Inventiones math. 16, 113–160 (1972)

Relativ-analytische Räume und die Kohärenz von Bildgarben

O. Forster und K. Knorr (Regensburg)

Einleitung

H. Grauert bewies 1960 folgenden Kohärenzsatz [5]: Sei $f: X \to Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung zweier komplexer Räume und $\mathscr{F}$ eine kohärente analytische Garbe auf X. Dann sind alle Bildgarben $R^n f_* \mathscr{F}$ kohärent. Dieses Theorem, dessen Analogon in der algebraischen Geometrie schon vorher von A. Grothendieck bewiesen worden war [1], ist zu einem der wichtigsten Hilfsmittel in der analytischen Geometrie geworden. Grothendieck wies schon seit langem auf die Notwendigkeit hin, den Grauertschen Kohärenzsatz auf relativ-analytische Räume zu verallgemeinern, deren Basis nicht notwendig ein komplexer Raum ist [8]. Er entwickelte dazu mit seiner Schule den notwendigen homologischen Apparat [2, 9, 17, 18]. In der nichtarchimedischen Funktionentheorie hat Kiehl [13] den Bildgarbensatz bewiesen und in [14] weitere Schritte in Richtung auf den allgemeinen Satz getan [1].

Einer der Verfasser (Knorr) führte 1968/70 einen lehrreichen Briefwechsel mit A. Grothendieck über dieses Problem und erhielt dadurch Zugang zu einigen „papiers secrets". Im Dezember 1969 und April 1970 konnte er in Nizza bzw. Grenoble mit B. Malgrange diskutieren, der ihm bereitwillig seine Ideen mitteilte. Die Malgrangeschen Ideen führten letztlich zum Erfolg. Wir beweisen hier den Bildgarbensatz für relativ-analytische Räume, deren Basis gewisse Fréchet-geringte Räume sind, zu denen neben komplexen Räumen insbesondere endlichdimensionale Mannigfaltigkeiten vom Typ C^k, $0 \leqq k \leqq \infty$, gehören. Da in diesem allgemeineren Fall die Strukturgarbe nicht mehr kohärent ist, hat man nach Grothendieck die kohärenten Garben durch pseudokohärente Komplexe zu ersetzen. Der Bildgarbensatz lautet nun so: Ist $f: X \to Y$ ein relativ-analytischer Raum, der eigentlich über Y liegt und $\mathscr{F}^\bullet$ ein nach unten beschränkter relativ-pseudokohärenter Komplex von $\mathcal{O}_X$-Moduln, so ist der Bildgarbenkomplex $\mathbf{R}f_* \mathscr{F}^\bullet$ pseudo-kohärent. In unserem all-

[1] Inzwischen haben Kiehl und Verdier [14a] und Kiehl [14b] ebenfalls den Grauertschen Kohärenzsatz mit neuen Methoden bewiesen und ihn auf relativ-analytische Räume verallgemeinert.

gemeinen Projektionssatz ist der klassische Bildgarbensatz enthalten. In diesem Fall, der in [3] eigens dargestellt ist, ergeben sich in einigen Punkten beträchtliche Vereinfachungen. Obwohl die vorliegende Arbeit unabhängig von [3] zu verstehen ist, sei dem Leser, der sich schnell mit den Beweisideen vertraut machen will, die Lektüre von [3] empfohlen.

Inhalt

Der Begriff der Pseudokohärenz im Sinne von Grothendieck

In diesem Paragraphen erinnern wir an einige Begriffe und Sätze, die wir später benötigen (vgl. [7, 9, 10, 17, 18]). Für den ganzen Paragraphen sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum.

1. Seien

$$\mathcal{F}^\bullet\colon \cdots \longrightarrow \mathcal{F}^{n-1} \xrightarrow{\delta} \mathcal{F}^n \xrightarrow{\delta} \mathcal{F}^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

und

$$\mathcal{G}^\bullet\colon \cdots \longrightarrow \mathcal{G}^{n-1} \xrightarrow{d} \mathcal{G}^n \xrightarrow{d} \mathcal{G}^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

zwei Komplexe von $\mathcal{O}_X$-Moduln und

$$\sigma\colon \mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{G}^\bullet$$

ein Komplexmorphismus. σ heißt *n-Quasiisomorphismus*, wenn der induzierte Garbenhomomorphismus

$$H^k(\sigma)\colon H^k(\mathcal{F}^\bullet) \to H^k(\mathcal{G}^\bullet)$$

für $k > n$ ein Isomorphismus und für $k = n$ ein Epimorphismus ist. σ heißt *Quasiisomorphismus*, wenn es ein n-Quasiisomorphismus für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist.

Der *Kegel* $\mathscr{K}^\bullet$ eines Komplexmorphismus $\sigma\colon \mathscr{F}^\bullet \to \mathscr{G}^\bullet$ ist so definiert:

$$\mathscr{K}^n = \mathscr{G}^n \oplus \mathscr{F}^{n+1}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial\colon \mathscr{G}^n \oplus \mathscr{F}^{n+1} &\to \mathscr{G}^{n+1} \oplus \mathscr{F}^{n+2} \\ (x, y) &\mapsto (dx + \sigma y, -\delta y). \end{aligned}$$

Ein Komplexmorphismus $\sigma\colon \mathscr{F}^\bullet \to \mathscr{G}^\bullet$ ist genau dann ein n-Quasiisomorphismus, wenn für den Kegel $\mathscr{K}^\bullet$ von σ gilt:

$$H^k(\mathscr{K}^\bullet) = 0 \qquad \text{für } k \geqq n.$$

2. Ein Komplex $\mathscr{F}^\bullet$ von $\mathscr{O}_X$-Moduln heißt *n-pseudokohärent*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U von x gibt, und einen n-Quasiisomorphismus über U

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{L}^n \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{L}^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{L}^{n+2} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \arrow[r] & \mathscr{F}^{n-1} \arrow[r] & \mathscr{F}^n \arrow[r] & \mathscr{F}^{n+1} \arrow[r] & \mathscr{F}^{n+2} \arrow[r] & \cdots, \end{tikzcd}$$

wobei die $\mathscr{L}^k$ freie $\mathscr{O}_U$-Moduln endlichen Ranges sind mit $\mathscr{L}^k = 0$ für hinreichend großes k. Der Komplex $\mathscr{F}^\bullet$ heißt *pseudokohärent* wenn er n-pseudokohärent für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist.

Jede $\mathscr{O}_X$-Modulgarbe $\mathscr{F}$ kann man als Komplex

$$\mathscr{F}^\bullet\colon \to 0 \to 0 \to \mathscr{F} \to 0 \to 0 \to$$

mit $\mathscr{F}$ an der 0-ten Stelle auffassen. $\mathscr{F}^\bullet$ ist genau dann $(-n)$-pseudokohärent ($n \geqq 0$), wenn es lokal eine Auflösung

$$\mathscr{L}^{-n} \to \mathscr{L}^{-n+1} \to \cdots \to \mathscr{L}^0 \to \mathscr{F} \to 0$$

der Länge n durch freie $\mathscr{O}_X$-Moduln $\mathscr{L}^k$ endlichen Ranges gibt. Ist $\mathscr{O}_X$ kohärent, so sind die Kohärenz von $\mathscr{F}$, die (-1)-Pseudokohärenz von $\mathscr{F}^\bullet$ und die Pseudokohärenz von $\mathscr{F}^\bullet$ gleichbedeutend.

3. Ist $\mathscr{F}^\bullet$ ein n-pseudokohärenter Komplex von $\mathscr{O}_X$-Modul mit $H^k(\mathscr{F}^\bullet) = 0$ für $k > n$, so ist $H^n(\mathscr{F}^\bullet)$ ein $\mathscr{O}_X$-Modul endlichen Typs. Sei

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L}^\bullet\colon \cdots \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{L}^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{L}^{n+2} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \mathscr{F}^\bullet\colon \cdots \arrow[r] & \mathscr{F}^{n-1} \arrow[r] & \mathscr{F}^n \arrow[r] & \mathscr{F}^{n+1} \arrow[r] & \mathscr{F}^{n+2} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

ein $(n+1)$-Quasiisomorphismus zwischen zwei pseudokohärenten Komplexen $\mathscr{L}^\bullet$ und $\mathscr{F}^\bullet$. Nach der gerade gemachten Bemerkung ist $H^n(\mathscr{K}^\bullet)$ vom endlichen Typ, wobei $\mathscr{K}^\bullet$ den Kegel von $\mathscr{L}^\bullet \to \mathscr{F}^\bullet$ bezeichnet. Daher gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U von x, einen freien $\mathscr{O}_U$-Modul $\mathscr{L}^n$ endlichen Ranges und über U einen Morphismus

$$\mathscr{L}^n \xrightarrow{\omega} Z^n(\mathscr{K}^\bullet),$$

der einen Epimorphismus

$$\mathscr{L}^n \to H^n(\mathscr{K}^\bullet)$$

induziert. Spaltet man ω in seine Komponenten

$$\mathscr{L}^n \to \mathscr{L}^{n+1} \quad \text{und} \quad \mathscr{L}^n \to \mathscr{F}^n$$

auf, so erhält man einen n-Quasiisomorphismus

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to & 0 & \longrightarrow & \mathscr{L}^n & \longrightarrow & \mathscr{L}^{n+1} & \longrightarrow & \mathscr{L}^{n+2} & \to \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \to & \mathscr{F}^{n-1} & \longrightarrow & \mathscr{F}^n & \longrightarrow & \mathscr{F}^{n+1} & \longrightarrow & \mathscr{F}^{n+2} & \to \cdots
\end{array}$$

über U.

4. Sei $(Y, \mathscr{O}_Y)$ ein weiterer geringter Raum.

Ein Morphismus

$$j = (j_0, j_1)\colon (X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$$

heißt *abgeschlossene Einbettung*, wenn

$$j_0\colon X \to Y$$

den Raum X homöomorph auf eine abgeschlossene Teilmenge von Y abbildet und der Garbenmorphismus

$$j_1\colon \mathscr{O}_Y \to j_{0*}\mathscr{O}_X$$

ein Epimorphismus ist.

Lemma (vgl. [17], III. Lemme 1.1.1.). *Sei $j\colon X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung und $j_*(\mathscr{O}_X)$ pseudokohärent. Dann gilt:*

Ein Komplex $\mathscr{F}^\bullet$ von $\mathscr{O}_X$-Moduln ist genau dann pseudokohärent, wenn der Komplex $j_*\mathscr{F}^\bullet$ auf Y pseudokohärent ist.

5. Sei $\pi\colon X \to Y$ ein Morphismus geringter Räume und $\mathscr{F}^\bullet$ ein nach unten beschränkter Komplex von $\mathscr{O}_X$-Moduln (d.h. es gibt ein $n_* \in \mathbb{Z}$ mit $\mathscr{F}^n = 0$ für $n < n_*$). Dann gibt es einen nach unten beschränkten

Komplex $\mathscr{I}^\bullet$ von injektiven $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathscr{I}^n$ und einen Quasiisomorphismus

$$\mathscr{F}^\bullet \to \mathscr{I}^\bullet.$$

Der Komplex $\mathbf{R}\pi_*\mathscr{F}^\bullet$ ist bis auf Isomorphie durch $\pi_*\mathscr{I}^\bullet$ gegeben. Die Isomorphie ist dabei in folgendem Sinne zu verstehen: Hat man einen weiteren Quasiisomorphismus $\mathscr{F}^\bullet \to \mathscr{J}^\bullet$ in einen nach unten beschränkten Komplex $\mathscr{J}^\bullet$ injektiver $\mathcal{O}_X$-Moduln, so gibt es einen nach unten beschränkten $\mathcal{O}_Y$-Modulkomplex $\mathscr{G}^\bullet$ und Quasiisomorphismen

$$\pi_*\mathscr{I}^\bullet \leftarrow \mathscr{G}^\bullet \to \pi_*\mathscr{J}^\bullet.$$

Ist $\mathscr{F}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, so werden die gewöhnlichen Bildgarben von $\mathscr{F}$ durch

$$R^q\pi_*\mathscr{F} = H^q(\mathbf{R}\pi_*\mathscr{F})$$

gegeben, wobei auf der rechten Seite der Gleichung $\mathscr{F}$ als Garbenkomplex aufgefaßt wird (vgl. 2.).

Kapitel I. Relativ-analytische Räume

Relativ-analytische Räume sind, grob gesprochen, Familien komplex-analytischer Räume, deren Parameterräume gewisse Fréchet-geringte Räume sind. Die Kategorie dieser Basisräume, die insbesondere alle komplexen Räume und differenzierbaren Mannigfaltigkeiten umfaßt, wird in § 1 definiert.

In § 2 werden Spektralnormen auf der Algebra der Schnitte der Strukturgarbe über einer offenen Menge untersucht. Diese Spektralnormen erweisen sich als überaus nützlich für gewisse Potenzreihenkonstruktionen.

Als glatte Modelle für die in § 3 eingeführten relativ-analytischen Räume dienen Produkte Fréchet-geringter Räume mit Polyzylindern im $\mathbb{C}^m$. Die allgemeinen relativ-analytischen Räume sind lokal Unterräume davon. Der Begriff der relativen Pseudokohärenz wird mittels relativer Karten eingeführt. Der Beweis der Unabhängigkeit der Definition von der Wahl der Karte ist nicht ganz mühelos und benutzt die oben erwähnten Potenzreihenkonstruktionen.

§ 1. Eine Kategorie Fréchet-geringter Räume

Sei A eine $\mathbb{C}$-Algebra mit Einselement. Eine Abbildung $q: A \to \mathbb{R}_+$ nennen wir multiplikative Seminorm, falls gilt:

i) $q(\lambda f) = |\lambda|\, q(f)$,

ii) $q(f+g) \leqq q(f) + q(g)$,

iii) $q(fg) \leqq q(f)\, q(g)$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f, g \in A$.

Unter einer *mF-Algebra* verstehen wir eine topologische $\mathbb{C}$-Algebra mit Einselement, deren unterliegender topologischer Vektorraum ein Fréchetraum ist und deren Topologie durch eine Familie von multiplikativen Seminormen definiert werden kann.

Ein Morphismus $\varphi: F \to G$ von mF-Algebren ist ein stetiger Algebra-Homomorphismus mit $\varphi(1)=1$.

Vereinbarung. Von jetzt ab verstehen wir unter einer Seminorm auf einer mF-Algebra F stets eine stetige multiplikative Seminorm.

Eine (nicht notwendig stetige) Abbildung $p: F \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, die den Bedingungen i) bis iii) genügt, nennen wir Pseudonorm.

Definition. Sei F eine mF-Algebra. Eine Teilmenge B von F heiße *m-beschränkt*, wenn gilt:

i) B ist absolutkonvex und $BB \subset B$.

ii) B ist abgeschlossen und beschränkt.

iii) $B \cap \mathbb{C} \neq \{0\}$.

Bemerkungen. 1) Ist B eine m-beschränkte Teilmenge von F, so gibt es eine m-beschränkte Teilmenge $B' \subset F$ mit

$$B \subset B' \quad \text{und} \quad 1 \in B'.$$

Man kann als B' die abgeschlossene absolutkonvexe Hülle von $B \cup \{1\}$ wählen.

2) Sind B_1 und B_2 m-beschränkte Teilmengen von F, so existiert eine m-beschränkte Teilmenge $B \subset F$ mit

$$B_1 \cup B_2 \subset B.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt $1 \in B_1 \cap B_2$. Die Menge $B_1 B_2$ ist beschränkt und multiplikativ abgeschlossen und es ist $B_1 \cup B_2 \subset B_1 B_2$.

Für B kann man die abgeschlossene absolutkonvexe Hülle von $B_1 B_2$ nehmen.

Bezeichnung. Für eine m-beschränkte Menge B in F ist das Minkowskifunktional

$$\|f\|_B = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : f \in \lambda B\}$$

eine Pseudonorm.

Bemerkung. Zu jeder Seminorm q auf F gibt es dann eine Konstante $\lambda_q > 0$, so daß

$$q(f) \leqq \lambda_q \|f\|_B \quad \text{für alle } f \in F.$$

Wir setzen

$$F_B = \{f \in F : \|f\|_B < \infty\}.$$

Wie man leicht nachrechnet, ist $(F_B, \|\ \|_B)$ eine Banachalgebra. Aus der obigen Bemerkung folgt, daß die Inklusionsabbildung $F_B \to F$ stetig ist.

Definition. Unter einem mFB-Raum verstehen wir ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$, bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Garbe $\mathcal{O}_X$ von mF-Algebren mit folgenden Eigenschaften:

i) X hat abzählbare Topologie.

ii) Die Halme $\mathcal{O}_{X,x}$ sind lokale Ringe mit Residuenkörper $\mathbb{C}$.

iii) Zu jedem Punkt x und jeder offenen Umgebung U von x gibt es eine offene Menge V mit $x \in V \subset U$, so daß für die Restriktionsabbildung

$$\mathrm{rest}_V^U : \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$$

gilt: Zu jeder beschränkten Menge A in $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ gibt es eine m-beschränkte Menge B in $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$, die $\mathrm{rest}_V^U(A)$ absorbiert[2].

