Invent. math. 62, 367–380 (1981)

*Inventiones mathematicae*


# Ideale kleiner Norm in Idealklassen und eine Regulatorabschätzung

Rainer Zimmert

Mozartstr. 52, D-5300 Bonn 1, Bundesrepublik Deutschland

## Einleitung

$K$ bezeichnet im folgenden einen algebraischen Zahlkörper vom Grade $n$ mit $r_1$ reellen und $2r_2$ komplexen Einbettungen, dessen Diskriminante den Absolutbetrag $d(K)$ hat. Wie Minkowski mit Hilfe der von ihm entwickelten Geometrie der Zahlen gezeigt hat, enthält jede Idealklasse von $K$ ein ganzes Ideal $\mathfrak{b}$ mit

$$N(\mathfrak{b}) \leqq C(r_1, r_2)\, d(K)^{\frac{1}{2}},$$

wobei $N$ die Absolutnorm bezeichnet, und $C(r_1, r_2) = n!\, n^{-n} (4\pi^{-1})^{r_2}$ ist (s. zum Beispiel Lang [1], p. 119, Th. 4). Für große $n$ gilt also

$$C(r_1, r_2) \leqq (7{,}3)^{-\frac{r_1}{2}} (5{,}8)^{-r_2}.$$

Dieses Ergebnis ist von vielen verbessert worden, Literaturhinweise findet man in Narkiewicz [3], pp. 80–81. Das bisher beste Ergebnis stammt von Rogers und Mulholland [2] und impliziert für große $n$ die folgende Abschätzung für $C(r_1, r_2)$

$$C(r_1, r_2) \leqq (32{,}5)^{-\frac{r_1}{2}} (15{,}7)^{-r_2}.$$

In dieser Arbeit zeige ich mit Hilfe der Funktionalgleichung der Zetafunktion einer Idealklasse, daß für große $n$

$$C(r_1, r_2) \leqq (50{,}7)^{-\frac{r_1}{2}} (19{,}9)^{-r_2}$$

gilt. Mit der verwendeten Beweismethode kann man für alle $r_1$ und $r_2$ ein $C(r_1, r_2)$ bestimmen. In Tabelle 1 sind diese Schranken für einige kleine $n$ zusammengestellt. Diese scheinen für $n \geqq 4$ besser zu sein als die besten bisher veröffentlichten.

Die zum Beweis abgeleitete Ungleichung erlaubt es auch, den Regulator eines Zahlkörpers nach unten abzuschätzen. Ich zeige, daß der Regulator eines

0020-9910/81/0062/0367/$02.80

**Tabelle 1**

| $n$ | $r_1$ | $r_2$ | $\gamma$ | $\leq\frac{d^{\frac{1}{2}}}{N\mathfrak{a}}$ | $n$ | $r_1$ | $r_2$ | $\gamma$ | $\leq\frac{d^{\frac{1}{2}}}{N\mathfrak{a}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 5,35 | 0,8991 | 6 | 6 | 0 | 0,83 | 188,1 |
| 2 | 2 | 0 | 2,41 | 1,760 | | 0 | 3 | 1,09 | 46,74 |
| | 0 | 1 | 2,98 | 1,400 | 8 | 8 | 0 | 0,66 | 3088 |
| 3 | 3 | 0 | 1,56 | 4,636 | | 0 | 4 | 0,87 | 385,5 |
| | 1 | 1 | 1,84 | 3,355 | 10 | 10 | 0 | 0,56 | $5{,}854\times 10^4$ |
| 4 | 4 | 0 | 1,18 | 14,45 | | 0 | 5 | 0,74 | 3560 |
| | 2 | 1 | 1,34 | 9,749 | 20 | 20 | 0 | 0,36 | $4{,}332\times 10^{11}$ |
| | 0 | 2 | 1,54 | 6,792 | | 0 | 10 | 0,46 | $5{,}736\times 10^8$ |
| 5 | 5 | 0 | 0,96 | 50,21 | 100 | 100 | 0 | 0,14 | $8{,}448\times 10^{72}$ |
| | 3 | 1 | 1,07 | 32,12 | | 0 | 50 | 0,18 | $2{,}417\times 10^{55}$ |
| | 1 | 2 | 1,20 | 21,11 | | | | | |

Zahlkörpers stets größer als 0,056 ist. Das verbessert ein Resultat von Remak [8], dessen Schranken im total-komplexen Fall mit wachsendem $n$ gegen null gehen. Für totalreelle Körper vom Grade $\geqq 6$ zeige ich, daß deren Regulatoren stets $\geqq \log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sind. Da Pohst [5] gezeigt hat, daß dies für die Regulatoren total-reeller Körper vom Grade $\neq 6$, 8 oder 10 gilt, ist $\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der kleinste Regulator eines total-reellen Körpers.

Die Abschätzung für Ideale kleiner Norm in Idealklassen wird üblicherweise für Diskriminantenabschätzungen verwendet. Man erhält aus dem obigen Ergebnis, daß für große $n$

$$d(K)\geqq(50{,}7)^{r_1}(19{,}9)^{2r_2}$$

gilt. Dies ist schlechter als die Resultate von Odlyzko, der für große $n$

$$d(K)\geqq(60{,}8)^{r_1}(22{,}3)^{2r_2}$$

gezeigt hat (s. Poitou [6]). Im letzten Teil der Arbeit zeige ich für große $n$ und jede Idealklasse $\mathfrak{K}$, daß es ein ganzes Ideal $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{K}$ oder in $\mathfrak{D}\mathfrak{K}^{-1}$, wobei $\mathfrak{D}$ die Klasse der Differente bezeichnet, gibt mit

$$N(\mathfrak{b})\leqq(60{,}8)^{-\frac{r_1}{2}}(22{,}3)^{-r_2}d(K)^{\frac{1}{2}}.$$

Dies führt zu der gleichen symptotischen Abschätzung für $d(K)^{1/n}$, wie sie Odlyzko erzielt hat. Numerisch sind meine Abschätzungen aber schlechter (s. Odlyzko [4], Poitou [7]).

