Invent. math. 64, 1–6 (1981)

Inventiones mathematicae

Rationalité des Singularités Canoniques

Renée Elkik

Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, Mathématique, Bât. 425, 91405 Orsay, France

Soit V une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$ de dimension d. On dit que V est de type F-général si l'algèbre $R(V) = \bigoplus_{n \geqq 0} H^0(V, \omega^{\otimes n})$ est de type fini sur $\mathbb{C}$ et de degré de transcendance $d+1$. Sous ces hypothèses le schéma $X = \operatorname{Proj} R(V)$ est birationnel à V et s'appelle le modèle canonique de V. On démontre ici que les singularités d'un tel X sont rationnelles; ce résultat est bien connu pour $d=2$ et on m'a rapporté qu'il vient d'être démontré par S. Baron en dimension trois. Miles Reid [5] a donné une caractérisation de nature locale des singularités des modèles canoniques que nous rapellerons un peu plus tard, après avoir fixé quelques notations et fait quelques rappels sur les singularités rationnelles.

I. Quelques Notations et Rappels

Soit X un schéma (essentiellement) de type fini sur un corps k de caractéristique 0. On suppose X équidimensionnel de dimension d. On désigne par $\mathcal{O}_X$ son faisceau structural. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules, on l'identifie quand cela est utile à un complexe dont l'unique terme non nul est $\mathscr{F}$ placé en degré zéro, et si $K^\cdot$ est un complexe, on désigne par $K^\cdot[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, le complexe obtenu à partir de $K^\cdot$ par translation de n vers la gauche. Si R est un schéma lisse sur k de dimension n on désigne par ω_R la puissance extérieure maximale du module des différentielles relatives de R sur k, si X est un sous-schéma fermé de R on définit alors le complexe dualisant sur X, $\omega_X^\cdot$ par:

$$\omega_X^\cdot = \underline{R\mathrm{Hom}}_R(\mathcal{O}_X, \omega_R[n])$$

(en particulier $\omega_R^\cdot = \omega_R[n]$). C'est un objet dualisant de $D^+(X)$ dont l'homologie est concentrée en degré $[-\dim X, -\operatorname{prof} X]$, et indépendante du choix de R. Avec les notations de ([2], chap. III p. 190) on a $\omega_X^\cdot = \pi^! k$ où π: $X \to \operatorname{Spec} k$ désigne le morphisme structural et où k est bien sûr identifié au complexe sur $\operatorname{Spec} k$, ayant un unique terme non nul égal à k en degré 0.

On dit que f: $Y \to X$ est une désingularisation de X si f est un morphisme projectif birationnel, et si Y est lisse sur k. Un cas particulier du théorème de Dualité ([2] chap. III p. 210), appliqué au morphisme f, fournit l'égalité suivante dans $D^+(X)$:

$$Rf_*\omega_Y[d] = \underline{R\mathrm{Hom}}_X(Rf_*\mathcal{O}_Y, \omega_X^{\boldsymbol{\cdot}}).$$

Les complexes $Rf_*\omega_Y$ et $Rf_*\mathcal{O}_Y$ ne dépendent que de X et non de la désingularisation choisie [3]. De plus Grauert et Riemenschneider [1] ont montré que

$$R^i f_*\omega_Y = 0 \qquad \forall i > 0.$$

On a donc dans $D^+(X)$:

$$(*) \qquad f_*\omega_Y[d] = \underline{R\mathrm{Hom}}_X(Rf_*\mathcal{O}_Y, \omega_X^{\boldsymbol{\cdot}}).$$

Définition 1. On dit que X a des singularités rationnelles si $\mathcal{O}_X = Rf_*\mathcal{O}_Y$, i.e. si X est normal et $R^i f_*\mathcal{O}_Y = 0$ $\forall i > 0$, ceci est équivalent grâce à l'égalité $(*)$ à $f_*\omega_Y[d] = \omega_X^{\boldsymbol{\cdot}}$, cela revient donc à dire que X est Cohen-Macaulay et que l'injection naturelle de $f_*\omega_Y$ dans $H^{-d}(\omega_X^{\boldsymbol{\cdot}})$ est un isomorphisme.