Bemerkung. Wegen der Bedingung ii) ist jedem Element $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ eine Funktion

$$\hat{f} : U \to \mathbb{C}$$

zugeordnet. Wir werden in § 2, Corollar 2.5, beweisen, daß $\hat{f}$ stetig ist. Statt $\hat{f}(x)$ schreiben wir auch $f(x)$.

Bezeichnungen. Sind $V \subset U$ offene Teilmengen von X, die der Bedingung iii) der obigen Definition genügen, so schreiben wir abkürzend

$$V \ll U.$$

Ist A eine beschränkte Menge in $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ und B eine m-beschränkte Menge in $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$, die $\mathrm{rest}_V^U(A)$ absorbiert, so schreiben wir

$$(V, B) \ll (U, A).$$

Es gilt dann

$$\mathrm{rest}_V^U(A) \subset \Gamma_B(V, \mathcal{O}_X),$$

wobei wir $\Gamma_B(V, \mathcal{O}_X) = (\Gamma(V, \mathcal{O}_X))_B$ gesetzt haben.

Bemerkung. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein mFB-Raum und X lokalkompakt. Sind U, V offene Mengen in X mit $V \subset\subset U$, so gilt $V \ll U$.

---

[2] Wir danken Herrn R. Kiehl, durch den wir auf einen Mangel in unserer ursprünglichen Definition aufmerksam gemacht wurden.

Definition. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei mFB-Räume. Ein Morphismus

$$\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

besteht aus einer stetigen Abbildung

$$\varphi_0\colon X \to Y$$

und einem Morphismus

$$\varphi_1\colon \mathcal{O}_Y \to (\varphi_0)_* \mathcal{O}_X$$

von Garben von mF-Algebren.

Bemerkung. Es folgt, daß φ_1 ein lokaler Homomorphismus ist.

Beispiele für mFB-Räume. 1) Komplexe Räume mit abzählbarer Topologie.

2) Lokalkompakte topologische Räume mit abzählbarer Topologie, versehen mit der Garbe der stetigen Funktionen.

3) Differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit abzählbarer Topologie, versehen mit der Garbe der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $(0 \leqq k \leqq \infty)$.

Produkte. Sei F eine mF-Algebra und G eine nukleare mF-Algebra. Dann ist das topologische Tensorprodukt $G \hat{\otimes} F$ wieder eine mF-Algebra. (Weil G nuklear ist, stimmen das ε-Produkt und das π-Produkt überein, vgl. [6].)

Ist speziell $G = \Gamma(D(r), \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m})$ die Algebra der holomorphen Funktionen auf dem gleichseitigen Polyzylinder

$$D(r) = \{z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \colon |z_\mu| < r\},$$

so läßt sich $G \hat{\otimes} F$ mit der Algebra der holomorphen Funktionen auf $D(r)$ mit Werten in F identifizieren. Bezeichnen $t_1, \ldots, t_m$ die kanonischen Koordinaten des $\mathbb{C}^m$, so läßt sich jedes Element $f \in G \hat{\otimes} F$ in eine konvergente Potenzreihe

$$f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^m} a_\nu t^\nu \qquad \text{mit } a_\nu \in F$$

entwickeln. Für jedes $\rho < r$ und jede Seminorm q auf F definieren wir eine (multiplikative) Seminorm $\| \ \|_{\rho q}$ auf $G \hat{\otimes} F$ durch

$$\|f\|_{\rho q} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^m} q(a_\nu)\, \rho^{|\nu|},$$

wobei $|\nu| = \nu_1 + \cdots + \nu_m$ für $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ gesetzt wurde. Durchläuft ρ alle positiven Zahlen $< r$ und q alle Seminormen auf F, so definiert bekanntlich die so entstehende Familie von Seminormen die Topologie von $G \hat{\otimes} F$.

Ist $\rho = r$ oder q nur eine Pseudonorm auf F, so kann $\| \ \|_{\rho q}$ analog definiert werden und ist dann eine Pseudonorm auf $G \hat{\otimes} F$.

Bezeichnung. Ist B eine m-beschränkte Menge in F und q das durch B bestimmte Minkowskifunktional, so schreiben wir statt $\| \ \|_{\rho q}$ auch $\| \ \|_{\rho B}$.

Jetzt sind wir in der Lage, das Produkt eines mFB-Raumes $(S, \mathcal{O}_S)$ mit dem m-dimensionalen komplexen Zahlenraum $\mathbb{C}^m$ zu definieren. Für einen gleichseitigen Polyzylinder $D(z, r)$ mit Zentrum z und Radius r und eine offene Menge $S' \subset S$ setzen wir

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m \times S}(D(z, r) \times S') = \Gamma(D(z, r), \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m}) \hat{\otimes} \Gamma(S', \mathcal{O}_S).$$

Durch diese Vorgabe ist eindeutig eine Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m \times S}$ von mF-Algebren auf $\mathbb{C}^m \times S$ bestimmt (vgl. [11]).

Proposition 1.1. *Für jeden mFB-Raum $(S, \mathcal{O}_S)$ ist $(\mathbb{C}^m \times S, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m \times S})$ ein mFB-Raum.*

Beweis. Das Axiom i) der mFB-Räume ist für $\mathbb{C}^m \times S$ offensichtlich erfüllt. Axiom iii) beweist man so: Gilt für den Raum $(S, \mathcal{O}_S)$

$$V \ll U$$

und ist $0 < \rho < r$, so folgt

$$D(z, \rho) \times V \ll D(z, r) \times U.$$

Sei dazu $\tilde{A}$ eine beschränkte Teilmenge von $D(z, r) \times U$. Jedes $f \in \tilde{A}$ läßt sich in eine Potenzreihe

$$f = \sum_{\nu} a_\nu(f)\, t^\nu$$

mit $a_\nu(f) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_S)$ entwickeln. Da $\tilde{A}$ beschränkt ist, ist auch

$$A = \{a_\nu(f)\, \tilde{\rho}^{|\nu|} \colon f \in \tilde{A},\ \nu \in \mathbb{N}^m\} \subset \Gamma(U, \mathcal{O}_S)$$

beschränkt; dabei ist $\tilde{\rho}$ eine reelle Zahl mit $\rho < \tilde{\rho} < r$. Sei $B \subset \Gamma(V, \mathcal{O}_S)$ eine m-beschränkte Menge mit

$$(V, B) \ll (U, A),$$

und

$$\tilde{B} = \{ f \in \Gamma(D(z, \rho) \times V, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m \times S}) \colon \|f\|_{\rho B} \leqq 1 \}.$$

$\tilde{B}$ ist m-beschränkt und es gilt

$$\left(D(z,\rho)\times V,\tilde{B}\right)\ll\left(D(z,r)\times U,\tilde{A}\right).$$

Axiom ii) ergibt sich aus dem folgenden

Hilfssatz. *$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m\times S}$ hat lokale Halme mit Residuenkörper $\mathbb{C}$.*

Beweis. Sei $(z,s)\in\mathbb{C}^m\times S$ und $\mathfrak{m}_s$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{S,s}$. Wir zeigen, daß $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m\times S,(z,s)}$ ein lokaler Ring ist, dessen maximales Ideal aus allen Funktionskeimen f besteht, für die gilt:

Es gibt ein $r>0$, eine offene Umgebung S' von s und einen Repräsentanten $F\in\Gamma\left(D(z,r)\times S',\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m\times S}\right)$ von f der Gestalt

$$F=a_0+\sum_{|\nu|\geqq 1}a_\nu(t-z)^\nu$$

wobei $a_\nu\in\Gamma(S',\mathcal{O}_S)$ und $a_0\in\mathfrak{m}_s$.

Es genügt zu zeigen, daß $1-f$ für jedes solche f invertierbar ist. Ohne Einschränkung ist $1-a_0$ invertierbar in $\Gamma(S',\mathcal{O}_S)$. Sei $b=(1-a_0)^{-1}$. Jetzt gilt

$$1-F=(1-a_0)\Big(1-\sum_{|\nu|\geqq 1}b\,a_\nu(t-z)^\nu\Big).$$

Wir setzen

$$G=\sum_{|\nu|\geqq 1}b\,a_\nu(t-z)^\nu.$$

Es bleibt zu zeigen, daß $1-G$ in einer eventuell verkleinerten Umgebung von (z,s) invertierbar ist. Sei S'' eine offene Umgebung von s mit $S''\ll S'$ und $0<\rho<r$. Dann gibt es eine m-beschränkte Menge $B\subset\Gamma(S'',\mathcal{O}_S)$, so daß

$$\|G\|_{\rho B}<\infty.$$

Es gibt ein ρ' mit $0<\rho'\leqq\rho$, so daß

$$\|G\|_{\rho' B}\leqq\frac{\rho'}{\rho}\,\|G\|_{\rho B}<1.$$

Also ist $1-G$ über $D(z,\rho')\times S''$ invertierbar.

Zur späteren Verwendung notieren wir folgenden

Hilfssatz 1.2. *Sei $0<r'<r''<r$. Dann hat die Familie $(t/r'')^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}^m$, von Elementen aus $\Gamma\left(D(r)\times S,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m\times S}\right)$ folgende Eigenschaften:*

i) *Für jedes m-beschränkte $B\subset\Gamma(S,\mathcal{O}_S)$ gilt*

$$\sum_{\nu\in\mathbb{N}^m}\left\|\left(\frac{t}{r''}\right)^\nu\right\|_{r' B}<\infty.$$

ii) *Für jede offene Teilmenge $S' \subset S$ läßt sich jedes Element*

$$f \in \Gamma(D(r) \times S', \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m \times S})$$

eindeutig in eine konvergente Reihe

$$f = \sum_\nu a_\nu \left(\frac{t}{r''}\right)^\nu \quad \text{mit} \quad a_\nu \in \Gamma(S', \mathcal{O}_S)$$

entwickeln, wobei

$$q(a_\nu) \leqq \|f\|_{r'' q}$$

für jede Seminorm oder Pseudonorm q auf $\Gamma(S', \mathcal{O}_S)$.

Dieser Hilfssatz folgt unmittelbar aus den Definitionen.

mFB-Räume vom Typ (J). Ein mFB-Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt vom Typ (J), wenn gilt (vgl. [11]):

(1) X ist metrisierbar und von endlicher Lebesguedimension.

(2) Es gibt eine Basis $\mathfrak{S}$ der Topologie von X mit

i) $S, S' \in \mathfrak{S} \Rightarrow S \cap S' \in \mathfrak{S}$.

ii) $S \in \mathfrak{S} \Rightarrow H^n(S, \mathcal{O}_X) = 0$ für $n \geqq 1$.

Im folgenden nennen wir die Mengen $S \in \mathfrak{S}$ *Steinsch.*

Beispiele. 1) Komplexe Räume und (endlichdimensionale) differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind lokal mFB-Räume vom Typ (J).

2) Jeder lokalkompakte Raum endlicher Lebesguedimension mit abzählbarer Topologie ist, versehen mit der Garbe der stetigen Funktionen, ein mFB-Raum vom Typ (J).

Bemerkung. Ist der mFB-Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ vom Typ (J), so auch das oben definierte Produkt $(\mathbb{C}^m \times X, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m \times X})$. Ist $S \subset X$ Steinsch und $D \subset \mathbb{C}^m$ ein Polyzylinder, so ist auch $D \times S$ Steinsch.

Dies folgt aus den von L. Kaup bewiesenen Künnethformeln [12].

Hilfssatz 1.3. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein mFB-Raum vom Typ (J) und $d = \dim X$. Weiter sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul und*

$$\mathcal{L}_d \to \mathcal{L}_{d-1} \to \cdots \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

eine Auflösung von $\mathcal{F}$ über X durch freie $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{L}_i$, $0 \leqq i \leqq d$.

Behauptung. Für jedes Steinsche $S \subset X$ gilt

$$H^n(S, \mathcal{F}) = 0 \qquad \text{für alle} \quad n \geqq 1.$$

Beweis. $H^n(S, \mathcal{F}) \cong H^{n+d}(S, \ker(\mathcal{L}_d \to \mathcal{L}_{d-1})) = 0$ für $n \geqq 1$.

§ 2. Spektralnormen

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein mFB-Raum, U offene Teilmenge von X und B eine m-beschränkte Menge in $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Für $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ wird die Spektralnorm durch

$$\|f\|_B^{\mathrm{sp}} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|f^n\|_B}$$

definiert (vgl. [16]). Ist $f \in \Gamma_B(U, \mathcal{O}_X)$, so gilt $\|f\|_B^{\mathrm{sp}} < \infty$.

Bemerkung 2.1. i) Es gilt sogar $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|f^n\|_B} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|f^n\|_B}$.

ii) $\|f\|_B^{\mathrm{sp}} = \sup\{|\lambda| : \lambda - f$ nicht invertierbar in $\Gamma_B(U, \mathcal{O}_X)\}$.

iii) Aus $\|f\|_B^{\mathrm{sp}} = 0$ folgt nicht notwendig $f = 0$.

Hilfssatz 2.2. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein mFB-Raum, $U \subset X$ offen und $B, \tilde{B} \subset \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ m-beschränkt mit $\tilde{B} \subset \lambda B$, $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Dann gilt:

i) $\Gamma_{\tilde{B}}(U, \mathcal{O}_X) \subset \Gamma_B(U, \mathcal{O}_X)$.

ii) $\|f\|_B^{\mathrm{sp}} \leqq \|f\|_{\tilde{B}}^{\mathrm{sp}}$.

Dies leuchtet unmittelbar ein.

Hilfssatz 2.3. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein mFB-Raum. Ist B eine m-beschränkte Teilmenge von $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, so gilt*

$$\sup_{x \in X} |f(x)| \leqq \|f\|_B^{\mathrm{sp}} \quad \textit{für alle } f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X).$$

Dies folgt unmittelbar aus Bemerkung 2.1.ii).

Lemma 2.4. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein mFB-Raum, $x \in X$ und $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ mit $f(x) = 0$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung U von x und eine m-beschränkte Menge B in $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, so daß $\|f\|_B^{\mathrm{sp}} \leqq \varepsilon$.*

Beweis. Zu jedem $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es eine offene Umgebung U_λ von x, so daß $\lambda - f$ in $\Gamma(U_\lambda, \mathcal{O}_X)$ invertierbar ist. Wir dürfen annehmen, daß es m-beschränkte Mengen $B_\lambda \subset \Gamma(U_\lambda, \mathcal{O}_X)$ gibt, so daß $(\lambda - f)^{-1} \in \Gamma_{B_\lambda}(U_\lambda, \mathcal{O}_X)$. Zu jedem $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es also eine offene Umgebung P_λ von λ, so daß $\mu - f$ in $\Gamma_{B_\lambda}(U_\lambda, \mathcal{O}_X)$ für alle $\mu \in P_\lambda$ invertierbar ist.

Außerdem gibt es eine offene Umgebung U_∞ von x, eine m-beschränkte Menge $B_\infty \subset \Gamma(U_\infty, \mathcal{O}_X)$ und ein $R > 0$, so daß $\lambda - f$ für alle $|\lambda| > R$ in $\Gamma_{B_\infty}(U_\infty, \mathcal{O}_X)$ invertierbar ist.

Da $\{\lambda \in \mathbb{C} : \varepsilon \leqq |\lambda| \leqq R\}$ kompakt ist, kann man $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ finden, so daß mit der Bezeichnung

$$U = U_\infty \cap U_{\lambda_1} \cap \cdots \cap U_{\lambda_k}$$

gilt: Es gibt eine m-beschränkte Menge $B \subset \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, so daß $\mu - f$ für alle $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu| \geqq \varepsilon$ in $\Gamma_B(U, \mathcal{O}_X)$ invertierbar ist. Daraus folgt nach Bemerkung 2.1.ii), daß $\|f\|_B^{sp} \leqq \varepsilon$.