## 1. Eine fundamentale Ungleichung

In diesem Abschnitt wird eine Ungleichung bewiesen, in der noch freie Parameter ($x$, $\alpha$ und $\gamma$) auftreten. Durch geeignete Wahl dieser Parameter werden in den beiden folgenden Abschnitten die beiden ersten Ergebnisse, die in der Einleitung erwähnt wurden, abgeleitet.

**Satz 1.** *$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ und $g(s)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ seien Dirichletreihen mit nichtnegativen Koeffizienten, die in einer Halbebene konvergieren und den folgenden Bedingungen genügen:*

1. *$f$ und $g$ lassen sich bis auf einen einfachen Pol bei $s=1$ auf die ganze Ebene analytisch fortsetzen.*
2. *Es gilt die Funktionalgleichung*

$$A^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^a\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^b f(s)=A^{1-s}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)^a\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)^b g(1-s)$$

*mit positivem $A$ und nichtnegativen ganzen Zahlen $a$ und $b$ mit $a>0$.*

3. *Die Funktion $s(s-1)A^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^a\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^b f(s)$ ist eine ganze Funktion der Ordnung 1.*
4. *Das Residuum $\kappa$ von $f$ bei $s=1$ und das von $g$ bei $s=1$ sind gleich.*

*Sind dann $x, \alpha$ und $\gamma$ reelle Zahlen mit $x>0$ und $0\leqq\alpha<\gamma$, so gilt*

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}A^{1+2\gamma}x^{-\gamma}g(1+\gamma)\left[-2\log A+\log x-a\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)-b\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)\right.\\&\left.-\frac{2}{\gamma-\alpha}-\frac{g'}{g}(1+\gamma)\right]\leqq\kappa\pi^{\frac{a}{2}}\left[x\Gamma(1+\gamma)^{-a}\Gamma(\tfrac{3}{2}+\gamma)^{-b}\frac{1+\alpha}{(1+\gamma)^2(1+2\gamma-\alpha)}\right.\\&\left.-A\Gamma(\tfrac{1}{2}+\gamma)^{-a}\Gamma(1+\gamma)^{-b}\frac{\alpha}{\gamma^2(2\gamma-\alpha)}\right].\end{aligned}$$

*Beweis.* Es sei $\beta$ eine reelle Zahl mit $\alpha<\beta<\gamma$. Für den Beweis benutze ich die folgenden Funktionen:

$$R(s)=(s+\alpha)(s+\beta)^{-1}(s+2\gamma-\beta)^{-1}(s+2\gamma-\alpha)^{-1}$$

$$P(s)=\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^a\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\gamma\right)^{-a}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^b\Gamma\left(\frac{s}{2}+1+\gamma\right)^{-b}$$

$$Q(s)=R(s)P(s)$$

$$\begin{aligned}T(s)&=P(s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)^a\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-a}\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)^b\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^{-b}\\&=\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)^a\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\gamma\right)^{-a}\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)^b\Gamma\left(\frac{s}{2}+1+\gamma\right)^{-b}\end{aligned}$$

**Lemma 1.** *Für alle positiven reellen $x$ gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}x^sQ(s)\,ds\geqq 0$$

*Beweis.* Benutzt man Eulers Formel für die Gammafunktion

$$\Gamma(s)=\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\right]$$

erhält man

$$P(s)=\left(1+\frac{1+2\gamma}{s}\right)^{a}\left(1+\frac{1+2\gamma}{s+1}\right)^{b}$$

$$\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(a+b)(\frac{1}{2}+\gamma)}\left(1+\frac{1+2\gamma}{s+2n}\right)^{a}\left(1+\frac{1+2\gamma}{s+2n+1}\right)^{b}\right].$$

Dabei konvergieren die Partialprodukte

$$P_m(s)=\left(1+\frac{1+2\gamma}{s}\right)^{a}\left(1+\frac{1+2\gamma}{s+1}\right)^{b}$$

$$\cdot\prod_{n=1}^{m}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(a+b)(\frac{1}{2}+\gamma)}\left(1+\frac{1+2\gamma}{s+2n}\right)^{a}\left(1+\frac{1+2\gamma}{s+2n+1}\right)^{b}\right]$$

für beschränktem Imaginärteil auf der Geraden $\mathrm{Re}(s)=2$ gleichmäßig gegen $P$. Man sieht sofort, daß für alle $m$ die Funktion $t\mapsto|P_m(2+it)|$ für $t\geqq 0$ monoton fällt. Dies gilt daher auch für die Funktion $t\mapsto|P(2+it)|$. Man erhält

$$|P(2+it)-P_m(2+it)|\leqq P(2)+P_m(2).$$

Da $P_m(2)$ gegen $P(2)$ konvergiert, ist $|P-P_m|$ auf der Geraden $\mathrm{Re}(s)=2$ gleichmäßig beschränkt. Wegen $|R(2+it)|\leqq K(t+1)^{-2}$ für eine geeignete Konstante $K$, erhält man

$$\lim_{m\to\infty}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} x^s R(s)\,P_m(s)\,ds=\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} x^s\,Q(s)\,ds.$$

Für den Beweis des Lemmas genügt es daher für alle $m$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} x^s R(s)\,P_m(s)\,ds\geqq 0$$

zu zeigen.