Singularités Canoniques [5]. On suppose dans la suite X normal et on désigne par $j: U \hookrightarrow X$ l'inclusion de l'ouvert de lissité de X. Pour tout entier $r \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$\omega_X^{[r]} = j_*(\omega_U^{\otimes r}).$$

On a en particulier puisque ces deux faisceaux sont de profondeur $\geqq 2$: $\omega_X^{[1]} = H^{-d}(\omega_X^{\boldsymbol{\cdot}})$.

Définition 2 [5]. On dit que les singularités de X sont canoniques s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}^*$ et une désingularisation $f: Y \to X$ tels que les deux conditions suivantes soient satisfaites:

i) $\omega_X^{[r]}$ est localement libre (de rang un)

ii) l'injection naturelle $f_*\omega_Y^{\otimes r} \hookrightarrow \omega_X^{[r]}$ est un isomorphisme. Le plus petit r convenable s'appelle l'indice de la singularité. Miles Reid [5] montre que les singularités des modèles canoniques des variétés de type F-général sont canoniques.

II. Énoncés des Résultats

Théorème 1. *Soit X un schéma (essentiellement) de type fini sur un corps k de caractéristique zéro, dont les singularités sont canoniques. Alors les singularités de X sont rationnelles.*

D'après [5, Thm. I.9] toute singularité canonique d'indice r est un quotient sous l'action de $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ d'une singularité canonique d'indice 1. Or le résultat suivant est bien connu [4].

Lemme 1. *Soient X' un schéma de type fini sur un corps k de caractéristique zéro sur lequel agit un groupe fini G, et X le quotient de X' par G. Si X' est à singularités rationnelles, il en est de même de X.*

On peut donc supposer que les singularités de X sont canoniques d'indice un. Soit $f\colon Y\to X$ une désingularisation, on doit montrer $R^i f_* \mathcal{O}_Y = 0\ \forall i>0$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Puisque les conditions i) et ii) de la définition 2 sont stables par localisation, on peut, quitte à se localiser en un point générique de $\bigcup_{i>0} \operatorname{Support}(R^i f_* \mathcal{O}_Y)$, supposer que tous ces modules sont de longueur finie. Le théorème 1 est donc conséquence de l'énoncé suivant:

Théorème 2. *Soit $X=\operatorname{Spec} A$ le spectre d'un anneau local normal de dimension d, essentiellement de type fini sur un corps de caractéristique zéro. Soit $f\colon Y\to X$ une désingularisation et supposons:*

i) *$H^{-d}(\omega_X^\cdot)$ est libre de rang un.*
ii) *l'injection naturelle $f_*\omega_Y \hookrightarrow H^{-d}(\omega_X^\cdot)$ est un isomorphisme.*
iii) *$\forall i>0$ $R^i f_* \mathcal{O}_Y$ est de longueur finie.*

Alors $R^i f_* \mathcal{O}_Y = 0\ \forall i>0$.

Remarques. 1) Si $d=2$, A est de Cohen-Macaulay et la condition ii) signifie alors que les singularités de A sont rationnelles. On peut donc supposer $d\geqq 3$.

2) Il rèsulte du Théorème de Dualité et de la condition iii) que les modules suivants sont de longueur finie: $H^i(\omega_X^\cdot)$ $\forall i\geqq -d$ et Coker $[f_*\omega_Y \hookrightarrow H^{-d}(\omega_X^\cdot)]$.

Nous établissons tout d'abord deux dualités différentes entre les modules $R^i f_* \omega_Y$; on en déduit ensuite facilement le theorème 2 par une récurrence en escargot.

III. Première Dualité

Lemme 2. *Soit $X=\operatorname{Spec} A$ le spectre d'un anneau local noethérien quotient d'un régulier, équidimensionnel de dimension $d\geqq 3$, on suppose que la profondeur de A est au moins égale à deux, que X est de Cohen-Macaulay en dehors de son point fermé et que $H^{-d}(\omega_X^\cdot)$ est libre de rang un. On désigne par I une enveloppe injective du corps résiduel de A. On a alors pour tout $i\in[1,d-2]$*

$$H^{i-d}(\omega_X^\cdot) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(H^{-i-1}(\omega_X^\cdot), I).$$

Démonstration. Désignons par $j\colon \mathcal{O}_X[d]\to\omega_X^\cdot$ un morphisme induisant un isomorphisme sur l'homologie en degré $-d$; considérons le triangle construit sur j:

$$\begin{tikzcd} & N^\cdot \arrow[dl] & \\ \mathcal{O}_X[d] \arrow[rr, "j"] & & \omega_X^\cdot \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