Corollar 2.5. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein mFB-Raum und $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Dann ist $\hat{f}\colon X \to \mathbb{C}$ stetig.*

Lemma 2.6. *Seien $D(\rho) \subset \mathbb{C}^n$ und $D'(z, r) \subset \mathbb{C}^m$ gleichseitige Polyzylinder. Weiter sei $(S, \mathcal{O}_S)$ ein mFB-Raum,*

$$B \subset \Gamma\bigl(D'(z, r) \times S, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m \times S}\bigr)$$

eine m-beschränkte Menge und

$$g = (g_1, \ldots, g_n) \in \Gamma\bigl(D'(z, r) \times S, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m \times S}\bigr)^n$$

mit

$$\|g_k\|_B^{sp} < \rho \qquad \text{für } 1 \leqq k \leqq n.$$

Behauptung. Für jedes

$$f = \sum_\nu a_\nu t^\nu \in \Gamma\bigl(D(\rho) \times S, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S}\bigr)$$

konvergiert die Reihe

$$\sum_\nu a_\nu g^\nu$$

in $\Gamma\bigl(D'(z, r) \times S, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m \times S}\bigr)$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\sum_\nu q(a_\nu) \|g^\nu\|_{r'q} < \infty$ für alle $r' < r$ und alle Seminormen q auf $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. Man wähle reelle Zahlen ρ'' und ρ^*, so daß $\rho'' < \rho^* < \rho$ und $\|g_k\|_B^{sp} < \rho''$ für $1 \leqq k \leqq n$.

Da B beschränkt ist, gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}_+$, so daß

$$\|h\|_{r'q} \leqq \lambda \|h\|_B$$

für alle $h \in \Gamma\bigl(D'(z, r) \times S, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m \times S}\bigr)$. Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß $\|g_k\|_B^{sp} < \rho'' - \varepsilon$ für $1 \leqq k \leqq n$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$\|g_k^l\|_B \leqq (\rho'')^l$$

für alle $l \geqq N$.

Insgesamt folgt

$$\|g_k^l\|_{r'q} \leqq \lambda (\rho'')^l \qquad \text{für alle } l \geqq N.$$

Sei $M \geqq \rho''$ eine Konstante mit $\|g_k\|_{r'q} \leqq M$ für $1 \leqq k \leqq n$. Man erhält nun für jedes $\nu \in \mathbb{N}^n$ mit $|\nu| = l$

$$\|g^\nu\|_{r'q} \leqq \|g_1^{\nu_1}\|_{r'q} \cdots \|g_n^{\nu_n}\|_{r'q} \leqq \lambda M^{nN} (\rho'')^{l-nN} = \lambda \left(\frac{M}{\rho''}\right)^{nN} (\rho'')^l.$$

Da $q(a_\nu)(\rho^*)^{|\nu|} \leqq \|f\|_{\rho^* q}$, folgt

$$\sum_\nu q(a_\nu)\,\|g^\nu\|_{r' q} \leqq \|f\|_{\rho^* q}\,\lambda\left(\frac{M}{\rho''}\right)^{nN} \sum_\nu \left(\frac{\rho''}{\rho^*}\right)^{|\nu|} < \infty .$$

Lemma 2.7. *Sei* $(S, \mathcal{O}_S)$ *ein* m*FB-Raum,* $P \subset \mathbb{C}^m$ *offen und* $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(P \times S, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m \times S})$.

Behauptung. Es gibt genau einen m*FB-Morphismus*

$$\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)\colon\ (P \times S, \mathcal{O}_{P \times S}) \to (\mathbb{C}^n \times S, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S})$$

über $(S, \mathcal{O}_S)$ *mit* $\varphi_1(t_k) = f_k$, $1 \leqq k \leqq n$.

Beweis. a) Definition von φ_0: Durch $\varphi_0(z, s) := (f_1(z, s), \ldots, f_n(z, s); s)$ wird nach Corollar 2.5 eine stetige Abbildung $\varphi_0\colon P \times S \to \mathbb{C}^n \times S$ über S gegeben.

b) Definition von φ_1: Sei $(z, s) \in P \times S$ und $\varphi_0(z, s) = (w, s)$. Zunächst konstruieren wir zu jedem Polyzylinder $D(w, \rho) \subset \mathbb{C}^n$ und jeder offenen Umgebung S' von s einen Polyzylinder $D(z, r) \subset P$ und eine offene Umgebung S'' von s mit

$$\varphi_0^{-1}(D(w, \rho) \times S') \supset D(z, r) \times S''$$

und einen stetigen Algebrahomomorphismus

$$\Gamma(D(w, \rho) \times S', \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S}) \to \Gamma(D(z, r) \times S'', \mathcal{O}_{P \times S}).$$

Nach Lemma 2.4 läßt sich ein $r > 0$, eine offene Umgebung S'' von s und eine m-beschränkte Menge $B \subset \Gamma(D(z, r) \times S'', \mathcal{O}_{P \times S})$ so finden, daß

$$\|f_k - w_k\|_B^{\mathrm{sp}} < \rho$$

für $1 \leqq k \leqq n$.

Für $h \in \Gamma(D(w, \rho) \times S', \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S})$ mit $h = \sum_\nu c_\nu (t - w)^\nu$ wird

$$\varphi_1(h) = \sum_\nu c_\nu (f - w)^\nu$$

gesetzt. Nach (2.6) ist damit

$$\Gamma(D(w, \rho) \times S', \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S}) \to \Gamma(D(z, r) \times S'', \mathcal{O}_{P \times S})$$

wohldefiniert. Daß sich diese Abbildungen zu einem Morphismus

$$\varphi_1\colon\ \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times S} \to \varphi_{0*}(\mathcal{O}_{P \times S})$$

zusammenfügen, zeigt man wie im klassischen Fall durch Umordnen von Potenzreihen und Majorantenkalkül.

Proposition 2.8 (Fortsetzungssatz). *Sei* $\pi\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (S, \mathcal{O}_S)$ *ein Morphismus von* mFB*-Räumen,* P *eine offene Teilmenge von* $\mathbb{C}^n$ *und* Q *eine offene Teilmenge von* $\mathbb{C}^m$*. Weiter sei* $i\colon X \to P \times S$ *eine abgeschlossene Einbettung über* S *und* $\varphi\colon X \to Q \times S$ *ein Morphismus über* S.

Behauptung. Zu jedem $(z, s) \in P \times S$ *gibt es eine offene Umgebung* U *von* (z, s) *und einen Morphismus* $\Phi\colon U \to Q \times S$ *über* S*, so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} X \supset X' \arrow[rr, "i|X'"] \arrow[dr, "\varphi|X'"'] & & U \subset P \times S \arrow[dl, "\Phi"] \\ & Q \times S & \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei $X' = i^{-1}(U)$ *gesetzt wurde.*

Beweis. Seien $t_1, \ldots, t_m$ die kanonischen Koordinatenfunktionen des $\mathbb{C}^m$.

Es gibt eine offene Umgebung U von (z, s) und Schnitte $f_1, \ldots, f_m \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{P \times S})$, so daß $i_1(f_k) = \varphi_1(t_k)$ für $1 \leqq k \leqq m$. Nach (2.7) existiert ein $\Phi\colon U \to Q \times S$ mit $\Phi_1(t_k) = f_k$. Dieses Φ hat die gewünschten Eigenschaften.

§ 3. Relativ-analytische Räume und relative Pseudokohärenz

Definition. Ein Morphismus $\pi\colon X \to S$ von mFB-Räumen heißt *relativ-analytischer Raum über* S, wenn gilt:

Zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U von x, eine offene Umgebung S' von $\pi(x)$ mit $\pi(U) \subset S'$, einen Polyzylinder D in einem $\mathbb{C}^n$ und eine abgeschlossene Einbettung

$$j\colon\ U \to D \times S'$$

über S' (d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "\pi|U"'] & & D \times S' \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{S'}"] \\ & S' & \end{tikzcd}$$

ist kommutativ).

$j\colon U \to D \times S'$ heißt *relative Karte* in x.

Ein Morphismus zweier relativ-analytischer Räume $\pi\colon X \to S$ und $\pi'\colon X' \to S$ ist ein mFB-Morphismus $\varphi\colon X \to X'$ über S.

Bemerkung. Die Fasern eines relativ-analytischen Raumes sind im allgemeinen keine komplexen Räume, selbst wenn die Basis S ein komplexer Raum ist.

Lemma 3.1. *Sei π: $X \to S$ ein relativ-analytischer Raum und seien $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ vorgegeben.*

Behauptung. Es gibt genau einen Morphismus

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{C}^n \times S \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

über S mit $\varphi_1(t_k) = f_k$ für $1 \leqq k \leqq n$, wobei $t_1, \ldots, t_n$ die kanonischen Koordinaten des $\mathbb{C}^n$ bezeichnen.

Beweis. Die φ unterliegende stetige Abbildung φ_0 wird durch

$$\begin{aligned} &X \to \mathbb{C}^n \times S \\ &x \mapsto \big(f_1(x), \ldots, f_n(x);\ \pi(x)\big) \end{aligned}$$

definiert.

Man sieht, daß die Lösung des Problems eindeutig ist. Wir können uns also auf die lokale Konstruktion von φ beschränken.

Sei $x \in X$ und j: $U \to D \times S'$ eine relative Karte in x. Nach eventueller Verkleinerung dürfen wir annehmen, daß es Schnitte $g_1, \ldots, g_n \in \Gamma(D \times S', \mathcal{O}_{D \times S'})$ gibt mit

$$j_1(g_k) = f_k \qquad \text{für } 1 \leqq k \leqq n.$$

Nach Lemma 2.7 folgt die Existenz eines Morphismus

$$\psi\colon\ D \times S' \to \mathbb{C}^n \times S'$$

über S' mit

$$\psi_1(t_k) = g_k.$$

Die Komposition

$$\psi \circ j\colon\ U \to \mathbb{C}^n \times S'$$

ist ein Morphismus über S' mit

$$(\psi \circ j)_1(t_k) = f_k, \qquad 1 \leqq k \leqq n.$$

Bemerkung. Lemma 3.1 bedeutet, daß der Funktor auf der Kategorie der relativ-analytischen Räume über S, der dem relativ-analytischen Raum $X \to S$ die Menge $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n$ zuordnet, durch den Raum $\mathbb{C}^n \times S \to S$ darstellbar ist.

Corollar 3.2 (Faserprodukt von relativen Karten). *Sei $\pi\colon X \to S$ ein relativ-analytischer Raum und seien*

$$j_l\colon U_l \to D_l \times S', \qquad l = 1, \ldots, k$$

relative Karten in $x \in X$.

Behauptung. Es gibt (genau) eine relative Karte

$$j\colon \bigcap_{l=1}^{k} U_l \to \left(\prod_{l=1}^{k} D_l\right) \times S',$$

so daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd} \bigcap_{l=1}^{k} U_l \arrow[r, "j"] \arrow[d, hook] & \left(\prod_{l=1}^{k} D_l\right) \times S' \arrow[d, "\mathrm{pr}_l"] \\ U_l \arrow[r, "j_l"] & D_l \times S' \end{tikzcd}$$

für $l = 1, \ldots, k$ kommutieren.

Beweis. Aus (3.1) folgt, daß $(\prod D_l) \times S'$ das Produkt der $D_l \times S'$, $l = 1, \ldots, k$, in der Kategorie der relativ-analytischen Räume über S' ist. Also existiert genau ein Morphismus

$$j\colon \bigcap U_l \to (\prod D_l) \times S',$$

der obige Diagramme kommutativ macht. Man rechnet leicht nach, daß j eine abgeschlossene Einbettung ist.

Bezeichnung. Zwei relative Karten $j_k\colon U_k \to D_k \times S'$ in $x \in X$ heißen lokal isomorph, wenn es offene Umgebungen W_k von $j_k(x)$ und einen Isomorphismus $\Phi\colon W_1 \to W_2$ über S' gibt, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & W_1 \arrow[dd, "\Phi"] \\ U \arrow[ur, "j_1|U"] \arrow[dr, "j_2|U"'] & \\ & W_2 \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Dabei ist $U = j_1^{-1}(W_1) = j_2^{-1}(W_2)$.

Lemma 3.3. *Sei $X \to S$ ein relativ-analytischer Raum, x ein Punkt von X, und seien $i\colon U \to D \times S'$ und $j\colon V \to E \times S'$ relative Karten in x mit $i(x) = (z, s)$ und $j(x) = (w, s)$. Mit*

$$\kappa\colon D \times S' \to D \times E \times S'$$

bzw.

$$\lambda\colon E \times S' \to D \times E \times S'$$

bezeichnen wir die abgeschlossenen Einbettungen, die $D\times S'$ auf den Unterraum $D\times\{w\}\times S'$ bzw. $E\times S'$ auf den Unterraum $\{z\}\times E\times S'$ von $D\times E\times S'$ abbilden.

Dann sind die relativen Karten

$$\kappa\circ i\colon\ U\to D\times E\times S'$$

und

$$\lambda\circ j\colon\ V\to D\times E\times S'$$

lokal isomorph.

Beweis. Sei $D\subset\mathbb{C}^n$ und $E\subset\mathbb{C}^m$. $t_1,\dots,t_n$ bzw. $t'_1,\dots,t'_m$ seien die kanonischen Koordinaten von $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{C}^m$.

Wir betrachten das Faserprodukt

$$\iota=i\times_{S'}j\colon\ U\cap V\to D\times E\times S'$$

der relativen Karten i und j.

Nach eventueller Verkleinerung der Karten dürfen wir annehmen, daß es Schnitte $G_1,\dots,G_m\in\Gamma(D\times S',\mathcal{O}_{D\times S'})$ gibt, so daß

$$i_1(G_l)=\iota_1(t'_l)\qquad\text{für } 1\leqq l\leqq m.$$

Die Zuordnung

$$\begin{aligned} t_k&\mapsto t_k, && 1\leqq k\leqq n\\ t'_l&\mapsto t'_l+G_l, && 1\leqq l\leqq m\end{aligned}$$

liefert nach (3.1) einen Morphismus φ einer offenen Umgebung W von (z,w,s) in $D\times E\times S$ mit $\varphi_0(z,w,s)=(z,w,s)$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "i"] & D\times S' \arrow[r, "\kappa"] & D\times E\times S' \\
 & & W \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[d, "\varphi"] \\
U\cap V \arrow[uu, hook] \arrow[rr, "\iota"] & & D\times E\times S'
\end{tikzcd}$$

Man rechnet leicht nach, daß φ ein lokaler Isomorphismus zwischen den Karten $\kappa\circ i$ und ι ist. Ebenso gibt es einen lokalen Isomorphismus zwischen $\lambda\circ j$ und ι.

Lemma 3.4. *Sei $(X,\mathcal{O}_X)$ ein mFB-Raum und*

$$\kappa\colon\ X\to\mathbb{C}^n\times X$$

die abgeschlossene Einbettung, die X auf den Unterraum $\{0\}\times X$ abbildet.

Behauptung. Ein Komplex $\mathscr{F}^\bullet$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln ist genau dann pseudokohärent, wenn $\kappa_* \mathscr{F}^\bullet$ pseudokohärent auf $\mathbb{C}^n \times X$ ist.

Beweis. Nach § 0.4 genügt es, zu zeigen, daß $\kappa_* \mathcal{O}_X$ pseudokohärent ist. Außerdem braucht nur der Fall $n=1$ behandelt zu werden. Bezeichnet $\varphi\colon \mathcal{O}_{\mathbb{C}\times X} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}\times X}$ die Multiplikation mit der kanonischen Koordinatenfunktion t von $\mathbb{C}$, so hat man eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}\times X} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_{\mathbb{C}\times X} \to \kappa_* \mathcal{O}_X \to 0,$$

d.h. $\kappa_* \mathcal{O}_X$ ist pseudokohärent.

Definition. Sei $\pi\colon X \to S$ ein relativ-analytischer Raum. Ein Komplex $\mathscr{F}^\bullet$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln heißt pseudokohärent relativ S, wenn für jede relative Karte $j\colon U \to D \times S'$ der Komplex $j_*(\mathscr{F}^\bullet)$ pseudokohärent auf $D \times S'$ ist.

Die folgende Proposition zeigt, daß man die relative Pseudokohärenz von $\mathscr{F}^\bullet$ nur bezüglich einer Überdeckung von X durch relative Karten zu fordern braucht.

Proposition 3.5. *Sei $X \to S$ ein relativ-analytischer Raum und $\mathscr{F}^\bullet$ ein Komplex von $\mathcal{O}_X$-Moduln. $i\colon U \to D \times S'$ und $j\colon V \to E \times S'$ seien relative Karten in $x \in X$ mit $V \subset U$.*

Behauptung. Ist $i_*(\mathscr{F}^\bullet)$ pseudokohärent, so auch $j_*(\mathscr{F}^\bullet)$.

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Lemmata 3.3 und 3.4.

