suivants :

- (1) *elliptique*, si elle a un point fixe dans \mathbb{H}^n ,
- (2) *parabolique*, si elle a exactement un point fixe, et si celui-ci est dans S_∞^{n-1} ,
- (3) *loxodromique*, si elle a exactement deux points fixes distincts, et ceux-ci sont dans S_∞^{n-1} .

Si α est une isométrie parabolique de \mathbb{H}^n , elle préserve les horisphères centrées en son point fixe à l'infini.

Si α est une isométrie de \mathbb{H}^n , nous noterons $l(\alpha)$ la borne inférieure des $d(x, \alpha x)$ pour x dans \mathbb{H}^n . Nous appellerons $l(\alpha)$ la *distance de translation* de α . Elle est nulle si et seulement si α est elliptique ou parabolique. Si α est loxodromique, la géodésique entre ses deux points fixes à l'infini sera appelée *axe de translation* de α , et noté A_α . L'isométrie α translate alors sur son axe de translation de la distance $l(\alpha)$.

Rappelons le lemme suivant, qui utilise le fait que le groupe d'isotropie d'un point est $O(n)$, qui est compact.

Lemme 6.1. *Pour tout x de \mathbb{H}^n , et tout ε réel, l'ensemble des isométries g de \mathbb{H}^n , telles que $d(g(x), x) \leq \varepsilon$, est compact. \square*

Fixons nous Γ un groupe de type fini et G une famille finie de générateurs. Notons $R(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$ l'ensemble des représentations de Γ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$.

Il est muni de la topologie dite usuelle de la convergence uniforme sur tout compact de \mathbb{H}^n des images de G par les représentations. Plus précisément, soit $\varepsilon > 0$ et K un compact de \mathbb{H}^n ; deux actions ρ et ρ' sont (ε, K) -proches si

$$\forall x \in K, \forall g \in G, d(\rho(g)x, \rho'(g)x) < \varepsilon.$$

Cette topologie ne dépend évidemment pas de la partie génératrice choisie. Nous noterons $RC(\Gamma)$ le quotient modulo conjugaison de $R(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$. Sa topologie usuelle est la topologie quotient de celle décrite ci-dessus.

Proposition 6.2. *La topologie de Gromov sur $RC(\Gamma)$ est la même que la topologie usuelle.*

Démonstration. Il est immédiat que toute suite convergente pour la topologie usuelle converge vers la même limite pour la convergence au sens de Gromov.

Réciproquement, soit $\{\rho_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de $R(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$ tendant au sens de Gromov vers une représentation ρ . Fixons nous une partie génératrice G de Γ et un compact K de \mathbb{H}^n . Nous allons montrer que, quitte à conjuguer ρ_i , les $\rho_i(g)$ avec $g \in G$ tendent uniformément sur K vers $\rho(g)$.

Fixons nous un $\varepsilon > 0$. Soit $\{x_j\}_{j=1 \dots m}$ un ε -réseau fini de K , et $\varepsilon' > 0$ petit devant ε . Soit \mathcal{R}_i une ε' -approximation G -équivariante entre K , muni de l'action ρ , et un compact K_i de \mathbb{H}^n muni de l'action ρ_i , pour i suffisamment grand.

Soit $\{x_j^i\}_{j=1 \dots m}$ tels que $x_j \mathcal{R}_i x_j^i$. Les distances relatives entre les x_j^i sont donc proches de celles correspondantes pour les x_j . Nous pouvons alors montrer par récurrence qu'il existe des points $\{y_j^i\}_{j=1 \dots n}$ de \mathbb{H}^n tels que $d(y_j^i, x_j^i) \leq \varepsilon$ et $d(y_j^i, y_k^i) = d(x_j, x_k)$, pourvu que ε' soit suffisamment petit.