Ich zeige zuerst, daß sich $R(s)\,P_m(s)$ in der Form

$$\sum_{i=1}^{l} e_i\prod_{j=0}^{n_i}(s+a_{ij})^{-1}$$

mit nichtnegativen reellen $e_i$, $a_{ij}$ und natürlichen Zahlen $n_i$ schreiben läßt. Für $m=0$ gilt

$$R(s)\,P_0(s)=\left(1+\frac{\alpha}{s}\right)\frac{1}{s+\beta}\,\frac{1}{s+2\gamma-\beta}$$

$$\cdot\left(1+\frac{1+\alpha}{s+2\gamma-\alpha}\right)\left(1+\frac{1+2\gamma}{s}\right)^{a-1}\left(1+\frac{1+2\gamma}{s+1}\right)^{b}.$$

Weil $a \neq 0$ ist, gilt die Behauptung für $m=0$. Für allgemeines $m$ benutzt man dann die Definition von $P_m$. Für den Beweis des Lemma 1 genügt es nun, den folgenden Hilfssatz zu beweisen.

**Hilfssatz.** *Ist* $a_i \geqq 0$, $n \geqq 1$; *dann gilt für positive* $x$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} x^s \prod_{i=0}^{n} (s+a_i)^{-1} \, ds \geqq 0.$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung kann angenommen werden, daß $0 \leqq a_0 \leqq a_1 \leqq \ldots \leqq a_n$ gilt. Schreibt man

$$\prod_{i=0}^{n} (s+a_i)^{-1} = (s+a_n)^{-n-1} \prod_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{a_n - a_i}{s+a_n}\right)^{-1}$$

entwickelt die einzelnen Terme und multipliziert sie aus, so erkennt man, daß sich die Funktion $\prod_{i=0}^{n} (s+a_i)^{-1}$ für $\mathrm{Re}(s)=2$ durch eine gleichmäßig konvergente Reihe der Form $\sum_{j=2}^{\infty} f_j (s+a_n)^{-j}$ mit positiven Koeffizienten $f_j$ darstellen läßt. Aus der wohlbekannten Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} x^s (s+a)^{-j} \, ds = \begin{cases} x^{-a} \dfrac{(\log x)^{j-1}}{(j-1)!} & \text{für } x \geqq 1 \\ 0 & \text{für } x \leqq 1 \end{cases}$$

folgt dann der Hilfssatz.

**Lemma 2.** *Es gilt* $\lim_{t \to \infty} t^{-c} f(\sigma + it) = 0$ *für*

$$\begin{aligned} &c > 0, && \textit{falls } \sigma \geqq 1, \\ &c > \frac{a+b}{2}(1-\sigma), && \textit{falls } 0 \leqq \sigma \leqq 1, \\ &c > \frac{a+b}{2}(1-2\sigma), && \textit{falls } \sigma \leqq 0. \end{aligned}$$

*Beweis.* Sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, konvergieren nach einem Satz von Landau die Dirichletreihen von $f$ und $g$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ absolut (Lang [1], p. 314, Lemma 1). Aus der Voraussetzung 3 des Satzes, der Funktionalgleichung und einem Konvexitätstheorem erhält man die Behauptung (vgl. Lang [1], p. 265/6).

*Beweis von Satz 1.* Da $f$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ durch eine absolut konvergente Dirichletreihe mit nichtnegativen Koeffizienten dargestellt wird, folgt aus Lemma 1

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} x^s Q(s) f(s) \, ds \geqq 0.$$

Man verschiebe nun die Integrationsgerade dieses Integrals bis zur Geraden $\operatorname{Re}(s) = -\gamma$. Dies ist nach Lemma 2 und einer Abschätzung von $Q$ mit Hilfe der Stirlingschen Formel möglich. Man erhält unter Berücksichtigung der Pole des Integranden bei $1, 0, -\beta$ und der Funktionalgleichung für $f$

$$\begin{aligned}0 &\leqq \kappa(xQ(1) - AT(0)R(0))\\ &+ A^{1+2\beta}x^{-\beta}T(-\beta)\frac{-\beta+\alpha}{2(\gamma-\beta)(2\gamma-\alpha-\beta)}g(1+\beta)\\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} x^s A^{1-2s}T(s)R(s)g(1-s)\,ds\end{aligned}$$

Nun gilt

$$|T(-\gamma+it)| = 1 \quad \text{und} \quad |g(1+\gamma-it)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-(1+\gamma-it)}\right| \leqq g(1+\gamma).$$

Daher kann man das Integral durch

$$\frac{1}{2\pi} g(1+\gamma)x^{-\gamma}A^{1+2\gamma}\int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} |R(s)|\,ds$$

abschätzen. Es gilt

$$\int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} |R(s)|\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} ((\gamma-\beta)^2+t^2)^{-1}\,dt = \frac{\pi}{\gamma-\beta}.$$

Also folgt

$$\begin{aligned}0 &\leqq \kappa(xQ(1) - AT(0)R(0))\\ &+ A^{1+2\beta}x^{-\beta}T(-\beta)\frac{-\beta+\alpha}{2(\gamma-\beta)(2\gamma-\alpha-\beta)}g(1+\beta)\\ &+ A^{1+2\gamma}x^{-\gamma}\frac{1}{2(\gamma-\beta)}g(1+\gamma).\end{aligned}$$

Läßt man nun $\beta$ gegen $\gamma$ konvergieren, erhält man die Behauptung des Satzes 1.