Kapitel II. Pseudokohärenz von Bildgarbenkomplexen

In diesem Kapitel werden Projektionssätze für relativ-analytische Räume, die eigentlich über ihrem Parameterraum liegen, bewiesen. Dazu wird über relativen Atlanten eine freie Auflösung eines gegebenen relativ-pseudokohärenten Garbenkomplexes durch freie verbundene Garbensysteme konstruiert (§ 4), deren Čechkomplex sich als isomorph zum Bildgarbenkomplex erweist (§ 5). Da die Komponenten eines relativ-pseudokohärenten Garbenkomplexes nicht einmal vom endlichen Typ zu sein brauchen, muß bei der Konstruktion der freien Auflösung der Atlas bei jedem Schritt verfeinert werden. Dies erfordert eine ziemlich komplizierte Technik; die Schwierigkeiten sind hier die nämlichen, wie sie bei der Konstruktion der Grauertschen Meßüberdeckungen auftreten [5]. In den Paragraphen 6 und 7 wird ähnlich wie in [3] auf einfache Weise durch Induktion die Pseudokohärenz des konstruierten Čechkomplexes nachgewiesen. In § 8 wird nach dem Bildgarbensatz für relativ-pseudokohärente Komplexe noch bewiesen, daß der Bildgarbenkomplex eines relativ-perfekten Komplexes perfekt ist.

§ 4. *Atlanten und Auflösungen*

1. Verbundene Garbensysteme

Sei A eine sehr kleine Kategorie, d.h. es gebe nur endlich viele Morphismen. Für Objekte α, β aus A bezeichne $[\alpha, \beta]$ die Menge der Morphismen von α nach β.

Gegeben sei ein kontravarianter Funktor $\mathfrak{X}$ von A in die Kategorie der geringten Räume, d.h. jedem Objekt $\alpha \in A$ ist ein geringter Raum X_α und jedem $\omega \in [\alpha, \beta]$ ein Morphismus

$$\pi_\omega\colon X_\beta \to X_\alpha$$

zugeordnet, so daß gilt

$$\pi_{\mathrm{id}_\alpha} = \mathrm{id}_{X_\alpha}$$

und

$$\pi_\omega \pi_{\omega'} = \pi_{\omega' \omega} \quad \text{für } \omega \in [\alpha, \beta], \omega' \in [\beta, \gamma].$$

In dieser Situation schreiben wir auch $\mathfrak{X} = (X_\alpha, \pi_\omega)$ und nennen $\mathfrak{X}$ einen *abstrakten Atlas* über A.

Ein *verbundenes Garbensystem* $\mathscr{G} = (\mathscr{G}_\alpha, \psi_\omega)$ über $\mathfrak{X}$ besteht aus

i) einer Familie $(\mathscr{G}_\alpha)$ von $\mathcal{O}_{X_\alpha}$-Moduln und

ii) einer Familie (ψ_ω), wobei für jedes $\omega \in [\alpha, \beta]$

$$\psi_\omega\colon \mathscr{G}_\alpha \to (\pi_\omega)_* \mathscr{G}_\beta$$

ein $\mathcal{O}_{X_\alpha}$-Modulhomomorphismus ist, so daß gilt

$$\psi_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$$

und

$$\psi_{\omega' \omega} = \big((\pi_\omega)_* \psi_{\omega'}\big) \circ \psi_\omega$$

für $\omega \in [\alpha, \beta]$ und $\omega' \in [\beta, \gamma]$.

Seien $\mathscr{G} = (\mathscr{G}_\alpha, \psi_\omega)$ und $\mathscr{H} = (\mathscr{H}_\alpha, \chi_\omega)$ zwei verbundene Garbensysteme über $\mathfrak{X}$. Ein Morphismus $\theta\colon \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ ist eine Familie von $\mathcal{O}_{X_\alpha}$-Modulhomomorphismen

$$\theta_\alpha\colon \mathscr{G}_\alpha \to \mathscr{H}_\alpha,$$

die mit den Morphismen ψ_ω und χ_ω verträglich ist.

Bemerkung. Die Kategorie der verbundenen Garbensysteme über $\mathfrak{X}$ ist abelsch.

Hilfssatz 4.1. *Sei $\mathscr{G} = (\mathscr{G}_\alpha, \psi_\omega)$ ein verbundenes Garbensystem über $\mathfrak{X} = (X_\alpha, \pi_\omega)$. Zu jedem $\alpha \in A$ sei ein Morphismus*

$$\varepsilon_\alpha\colon \mathscr{S}_\alpha \to \mathscr{G}_\alpha$$

gegeben, wobei $\mathscr{S}_\alpha$ ein freier $\mathcal{O}_{X_\alpha}$-Modul endlichen Ranges ist.

Behauptung. Es gibt ein verbundenes System $\mathcal{R}=(\mathcal{R}_\alpha, \varphi_\omega)$ *freier* $\mathcal{O}_{X_\alpha}$*-Moduln* $\mathcal{R}_\alpha$ *endlichen Ranges und einen Morphismus*

$$\theta: \mathcal{R} \to \mathcal{G}$$

mit $\operatorname{im}\theta_\alpha \supset \operatorname{im}\varepsilon_\alpha$ *für alle* $\alpha \in A$.

Bezeichnung. Ein verbundenes Garbensystem $\mathcal{R}=(\mathcal{R}_\alpha, \varphi_\omega)$, wobei alle $\mathcal{R}_\alpha$ freie $\mathcal{O}_{X_\alpha}$-Moduln endlichen Ranges sind, nennen wir kurz freies verbundenes Garbensystem endlichen Ranges.

Beweis. Für jedes $\gamma \in A$ definieren wir ein verbundenes Garbensystem $\mathcal{R}^\gamma=(\mathcal{R}^\gamma_\alpha, \varphi^\gamma_\omega)$ wie folgt:

$$\mathcal{R}^\gamma_\alpha = \coprod_{\sigma\in[\gamma,\alpha]} \pi^*_\sigma \mathcal{S}_\gamma.$$

Offensichtlich ist $\mathcal{R}^\gamma_\alpha$ ein freier $\mathcal{O}_{X_\alpha}$-Modul endlichen Ranges.

Sei $\omega \in [\alpha, \beta]$ und $\sigma \in [\gamma, \alpha]$. Der identischen Abbildung

$$\pi^*_{\omega\sigma} \mathcal{S}_\gamma = \pi^*_\omega \pi^*_\sigma \mathcal{S}_\gamma \to \pi^*_{\omega\sigma} \mathcal{S}_\gamma$$

ist durch Adjunktion ein Morphismus

$$\pi^*_\sigma \mathcal{S}_\gamma \to (\pi_\omega)_* \pi^*_{\omega\sigma} \mathcal{S}_\gamma$$

zugeordnet, der einen Morphismus

$$\pi^*_\sigma \mathcal{S}_\gamma \to (\pi_\omega)_* \coprod_{\tau\in[\gamma,\beta]} \pi^*_\tau \mathcal{S}_\gamma = (\pi_\omega)_* \mathcal{R}^\gamma_\beta$$

liefert. Dies wiederum erzeugt einen Morphismus

$$\varphi^\gamma_\alpha: \mathcal{R}^\gamma_\alpha = \coprod_{\sigma\in[\gamma,\alpha]} \pi^*_\sigma \mathcal{S}_\gamma \to (\pi_\omega)_* \mathcal{R}^\gamma_\beta.$$

Damit ist das verbundene Garbensystem $\mathcal{R}^\gamma=(\mathcal{R}^\gamma_\alpha, \varphi^\gamma_\alpha)$ konstruiert.

Der Morphismus ε_γ induziert in natürlicher Weise einen Morphismus

$$\theta^\gamma: \mathcal{R}^\gamma \to \mathcal{G}$$

verbundener Garbensysteme. Wir setzen jetzt

$$\mathcal{R} = \coprod_{\gamma\in A} \mathcal{R}^\gamma$$

und definieren

$$\theta: \mathcal{R} \to \mathcal{G}$$

als die Summe der θ^γ. Offensichtlich gilt

$$\operatorname{im}\theta_\alpha \supset \operatorname{im}\varepsilon_\alpha \quad \text{für alle } \alpha \in A.$$

2. Konstruktion eines Hauptatlas

Sei $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein mFB-Raum und $\pi\colon X \to Y$ ein relativ-analytischer Raum, der eigentlich über Y liegt. Weiter sei $s_0 \in Y$ ein beliebig vorgegebener Punkt. Da π eigentlich ist, gibt es eine offene Umgebung S_* von s_0 und endliche viele relative Karten

$$j_k\colon U_k \to E_k \times S_*, \qquad 1 \leqq k \leqq k_*$$

mit

$$\bigcup_{k=1}^{k_*} U_k = \pi^{-1}(S_*) =: X(S_*).$$

Dabei sind die E_k offene Einheitspolyzylinder in einem $\mathbb{C}^{m(k)}$. Nach eventueller Verkleinerung von S_* dürfen wir annehmen, daß es kompakte Polyzylinder $Q^k \subset E_k$ gibt mit

$$\bigcup_{k=1}^{k_*} j_k^{-1}(Q_k \times S_*) = X(S_*).$$

Wir setzen

$$M = \max_k m(k),$$

$$A_0 = \{1, 2, \ldots, k_*\},$$

$$A_n = \begin{cases} A_0^{n+1} & \text{für } n \leqq 3^M k_* \\ \emptyset & \text{für } n > 3^M k_*, \end{cases}$$

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Seien $\alpha = (k_0, \ldots, k_n) \in A_n$ und $\beta = (l_0, \ldots, l_m) \in A_m$. Mit $[\alpha, \beta]$ bezeichnen wir die Menge aller injektiven Abbildungen

$$\omega\colon \{0, 1, \ldots, n\} \to \{0, 1, \ldots, m\}$$

mit

$$k_i = l_{\omega(i)} \qquad \text{für } 0 \leqq i \leqq n.$$

Faßt man $[\alpha, \beta]$ als Menge der Morphismen von α nach β mit den naheliegenden Kompositionen auf, so wird dadurch A zu einer (sehr kleinen) Kategorie.

Für $\alpha = (k_0, \ldots, k_n) \in A$ definieren wir

$$U_\alpha = \bigcap_{i=0}^{n} U_{k_i},$$

$$E_\alpha = \prod_{i=0}^{n} E_{k_i},$$

$$Q_\alpha = \prod_{i=0}^{n} Q_{k_i}.$$

Das Faserprodukt der j_{k_l} liefert eine abgeschlossene Einbettung

$$j_\alpha\colon U_\alpha \to E_\alpha \times S_*.$$

Für $\omega \in [\alpha, \beta]$ sei

$$\pi_\omega\colon E_\beta \times S_* \to E_\alpha \times S_*$$

die durch ω induzierte Projektion. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U_\beta \arrow[r, hook] \arrow[d, "j_\beta"'] & U^\alpha \arrow[d, "j_\alpha"] \\ E_\beta \times S_* \arrow[r, "\pi_\omega"] & E_\alpha \times S_* \end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

Damit haben wir einen durchschnittsstabilen Atlas

$$\left(U_\alpha \xrightarrow{j_\alpha} E_\alpha \times S_*, \pi_\omega\right)$$

konstruiert. $\mathfrak{A}_* = (E_\alpha \times S_*, \pi_\omega)$ ist ein abstrakter Atlas im Sinne des vorigen Abschnitts.

Bemerkung. Jeder $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ induziert in natürlicher Weise ein verbundenes Garbensystem $j_* \mathcal{F}$ über $\mathfrak{A}_*$.

3. Verfeinerungen des Hauptatlas

Sei B_0 eine endliche Menge, $\tau\colon B_0 \to A_0$ eine Abbildung und r eine reelle Zahl >0.

$(D_l)_{l \in B_0}$ sei eine Familie von Polyzylindern mit folgenden Eigenschaften:

i) Für $l \in B(k) := \tau^{-1}(k)$ ist D_l ein offener, gleichseitiger Polyzylinder vom Radius r in E_k.

ii) $\bigcup\limits_{l \in B(k)} D_l \supset Q_k$.

iii) Ist $n > 3^M$ und sind $l_1, \ldots, l_n \in B(k)$ paarweise voneinander verschieden, so gilt

$$D_{l_1} \cap \cdots \cap D_{l_n} = \emptyset.$$

Wir nennen $((D_l)_{l \in B_0}, \tau)$ einen *auf* $\mathfrak{A}_*$ *bezogenen Präatlas.*

Ein weiterer auf $\mathfrak{A}_*$ bezogener Präatlas $((D'_l)_{l \in B'_0}, \tau')$ heißt Verfeinerung von $((D_l)_{l \in B_0}, \tau)$, wenn es eine Abbildung

$$\sigma\colon B'_0 \to B_0$$

gibt mit

i) $\tau \circ \sigma = \tau'$.

ii) $D'_l \subset D_{\sigma(l)}$ für alle $l \in B_0$.

Ein auf $\mathfrak{A}_*$ bezogener Präatlas $((D_l)_{l \in B_0}, \tau)$ kann wie folgt zu einem Atlas ergänzt werden. Sei

$$B_n = \begin{cases} B_0^{n+1} & \text{für } n \leqq 3^M k_* \\ \emptyset & \text{für } n > 3^M k_*, \end{cases}$$

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Für $\beta = (l_0, \ldots, l_n) \in B$ ist

$$D_\beta := \prod_{i=0}^{n} D_{l_i}$$

eine offene Teilmenge von $E_{\tau\beta}$. Für $\beta, \beta' \in B$ sei $[\beta, \beta']$ wie oben definiert. Es gilt $[\beta, \beta'] \subset [\tau\beta, \tau\beta']$. Für $\omega \in [\beta, \beta']$ induziert die Projektion

$$\pi_\omega \colon E_{\tau\beta'} \times S_* \to E_{\tau\beta} \times S_*$$

durch Beschränkung für jede offene Teilmenge $S \subset S_*$ eine Projektion

$$\bar{\pi}_\omega \colon D_{\beta'} \times S \to D_\beta \times S.$$

Für $\beta \in B$ setzen wir

$$V_\beta(S) = j_{\tau\beta}^{-1}(D_\beta \times S).$$

Die Einschränkung von $j_{\tau\beta}$ liefert eine abgeschlossene Einbettung

$$\bar{j}_\beta \colon V_\beta(S) \to D_\beta \times S.$$

$\mathfrak{A}(S) = (D_\beta \times S, \bar{\pi}_\omega)$ ist der dem Präatlas $((D_l)_{l \in B_0}, \tau)$ über S zugeordnete abstrakte Atlas.

Ist $\mathfrak{A}'(S')$ der einer Verfeinerung $((D'_l)_{l \in B'_0}, \tau)$ von $((D_l)_{l \in B_0}, \tau)$ über $S' \subset S$ zugeordnete abstrakte Atlas, so induziert jedes verbundene Garbensystem auf $\mathfrak{A}(S)$ durch Beschränkung ein verbundenes Garbensystem auf $\mathfrak{A}'(S')$.

Für die Konstruktion von Verfeinerungen wird uns später folgender Hilfssatz nützlich sein.

Hilfssatz 4.2. *Sei Q ein kompakter Polyzylinder im $\mathbb{C}^M$ und $(W_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen des $\mathbb{C}^M$ mit*

$$Q \subset \bigcup_{i \in I} W_i.$$

Behauptung. Es gibt ein $\varepsilon>0$ und zu jedem $0<r\leqq\varepsilon$ eine endliche Familie $(D_l)_{l\in L}$ gleichseitiger offener Polyzylinder mit Radius r mit folgenden Eigenschaften:

i) $Q\subset\bigcup_{l\in L} D_l$.

ii) *Zu jedem $l\in L$ existiert ein $i\in I$ mit*

$$D_l\subset W_i.$$

iii) *Je 3^M+1 paarweise voneinander verschiedene Polyzylinder der Familie $(D_l)_{l\in L}$ haben einen leeren Durchschnitt.*

Auf den Beweis, der selbstverständlich nur für den Fall erbracht werden muß, daß $M=1$ ist, sei hier verzichtet.

4. Konstruktion einer freien Auflösung

Sei $\pi\colon X\to S_*$ ein relativ-analytischer Raum, der eigentlich über S_* liegt, versehen mit dem oben konstruierten Atlas $\mathfrak{A}_*$. Auf X sei ein nach unten beschränkter, relativ pseudokohärenter Komplex $\mathscr{F}^\bullet$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln gegeben. Es gelte $H^l(\mathscr{F}^\bullet)=0$ für $l>N_*$.

Lemma $R(n)$. *Zu jedem $s_0\in S_*$ gibt es eine offene Umgebung S von s_0, einen auf $\mathfrak{A}_*$ bezogenen Atlas $\mathfrak{A}(S)$, einen Komplex*

$$\mathscr{R}^\bullet\colon \to 0\to\mathscr{R}^n\to\mathscr{R}^{n+1}\to\cdots\to\mathscr{R}^{N_*}\to 0\to$$

freier verbundener Garbensysteme endlichen Ranges über $\mathfrak{A}(S)$ und einen n-Quasiisomorphismus

$$\mathscr{R}^\bullet\to j_*\mathscr{F}^\bullet$$

über $\mathfrak{A}(S)$.

Beweis durch absteigende Induktion nach n. Für $n>N_*$ ist $R(n)$ trivial.