Par les propriétés d'homogénéité de \mathbb{H}^n , étant donné deux ensembles de points $\{u_i\}_{i=1 \dots m}$ et $\{v_i\}_{i=1 \dots m}$ tels que $d(u_i, u_j) = d(v_i, v_j)$ pour tout i, j alors il existe une isométrie g de \mathbb{H}^n telle que $g(u_i) = v_i$.

Soit Φ_i une isométrie envoyant y_j^i sur x_j . Il existe alors $\varepsilon'' > 0$ tendant vers 0 quand ε tend vers 0, tel que l'identité est une ε'' -approximation G -équivariante entre K muni de l'action ρ , et K muni de l'action $\rho_i' = \Phi_i \circ \rho_i \circ (\Phi_i)^{-1}$. Ce qui signifie précisément que les distances entre les images d'un point de K par $\rho_i'(g)$ et $\rho(g)$ pour g dans G sont petites pour i suffisamment grand. \square

Fixons nous un sous-groupe Γ de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ de type fini, discret et sans torsion. En particulier, Γ n'a pas d'éléments elliptiques.

Définition 6.3. Nous noterons $\mathcal{H}^n(\Gamma)$ l'ensemble des homomorphismes injectifs à image discrète de Γ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, modulo conjugaison.

C'est donc l'ensemble des actions fidèles et proprement discontinues de Γ sur \mathbb{H}^n par isométries, où nous identifions deux actions ρ et ρ' s'il existe une isométrie équivariante de (\mathbb{H}^n, ρ) et (\mathbb{H}^n, ρ') .

D'après [CS] par exemple, l'espace $R(\Gamma, O(n, 1))$ des représentations de Γ dans $O(n, 1)$ est naturellement muni d'une structure de variété affine réelle,

de dimension finie. J. Morgan [Mor] a remarqué que le quotient de $R(\Gamma, O(n, 1))$ par l'action du groupe algébrique $O(n, 1)$ par conjugaison est une variété affine. Les représentations discrètes et fidèles dans $O^+(n, 1)$ constituent un fermé dans $R(\Gamma, O(n, 1))$ (voir [Wie]), stable par conjugaison par $O(n, 1)$. L'espace $\mathcal{H}^n(\Gamma)$ muni de la topologie usuelle est donc métrisable.

Notons $\mathcal{P}\mathcal{H}^n(\Gamma)$ l'espace des actions fidèles et discrètes de Γ sur les espaces $\lambda\mathbb{H}^n$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, modulo homothéties équivariantes, muni de la topologie de Gromov quotient. Il est canoniquement homéomorphe à $\mathcal{H}^n(\Gamma)$.

Théorème 6.4. *Soit Γ un groupe de type fini, sans torsion, contenant un groupe libre de rang deux. Alors l'ensemble $\mathcal{P}\mathcal{H}^n(\Gamma) \cup \mathcal{P}\mathcal{S}\mathcal{T}(\Gamma)$ muni de la topologie de Gromov est compact.*

Un espace topologique est dit *séquentiellement compact* si de toute suite nous pouvons extraire une sous-suite convergente. Nous allons en fait montrer que l'espace $\mathcal{P}\mathcal{H}^n(\Gamma) \cup \mathcal{P}\mathcal{S}\mathcal{T}(\Gamma)$ est séquentiellement compact. Il est en fait métrisable compact (voir [Pau2]). Ceci découle d'arguments de topologie générale, et des remarques qu'une structure géométrique et un arbre réel ne sont pas indiscernables (voir définition § 1), et qu'une suite de structures hyperboliques ne peut tendre vers deux éléments distincts de $\mathcal{P}\mathcal{S}\mathcal{T}(\Gamma)$ (voir [Pau2]).

Démonstration. D'après le § 5, il suffit de montrer que de toute suite d'éléments de $\mathcal{H}^n(\Gamma)$ nous pouvons extraire une sous-suite convergente vers un élément de la réunion de $\mathcal{H}^n(\Gamma)$ et $\mathcal{S}\mathcal{T}(\Gamma)$, quitte à normaliser.