## 2. Ideale kleiner Norm in Idealklassen

**Satz 2.** *Ist $K$ ein algebraischer Zahlkörper vom Grade $n$ mit $r_1$ reellen, $2r_2$ komplexen Einbettungen und Diskriminante $d$, dann gibt es in jeder Idealklasse ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ für dessen Absolutnorm $N\mathfrak{a}$ und alle $\gamma > \alpha > 0$ gilt*

$$\begin{aligned}\log\frac{d^{\frac{1}{2}}}{N\mathfrak{a}} &\geqq r_1\left(-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) - \log\Gamma(\tfrac{1}{2}+\gamma) + \log\Gamma(1+\gamma) + \tfrac{1}{2}\log\pi\right)\\ &+ r_2\left(-2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+\gamma) + 2\log 2 + \log(\tfrac{1}{2}+\gamma) + \log\pi\right)\\ &- \frac{2}{\gamma-\alpha} - \log(1+\alpha^{-1})(1+\gamma^{-1})^{-2}(1+(2\gamma-\alpha)^{-1})^{-1}.\end{aligned}$$

*Beweis.* Wählt man für $x$ in der Ungleichung des Satzes 1

$$A\Gamma(\tfrac{1}{2}+\gamma)^{-a}\Gamma(1+\gamma)^{a}\Gamma(1+\gamma)^{-b}\Gamma(\tfrac{3}{2}+\gamma)^{b}$$
$$\cdot\alpha(1+\gamma)^2(1+2\gamma-\alpha)(1+\alpha)^{-1}\gamma^{-2}(2\gamma-\alpha)^{-1},$$

dann ist die rechte Seite der Ungleichung null, und nach einer einfachen Umformung erhält man

$$\begin{aligned}
&a\left(-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)-\log\Gamma(\tfrac{1}{2}+\gamma)+\log\Gamma(1+\gamma)\right)\\
&\quad+b\left(-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)-\log\Gamma(1+\gamma)+\log\Gamma(\tfrac{3}{2}+\gamma)\right)\\
&\quad-\frac{2}{\gamma-\alpha}-\log(1+\alpha^{-1})(1+\gamma^{-1})^{-2}(1+(2\gamma-\alpha)^{-1})^{-1}\\
&\leqq\log A+\frac{g'}{g}(1+\gamma).
\end{aligned}$$

Ist $\mathfrak{K}$ eine Idealklasse und $\mathfrak{K}'=\mathfrak{D}\mathfrak{K}^{-1}$ ($\mathfrak{D}$ bezeichnet die Klasse der Differente von $K$), dann sind die Bedingungen des Satzes 1 erfüllt, wenn man $a=r_1+r_2$, $b=r_2$, $A=d^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{n}{2}}$,

$$f(s)=\sum_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{K}'}N\mathfrak{a}^{-s}\quad\text{und}\quad g(s)=\sum_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{K}}N\mathfrak{a}^{-s}$$

setzt. Das folgt aus der Funktionalgleichung, die z.B. in Lang [1], p. 254ff,[1] bewiesen wird, und der Duplikationsformel für die Gammafunktion. Die Voraussetzung 3 wird in Lang [1], p. 331/2 bewiesen. Bezeichnet $\mathfrak{a}_0$ ein Ideal kleinster Norm von $\mathfrak{K}$, dann gilt

$$g(1+\gamma)=N\mathfrak{a}_0^{\beta-\gamma}g(1+\beta)$$

für alle $\gamma\geqq\beta\geqq 0$. Man erhält sofort $\frac{g'}{g}(1+\gamma)\leqq-\log N\mathfrak{a}_0$, und Satz 2 folgt.

*Bemerkung 1.* Für festes $\gamma$ ist die beste Wahl für $\alpha$

$$a=\gamma-\frac{\gamma(\gamma+1)}{\sqrt{1+3\gamma+3\gamma^2}},$$

wie eine leichte Rechnung zeigt. Die Ungleichung des Satzes 2 hängt daher nur von dem Parameter $\gamma$ ab. In Tabelle 1 sind für einige kleine Körpergrade Folgerungen aus Satz 2 zusammengestellt. Die ersten drei Spalten geben den Körpergrad, die Zahl der reellen bzw. der konjugiert-komplexen Einbettungen an. Die vierte Spalte gibt den Wert für $\gamma$ an, mit dem $\alpha$ nach der obigen Formel berechnet und dann die rechte Seite der Ungleichung ausgewertet worden ist. In

1 Der Referent hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß Langs Definition von $\mathfrak{K}'$ durch $\mathfrak{D}\mathfrak{K}^{-1}$ ersetzt werden muß.

der fünften Spalte ist das (exponenzierte) Ergebnis, nach unten gerundet, enthalten. Es ist einige Mühe darauf verwendet worden, $\gamma$ so zu wählen, daß das Ergebnis möglichst groß ausfällt.