On a

$$H^i(N^\cdot)=0 \qquad \text{si } i\leqq -d \quad \text{ou} \quad i\geqq -1$$
$$H^i(N^\cdot)=H^i(\omega_X^\cdot) \qquad \text{si } -d+1\leqq i\leqq -2$$

on applique $\underline{\mathrm{RHom}}_X(\quad,\omega_X^\cdot)$ à ce triangle; on a $\underline{\mathrm{RHom}}_X(\omega_X^\cdot,\omega_X^\cdot)=\mathcal{O}_X$ on en déduit:

$$\mathcal{O}_X \simeq \operatorname{Ext}^0(\mathcal{O}_X[d],\omega_X^\cdot) \xleftarrow{\sim} \operatorname{Ext}^0(\omega_X^\cdot,\omega_X^\cdot)$$

et

$$\operatorname{Ext}^i(\mathcal{O}_X[d], \omega_X^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^{i+1}(N^{\cdot}, \omega_X^{\cdot}) \quad \text{pour tout } i \geqq 1.$$

Par dualité sur X, on a, d'autre part:

$$\operatorname{Ext}^i(\mathcal{O}_X[d], \omega_X^{\cdot}) = H^{i-d}(\omega_X^{\cdot}).$$

Par ailleurs si M est un A-module de longueur finie, l'homologie de $\underline{R\mathrm{Hom}}_X(M, \omega_X^{\cdot})$ est concentrée en degré zéro et égale à $\operatorname{Hom}_A(M, I)$ on a donc:

$$\operatorname{Ext}^{i+1}(N^{\cdot}, \omega_X^{\cdot}) = \operatorname{Hom}_A(H^{-i-1}(N^{\cdot}), I)$$

et le lemme en résulte.

Lemme 3. *Soient X et f: $Y \to X$ comme dans l'énoncé du théorème 2. On désigne toujours par I une enveloppe injective du corps résiduel de A. On a alors:*

$$R^{d-1} f_* \mathcal{O}_Y = 0$$

et pour tout $i \in [1, d-2]$ $R^i f_* \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(R^{d-i-1} f_* \mathcal{O}_Y, I)$.

Démonstration. Il résulte du théorème de dualité ([2] chap. III) (ou, si on préfère, de l'application de $\underline{R\mathrm{Hom}}_X(\quad, \omega_X^{\cdot})$ à l'égalité (*)) qu'on a:

$$R f_* \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} \underline{R\mathrm{Hom}}_X(f_* \omega_Y[d], \omega_X^{\cdot}).$$

Or on a supposé:

$$f_* \omega_Y \simeq \mathcal{O}_X$$

on a donc:

$$R f_* \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} \omega_X^{\cdot}[-d]$$

donc:

$$R^i f_* \mathcal{O}_Y = H^{i-d}(\omega_X^{\cdot}) \quad \forall i.$$

Le lemme 3 résulte immédiatement de cette égalité et du lemme 2.

IV. Seconde Dualité

Lemme 4. *Soient toujours X, f: $Y \to X$ comme dans l'énoncé du théorème 2 et I une enveloppe injective du corps résiduel de A. On a pour tout entier $j \in [1, d]$:*

$$R^j f_* \mathcal{O}_Y \simeq \operatorname{Hom}_A(R^{d-j+1} f_* \mathcal{O}_Y, I).$$

En particulier puisque $R^d f_* \mathcal{O}_Y = 0$, $R^1 f_* \mathcal{O}_Y = 0$.

Démonstration. Sheperd Baron a remarqué que des isomorphismes $f_* \omega_Y \simeq H^{-d}(\omega_X^{\cdot}) \simeq \mathcal{O}_X$ on pouvait déduire par application de f^* une injection de $\mathcal{O}_Y$ dans ω_Y:

$$\mathcal{O}_Y \simeq f^* \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} f^* f_* \omega_Y \to \omega_Y$$

(cette application est injective car c'est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert de lissité de X). Il en résulte l'existence d'un diviseur $Z \geqq 0$ sur Y tel que

$\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(Z)$. Et on peut considérer la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_Y(Z) \simeq \omega_Y \to \mathcal{O}_Z(Z) \to 0.$$

Si $Z=0$ on a $\mathcal{O}_Y=\omega_Y$ et $R^i f_* \mathcal{O}_Y=0$ $\forall i>0$ par [1]. On peut donc supposer $Z>0$. De la suite précédente et de [1] on déduit alors

$$R^i f_* \mathcal{O}_Y = R^{i-1} f_* \mathcal{O}_Z(Z) \qquad \forall i>0.$$

En particulier $R^i f_* \mathcal{O}_Z(Z)$ est de longueur finie pour tout $i \geqq 0$, le lemme 4 est alors équivalent au lemme 5.