Fixons nous une partie génératrice G de Γ stable par passage à l'inverse. Soit $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{H}^n(\Gamma)$. Prenons ρ_i des relevés. Si $\lambda_i > 0$, nous notons X_i l'espace métrique $(1/\lambda_i)\mathbb{H}^n$ muni de l'action ρ_i . Quitte à conjuguer ρ_i , nous allons montrer qu'il existe un choix de points bases x_i et de facteurs normalisants λ_i tel que la suite d'espaces Γ -convexes (X_i, x_i) vérifie les hypothèses du critère de compacité.

Nous empruntons à M. Bestvina [Bes] le lemme suivant, qui remplace notre argument original qui n'était valable qu'en petites dimensions. Par exemple, en dimension deux, il est possible de trouver un point base en regardant uniquement les axes de translation d'une partie génératrice, ce qui donne une méthode plus constructive (voir [Pau2]).

Lemme 6.5. *Soit Γ un sous-groupe de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ discret, sans torsion, de type fini, qui n'est pas presque abélien. Alors il existe un point x_0 de \mathbb{H}^n qui minimise sur \mathbb{H}^n la fonction $\Delta(x) = \max\{d(x, gx), g \in G\}$.*

Démonstration. Soit x_1 un point de \mathbb{H}^n fixé. Notons λ le maximum des $d(x_1, gx_1)$ pour g élément de G .

Supposons qu'il existe deux éléments g_1, g_2 de G loxodromiques, d'axes de translation non confondus. Puisque Γ est discret, ils n'ont pas de point commun dans S_∞^{n-1} [Gre]. Considérons les voisinages tubulaires V_1, V_2 de ces axes de translation tels que si x appartient à V_i , alors $d(x, g_i x) \leq \lambda$. Alors l'intersection de ces voisinages est compact, et il suffit de chercher x_0 dans ce compact.

Supposons qu'il existe un élément g_1 de G loxodromique, et que tous les autres éléments loxodromiques de G ont le même axe. Puisque Γ est discret

et n'est pas presque cyclique, il existe un élément parabolique $g_2 \in G$, dont le point fixe x_∞ n'est pas extrémité de l'axe de translation de g_1 . Donnons nous une géodésique $\alpha(t)$ dont une extrémité est x_∞ . Considérons la fonction f définie par $f(t) = \min d(x, g_2 x)$, où le minimum est pris sur l'horisphère passant par $\alpha(t)$. Cette fonction f est strictement croissante, et va de 0 à $+\infty$. Le point x_0 est alors à chercher dans l'intersection compacte du voisinage de l'axe de translation de g_1 décrit ci-dessus et de l'horiboule où le $f(t)$ correspondant à la frontière est inférieur ou égal à λ .

Si nous ne sommes pas dans l'un des cas précédents, alors tous les éléments de G sont paraboliques. Puisque Γ est discret et n'est pas presque abélien, il existe deux éléments paraboliques g_1, g_2 de G , dont les points fixes à l'infini sont distincts. Nous reprenons alors l'argument ci-dessus en prenant l'intersection de deux horiboules. \square