*Bemerkung 2.* Der Satz 2 kann geringfügig verbessert werden, wenn man mit den Bezeichnungen seines Beweises $\frac{g'}{g}(1+\gamma)$ besser abschätzt. Ist $\mathfrak{b} \neq (1)$ ein Hauptideal, dann läßt sich $g$ in der Form $g(s)=(1-N\mathfrak{b}^{-s})^{-1}h(s)$ schreiben, wobei $h$ durch eine Dirichletreihe mit nichtnegativen Koeffizienten dargestelt werden kann. Für die logarithmische Ableitung von $h$ erhält man wie oben für die logarithmische Ableitung von $g$ $\frac{h'}{h}(1+\gamma) \leqq -\log N\mathfrak{a}_0$, also

$$\frac{g'}{g}(1+\gamma) \leqq -N\mathfrak{b}^{-1-\gamma}(1-N\mathfrak{b}^{-1-\gamma})^{-1}\log N\mathfrak{b} - \log N\mathfrak{a}_0.$$

Wendet man dies auf das Ideal $\mathfrak{b}=(2)$ an, ergibt sich, daß man die rechte Seite der Ungleichung des Satzes 2 um $2^{-n(1+\gamma)}(1-2^{-n(1+\gamma)})^{-1n}\log 2$ vergrößern kann. Diese Verbesserung ist numerisch unbedeutend. Gibt es aber Hauptideale kleiner Norm, so kann man u.U. eine erhebliche numerische Verbesserung erzielen.

**Korollar.** *Für ein Ideal $\mathfrak{a}_0$ kleinster Norm in einer Idealklasse gilt*

$$\log\frac{d^{\frac{1}{2}}}{(N\mathfrak{a}_0)} \geqq \frac{r_1}{2}(4\log 2+2C)+r_2(\log 2+\log\pi+2C)+O(\sqrt{n})$$
$$=\frac{r_1}{2}\log 50{,}7\ldots+r_2\log 19{,}9\ldots+O(\sqrt{n}).$$

*($C=0{,}5772\ldots$ bezeichnet die Eulersche Konstante.)*

*Beweis.* Man wähle in Satz 2 $\gamma=n^{-\frac{1}{2}}$ (und $\alpha$ wie in Bemerkung 1).

## 3. Regulatorabschätzungen

**Satz 3.** *Ist $K$ ein algebraischer Zahlkörper vom Grade $n$ mit $r_1$ reellen, $2r_2$ komplexen Einbettungen, Regulator $R$ und $w$ Einheitswurzeln, dann gilt für alle $\gamma>0$*

$$\frac{R}{w} \geqq \frac{(1+\gamma)(1+2\gamma)}{2}\Gamma(1+\gamma)^{r_1+r_2}\Gamma(\tfrac{3}{2}+\gamma)^{r_2}2^{-r_1-r_2}\pi^{-\frac{r_2}{2}}$$
$$\cdot\exp\left\{(-1-\gamma)\left[(r_1+r_2)\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)+r_2\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)+\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{1+\gamma}\right]\right\}.$$

*Beweis.* Ist $d$ die Diskriminante von $K$, so sind die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt, wenn $A=d^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{n}{2}}$, $a=r_1+r_2$, $b=r_2$ und für $g$ die partielle Zetafunktion der

Hauptklasse gewählt wird. Es gilt

$$\kappa = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{d^{\frac{1}{2}}} \frac{R}{w} \quad \text{(s. Lang [1], p. 259).}$$

Wählt man nun in der Ungleichung des Satzes 1 $\alpha=0$ und

$$\log x = 2\log A + a\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) + b\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(1+\frac{\gamma}{2}\right) + \frac{2}{\gamma} + \frac{1}{1+\gamma},$$

dann folgt unter Benutzung der Ungleichungen $-\frac{g'}{g}(1+\gamma) \geqq 0$ und $g(1+\gamma) \geqq 1$ der Satz 3.

In Tabelle 2 sind für einige kleine Körpergrade Folgerungen aus Satz 3 zusammengestellt. Die vierte Spalte gibt den Wert für $\gamma$ an, die fünfte eine untere Schranke for $2\frac{R}{w} \leqq R$.

**Korollar.** (i) *Es gilt* $2\frac{R}{w} \geqq 0{,}04 \exp(0{,}46 r_1 + 0{,}1 r_2)$.

(ii) *Der Regulator eines Zahlkörpers ist größer als* 0,056.

(iii) *Der kleinste Regulator eines total-reellen Zahlkörpers ist* $\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

*Beweis.* (i) folgt sofort aus Satz 3, wenn $\gamma=1$ gesetzt wird. (ii) folgt für kleine Körpergrade aus Tabelle 2 und für die anderen aus (i). Für $r_1 \geqq 6$ folgt (iii) aus (i). Für $r_1 \neq 6$, 8, 10 wird (iii) in Pohst [1] bewiesen.