Lemme 5. *Avec les notations précédentes on a pour tout entier* $j \in [0, d-1]$:

$$R^j f_* \mathcal{O}_Z(Z) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(R^{d-j-1} f_* \mathcal{O}_Z(Z), I).$$

Démonstration. Le faisceau dualisant sur Z est $\omega_Z = \omega_Y(Z)|_Z = \mathcal{O}_Z(2Z)$ et $\omega_Z^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathcal{O}_Z(2Z)[d-1]$. Le théorème de dualité [2, chap. III] appliqué à $f|_Z\colon Z \to X$ permet d'écrire pour tout faisceau $\mathcal{L}$ sur Z:

$$\underline{R\mathrm{Hom}}_X(Rf_* \mathcal{L}, \omega_X^{\boldsymbol{\cdot}}) \simeq Rf_*(\underline{R\mathrm{Hom}}_Z(\mathcal{L}, \omega_Z^{\boldsymbol{\cdot}})).$$

En particulier pour $\mathcal{L} = \mathcal{O}_Z(Z)$

$$(**) \qquad \underline{R\mathrm{Hom}}_X(Rf_* \mathcal{O}_Z(Z), \omega_X^{\boldsymbol{\cdot}}) \simeq Rf_* \mathcal{O}_Z(Z)[d-1).$$

Puisque l'homologie de $Rf_* \mathcal{O}_Z(Z)$ est de longueur finie, on a pour tout i:

$$\operatorname{Ext}^i(Rf_* \mathcal{O}_Z(Z), \omega_X^{\boldsymbol{\cdot}}) \simeq \operatorname{Hom}_A(R^{-i} f_* \mathcal{O}_Z(Z), I)$$

et donc d'après (**):

$$\operatorname{Hom}_A(R^{-i} f_* \mathcal{O}_Z(Z), I) \simeq R^{d+i-1} f_* \mathcal{O}_Z(Z) \qquad \forall i \in [-d+1, 0]$$

ou encore en posant $j = d+i-1$:

$$R^j f_* \mathcal{O}_Z(Z) \simeq \operatorname{Hom}_A(R^{d-j+1} f_* \mathcal{O}_Z(Z), I) \qquad \forall j \in [0, d-1].$$

V. Fin de la Démonstration du Théorème 2

On a établi:

(lemme 4) $\quad R^j f_* \mathcal{O}_Y = \operatorname{Hom}_A(R^{d-j+1} f_* \mathcal{O}_Y, I) \qquad \forall j \in [1, d]$

(lemme 3) $\quad R^j f_* \mathcal{O}_Y = \operatorname{Hom}_A(R^{d-j-1} f_* \mathcal{O}_Y, I) \qquad \forall j \in [1, d-2].$

Donc

$$R^{d-j+1} f_* \mathcal{O}_Y = 0 \Rightarrow R^j f_* \mathcal{O}_Y = 0 \Rightarrow R^{d-j-1} f_* \mathcal{O}_Y = 0.$$

De plus $R^d f_* \mathcal{O}_Y = 0$ (évident) et $R^{d-1} f_* \mathcal{O}_Y = 0$ (lemme 3). Donc:

$$R^j f_* \mathcal{O}_Y = 0 \qquad \forall j > 0.$$

Bibliographie

1. Grauert, H., Riemenschneider, O.: Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen. Inventiones Math. **11**, 263-292 (1970)
2. Hartshorne, R.: Residues and duality. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 20. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966
3. Hironaka, H.: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, II. Ann. of Math. **79**, 109-326 (1964)
4. Hochster, M.: Cohen-Macaulay rings and modules. Proc. of the International Cong. of Math. Helsinki Vol. 1, pp 291-298, 1978
5. Reid, M.: Canonical 3-folds. Proceedings des "Journées de Géométrie Algébrique" Angers 1979, (A. Beauville, ed.) pp 273-310. Leiden: Sijthoff and Nordhoff 1980

Reçu le Décembre 19, 1980