$R(n)\Rightarrow R(n-1)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist bezüglich eines Atlas $\mathfrak{A}(S)$ ein n-Quasiisomorphismus $\mathscr{R}^\bullet\to j_*\mathscr{F}^\bullet$ gegeben. Der Atlas $\mathfrak{A}(S)=((D_\beta\times S)_{\beta\in B},\bar{\pi}_\omega)$ sei vermöge $\tau\colon B_0\to A_0$ auf $\mathfrak{A}_*=((E_\alpha\times S_*)_{\alpha\in A},\pi_\omega)$ bezogen.

Wir setzen

$$\mathscr{K}^\bullet=\mathrm{Kegel}(\mathscr{R}^\bullet\to j_*\mathscr{F}^\bullet).$$

Da $\mathscr{R}^\bullet\to j_*\mathscr{F}^\bullet$ ein n-Quasiisomorphismus ist, ist für jedes $\beta\in B$ die Garbe $H^{n-1}(\mathscr{K}_\beta^\bullet)$ ein $\mathcal{O}_{D_\beta\times S}$-Modul von endlichem Typ. Deshalb gibt es für jedes $\beta\in B$ eine Familie $(W_{\beta i})_{i\in I(\beta)}$ offener Mengen in $D_\beta\times S$ mit folgenden Eigenschaften:

i) Es gibt einen freien $\mathcal{O}_{W_{\beta i}}$-Modul $\mathcal{S}_{\beta i}$ endlichen Ranges sowie einen Morphismus
$$\mathcal{S}_{\beta i} \to Z^{n-1}(\mathcal{K}_\beta^\bullet) | W_{\beta i},$$
der einen Epimorphismus
$$\mathcal{S}_{\beta i} \to H^{n-1}(\mathcal{K}_\beta^\bullet) | W_{\beta i}$$
induziert.

ii) Für jedes $\alpha \in A$ gilt
$$\bigcup_{i \in I(\beta)} W_{\beta i} = D_\beta \times S.$$

Nach dem Lebesgueschen Lemma und Hilfssatz 4.2 gibt es eine offene Umgebung S' von s_0, einen Präatlas $\left((D_l')_{l \in B_0'}, \tau'\right)$ und eine Abbildung $\sigma: B_0' \to B_0$ mit $\tau \sigma = \tau'$, so daß zu jedem $\gamma \in B'$ wenigstens ein $i \in I(\sigma \gamma)$ existiert mit
$$D_\gamma' \times S' \subset W_{\sigma \gamma, i}.$$

Sei $\mathfrak{A}'(S') = (D_\gamma' \times S', \pi_\omega')$ der dem Präatlas $\left((D_l'), \tau'\right)$ zugeordnete Atlas. Nach dem Gesagten gibt es ein freies unverbundenes Garbensystem $\mathcal{S}' = (\mathcal{S}_\gamma')$ endlichen Ranges auf $\mathfrak{A}'(S')$ und Morphismen
$$\mathcal{S}_\gamma' \to Z^{n-1}(\mathcal{K}_{\sigma\gamma}^\bullet | D_\gamma' \times S'),$$
die Epimorphismen
$$\mathcal{S}_\gamma' \to H^{n-1}(\mathcal{K}_{\sigma\gamma}^\bullet | D_\gamma' \times S')$$
induzieren. Nach Hilfssatz 4.1 gibt es ein freies verbundenes Garbensystem $\mathcal{R}^{n-1}$ endlichen Ranges auf $\mathfrak{A}'(S')$ und einen Morphismus
$$\mathcal{R}^{n-1} \to Z^{n-1}\left(\mathcal{K}^\bullet | \mathfrak{A}'(S')\right)$$
verbundener Garbensysteme, der einen Epimorphismus
$$\mathcal{R}^{n-1} \to H^{n-1}\left(\mathcal{K}^\bullet | \mathfrak{A}'(S')\right)$$
induziert. Daraus folgt $R(n-1)$.

§ 5. *Berechnung des Bildgarbenkomplexes*

Sei wie bisher $\pi: X \to S_*$ ein relativ-analytischer Raum, der eigentlich über S_* liegt, und $\mathcal{F}^\bullet$ ein relativ-pseudokohärenter Komplex von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Es gelte $\mathcal{F}^l = 0$ für $l < n_*$ und $H^l(\mathcal{F}^\bullet) = 0$ für $l > N_*$. Sei s_0 ein beliebiger Punkt aus S_* und n_0 eine ganze Zahl $< n_*$, über die später noch verfügt wird.

Nach Lemma $R(n_0)$ gibt es eine Umgebung S von s_0, einen Atlas

$$\big((V_\beta \xrightarrow{j_\beta} D_\beta \times S)_{\beta \in B}, \pi_\omega\big),$$

einen Komplex

$$\mathscr{R}^\bullet: \to 0 \to \mathscr{R}^{n_0} \to \mathscr{R}^{n_0+1} \to \cdots \to \mathscr{R}^{N_*} \to 0 \to$$

freier verbundener Garbensysteme endlichen Ranges über $(D_\beta \times S, \pi_\omega)$ und einen n_0-Quasiisomorphismus

$$\mathscr{R}^\bullet \to j_*(\mathscr{F}^\bullet).$$

Wir erinnern daran, daß

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

mit einer endlichen Menge B_0 und

$$B_n = \begin{cases} B_0^{n+1} & \text{für } n \leqq 3^M k_* \\ \emptyset & \text{für } n > 3^M k_*. \end{cases}$$

Für paarweise voneinander verschiedene

$$l_1, \ldots, l_n \in B_0$$

mit $n > 3^M k_*$ gilt

$$V_{l_1} \cap \cdots \cap V_{l_n} = \emptyset.$$

Die D_β sind gleichseitige Polyzylinder mit einem gemeinsamen Radius r_{**}. Nach eventueller Verkleinerung von S gibt es ein $r_* < r_{**}$, so daß für alle r mit $r_* \leqq r \leqq r_{**}$ gilt

$$\bigcup_{l \in B_0} j_l^{-1}(D_l(r) \times S) = \pi^{-1}(S).$$

Da es uns im folgenden nur auf eine kleine Umgebung von s_0 ankommt, dürfen wir annehmen, daß $S_* = S$ ist.

Wir ordnen B_0 total an und nennen die entstandene totalgeordnete Menge Δ_0. Wir setzen weiter

$$\Delta_n = \{(l_0, \ldots, l_n) \in \Delta_0^{n+1} : l_0 < \cdots < l_n\}$$

und

$$\Delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n.$$

Für $n \leqq 3^M k_*$ gilt $\Delta_n \subset B_n$. Sei $n > 3^M k_*$. Dann definieren wir für $\alpha = (l_0, \ldots, l_n) \in \Delta_n$ eine relative Karte

$$j_\alpha: V_\alpha \to D_\alpha \times S_*$$

als Faserprodukt der $j_{l_0}, \ldots, j_{l_n}$. Es ist dann $(j_\alpha)_* \mathscr{F}^\bullet = 0$. Sei

$$\alpha = (k_0, \ldots, k_n) \in \Delta \quad \text{und} \quad \beta = (l_0, \ldots, l_m) \in \Delta.$$

Wir setzen
$$\alpha \subset \beta \Leftrightarrow \{k_0, \ldots, k_n\} \subset \{l_0, \ldots, l_n\}.$$

Für $\alpha \subset \beta$ ist in kanonischer Weise eine Projektion
$$\pi_{\alpha\beta}\colon\ D_\beta \times S_* \to D_\alpha \times S_*$$
gegeben.

Für $\alpha \in \Delta_n$, $n > 3^M k_*$ setzen wir $\mathscr{R}^\bullet_\alpha = 0$. Dadurch erhalten wir aus dem Komplex $\mathscr{R}^\bullet$ auf $\big((D_\beta \times S_*)_{\beta\in B}, \pi_\omega\big)$ einen Komplex auf
$$\mathfrak{D} := \big((D_\alpha \times S_*)_{\alpha\in\Delta}, (\pi_{\alpha\beta})_{\alpha\subset\beta}\big),$$
den wir wieder mit $\mathscr{R}^\bullet$ bezeichnen, und einen n_0-Quasiisomorphismus
$$\mathscr{R}^\bullet \to j_* \mathscr{F}^\bullet \qquad \text{über } \mathfrak{D}.$$

Der Čechkomplex eines verbundenen Garbensystems

Für eine reelle Zahl r mit $r_* \leqq r \leqq r_{**}$ und eine offene Teilmenge $S \subset S_*$ bezeichnen wir mit
$$\mathfrak{D}(r, S) = \big((D_\alpha(r) \times S)_{\alpha\in\Delta}, (\pi_{\alpha\beta})_{\alpha\subset\beta}\big)$$
den durch $\mathfrak{D}$ induzierten Atlas.

Sei $\mathscr{G} = (\mathscr{G}_\alpha, \psi_{\beta\alpha})$ ein verbundenes Garbensystem über $\mathfrak{D}(r, S)$, wobei für $\alpha \subset \beta$
$$\psi_{\beta\alpha}\colon\ \mathscr{G}_\alpha \to (\pi_{\alpha\beta})_* \mathscr{G}_\beta$$
die verbindenden Morphismen sind.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei
$$C^n(r, S; \mathscr{G}) := \prod_{\alpha\in\Delta_n} \Gamma\big(D_\alpha(r) \times S, \mathscr{G}_\alpha\big).$$

$C^n(r, S; \mathscr{G})$ ist ein $\Gamma(S, \mathscr{O}_S)$-Modul. Wir definieren Ableitungen
$$\delta\colon\ C^n(r, S; \mathscr{G}) \to C^{n+1}(r, S; \mathscr{G})$$
wie folgt:

Sei $\xi = (\xi_\alpha)_{\alpha\in\Delta_n} \in C^n(r, S; \mathscr{G})$. Wir setzen
$$(\delta\xi)_\beta = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \psi_{\beta\beta_i}(\xi_{\beta_i})$$
für $\beta = (l_0, \ldots, l_{n+1}) \in \Delta_{n+1}$, wobei
$$\beta_i = (l_0, \ldots, l_{i-1}, l_{i+1}, \ldots, l_{n+1}) \in \Delta_n.$$

Ist $\mathscr{G}^\bullet$ ein Komplex verbundener Garbensysteme über $\big(D_\alpha(r) \times S, \pi_{\alpha\beta}\big)$, so ist $C^\bullet(r, S; \mathscr{G}^\bullet)$ ein Doppelkomplex mit den Komponenten
$$C^l(r, S; \mathscr{G}^k).$$

Der zugehörige Einfachkomplex $C^\bullet(r, S; \mathscr{G}^\bullet)_{\text{einf}}$ hat die Komponenten

$$C^\bullet(r, S; \mathscr{G}^\bullet)^n_{\text{einf}} = \prod_{l+k=n} C^l(r, S; \mathscr{G}^k).$$

Berechnung des Bildgarbenkomplexes

Von nun an setzen wir voraus, daß der Basisraum $(S_*, \mathcal{O}_{S_*})$ vom Typ (J) ist (vgl. § 1).

Wir erinnern an den Komplex

$$\mathscr{R}^\bullet: \to 0 \to \mathscr{R}^{n_0} \to \mathscr{R}^{n_0+1} \to \cdots \to \mathscr{R}^{N_*} \to 0 \to$$

und den n_0-Quasiisomorphismus

$$\mathscr{R}^\bullet \to j_* \mathscr{F}^\bullet.$$

Sei

$$d_* = 2M(3^M k_* + 1) + \dim S_*$$

(k_* und M wurden in § 4.2 definiert).

Dann gilt für jedes $\alpha \in \Delta$: Entweder ist die Lebesgue-Dimension von $D_\alpha \times S_*$ kleinergleich d_* oder es ist $\mathscr{R}^\bullet_\alpha = 0$. Wir nehmen an, daß wir n_0 so klein gewählt haben, daß

$$n_1 := n_0 + d_* + 1 < n_*.$$

Wir setzen

$$\mathscr{Z} = \ker(\mathscr{R}^{n_1} \to \mathscr{R}^{n_1+1})$$

und

$$\hat{\mathscr{R}}^\bullet: \to 0 \to \mathscr{Z} \to \mathscr{R}^{n_1} \to \cdots \to \mathscr{R}^{N_*} \to 0 \to .$$

Da $\mathscr{F}^l = 0$ für $l < n_*$ ist, erhalten wir einen Quasiisomorphismus

$$\hat{\mathscr{R}}^\bullet \to j_* \mathscr{F}^\bullet.$$

Da die Sequenz

$$\mathscr{R}^{n_0} \to \mathscr{R}^{n_0+1} \to \cdots \to \mathscr{R}^{n_0+d_*} \to \mathscr{Z} \to 0$$

exakt ist, folgt aus Hilfssatz 1.3, daß für jede reelle Zahl r mit $r_* \leqq r \leqq r_{**}$, jedes Steinsche $S \subset S_*$ und jedes $\alpha \in \Delta$ gilt:

$$H^n(D_\alpha(r) \times S, \mathscr{Z}_\alpha) = 0 \qquad \text{für } n \geqq 1.$$

Es gibt einen nach unten beschränkten Garbenkomplex $\mathscr{I}^\bullet$ von injektiven $\mathcal{O}_X$-Moduln und einen Quasiisomorphismus

$$\mathscr{F}^\bullet \to \mathscr{I}^\bullet.$$

Dann ist $\mathbf{R}\,\pi_* \mathscr{F}^\bullet$ quasiisomorph zu $\pi_*(\mathscr{I}^\bullet)$ (vgl. § 0.5).

Lemma 5.1. *Der Morphismus*

$$\hat{\mathscr{R}}^\bullet \to j_*(\mathscr{F}^\bullet) \to j_*(\mathscr{I}^\bullet)$$

induziert für jedes Steinsche $S \subset S_*$ *und jedes* r *mit* $r_* \leqq r \leqq r_{**}$ *einen Quasiisomorphismus*

$$C^\bullet(r, S; \hat{\mathscr{R}}^\bullet)_{\mathrm{einf}} \to C^\bullet(r, S; j_* \mathscr{I}^\bullet)_{\mathrm{einf}}.$$

Beweis. Wir betrachten die aus den Doppelkomplexen

$$E_0^{pq} = C^p(r, S; \hat{\mathscr{R}}^q)$$

und

$$\tilde{E}_0^{pq} = C^p(r, S; j_* \mathscr{I}^q)$$

entspringenden Spektralsequenzen $'E$ und $'\tilde{E}$. Es gilt

$$'E_1^{pq} = \prod_{\alpha \in \Delta_p} H^q\big(\Gamma(D_\alpha(r) \times S; \hat{\mathscr{R}}_\alpha^\bullet)\big)$$

und

$$'\tilde{E}_1^{pq} = \prod_{\alpha \in \Delta_p} H^q\big(\Gamma({}_\alpha(r) \times S; (j_\alpha)_* \mathscr{I}^\bullet)\big).$$

Jetzt folgt aus Théorème II.4.6.2. von Godement [4], daß

$$\Gamma\big(D_\alpha(r) \times S, \hat{\mathscr{R}}_\alpha^\bullet\big) \to \Gamma\big(D_\alpha(r) \times S, (j_\alpha)_* \mathscr{I}^\bullet\big)$$

ein Quasiisomorphismus ist, d.h.

$$'\tilde{E}_2^{pq} \cong {}'\tilde{E}_2^{pq}.$$

Da die obigen Spektralsequenzen regulär sind, folgt aus [4], Théorème I.4.3.1. die Behauptung.

Bezeichnungen. Wir setzen

$$C^\bullet(r, S) = C^\bullet(r, S; \hat{\mathscr{R}}^\bullet)_{\mathrm{einf}}$$

d.h.

$$C^n(r, S) = \prod_{l+k=n} C^l(r, S; \hat{\mathscr{R}}^k);$$

dabei ist $\hat{\mathscr{R}}^{n_1 - 1} = \mathscr{Z}$ und $\hat{\mathscr{R}}^k = \mathscr{R}^k$ für $k \geqq n_1$.

Den durch $S \mapsto C^\bullet(r, S)$ gegebenen Komplex von $\mathcal{O}_{S_*}$-Moduln bezeichnen wir mit $C^\bullet(r)$.

Jedes $C^n(r)$ ist in natürlicher Weise eine Fréchetgarbe; die Ableitungen $\delta\colon C^n(r) \to C^{n+1}(r)$ sind stetig.