**Tabelle 2**

| $n$ | $r_1$ | $r_2$ | $\gamma$ | $\leqq 2\frac{R}{w}$ | $n$ | $r_1$ | $r_2$ | $\gamma$ | $\leqq 2\frac{R}{w}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 5,39 | 0,5233 | 6 | 6 | 0 | 0,85 | 0,6825 |
| | | | | | | 0 | 3 | 1,12 | 0,05602 |
| 2 | 2 | 0 | 2,43 | 0,2296 | | | | | |
| | 0 | 1 | 3,03 | 0,1559 | 8 | 8 | 0 | 0,68 | 2,390 |
| | | | | | | 0 | 4 | 0,90 | 0,06207 |
| 3 | 3 | 0 | 1,58 | 0,2129 | | | | | |
| | 1 | 1 | 1,87 | 0,1170 | 10 | 10 | 0 | 0,58 | 10,09 |
| | | | | | | 0 | 5 | 0,76 | 0,08078 |
| 4 | 4 | 0 | 1,20 | 0,2697 | | | | | |
| | 2 | 1 | 1,37 | 0,1306 | 20 | 20 | 0 | 0,37 | $5{,}246\times10^4$ |
| | 0 | 2 | 1,58 | 0,06702 | | 0 | 10 | 0,48 | 0,9437 |
| 5 | 5 | 0 | 0.98 | 0,4059 | 100 | 100 | 0 | 0,15 | $4{,}119\times10^{41}$ |
| | 3 | 1 | 1,09 | 0,1809 | | 0 | 50 | 0,19 | $2{,}319\times10^{14}$ |
| | 1 | 2 | 1,23 | 0,08414 | | | | | |

## 4. Eine weitere Abschätzung

Für das Folgende setze ich

$$
\begin{aligned}
F_{a,b}(\gamma)=a\sum_{l=1}^{\infty}&\left(\frac{2}{1+2\gamma}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{2l+3\gamma}{2(1+2\gamma)}\right)-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{2l-1+\gamma}{2(1+2\gamma)}\right)\right)\right.\\
&\left.-\frac{1}{2l-2-\gamma}-\frac{1}{2l-1+\gamma}\right)+b\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{2}{1+2\gamma}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{2l+1+3\gamma}{2(1+2\gamma)}\right)\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{2l+\gamma}{2(1+2\gamma)}\right)\right)-\frac{1}{2l-1-\gamma}-\frac{1}{2l+\gamma}\right)-\frac{a}{2}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\right.\\
&\left.+\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(-\frac{\gamma}{2}\right)\right)-\frac{b}{2}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)+\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\tfrac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\right)\\
&-\frac{4}{\gamma}+\frac{2}{(1+2\gamma)}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1+\gamma}{2(1+2\gamma)}\right)-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1+3\gamma}{2(1+2\gamma)}\right)\right.\\
&\left.+\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{2+5\gamma}{2(1+2\gamma)}\right)-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{2+3\gamma}{2(1+2\gamma)}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Dies ist für $\gamma>0$ eine analytische Funktion, denn die unendlichen Summen konvergieren: Aus der Stirlingschen Formel folgt, daß man die einzelnen Terme durch $O(l^{-2})$ abschätzen kann. Eine genauere Rechnung würde sogar zeigen, daß die einzelnen Terme nur $O(l^{-3})$ groß sind. Die linke Seite ist für ganzzahlige Werte von $\gamma$ nicht definiert, die läßt sich aber für diese Werte offensichtlich stetig ergänzen.

**Satz 4.** *Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Satz* 1 *gilt für alle* $\gamma>0$:

$$F_{a,b}(\gamma)\leqq 2\log A+\frac{f'}{f}(1+\gamma)+\frac{g'}{g}(1+\gamma).$$

Den Beweis gebe ich im letzten Teil dieses Abschnitts.

**Korollar 1.** *Ist $K$ ein algebraischer Zahlkörper vom Grade $n$ mit $r_1$ reellen, $2r_2$ komplexen Einbettungen, Diskriminante $d$ und Differentenklasse $\mathfrak{D}$, und ist $\mathfrak{K}$ eine Idealklasse, dann gibt es ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{K}$ und ein ganzes Ideal $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{D}\mathfrak{K}^{-1}$ für dessen Absolutnormen und alle $\gamma>0$ gilt*

$$\log\frac{d}{N\mathfrak{a}\,N\mathfrak{b}}\geqq F_{r_1+r_2,r_2}(\gamma)+n\log\pi.$$

Das Korollar 1 läßt sich aus Satz 4 genauso herleiten wie Satz 2 aus Satz 1.

In Tabelle 3 sind für einige kleine Körpergrade Folgerungen aus Korollar 1 zusammengestellt. Die ersten drei Spalten geben den Körpergrad, die Zahl der reellen bzw. der konjugiert-komplexen Einbettungen. Die vierte Spalte gibt die Wahl für $\gamma$ an, und in der fünften steht, nach unten gerundet, $\exp\frac{1}{2}(F_{r_1+r_2,r_2}(\gamma)+n\log\pi)$.

**Tabelle 3**

| $n$ | $r_1$ | $r_2$ | $\gamma$ | | $n$ | $r_1$ | $r_2$ | $\gamma$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 5,23 | 0,952 | 6 | 6 | 0 | 0,82 | 273 |
| | | | | | | 0 | 3 | 1,09 | 62,9 |
| 2 | 2 | 0 | 2,36 | 1,98 | | | | | |
| | 0 | 1 | 2,94 | 1,55 | 8 | 8 | 0 | 0,66 | $511\times 10^1$ |
| | | | | | | 0 | 4 | 0,87 | 570 |
| 3 | 3 | 0 | 1,53 | 5,56 | | | | | |
| | 1 | 1 | 1,82 | 3,95 | 10 | 10 | 0 | 0,56 | $1{,}10\times 10^5$ |
| | | | | | | 0 | 5 | 0,74 | $5{,}77\times 10^3$ |
| 4 | 4 | 0 | 1,15 | 18,5 | | | | | |
| | 2 | 1 | 1,31 | 12,1 | 20 | 20 | 0 | 0,36 | $1{,}63\times 10^{12}$ |
| | 0 | 2 | 1,53 | 8,32 | | 0 | 10 | 0,47 | $1{,}48\times 10^9$ |
| 5 | 5 | 0 | 0.95 | 68,5 | 100 | 100 | 0 | 0,13 | $1{,}5\times 10^{76}$ |
| | 3 | 1 | 1,06 | 42,7 | | 0 | 50 | 0,18 | $3{,}5\times 10^{57}$ |
| | 1 | 2 | 1,19 | 27,4 | | | | | |