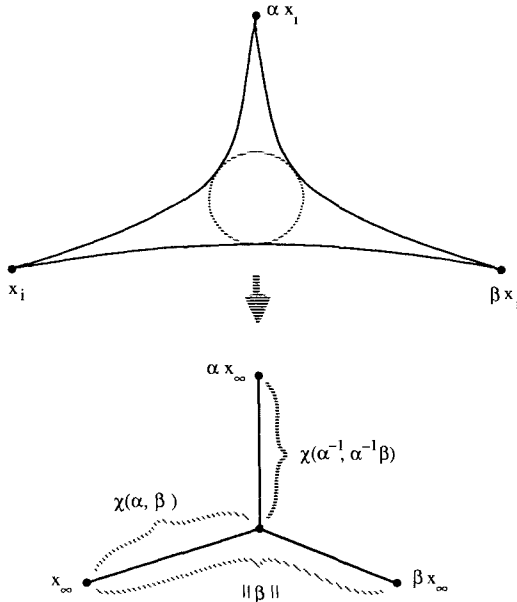


Figure 3

Revenons à la démonstration du théorème. Prenons pour point base x_i le point défini par le lemme précédent pour le groupe $\rho_i(\Gamma)$. Posons λ_i le maximum de $\{d(x_i, \rho_i(g) x_i), g \in G\}$.

Supposons que la suite λ_i est bornée. Après conjugaison, nous pouvons supposer que $x_i = 0$. Nous utilisons alors le Lemme 6.1 pour en déduire que ρ_i tend vers une action ρ sur \mathbb{H}^n . Un résultat de N.J. Wielenberg [Wie] assure que l'action ρ est fidèle et discrète.

Supposons que la suite λ_i tend vers $+\infty$. Alors pour toute partie finie P de Γ , les enveloppes convexes $\text{Conv}_{x_i}(P x_i)$ sont uniformément compactes.

En effet, tout triangle ayant pour sommet des images de x_i possède des côtés de longueurs normalisées bornées. Quitte à extraire, nous pouvons supposer que pour tout α dans Γ la suite des distances $(1/\lambda_i)d(x_i, \alpha x_i)$ converge, vers un réel noté $\|\alpha\|$. Puisque λ_i tend vers $+\infty$, un tel triangle tend vers une étoile. (Voir Fig. 3).

Son aire est en effet bornée puisque la courbure du triangle géodésique est égale à -1 (formule de Gauss-Bonnet). Le diamètre du cercle inscrit divisé par λ_i doit donc tendre vers 0. Voir la Fig. 3, où nous posons

$$\chi(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\|\alpha\| + \|\beta\| - \|\alpha^{-1}\beta\|).$$

Remarquons au passage que l'application $\|\cdot\|$ ainsi définie de Γ dans \mathbb{R}^+ est de nouveau une fonction de longueur au sens de R. Lyndon et I. Chiswell.

Nous pouvons alors appliquer le critère de compacité. Soit T_∞ une limite ainsi obtenue. Le Lemme 5.6 montre qu'il s'agit d'un arbre réel.

Il ne possède pas de point fixe global. Sinon, en prenant un $\frac{1}{2}$ -approximation G -équivariante entre ce point et un point y_i de X_i pour i assez grand, nous aurions $d(y_i, g y_i) < \frac{1}{2}\lambda_i$ pour tout g de G , ce qui contredit la définition de x_i .

Nous avons ainsi montré le

Théorème 6.6. *Toute suite d'éléments de $\mathcal{PH}^n(\Gamma)$ admet une sous-suite convergente au sens de Gromov vers un élément de cet ensemble, ou vers une action projectifiée de Γ sur un arbre réel non réduit à un point. \square*

L'unique sous-arbre minimal de T_∞ , que nous noterons encore T_∞ , est aussi limite des X_i .

Il nous reste alors à montrer que les stabilisateurs de segments non dégénérés sont presque abéliens. La preuve est analogue à celle pour les arbres réels (Lemme 5.7). Nous allons utiliser le résultat suivant, dont la démonstration se trouve dans [Wie] [BK] [Thu2].

Lemme de Margulis. *Il existe une constante μ ne dépendant que de n , telle que pour tout sous-groupe discret Γ d'isométries de \mathbb{H}^n , et pour tout x de \mathbb{H}^n , le sous-groupe engendré par les éléments de Γ bougeant x d'une distance plus petite que μ , est presque abélien. \square*

Supposons qu'il existe un segment compact $S = [x_\infty, y_\infty]$ de T_∞ , dont le stabilisateur contienne un sous-groupe libre G de rang 2. Un sous-groupe d'indice 2 du stabilisateur de S fixe les extrémités x_∞ et y_∞ de S . Nous pouvons donc supposer que $G = \langle \alpha, \beta \rangle$ fixe S .