Bemerkung 5.2. Da $C^l(r, S; \hat{\mathscr{R}}^\bullet) = 0$ für $l \geqq 3^M k_*$ und $\hat{\mathscr{R}}^k = 0$ für $k > N_*$, folgt:

i) $C^n(r, S)=0$ für $n \geqq 3^M k_* + N_*$.

ii) Für $n \geqq 3^M k_* + n_1 - 1$ ist $C^n(r, S)$ ein endliches Produkt von $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$-Moduln der Gestalt

$$\Gamma\big(D(r) \times S, \mathcal{O}_{D(r) \times S}\big).$$

Bemerkung 5.3. Für $r_* \leqq r \leqq r_{**}$ und jede offene Menge $S \subset S_*$ sei $\mathfrak{V}(r, S)$ die zu dem Atlas $\mathfrak{D}(r, S)$ gehörige Überdeckung von $X(S)$, d.h.

$$\mathfrak{V}(r, S) = \big(V_l(r, S)\big)_{l \in \Delta_0}$$

mit

$$V_l(r, S) = j_l^{-1}\big(D_l(r) \times S\big).$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$C^l\big(\mathfrak{V}(r, S), \mathcal{I}^k\big) = C^l(r, S; j_* \mathcal{I}^k).$$

Daher ist

$$C^\bullet(r, S; j_* \mathcal{I}^\bullet)_{\mathrm{einf}} \cong \Gamma\big(X(S), \mathcal{I}^\bullet\big),$$

d.h. der Garbenkomplex

$$S \mapsto C^\bullet(r, S; j_* \mathcal{I}^\bullet)_{\mathrm{einf}}$$

ist quasiisomorph zum Bildgarbenkomplex von $\mathcal{F}^\bullet$.

Corollar 5.4. *Für jedes r mit $r_* \leqq r \leqq r_{**}$ ist der Bildgarbenkomplex* $\mathbf{R}\pi_* \mathcal{F}^\bullet$ *zu $C^\bullet(r)$ quasiisomorph.*

Corollar 5.5. *Für jedes Paar r, r' mit $r_* \leqq r \leqq r_{**}$ und jedes Steinsche $S \subset S_*$ ist die Restriktion*

$$C^\bullet(r, S) \to C^\bullet(r', S)$$

ein Quasiisomorphismus.

§ 6. *Vorbereitung der Induktion*

1. Induktionsschema

Sei $\pi\colon X \to Y$ ein relativ-analytischer Raum, der eigentlich über dem mFB-Raum Y vom Typ(J) liegt. $\mathcal{F}^\bullet$ sei ein nach unten beschränkter, relativ Y pseudokohärenter Komplex von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Wir wollen beweisen, daß der Bildgarbenkomplex $\mathbf{R}\pi_* \mathcal{F}^\bullet$ pseudokohärent ist. Dazu ist zu zeigen: Zu vorgegebenem $s_0 \in Y$ und $N \in \mathbb{Z}$ gibt es eine Umgebung S von s_0, einen beschränkten Komplex freier $\mathcal{O}_S$-Moduln endlichen Ranges

$$\mathcal{L}^\bullet\colon \to 0 \to \mathcal{L}^N \to \mathcal{L}^{N+1} \to \cdots \to \mathcal{L}^{N'} \to 0 \to$$

und einen N-Quasiisomorphismus

$$\mathcal{L}^\bullet \to \mathbf{R}\pi_* \mathcal{F}^\bullet.$$

Wir fassen das Ergebnis unserer Konstruktionen aus den Paragraphen 4 und 5 zusammen:

In § 4 haben wir natürliche Zahlen k_* und M definiert, die nur von $\pi: X \to Y$ und $s_0 \in Y$ abhängen.

In § 5 haben wir dann zu beliebig vorgegebenem $n_0 \in \mathbb{Z}$ eine offene Umgebung S_* von s_0 sowie reelle Zahlen r_*, r_{**} mit $0 < r_* < r_{**}$ gefunden und zu jedem r mit $r_* \leqq r \leqq r_{**}$ einen Garbenkomplex $C^\bullet(r)$ und einen Quasiisomorphismus $C^\bullet(r) \to \mathbf{R}\pi_* \mathscr{F}^\bullet$ konstruiert.

Für offenes $S \subset S_*$ war dabei $C^\bullet(r, S)$ ein Komplex, für den gilt (vgl. Bemerkung 5.2).

i) $C^n(r, S) = 0$ für $n \geqq 3^M k_* + N_*$. Hier ist N_* eine ganze Zahl, so daß $H^l(\mathscr{F}^\bullet | X(S_*)) = 0$ für $l > N_*$.

ii) Für $n \geqq 3^M k_* + n_1 - 1$ ist $C^n(r, S)$ ein endliches Produkt von $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$-Moduln der Gestalt $\Gamma(D(r) \times S, \mathcal{O}_{D(r) \times S})$. Dabei ist

$$n_1 = n_0 + 2M(3^M k_* + 1) + \dim S_* + 1.$$

Wir setzen im folgenden voraus, daß n_0 so klein ist, daß

$$N \geqq 3^M k_* + n_1 - 1.$$

Wir setzen noch

$$l_* = 3^M k_* + N_* - 1.$$

Jetzt formulieren wir für $n \geqq N$ Lemmata $A(n)$ und $B(n)$, die wir im nächsten Paragraphen durch Induktion beweisen werden.

Lemma $A(n)$. *Es gibt eine Steinsche Umgebung $S_n \subset S_*$ von s_0, ein r_n mit $r_* < r_n \leqq r_{**}$ und über S_n einen Komplex*

$$\mathscr{L}^\bullet_{(n)}: \to 0 \to \mathscr{L}^n \to \mathscr{L}^{n+1} \to \cdots \to \mathscr{L}^{l_*} \to 0 \to$$

freier $\mathcal{O}_{S_n}$-Moduln endlichen Ranges sowie einen Komplexmorphismus

$$\sigma_{(n)}: \mathscr{L}^\bullet_{(n)} \to C^\bullet(r_n),$$

der für jedes Steinsche $S \subset S_n$ einen n-Quasiisomorphismus

$$\mathscr{L}^\bullet_{(n)}(S) \to C^\bullet(r_n, S)$$

induziert.

Nach Corollar 5.5 hat für jedes r mit $r_* \leqq r \leqq r_n$ der zusammengesetzte Komplexmorphismus

$$\mathscr{L}^\bullet_{(n)} \to C^\bullet(r_n) \to C^\bullet(r),$$

den wir wieder mit $\sigma_{(n)}$ bezeichnen, ebenfalls die im Lemma $A(n)$ genannten Eigenschaften.

Den Kegel von $\sigma_{(n)}\colon \mathscr{L}^\bullet_{(n)} \to C^\bullet(r)$ bezeichnen wir mit

$$K^\bullet_{(n)}(r)\colon \quad \cdots \to C^{n-2}(r) \to K^{n-1}(r) \xrightarrow{\delta} K^n(r) \to \cdots .$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} K^m_{(n)}(r) &= K^m(r) = C^m(r) \oplus \mathscr{L}^{m+1} \qquad && \text{für } m \geqq n-1, \\ K^m_{(n)}(r) &= C^m(r) && \text{für } m < n-1. \end{aligned}$$

Wir setzen für jede offene Menge $S \subset S_n$

$$K^m(r, S) = \Gamma(S, K^m(r)), \qquad m \geqq n-1.$$

Bemerkung. 1) $K^\bullet(r)$ ist ein Komplex von Fréchetgarben.

2) Unter Voraussetzung von $A(n)$ ist für jedes Steinsche $S \subset S_n$ die Sequenz

$$K^{n-1}(r, S) \xrightarrow{\delta} K^n(r, S) \xrightarrow{\delta} K^{n+1}(r, S) \to \cdots$$

exakt (vgl. § 0.1).

Sei

$$Z^{n-1}(r) = \ker\big(K^{n-1}(r) \xrightarrow{\delta} K^n(r)\big)$$

und

$$Z^{n-1}(r, S) = \ker\big(K^{n-1}(r, S) \xrightarrow{\delta} K^n(r, S)\big).$$

Für $n > N$ formulieren wir unter Voraussetzung von $A(n)$

Lemma $B(n-1)$ (Zyklenprojektion). *Es gibt eine Steinsche Umgebung S'_{n-1} von s_0 mit $S'_{n-1} \subset S_n$ und zu jedem Paar reeller Zahlen r, r' mit $r_* \leqq r' < r \leqq r_n$ einen stetigen $\mathcal{O}_{S'_{n-1}}$-Modul-Morphismus*

$$\tau\colon\ K^{n-1}(r) \to Z^{n-1}(r')$$

über S'_{n-1}, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K^{n-1}(r) \arrow[r, "\tau"] & Z^{n-1}(r') \\ Z^{n-1}(r) \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\text{rest}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Die Lemmata $A(n)$ und $B(n)$ werden in § 7 für $n \geqq N$ simultan durch Induktion nach folgendem Schema bewiesen:

0. Für $n > l_*$ sind $A(n)$ und $B(n)$ trivial.

I. $A(n) \,\&\, B(n) \Rightarrow B(n-1)$ für $n > N$.

II. $A(n) \,\&\, B(n-1) \Rightarrow A(n-1)$ für $n > N$.

2. Verschärfung von Lemma $B(n)$

Seien endlich viele Polyzylinder $D_k(r) \subset \mathbb{C}^{m(k)}$ vorgegeben. Für eine offene Menge $S \subset S_*$ sei

$$K(r, S) := \prod_k \Gamma(D_k(r) \times S, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{m(k)} \times S}).$$

Die weiter oben definierten $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$-Moduln $C^l(r, S)$ und $K^l(r, S)$ sind für $l \geqq N$ von diesem Typ.

Für $f = (f_k) \in K(r, S)$ setzen wir

$$\|f\|_{\rho q} = \max_k \|f_k\|_{\rho q}$$

für jede Seminorm oder Pseudonorm q auf $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ (vgl. § 1).

Hilfssatz 6.1. *Sei $0 < r' < r$ und $S' \ll S$. Dann gibt es zu jeder beschränkten Teilmenge $A \subset K(r, S)$ eine m-beschränkte Teilmenge $B \subset \Gamma(S', \mathcal{O}_S)$ und eine Konstante $M \geqq 0$, so daß*

$$\|f\|_{r' B} \leqq M \qquad \textit{für alle } f \in A.$$

Dies zeigt man mit einer ähnlichen Überlegung wie in Proposition 1.1.

Aus Hilfssatz 1.2 folgt unmittelbar

Hilfssatz 6.2. *Sei $0 < r' < r'' < r$. Dann gibt es eine (abzählbare) Familie $(e_i)_{i \in I}$ von Elementen aus $K(r, S)$ mit folgenden Eigenschaften:*

i) *Für jedes m-beschränkte $B \subset \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ gilt*

$$\sum_{i \in I} \|e_i\|_{r' B} < \infty.$$

ii) *Für jede offene Teilmenge $S' \subset S$ läßt sich jedes Element $f \in K(r, S')$ eindeutig in eine konvergente Reihe*

$$f = \sum_i a_i e_i \qquad \textit{mit } a_i \in \Gamma(S', \mathcal{O}_S)$$

entwickeln, wobei

$$q(a_i) \leqq \|f\|_{r'' q}$$

für jede Seminorm oder Pseudonorm q auf $\Gamma(S', \mathcal{O}_S)$.

Unter Voraussetzung von Lemma $A(n+1)$ läßt Lemma $B(n)$ folgende Verschärfung zu:

Lemma $B^*(n)$. *Es gibt eine Steinsche Umgebung S_n'' von s_0 mit $S_n'' \subset S_{n+1}$ und zu jedem Paar reeller Zahlen r, r' mit $r_* \leqq r' < r \leqq r_{n+1}$ einen Garbenmorphismus*

$$\tau\colon\ K^n(r) \to Z^n(r')$$

über S_n'', *so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} K^n(r) \arrow[r, "\tau"] & Z^n(r') \\ Z^n(r) \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\text{rest}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert und folgendes gilt:

Es gibt eine Familie $(e_i)_{i\in I}$ *von Elementen aus* $K^n(r, S_n'')$ *und ein* $\tilde{r}$ *mit* $r' < \tilde{r} < r$ *mit folgenden Eigenschaften:*

i) *Es existiert eine m-beschränkte Menge* $B \subset \Gamma(S_n'', \mathcal{O}_{S_*})$, *so daß*

$$\sum_i \|\tau\, e_i\|_{r'B} < \infty .$$

ii) *Für jede offene Teilmenge* $S \subset S_n''$ *läßt sich jedes Element* $f \in K^n(r, S)$ *eindeutig in eine konvergente Reihe*

$$f = \sum_i a_i\, e_i \qquad \textit{mit} \;\; a_i \in \Gamma(S, \mathcal{O}_{S_*})$$

entwickeln, wobei

$$q(a_i) \leqq \|f\|_{\tilde{r}q}$$

für jede Seminorm oder Pseudonorm q *auf* $\Gamma(S, \mathcal{O}_{S_*})$.

Proposition 6.3. $A(n+1) \,\&\, B(n) \Rightarrow B^*(n)$.

Beweis. Wir wählen reelle Zahlen $\tilde{r}, \rho, \rho'$ mit

$$r' < \rho' < \rho < \tilde{r} < r .$$

Nach Lemma $B(n)$ gibt es eine Zyklenprojektion

$$\tau' \colon \; K^n(\rho) \to Z^n(\rho')$$

über S_n'. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} K^n(r) \arrow[r, "\beta"] & K^n(\rho) \arrow[r, "\tau'"] & Z^n(\rho') \arrow[r, "\beta'"] & Z^n(r') \\ Z^n(r) \arrow[u] \arrow[r] & Z^n(\rho) . \arrow[u] \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Dabei bezeichnen β und β' die kanonischen Restriktionen.

Wir wählen eine Umgebung S_n'' von s_0 mit $S_n'' \ll S_n'$.

Behauptung. Die Abbildung $\tau = \beta' \circ \tau' \circ \beta$ hat über S''_n die in $B^*(n)$ geforderten Eigenschaften.

Sei $B' \subset \Gamma(S'_n, \mathcal{O}_{S_*})$ eine m-beschränkte Menge. Nach Hilfssatz 6.2, angewandt für $0 < \rho < \tilde{r} < r$, gibt es eine Familie $(e_i)_{i \in I}$ von Elementen aus $K^n(r, S'_n)$, so daß

$$\sum_i \|\beta\, e_i\|_{\rho B'} < \infty$$

und die in ii) von $B^*(n)$ geforderte Entwicklungseigenschaft erfüllt ist. Da

$$\tau' \colon\; K^n(\rho, S'_n) \to Z^n(\rho', S'_n)$$

stetig ist, gibt es nach Hilfssatz 6.1 eine m-beschränkte Teilmenge $B \subset \Gamma(S''_n, \mathcal{O}_{S_*})$ und eine Konstante M, so daß

$$\|\tau'\, g\|_{r' B} \leqq M\, \|g\|_{\rho B'}$$

für alle $g \in K^n(\rho, S'_n)$. Somit gilt

$$\sum_i \|\tau\, e_i\|_{r' B} = \sum_i \|\beta'\, \tau'\, \beta\, e_i\|_{r' B} \leqq M \sum_i \|\beta\, e_i\|_{\rho B'} < \infty .$$

Damit ist $B^*(n)$ bewiesen.

§ 7. *Durchführung der Induktion*

Zum Beweis der Induktionsbehauptungen beweisen wir zuerst eine Folgerung aus dem Satz von Banach.

Lemma 7.1. *Seien E, F Frécheträume und φ: $E \to F$ eine surjektive stetige lineare Abbildung. Weiter sei C eine beschränkte absolutkonvexe Teilmenge von F und $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus F mit*

$$\sum_i \|x_i\|_C < \infty .$$

Behauptung. Es gibt eine beschränkte absolutkonvexe Teilmenge C' von E und eine Folge $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus E mit

$$\varphi(y_i) = x_i \quad \textit{und} \quad \sum_i \|y_i\|_{C'} < \infty .$$

Beweis. Sei $\lambda_i = \|x_i\|_C$. Da $\sum \lambda_i < \infty$ ist, gibt es eine Folge positiver Zahlen μ_i mit

$$\lim_{i \to \infty} \mu_i \lambda_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_i \frac{1}{\mu_i} < \infty .$$

Die Elemente $x'_i = \mu_i x_i$ bilden eine Nullfolge. Nach dem Satz von Banach gibt es eine Nullfolge (y'_i) von Elementen aus E mit $\varphi(y'_i) = x'_i$.