**Korollar 2.** *Ist $\mathfrak{K}$ eine Idealklasse, dann gibt es ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{K}$ oder aus $\mathfrak{D}\mathfrak{K}^{-1}$ mit*

$$\log\frac{d^{\frac{1}{2}}}{N\mathfrak{a}}\geqq\frac{r_1}{2}(C+\log 4\pi+1)+r_2(C+\log 4\pi)+O(\sqrt{n})$$
$$=\frac{r_1}{2}\log 60{,}8\ldots+r_2\log 22{,}3\ldots+O(\sqrt{n}).$$

($C=0{,}5772\ldots$ bezeichnet die Eulersche Konstante.)

*Beweis von Korollar 2.* Wählt man in Korollar 1 $\gamma=n^{-\frac{1}{2}}$, so muß man zeigen, daß

$$F_{a,b}((a+b)^{-\frac{1}{2}})\geqq a(C+\log 4+1)+b(C+\log 4-1)+O(\sqrt{a+b}).$$

Ich gebe den Beweis nur für den Fall $a=0$. Der Beweis im allgemeinen Fall ist ganz analog. Für $a=0$ genügt es zu zeigen, daß

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(2\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(l+\tfrac{1}{2})-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(l)\right)-\frac{1}{2l-1}-\frac{1}{2l}\right)-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1)+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2})\right)$$
$$=C+\log 4-1$$

Benutzt man wiederholt die Identität $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(x)+\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{x+j}=\frac{\Gamma'}{\Gamma}(x+k+1)$, berechnet man

$$\sum_{l=1}^{m}\left(2\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(l+\tfrac{1}{2})-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(l)\right)-\frac{1}{2l-1}-\frac{1}{2l}\right)$$
$$=\sum_{l=1}^{m}\left(2\left(-\frac{l}{l+\frac{1}{2}}+\frac{l}{l}\right)-\frac{1}{2l-1}-\frac{1}{2l}\right)+2m\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(m+\tfrac{3}{2})-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(m+1)\right)$$
$$=\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{2}{2l+1}-\frac{1}{2l-1}-\frac{1}{2l}\right)+2m\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(m+\tfrac{3}{2})-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(m+1)\right)$$
$$=\frac{\Gamma'}{\Gamma}(m+\tfrac{3}{2})-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{3}{2})-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(m+\tfrac{1}{2})-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2})+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(m+1)-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1)\right)$$
$$+2m\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(m+\tfrac{3}{2})-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(m+1)\right).$$

Aus der Stirlingschen Formel folgt, daß

$$\lim_{m\to\infty} 2m\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(m+\tfrac{3}{2})-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(m+1)\right)=1$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(m+\tfrac{3}{2})-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(m+\tfrac{1}{2})+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(m+1)\right)\right)=0,$$

und daraus erhält man das gewünschte Ergebnis.

Zum Beweis von Satz 4 benötige ich den folgenden Hilfssatz.

**Hilfssatz.** *$H(s)$ sei eine im Streifen $-\gamma\leqq \operatorname{Re}(s)\leqq 1+\gamma\ (\gamma>0)$ meromorphe Funktion, die für reelle Werte reell ist, so daß $H(s)f(s)$ in dem Streifen analytisch ist und höchstens polynomiales Wachstum besitzt.*

*Es gelte*

$$\sup_{t\in R}|H(1+\gamma+it)|=H(1+\gamma)$$

*und*

$$\sup_{t\in R}\left|H(-\gamma+it)\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}-\frac{it}{2}\right)^{a}\Gamma\left(-\frac{\gamma}{2}+\frac{it}{2}\right)^{-a}\Gamma\left(1+\frac{x}{2}-\frac{it}{2}\right)^{b}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}+\frac{it}{2}\right)^{-b}\right|$$

$$=H(-\gamma)\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)^{a}\Gamma\left(-\frac{\gamma}{2}\right)^{-a}\Gamma\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)^{b}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)^{-b},$$

*dann gilt:*

$$-\frac{H'}{H}(1+\gamma)+\frac{H'}{H}(-\gamma)-\frac{a}{2}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)+\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(-\frac{\gamma}{2}\right)\right)$$

$$-\frac{b}{2}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)+\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\tfrac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\right)$$

$$\leqq 2\log A+\frac{f'}{f}(1+\gamma)+\frac{g'}{g}(1+\gamma).$$

*Beweis.* Es gilt $\sup|f(1+\gamma+it)|=f(1+\gamma)$ und $\sup|g(1+\gamma+it)|=g(1+\gamma)$, daraus folgt $\sup|Hf(1+\gamma+it)|=Hf(1+\gamma)$ und mit Hilfe der Funktionalgleichung $\sup|Hf(-\gamma+it)|=Hf(-\gamma)$.