Pour i suffisamment grand, il existe une ε -approximation P -équivariante \mathcal{R}_i entre S et un compact de X_i , où ε est petit devant μ et la longueur D de S , et où P est l'ensemble des produits avec au plus quatre répétitions de α , β et de leurs inverses.

Soient $x_i, y_i \in X_i$ tels que $x_\infty \mathcal{R}_i x_i$ et $y_\infty \mathcal{R}_i y_i$. Considérons un voisinage tubulaire B_i autour du segment de géodésique S_i entre x_i et y_i , de diamètre ε , centré au milieu z_i de S_i et de longueur $\lambda_i D/2$. Alors $d(x_i, \alpha x_i) < \varepsilon \lambda_i$. De même, $d(y_i, \alpha y_i) < \varepsilon \lambda_i$. Considérons la surface «plissée» constituée des deux triangles géodésiques de sommets $\{x_i, y_i, \alpha x_i\}$, et $\{y_i, \alpha y_i, \alpha y_i\}$.

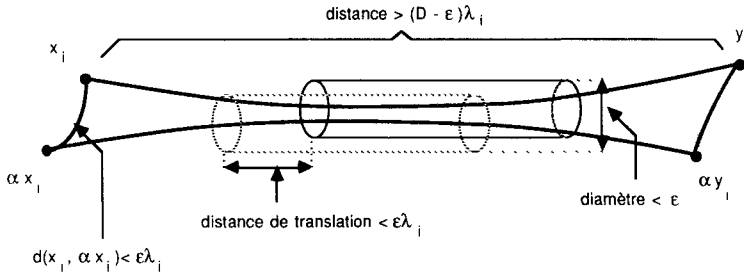


Figure 4

Puisque λ_i tend vers $+\infty$ et que l'aire d'un triangle est bornée, les triangles sont longs et fins. (Voir aussi les formules de [Bea] donnant la distance entre points de deux côtés d'un triangle). La géodésique αA_i perce donc le « tonneau » B_i en ses extrémités (Voir Fig. 4).

Soit B'_i le tonneau de même centre que B_i , et de diamètre et de longueur moitiés. Alors pour tous points x, y de B'_i , les distances $d(x, \alpha x)$ et $d(y, \alpha y)$ sont uniformément proches. Ceci montre que α agit « presque » par translation euclidienne sur B'_i . Il en est de même pour tous les éléments de la partie finie P . Mais le propre des translations est de commuter. Pour i suffisamment grand, les éléments $[\alpha, \beta]$ et $[\alpha^2, \beta]$ déplacent donc le point z_i de moins de μ . Mais alors le lemme de Margulis contredit le fait qu'ils engendrent un groupe libre à deux générateurs.

Nous avons ainsi montré :

Théorème 6.7. *Un arbre réel limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{PH}^n(\Gamma)$ est à petits stabilisateurs.*

Ceci termine la démonstration du Théorème 6.4. \square

Bibliographie

- [Bea] Beardon, A.F.: The geometry of discrete groups. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1983
- [Ber] Bers, L.: Finite dimensional Teichmüller spaces and generalisations. Proc. Symp. Pure Math. **39**, (Part 1) 115–156 (1983)
- [Bes] Bestvina, M.: Degenerations of the hyperbolic space. Prépublication U.C.L.A. 1987
- [BK] Buser, P., Karcher, K.: Gromov's almost flat manifolds. Astérisque **81**. Paris: Soc. Math. France 1981
- [Bus 1] Busemann, H.: Metric methods in Finsler spaces and in the foundations of geometry. (Ann. Math. Stud. **8**) Princeton: Princeton University Press 1942
- [Bus 2] Busemann, H.: The geometry of geodesics. New York: Academic Press 1955
- [Bus 3] Busemann, H.: Recent synthetic differential geometry. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970
- [CEG] Canary, D.B., Epstein, A., Green, P.: Notes on notes of Thurston. Dans: Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space, Warwick-Durham 1984. (London Math. Soc. L.N.S. vol. 111, pp. 3–92) Cambridge Univ. Press 1987