Die absolutkonvexe Hülle C' der Menge $\{y_i': i\in\mathbb{N}\}$ ist beschränkt. Für $y_i=\frac{1}{\mu_i}\,y_i'$ gilt $\varphi(y_i)=x_i$ und

$$\sum_i \|y_i\|_{C'} \leqq \sum_i \frac{1}{\mu_i}\,\|y_i'\|_{C'} \leqq \sum_i \frac{1}{\mu_i} < \infty .$$

Proposition 7.2. *$A(n)\,\&\,B(n) \Rightarrow B(n-1)$ für $n>N$.*

Beweis. Nach Proposition 6.3 gilt auch $B^*(n)$. Wir dürfen annehmen (indem wir nötigenfalls S_n durch eine kleinere Steinsche Umgebung von s_0 ersetzen), daß $S_n\subset S_n''$ ist. Seien reelle Zahlen r, r' mit $r_*\leqq r'<r\leqq r_n$ vorgegeben. Sei S_{n-1}' eine Steinsche Umgebung von s_0 mit $S_{n-1}'\ll S_n$. Wir beweisen zunächst folgenden

Hilfssatz 7.3. *Es gibt einen stetigen $\mathcal{O}_{S_{n-1}'}$-Modulhomomorphismus*

$$h\colon\; K^n(r)\to K^{n-1}(r'),$$

so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^n(r) & \longleftarrow & Z^n(r) \\ {\scriptstyle h}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ K^{n-1}(r') & \xrightarrow{\partial} & Z^n(r') \end{array}$$

kommutativ ist.

Beweis. Wir wählen r'' mit $r'<r''<r$ und betrachten die nach dem Lemma $B^*(n)$ existierende Zyklenprojektion

$$\tau\colon\; K^n(r)\to Z^n(r'')$$

über $S_n\subset S_n''$. Sei $(e_i)_{i\in I}$ die durch Lemma $B^*(n)$ gelieferte und auf S_n beschränkte Familie von Elementen aus $K^n(r,S_n)$. Es gibt eine m-beschränkte Menge $B\subset\Gamma(S_n,\mathcal{O}_{S_*})$, so daß

$$\sum_i \|\tau\, e_i\|_{r'',B}<\infty .$$

Auf die nach Lemma $A(n)$ surjektive Abbildung

$$\partial\colon\; K^{n-1}(r'',S_n)\to Z^n(r'',S_n)$$

wenden wir Lemma 7.1 an:

Es gibt eine beschränkte absolutkonvexe Teilmenge $A\subset K^{n-1}(r'',S_n)$ und Elemente $\xi_i\in K^{n-1}(r'',S_n)$, so daß

$$\partial\,\xi_i=\tau\, e_i \quad\text{und}\quad \sum_i \|\xi_i\|_A<\infty .$$

Nach Hilfssatz 6.1 gibt es eine m-beschränkte Menge $B'\subset\Gamma(S_{n-1}',\mathcal{O}_{S_*})$ mit

$$M:=\sum_i \|\xi_i\|_{r',B'}<\infty .$$

Der gesuchte Garbenhomomorphismus h: $K^n(r) \to K^{n-1}(r')$ wird über jeder offenen Menge $S \subset S'_{n-1}$ durch die Zuordnung

$$K^n(r, S) \to K^{n-1}(r', S),$$
$$f = \sum_i a_i e_i \mapsto h(f) = \sum_i a_i \xi_i$$

gegeben. Wir zeigen, daß h wohldefiniert und stetig ist.

Nach $B^*(n)$ gibt es ein $\tilde{r} < r$, so daß für jede Seminorm q auf $\Gamma(S, \mathcal{O}_{S_*})$ gilt:

$$q(a_i) \leqq \|f\|_{\tilde{r}q}.$$

Daraus folgt

$$\|h(f)\|_{r'q} \leqq \sum_i q(a_i) \|\xi_i\|_{r'q} \leqq \|f\|_{\tilde{r}q} \sum_i \|\xi_i\|_{r'q} \leqq \lambda_q M \|f\|_{\tilde{r}q}.$$

Der Hilfssatz ist damit bewiesen. Der Beweis von Proposition 7.2 ist ganz einfach. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K^{n-1}(r) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\beta"'] & K^n(r) \arrow[dl, "h"'] \arrow[d] \\ K^{n-1}(r') \arrow[r] & K^n(r') \end{tikzcd}$$

Die gesuchte Zyklenprojektion

$$\tau: K^{n-1}(r) \to Z^{n-1}(r')$$

über S'_{n-1} wird gegeben durch

$$\tau = \beta - h \circ \partial.$$

Proposition 7.4. *$A(n) \& B(n-1) \Rightarrow A(n-1)$ für $n > N$.*

Beweis. 1. Nach Proposition 6.3 gilt auch $B^*(n-1)$. Sei S_{n-1} eine Steinsche Umgebung von s_0 mit $S_{n-1} \ll S''_{n-1}$ und r_{n-1} eine reelle Zahl mit $r_* < r_{n-1} < r_n$. Nach Lemma $A(n)$ haben wir für jedes ρ mit $r_{n-1} \leqq \rho \leqq r_n$ einen Komplexmorphismus $\mathscr{L}^\bullet_{(n)} \to C^\bullet(\rho)$ über S_n, so daß für jedes Steinsche $S \subset S_n$ ein n-Quasiisomorphismus

$$\mathscr{L}^\bullet_{(n)}(S) \to C^\bullet(\rho, S)$$

induziert wird. Wir müssen über S_{n-1} den Komplex $\mathscr{L}^\bullet_{(n)}$ zu einem Komplex

$$\mathscr{L}^\bullet_{(n-1)}: \to 0 \to \mathscr{L}^{n-1} \to \mathscr{L}^n \to \mathscr{L}^{n+1} \to \cdots$$

erweitern und einen Komplexmorphismus $\mathscr{L}^\bullet_{(n-1)} \to C^\bullet(r_{n-1})$ finden, der für jedes Steinsche $S \subset S_{n-1}$ einen $(n-1)$-Quasiisomorphismus

$$\mathscr{L}^\bullet_{(n-1)}(S) \to C^\bullet(r_{n-1}, S)$$

induziert. Dazu genügt es, einen Morphismus ω von $\mathscr{L}^{n-1}$ in

$$Z^{n-1}(r_{n-1}) = \ker\left(K^{n-1}(r_{n-1}) \to K^n(r_{n-1})\right)$$

derart zu konstruieren, daß die Summe der Morphismen in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{L}^{n-1} \arrow[d, "\omega"] \\ C^{n-2}(r_{n-1}) \arrow[r, "\delta"] & Z^{n-1}(r_{n-1}) \end{tikzcd}$$

über jedem Steinschen $S \subset S_{n-1}$ auf dem Niveau der Schnitte surjektiv ist.

2. Sei r' eine relle Zahl mit $r_{n-1} < r' < r_n$. Dann gilt für jedes Steinsche $S \subset S_n$ nach Corollar 5.5, daß die Restriktion

$$C^\bullet(r_n, S) \to C^\bullet(r', S)$$

ein Quasiisomorphismus ist.

Daraus folgt, daß auch

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C^{n-2}(r_n, S) \arrow[r] \arrow[d] & K^{n-1}(r_n, S) \arrow[r] \arrow[d] & K^n(r_n, S) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & C^{n-2}(r', S) \arrow[r] & K^{n-1}(r', S) \arrow[r] & K^n(r', S) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

ein Quasiisomorphismus ist. Insbesondere ist die Summe der Abbildungen in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} & Z^{n-1}(r_n, S) \arrow[d] \\ C^{n-2}(r', S) \arrow[r] & Z^{n-1}(r', S) \end{tikzcd}$$

surjektiv.

3. Sei r eine relle Zahl mit $r' < r < r_n$. Das Lemma $B^*(n-1)$ liefert uns eine Zyklenprojektion

$$\tau\colon\ K^{n-1}(r) \to Z^{n-1}(r')$$

über S''_{n-1}, eine Familie von Elementen $e_i \in K^{n-1}(r, S''_{n-1})$, $i \in I$, eine reelle Zahl $\tilde{r}$ mit $r' < \tilde{r} < r$, und eine m-beschränkte Menge $B' \subset \Gamma(S''_{n-1}, \mathcal{O}_{S_*})$, so daß

$$\sum_i \|\tau\, e_i\|_{r'\,B'} < \infty$$

ist und für jede offene Menge $S \subset S''_{n-1}$ sich jedes Element $f \in K^{n-1}(r, S)$ in eine konvergente Reihe

$$f = \sum_i a_i\, e_i \qquad \text{mit } a_i \in \Gamma(S, \mathcal{O}_{S_*})$$

entwickeln läßt, wobei
$$q(a_i) \leqq \|f\|_{\bar{r}q}$$
für jede Seminorm oder Pseudonorm q auf $\Gamma(S, \mathcal{O}_{S_*})$.

Da das Bild der zusammengesetzten Abbildung
$$K^{n-1}(r_n) \xrightarrow{\beta} K^{n-1}(r) \xrightarrow{\tau} Z^{n-1}(r')$$
(wobei β die Restriktion bezeichnet), das Bild der Restriktionsabbildung
$$Z^{n-1}(r_n) \to Z^{n-1}(r')$$
umfaßt, ist die Summe der Abbildungen des folgenden Diagramms
$$\begin{array}{ccc} & & K^{n-1}(r_n, S''_{n-1}) \\ & & \big\downarrow {\scriptstyle \bar{\tau} = \tau \circ \beta} \\ C^{n-2}(r', S''_{n-1}) & \xrightarrow{\delta} & Z^{n-1}(r', S''_{n-1}) \end{array}$$
surjektiv. Deshalb können wir auf die Summe $\delta + \bar{\tau}$ Lemma 7.1 anwenden: Es gibt beschränkte absolutkonvexe Mengen
$$A_1 \subset K^{n-1}(r_n, S''_{n-1}), \qquad A_2 \subset C^{n-2}(r', S''_{n-1})$$
und Elemente
$$\xi_i \in K^{n-1}(r_n, S''_{n-1}), \qquad \eta_i \in C^{n-2}(r', S''_{n-1}),$$
so daß
$$\bar{\tau}\, \xi_i + \delta\, \eta_i = \tau\, e_i$$
und
$$\sum_i \|\xi_i\|_{A_1} < \infty, \qquad \sum_i \|\eta_i\|_{A_2} < \infty.$$

Wegen Hilfssatz 6.1 gibt es eine m-beschränkte Menge $B \subset \Gamma(S_{n-1}, \mathcal{O}_{S_*})$, so daß
$$\sum_i \|\xi_i\|_{r\,B} < \infty$$
und
$$\sum_i \|\eta_i\|_{r_{n-1}\,B} =: M < \infty.$$
Es gibt eine endliche Teilmenge $J \subset I$, so daß
$$\sum_{i \in I \setminus J} \|\xi_i\|_{r\,B} \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Sei $\mathscr{L}^{n-1} = \mathcal{O}^J_{S_{n-1}}$ die freie analytische Garbe vom Rang $|J|$ über S_{n-1} und
$$\omega\colon\ \mathscr{L}^{n-1} \to Z^{n-1}(r_{n-1})$$
der Garbenhomomorphismus, der die kanonischen Erzeugenden $(g_i)_{i \in J}$ von $\mathscr{L}^{n-1}$ auf $(\beta' \bar{\tau}\, \xi_i)_{i \in J}$ abbildet. Dabei bezeichnet
$$\beta'\colon\ Z^{n-1}(r') \to Z^{n-1}(r_{n-1})$$
die Restriktion.

4. **Approximations-Hilfssatz.** *Zu jedem* $x \in K^{n-1}(r, S_{n-1})$ *mit* $\|x\|_{\tilde{r}B} < \infty$ *gibt es Elemente*

$$x_1 \in K^{n-1}(r, S_{n-1}), \qquad y \in \Gamma(S_{n-1}, \mathscr{L}^{n-1})$$

und $\eta \in C^{n-2}(r_{n-1}, S_{n-1})$ *mit*

$$\beta' \tau(x) = \omega(y) + \delta\eta + \beta' \tau(x_1)$$

und

$$\|x_1\|_{rB} \leqq \tfrac{1}{2} \|x\|_{\tilde{r}B},$$

$$\|y\|_B \leqq \|x\|_{\tilde{r}B},$$

$$\|\eta\|_{r_{n-1}B} \leqq M \|x\|_{\tilde{r}B}.$$

Beweis. Man kann x in eine Reihe

$$x = \sum_i a_i e_i \qquad \text{mit } a_i \in \Gamma(S_{n-1}, \mathcal{O}_{S_*})$$

entwickeln, wobei

$$\|a_i\|_B \leqq \|x\|_{\tilde{r}B}.$$

Wir setzen

$$x_1 = \sum_{i \in I \setminus J} a_i \xi_i,$$

$$y = \sum_{i \in J} a_i g_i$$

und

$$\eta = \sum_{i \in I} a_i \eta_i.$$

Dann gilt

$$\|x_1\|_{rB} \leqq \sum_{i \in I \setminus J} \|a_i\|_B \|\xi_i\|_{rB} \leqq \|x\|_{\tilde{r}B} \sum_{i \in I \setminus J} \|\xi_i\|_{rB} \leqq \tfrac{1}{2} \|x\|_{\tilde{r}B},$$

$$\|y\|_B = \max_{i \in I} \|a_i\|_B \leqq \|x\|_{\tilde{r}B}$$

und

$$\|\eta\|_{r_{n-1}B} \leqq \sum_{i \in I} \|a_i\|_B \|\eta_i\|_{r_{n-1}B} \leqq M \|x\|_{\tilde{r}B}.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Folgerung 1. *Zu jedem* $x \in K^{n-1}(r, S_{n-1})$ *mit* $\|x\|_{\tilde{r}B} < \infty$ *gibt es Elemente* $y \in \Gamma(S_{n-1}, \mathscr{L}^{n-1})$ *und* $\eta \in C^{n-2}(r_{n-1}, S_{n-1})$ *mit*

$$\beta' \tau(x) = \omega(y) + \delta\eta$$

und

$$\|y\|_B = 2 \|x\|_{\tilde{r}B},$$

$$\|\eta\|_{r_{n-1}B} \leqq 2M \|x\|_{\tilde{r}B}.$$

Dies ergibt sich unmittelbar durch Iteration des Approximationshilfssatzes.

Folgerung 2. *Sei $S \subset S_{n-1}$ eine beliebig offene Menge. Dann gibt es zu jedem $x \in K^{n-1}(r, S)$ Elemente $y \in \Gamma(S, \mathscr{L}^{n-1})$ und $\eta \in C^{n-2}(r_{n-1}, S)$ mit*

$$\beta' \tau(x) = \omega(y) + \delta \eta .$$

Beweis. Sei r'' eine reelle Zahl mit $\tilde{r} < r'' < r$. Nach Hilfssatz 6.2 gibt es eine Familie $f_i \in K^{n-1}(r, S_{n-1})$, $i \in I$, mit

$$\sum_i \|f_i\|_{\tilde{r} B} < \infty$$

und so, daß sich $x \in K^{n-1}(r, S)$ in eine Reihe

$$x = \sum_i a_i f_i \qquad \text{mit } a_i \in \Gamma(S, \mathcal{O}_{S_*})$$

entwickeln läßt, wobei

$$q(a_i) \leqq \|x\|_{r'' q}$$

für jede Seminorm q auf $\Gamma(S, \mathcal{O}_{S_*})$. Nach Folgerung 1 gibt es Elemente

$$y_i \in \Gamma(S_{n-1}, \mathscr{L}^{n-1}) \quad \text{und} \quad \eta_i \in C^{n-2}(r_{n-1}, S_{n-1})$$

mit

$$\beta' \tau(f_i) = \omega(y_i) + \delta \eta_i$$

und

$$\|y_i\|_B \leqq 2 \, \|f_i\|_{\tilde{r} B},$$
$$\|\eta_i\|_{r_{n-1} B} \leqq 2M \, \|f_i\|_{\tilde{r} B}.$$

Wir setzen

$$y = \sum_i a_i y_i$$

und

$$\eta = \sum_i a_i \eta_i .$$

Diese Reihen konvergieren, denn für jede Seminorm q auf $\Gamma(S, \mathcal{O}_{S_*})$ gilt

$$\sum_i q(a_i y_i) \leqq \sum_i q(a_i) q(y_i) \leqq \|x\|_{r'' q} \sum_i q(y_i)$$
$$\leqq \|x\|_{r'' q} \sum_i \lambda_q \|y_i\|_B \leqq 2 \lambda_q \|x\|_{r'' q} \sum_i \|f_i\|_{\tilde{r} B} < \infty$$

und

$$\sum_i \|a_i \eta_i\|_{r_{n-1} q} \leqq \|x\|_{r'' q} \sum_i \|\eta_i\|_{r_{n-1} q} \leqq 2M \, \lambda_q \big(\sum_i \|f_i\|_{\tilde{r} B}\big) \|x\|_{r'' q} < \infty .$$

Folgerung 2 ist damit bewiesen.