Für $0\leqq \operatorname{Re}(s)\leqq\gamma$ betrachte ich die Funktion

$$h(s)=Hf(-s)\,Hf(1+s)$$

Nach dem Satz von Phragmen-Lindelöf ist $h$ in diesem Streifen beschränkt. Aus einem Konvexitätstheorem folgt dann

$$\frac{h'}{h}(\gamma)\geqq 0.$$

Also gilt

$$\frac{H'}{H}(1+\gamma)+\frac{f'}{f}(1+\gamma)-\frac{H'}{H}(-\gamma)-\frac{f'}{f}(-\gamma)\geqq 0.$$

Wegen der Funktionalgleichung gilt

$$\frac{f'}{f}(-\gamma)=-\frac{g'}{g}(1+\gamma)-2\log A-\frac{a}{2}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)+\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(-\frac{\gamma}{2}\right)\right)$$
$$-\frac{b}{2}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)+\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\tfrac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\right),$$

und daraus folgt die Behauptung des Hilfssatzes.

*Beweis von Satz 4.* Es sei $j$ eine fest gewählte natürliche Zahl mit $j\geqq\frac{1}{2}+\gamma$. $m$ bezeichne eine natürliche Zahl. Definiere nun die folgenden noch von $j$ und $m$ abhängigen Funktionen:

$$Q_a(s)=\prod_{l=1}^{m+j}\Gamma\left(\frac{s+2l-2}{2(1+2\gamma)}\right)\Gamma\left(\frac{-s+2l+2\gamma}{2(1+2\gamma)}\right)^{-1}$$
$$\cdot\prod_{l=1}^{m}\Gamma\left(\frac{-s+2l+1+4\gamma}{2(1+2\gamma)}\right)\Gamma\left(\frac{s+2l-1+2\gamma}{2(1+2\gamma)}\right)^{-1}$$
$$Q_b(s)=\prod_{l=1}^{m+j}\Gamma\left(\frac{s+2l-1}{2(1+2\gamma)}\right)\Gamma\left(\frac{-s+2l+1+2\gamma}{2(1+2\gamma)}\right)^{-1}$$
$$\cdot\prod_{l=1}^{m}\Gamma\left(\frac{-s+2l+2+4\gamma}{2(1+2\gamma)}\right)\Gamma\left(\frac{s+2l+2\gamma}{2(1+2\gamma)}\right)^{-1}$$
$$U(s)=\Gamma\left(\frac{-s+2+2\gamma}{2(1+2\gamma)}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2(1+2\gamma)}\right)^{-1}\Gamma\left(\frac{s+2\gamma}{2(1+2\gamma)}\right)\Gamma\left(\frac{-s+2+4\gamma}{2(1+2\gamma)}\right)^{-1}$$
$$V(s)=U(1-s)$$
$$H(s)=-Q_a(s)^a\,Q_b(s)^b\,U(s)\,V(s).$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$|Q_a(1+\gamma+it)|=Q_a(1+\gamma)$$
$$\left|Q_a(-\gamma+it)\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}-\frac{it}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\gamma}{2}+\frac{it}{2}\right)^{-1}\right|$$
$$=(1+2\gamma)^j\left|\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}+m-\frac{it}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\gamma}{2}+m+j+\frac{it}{2}\right)^{-1}\right.$$
$$\leqq Q_a(-\gamma)\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\gamma}{2}\right)^{-1}$$
$$|Q_b(1+\gamma+it)|=Q_b(1+\gamma)$$
$$\left|Q_b(-\gamma+it)\,\Gamma\left(1+\frac{\gamma}{2}-\frac{it}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}+\frac{it}{2}\right)^{-1}\right|$$
$$=(1+2\gamma)^j\left|\Gamma\left(1+m+\frac{\gamma}{2}-\frac{it}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+m+j-\frac{\gamma}{2}+\frac{it}{2}\right)^{-1}\right|$$
$$\leqq Q_b(-\gamma)\,\Gamma\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)^{-1}$$
$$|U(1+\gamma+it)|=U(1+\gamma)$$
$$|U(-\gamma+it)|=-U(-\gamma).$$

Man kann deshalb den Hilfssatz anwenden. Läßt man nun $m$ gegen $\infty$ konvergieren, folgt Satz 4.

## Literatur


1. Lang, S.: Algebraic Number Theory. Reading, Mass.: Addison-Wesley 1970
2. Mulholland, H.P.: On the product of $n$ complex homogeneous linear forms. J. London Math. Soc. **35**, 241-250 (1960)
3. Narkiewicz, W.: Elementary and analytical theory of algebraic numbers, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1974
4. Odlyzko, A.M.: Tabellen datiert November 29, 1976 (to appear as an appendix to a paper on small discriminants by J. Martinet in the Proceedings of the 1980 Exeter Journiées Arithmétiques)
5. Pohst, M.: Regulatorabschätzungen für total reelle algebraische Zahlkörper. J. Number Theory **9**, 459-492 (1977)
6. Poitou, G.: Minorations da discriminants (d'après A.M. Odlyzko). Séminaire Bourbaki 1975/76. Lecture Notes in Mathematics, vol. **567**, 137-153. Berlin Heidelberg New York: Springer 1977
7. Poitou, G.: Sur les petits discriminants, Séminaire Delange-Pisot-Poitou (Théorie des nombres), 18e année, no. 6 (1976/77)
8. Remak, R.: Über die Abschätzung des absoluten Betrages des Regulators eines algebraischen Zahlkörpers nach unten. J. Reine Angew. Math. **167**, 360-378 (1932)


Eingegangen am 27. Juni 1979/17. September 1980