- [CG] Chen, S.S., Greenberg, L.: Hyperbolic Spaces. Dans: Contribution to analysis, A collection of paper dedicated to Lipman Bers, pp. 49–86. New York: Academic Press 1974
- [Chi1] Chiswell, I.M.: Length functions and free products with amalgamation of groups. Proc. London Math. Soc. **42**, 42–58 (1981)
- [Chi2] Chiswell, I.M.: Abstract length functions in groups. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **80**, 451–463 (1976)
- [CM] Culler, M., Morgan, J.: Group actions on \mathbb{R} -trees. Proc. Lond. Math. Soc. **55**, 571–604 (1987)
- [CS] Culler, M., Shalen, P.B.: Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds. Ann. Math. **117**, 109–146 (1983)
- [EON] Eberlein, P., O’Neill, B.: Visibility Manifolds. Pac. Math. **46**, 45–109 (1973)
- [FLP] Fathi, A., Laudenbach, F., Poenaru, V.: Travaux de Thurston sur les surfaces. Astérisque **66–67**, Paris: Soc. Math. France 1978
- [Gre] Greenberg, L.: Discrete subgroups of the Lorentz Group. Math. Scand. **10**, 85–107 (1962)
- [Gro1] Gromov, M.: Hyperbolic manifolds, groups and actions. Dans: Riemann Surfaces and Related Topics, Proc. of the 1978th Stony Brook Conference. (Ann. of Math. Studies, Vol. 97, pp. 183–213) Princeton University Press 1980
- [Gro2] Gromov, M.: Structures métriques pour les variétés riemanniennes. Cedic/Fernand Nathan 1981
- [Gro3] Gromov, M.: Groups of polynomial growth and expanding maps. Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. **53**, 53–78 (1981)
- [Gro4] Gromov, M.: Hyperbolic groups. Dans: Essays in Group Theory, ed.: S.M. Gersten. (M.S.R.I. Pub. **8**, pp. 75–263) Springer-Verlag 1987
- [Lyn] Lyndon, R.C.: Length functions in groups. Math. Scand. **12**, 209–234 (1963)
- [Men] Menger, K.: Untersuchungen über allgemeine Metrik I, II, III. Math. Ann. **100**, 75–163 (1928)
- [MO] Morgan, J., Otal, J.P.: Non-archimedean measured laminations and degenerations of surfaces. Prépublication, Universités de Columbia et d’Orsay, 1985
- [Mor] Morgan, J.: Groups actions on trees and the compactification of the space of conjugacy classes of $SO(n, 1)$ -representations. Topology **25**, 1–33 (1986)
- [MS1] Morgan, J., Shalen, P.B.: Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures I. Ann. Math. **122**, 398–476 (1985)
- [MS2] Morgan, J., Shalen, P.B.: Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures II, III, Ann. Math. (A paraître)
- [Pau1] Paulin, F.: Topologie de Gromov sur les arbres réels. Prépublication ORSAY 87T 79, Université d’Orsay, 1987 (à paraître dans Topology and its Applications)
- [Pau2] Paulin, F.: Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels. Thèse, Université d’Orsay, France, 1987
- [Thu1] Thurston, W.P.: On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. (Manuscript non publié, 1976)
- [Thu2] Thurston, W.P.: Geometry and topology of 3-manifolds. Notes de cours. Princeton University 1979
- [Wie] Wielenberg, N.J.: Discrete Moebius groups. Am. J. Math. **99**, 861–877 (1977)