5. Der Beweis von Proposition 7.4 kann nunmehr in wenigen Schritten erbracht werden. Da nach Corollar 5.5 die Restriktion

$$C^\bullet(r, S) \to C^\bullet(r_{n-1}, S)$$

für jedes Steinsche $S \subset S_{n-1}$ ein Quasiisomorphismus ist, folgt wie oben unter 2., daß die Summe der Abbildungen im folgenden Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & Z^{n-1}(r, S) \\ & & \downarrow \\ C^{n-2}(r_{n-1}, S) & \xrightarrow{\delta} & Z^{n-1}(r_{n-1}, S) \end{array}$$

surjektiv ist. Deshalb läßt sich jedes $\zeta \in Z^{n-1}(r_{n-1}, S)$ darstellen als

$$\zeta = \beta' \tau(x) + \delta \eta',$$

wobei $x \in Z^{n-1}(r, S) \subset K^{n-1}(r, S)$ und $\eta' \in C^{n-2}(r_{n-1}, S)$ ist.

Kombiniert man dies mit Folgerung 2, so ergibt sich, daß die Summe der Abbildungen im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & \Gamma(S, \mathscr{L}^{n-1}) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \omega} \\ C^{n-2}(r_{n-1}, S) & \xrightarrow{\delta} & Z^{n-1}(r_{n-1}, S) \end{array}$$

für jedes Steinsche $S \subset S_{n-1}$ surjektiv ist, was zu zeigen war. Damit ist Proposition 7.4 vollständig bewiesen.

§ 8. Projektionssätze

1. Der Bildgarbensatz für pseudokohärente Komplexe

Theorem I. *Sei $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein mFB-Raum lokal vom Typ (J) und $\pi\colon X \to Y$ ein relativ-analytischer Raum, der eigentlich über Y liegt. Dann ist für jeden relativ Y pseudokohärenten, nach unten beschränkten Komplex $\mathscr{F}^\bullet$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln der Bildgarbenkomplex $\mathbf{R}\pi_*(\mathscr{F}^\bullet)$ pseudokohärent.*

Beweis. Sei $s_0 \in Y$ ein beliebiger Punkt. Nach Lemma $A(N)$ ist $\mathbf{R}\pi_* \mathscr{F}^\bullet$ in einer gewissen Umgebung von s_0 N-pseudokohärent. Da N und s_0 beliebig gewählt werden konnten, folgt die Behauptung.

Bemerkung. Durch eine leichte Modifikation des Beweises sieht man, daß auch im folgenden allgemeineren Fall der Bildgarbenkomplex pseudokohärent ist: Es wird nicht mehr vorausgesetzt, daß die Abbildung $\pi\colon X \to Y$ eigentlich ist, sondern nur, daß

$$T := \bigcup_n \overline{\operatorname{supp} H^n(\mathscr{F}^\bullet)}$$

eigentlich über Y liegt.

2. Perfekte Garbenkomplexe

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Ein Komplex $\mathcal{F}^\bullet$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln heißt *perfekt* [17], wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U von x, über U einen beschränkten Komplex

$$\mathcal{L}^\bullet\colon \cdots \to 0 \to \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^{n+1} \to \cdots \to \mathcal{L}^N \to 0 \to \cdots$$

freier $\mathcal{O}_U$-Moduln endlichen Ranges und einen Quasiisomorphismus $\mathcal{L}^\bullet \to \mathcal{F}^\bullet | U$ gibt.

Hilfssatz 8.1. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum und $\mathcal{F}^\bullet$ ein Komplex von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Weiter seien*

$$\mathcal{L}^\bullet\colon \to 0 \to 0 \to \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^{n+1} \to \cdots \to \mathcal{L}^N \to 0 \to \cdots$$

und

$$\mathcal{R}^\bullet\colon \to 0 \to \mathcal{Z} \to \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^{n+1} \to \cdots \to \mathcal{R}^N \to 0 \to \cdots$$

beschränkte Komplexe mit freien $\mathcal{O}_X$-Moduln endlichen Ranges $\mathcal{L}^i$ und $\mathcal{R}^i$ für $i \geqq n$. Es gebe Quasiisomorphismen

$$\mathcal{L}^\bullet \to \mathcal{F}^\bullet \quad \textit{und} \quad \mathcal{R}^\bullet \to \mathcal{F}^\bullet.$$

Dann ist $\mathcal{Z}$ ein lokalfreier $\mathcal{O}_X$-Modul endlichen Ranges.

Beweis. Nach [17], Corollaire I.4.2, gibt es lokal einen Quasiisomorphismus

$$\varphi\colon \mathcal{L}^\bullet \to \mathcal{R}^\bullet.$$

Wir betrachten den Kegel von φ und sehen, daß $\mathcal{Z} \oplus \mathcal{L}^n$ lokal direkter Summand von $\mathcal{R}^n \oplus \mathcal{L}^{n+1}$ ist. Daraus folgt die Behauptung.

Definition. Sei $\pi\colon X \to S$ ein relativanalytischer Raum. Ein Komplex $\mathcal{F}^\bullet$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln heißt perfekt relativ S, wenn für jede relative Karte $j\colon U \to D \times S'$ der Komplex $j_*(\mathcal{F}^\bullet)$ perfekt ist.

Die folgende Proposition zeigt, daß man die relative Perfektheit von $\mathcal{F}^\bullet$ nur bezüglich einer Überdeckung von X durch relative Karten zu fordern braucht.

Proposition 8.2. *Sei $X \to S$ ein relativ analytischer Raum und $\mathcal{F}^\bullet$ ein Komplex von $\mathcal{O}_X$-Moduln. $i\colon U \to D \times S'$ und $j\colon V \to E \times S'$ seien relative Karten in x mit $V \subset U$.*

Behauptung. Ist $i_*(\mathcal{F}^\bullet)$ perfekt, so auch $j_*(\mathcal{F}^\bullet)$.

Beweis. Dies folgt mit Hilfe von Lemma 3.3 ähnlich wie Proposition 3.5.

Für relativ perfekte Komplexe läßt sich der Bildgarbensatz verschärfen. Man braucht nicht mehr vorauszusetzen, daß der Basisraum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ lokal vom Typ (J) ist, sondern nur, daß die folgende Bedingung erfüllt ist:

(L) Zu jedem Punkt $y \in Y$ gibt es eine offene Umgebung V und eine Basis $\mathfrak{S}$ der Topologie von V, so daß gilt:

i) $S, S' \in \mathfrak{S} \Rightarrow S \cap S' \in \mathfrak{S}$.

ii) $S \in \mathfrak{S} \Rightarrow H^n(S, \mathcal{O}_Y) = 0$ für $n \geqq 1$.

Darunter fallen insbesondere alle kompakten metrisierbaren Hausdorffräume, wenn man als Strukturgarbe die Garbe aller stetigen Funktionen nimmt.

Theorem II. *Sei $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein mFB-Raum vom Typ (L) und $\pi\colon X \to Y$ ein relativ-analytischer Raum, der eigentlich über Y liegt. Dann ist für jeden relativ Y perfekten Komplex $\mathscr{F}^\bullet$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln der Bildgarbenkomplex $\mathbf{R}\pi_* \mathscr{F}^\bullet$ perfekt.*

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus § 4.4 läßt sich, unter Zuhilfenahme von Hilfssatz 8.1, Lemma $R(n)$ wie folgt verschärfen: Zu jedem $s_0 \in Y$ gibt es eine offene Umgebung S_0 von s_0, eine ganze Zahl n_0, einen auf $\mathfrak{A}_*$ bezogenen Atlas $\mathfrak{A}(S_0)$, einen Komplex

$$\mathscr{R}^\bullet\colon \to 0 \to \mathscr{R}^{n_0} \to \mathscr{R}^{n_0+1} \to \cdots \to \mathscr{R}^{N_*} \to 0 \to \cdots$$

freier verbundener Garbensysteme endlichen Ranges über $\mathfrak{A}(S_0)$ und einen Quasiisomorphismus

$$\mathscr{R}^\bullet \to j_* \mathscr{F}^\bullet$$

über $\mathfrak{A}(S_0)$. Für jedes offene $S \subset S_0$ hat der totale Čechkomplex

$$C^\bullet(r, S) := C^\bullet(r, S; \mathscr{R}^\bullet)_{\text{einf}}$$

jetzt folgende Eigenschaften:

i) $C^\bullet(r, S)$ ist beschränkt, insbesondere ist $C^n(r, S) = 0$ für $n < n_0$.

ii) Für $n \geqq n_0$ ist $C^n(r, S)$ ein endliches Produkt von $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$-Moduln der Gestalt

$$\Gamma\big(D(r) \times S, \mathcal{O}_{D(r) \times S}\big).$$

iii) Der Garbenkomplex $C^\bullet(r)$, definiert durch $S \mapsto C^\bullet(r, S)$, ist quasiisomorph zum Bildgarbenkomplex von $\mathscr{F}^\bullet$.

Nach Lemma $A(n_0 - 1)$ gibt es eine Steinsche Umgebung S' von s_0, ein r mit $r_* < r \leqq r_{**}$ und über S' einen beschränkten Komplex

$$\mathscr{L}^\bullet\colon \to 0 \to \mathscr{L}^{n_0-1} \to \mathscr{L}^{n_0} \to \mathscr{L}^{n_0+1} \to \cdots$$

freier $\mathcal{O}_{S'}$-Moduln endlichen Randes und einen $(n_0 - 1)$-Quasiisomorphismus $\sigma\colon \mathscr{L}^\bullet \to C^\bullet(r)$. Sei

$$\mathscr{N} = \ker(\mathscr{L}^{n_0-1} \to \mathscr{L}^{n_0})$$

und

$$\hat{\mathscr{L}}^\bullet: \cdots \to 0 \to \mathscr{N} \to \mathscr{L}^{n_0-1} \to \mathscr{L}^{n_0} \to \cdots.$$

Der Morphismus σ induziert einen Quasiisomorphismus

$$\hat{\sigma}: \hat{\mathscr{L}}^\bullet \to C^\bullet(r).$$

Der Kegel von $\hat{\sigma}$ hat die Gestalt

$$\cdots \to 0 \to \mathscr{N} \to \mathscr{L}^{n_0-1} \to \mathscr{L}^{n_0} \to C^{n_0}(r) \oplus \mathscr{L}^{n_0+1} \to \cdots.$$

Nach Lemma $B(n_0-2)$ gibt es über einer Umgebung von s_0 eine Zyklenprojektion τ: $\mathscr{L}^{n_0-1} \to \mathscr{N}$ mit $\tau \circ \nu = \mathrm{id}$. Deshalb ist $\mathscr{N}$ lokalfrei, d.h. der Bildgarbenkomplex $\mathbf{R}\pi_* \mathscr{F}^\bullet$ ist perfekt.

3. Berechenbar pseudokohärente Garbenkomplexe

Will man den Bildgarbensatz für relativanalytische Räume beweisen, deren Basis ein beliebiger mFB-Raum ist, so muß man an den Garbenkomplex $\mathscr{F}^\bullet$ weitere Bedingungen stellen. Hier scheint der Begriff der berechenbaren Pseudokohärenz nützlich zu sein, den wir im folgenden kurz darstellen wollen.

Definition. Sei X ein topologischer Raum.

i) Ein Komplex von Garben abelscher Gruppen auf X

$$\mathscr{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathscr{F} \xrightarrow{\psi} \mathscr{F}''$$

heißt *berechenbar exakt*, wenn es zu jedem $x \in X$ und jeder offenen Umgebung U von x eine offene Umgebung $V \subset U$ von x gibt, so daß gilt:

Zu jedem $f \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ mit $\psi(f)=0$ gibt es ein $g \in \Gamma(V, \mathscr{F}')$ mit $\varphi(g) = f|V$.

ii) Ein Komplex $\mathscr{F}^\bullet$ von Garben abelscher Gruppen über X heißt *berechenbar n-azyklisch*, wenn für alle $k \geqq n$ der Komplex

$$\mathscr{F}^{k-1} \to \mathscr{F}^k \to \mathscr{F}^{k+1}$$

berechenbar exakt ist.

iii) Seien $\mathscr{F}^\bullet$ und $\mathscr{G}^\bullet$ zwei Komplexe von Garben abelscher Gruppen über X. Ein Morphismus

$$\varphi: \mathscr{F}^\bullet \to \mathscr{G}^\bullet$$

heißt *berechenbarer n-Quasiisomorphismus*, wenn der Kegel von φ berechenbar n-azyklisch ist.

Definition. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathscr{F}^\bullet$ ein nach unten beschränkter Komplex von $\mathcal{O}_X$-Moduln. $\mathscr{F}^\bullet$ heißt *berechenbar n-pseudokohärent*, wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U von x, einen beschränkten Komplex $\mathscr{L}^\bullet$ von freien $\mathcal{O}_U$-Moduln endlichen Ranges, einen n-Quasiisomorphismus $\varphi: \mathscr{L}^\bullet \to \mathscr{F}^\bullet$ und eine injektive Auflösung $\psi: \mathscr{F}^\bullet \to \mathscr{I}^\bullet$ gibt, so daß die Komposition

$$\psi \circ \varphi: \mathscr{L}^\bullet \to \mathscr{I}^\bullet$$

ein berechenbarer n-Quasiisomorphismus ist.

Definition. Sei $X \to S$ ein relativanalytischer Raum und $\mathscr{F}^\bullet$ ein Komplex von $\mathcal{O}_X$-Moduln. $\mathscr{F}^\bullet$ heißt *berechenbar pseudokohärent relativ S*, wenn für jede relative Karte $j: U \to D \times S'$ von X der Komplex $j_* \mathscr{F}^\bullet$ berechenbar n-pseudokohärent für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist.

Bemerkung. Ist S ein mFB-Raum vom Typ (J), so ist jeder nach unten beschränkte relativ S pseudokohärente Komplex von $\mathcal{O}_X$-Moduln berechenbar pseudokohärent relativ S. Ist S nur vom Typ (L), so ist jeder relativ perfekte Komplex berechenbar relativ pseudokohärent.

Wir stellen dem Leser anheim, folgende Vermutung richtigzustellen und zu beweisen.

Vermutung. *Sei $\pi: X \to S$ ein relativanalytischer Raum, der eigentlich über S liegt. Ist $\mathscr{F}^\bullet$ ein berechenbar relativpseudokohärenter Komplex von $\mathcal{O}_X$-Moduln, dann ist $\mathbf{R}\pi_* \mathscr{F}^\bullet$ pseudokohärent.*

Ohne die tatkräftige Mitarbeit von Michael Schneider hätte die Arbeit kaum Gestalt angenommen. Wir danken ihm herzlich für seine Hilfe.

Literatur

1. Borel, A., Serre, J. P.: Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck). Bull. Soc. Math. France **86**, 97 – 136 (1958).
2. Deligne, P.: Technique de descente cohomologique. (Tract subversif.)
3. Forster, O, Knorr, K.: Ein Beweis des Grauertschen Bildgarbensatzes nach Ideen von B. Malgrange. Manuscripta Math. **5**, 19 – 44 (1971).
4. Godement, R.: Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Paris: Hermann 1958.
5. Grauert, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. Publ. Math. I.H.E.S. **5**, Paris 1960.
6. Grothdendieck, A.: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955).
7. Grothendieck, A.: Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohoku Math. J. **9**, 119 – 221 (1957).
8. Grothendieck, A.: Techniques de construction en géométrie analytique V, VIII. Séminaire Henri Cartan, 13e année 1960/61, Exposés 12 et 15.
9. Grothendieck, A.: Eléments de géométrie algébrique, Chap. O_{III}. Publ. Math. I.H.E.S. **11**, Paris 1961.
10. Hartshorne, R.: Residues and duality. Lecture Notes in Mathematics **20**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.

11. Jurchescu, M.: Espaces annelés transcendants et morphismes analytiques. Séminaire sur les Espaces Analytiques, Bucarest, 25 – 30 septembre 1969. Editions de l'Académie, Bucarest 1971.
12. Kaup, L.: Eine Künnethformel für Fréchetgarben. Math. Zeitschr. **97**, 158 – 168 (1967).
13. Kiehl, R.: Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. Inventiones math. **2**, 191 – 214 (1967).
14. Kiehl, R.: Variationen über den Kohärenzsatz von Grauert. Vervielfältigtes Manuskript, Frankfurt/M. 1970.
14a. Kiehl, R., Verdier, J. L.: Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatzes von Grauert. Vervielfältigtes Manuskript. Frankfurt/M. 1971.
14b. Kiehl, R.: Relativ-analytische Räume. Vervielfältigtes Manuskript. Frankfurt/M. 1971.
15. Knorr, K.: Der Grauertsche Projektionssatz. Inventiones math. **12**, 118 – 172 (1971).
16. Loomis, L.: Abstract harmonic analysis. New York: Van Nostrand 1953.
17. Séminaire de Géométrie Algébrique (SGA) n° 6, Exposés I – III. I. H. E. S., Bures-sur-Yvette 1966/67.
18. Verdier, J.-L.: Catégories dérivées. I. H. E. S., Bures-sur-Yvette 1964.

O. Forster
K. Knorr
Fachbereich Mathematik
Universität Regensburg
D-8400 Regensburg
Universitätsstraße 31
Deutschland

(Eingegangen am 23. Juni 1971)