

Ortsbestimmung eines Elektrons durch ein Mikroskop.

Von **K. F. v. Weizsäcker** in Leipzig.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 9. April 1931.)

Im folgenden soll ein spezielles Gedankenexperiment zur Bestimmung des Ortes eines Elektrons behandelt werden, nämlich die Abbildung eines mit hinreichend kurzwelligem Licht beleuchteten Elektrons durch ein Mikroskop. Der erste Teil der Arbeit enthält eine kurze anschauliche Diskussion des Experiments. Dabei ergeben sich Schwierigkeiten, die eine strenge Durchrechnung des Problems wünschenswert machen; diese wird im zweiten Teil mit Hilfe der Heisenberg-Paulischen Formulierung der Quantenelektrodynamik durchgeführt. Im dritten Teil werden die Resultate der Rechnung anschaulich diskutiert.

I. Anschauliche Betrachtungen. Vom Standpunkt der klassischen Wellentheorie des Lichtes läßt sich der physikalische Vorgang bei der Abbildung eines Elektrons durch ein Mikroskop folgendermaßen beschreiben: Auf das Elektron, dessen Ort bestimmt werden soll, fällt Licht, etwa in Form einer ebenen Welle, und wird irgendwo, sagen wir im Punkte P , an ihm gestreut (Fig. 1). Ein Teil der dabei entstehenden Kugelwelle durchsetzt die Objektivlinse des Mikroskops und wird durch sie in einem bestimmten Punkte P' , dem Bildpunkt von P , wieder vereinigt. Wenn man die Lage von P' irgendwie feststellt, kann man daraus nach den Gesetzen der Optik die Lage von P berechnen, d. h. den Ort des Elektrons bestimmen.

In der Quantentheorie wird der Sachverhalt anschaulich wesentlich komplizierter, da wir hier auch die korpuskularen Eigenschaften des Lichtes berücksichtigen müssen.

Wir betrachten den einfachsten und interessantesten Fall, daß nur ein einziges Lichtquant an dem Elektron gestreut wird und durch die Linse geht. Wieweit die Annahme, dieses Experiment sei nach der Quantentheorie zur Ortsmessung geeignet, gerechtfertigt ist, soll im zweiten Teil dieser Arbeit durch eine quantenelektrodynamische Rechnung gezeigt werden; obwohl man nämlich korrespondenzmäßig erwarten muß, daß eine Abbildung durch ein einzelnes Lichtquant genau so möglich sein muß wie durch viele, so ist doch die anschauliche Diskussion des Experiments nicht völlig trivial.

Zunächst folgt aus der Benutzung eines *einzelnen* Lichtquants eine einschränkende Bedingung: Um die Ankunft des Lichtquants im Bild-

punkt festzustellen — von einer „Wiedervereinigung eines Strahlenbündels“ kann man hier nicht gut sprechen —, muß es durch eine photographische Platte oder einen Szintillationsschirm S absorbiert werden, der sich genau in der Bildebene befindet, in der der Bildpunkt liegt. D. h., da der Schirm von vornherein festgelegt ist, muß sich das Elektron von Anfang an mit hinreichender Genauigkeit in einer bestimmten Ebene befinden, wenn man ein „scharfes Bild“ erhalten, d. h. aus der Lage des Punktes P' , in dem das Lichtquant absorbiert wurde, mit Recht auf die Lage von P schließen will. Da nach der Formel für die Abbildungsgenauigkeit

$$d = \frac{\lambda}{\sin \varepsilon} \quad (1)$$

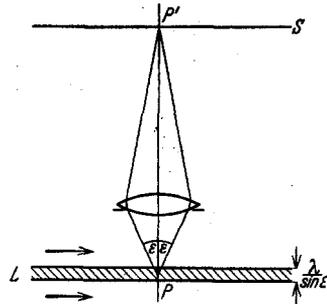


Fig. 1.

(λ Wellenlänge des Lichtes, ε = Öffnungswinkel des zur Abbildung verwendeten Strahlenbündels) die Ortsungenauigkeit ohnehin nicht kleiner als $\frac{\lambda}{\sin \varepsilon}$ werden kann, wird man fordern, daß auch der Streifen, innerhalb dessen sich das Elektron ursprünglich befindet, die Breite $\frac{\lambda}{\sin \varepsilon}$ haben soll.

Auch unter diesen Bedingungen besteht noch eine Schwierigkeit. Nehmen wir einmal den ursprünglichen Impuls sowohl des Lichtquants wie des Elektrons als genau bekannt an (daß das nicht streng erlaubt ist, wird sich für unseren Fall als unwesentlich herausstellen). Ferner kann man zweifellos den Impuls des Elektrons nach dem Stoß beliebig genau messen. Daraus läßt sich dann aber auch genau berechnen, in welcher Richtung das Lichtquant weitergeflogen ist. Das heißt in der Sprache der Wellentheorie: der Öffnungswinkel des gestreuten Lichtbündels wird unendlich klein und daher nach (1) die Breite des Beugungsbildes in P' streng genommen unendlich groß; d. h. das „Bild“ ist völlig verwaschen, von Ortsbestimmung kann keine Rede mehr sein.

Nun liegt das Elektron allerdings von vornherein mit einer gewissen Genauigkeit in einer Ebene; daher ist seine Impulskomponente senkrecht zu dieser Ebene nur ungenau bekannt. Dieser Umstand kann aber die Abbildungsgenauigkeit nicht nennenswert verbessern, denn die beiden Impulskomponenten in der Ebene können ja als völlig bekannt voraus-

gesetzt werden; dadurch kommt bereits nur noch ein Flächenbüschel von Richtungen des gestreuten Lichtquants in Betracht, was für eine Abbildung nicht ausreicht.

Allerdings darf das gestreute Licht nicht als ein „Nadelstrahl“ (oder, unter Berücksichtigung der Impulsungenauigkeit, als ein begrenzter Streifen) aufgefaßt werden, denn der ursprüngliche Ort des Elektrons ist ja nicht bekannt, d. h. P kann an einer beliebigen Stelle der Ausgangsebene liegen und daher kann noch immer jeder Punkt der Linse vom gestreuten Licht getroffen werden. Das löst aber unsere Schwierigkeit nicht auf, denn die Richtung des gestreuten Lichtquants ist bekannt, es muß also durch eine ebene Welle repräsentiert werden, und zeichnet daher zwar in der *Brennebene* der Linse einen Punkt aus, nicht aber in der *Bildebene*, in der der Schirm S liegt.

Vielmehr läßt sich die Schwierigkeit nur auflösen, wenn vorher genauer diskutiert wurde, mit welchem Recht man überhaupt aus der Lage von P' auf die Lage von P schließen kann, d. h. welche *experimentellen* Kriterien dafür bestehen, daß diese Ortsmessung das richtige Resultat geliefert hat.

Die Richtigkeit des aus der Abbildung berechneten Ortes muß dazu durch eine zweite Ortsmessung nachgeprüft werden. Dies läßt sich am einfachsten dadurch erreichen, daß man mehrere Lichtquanten auf das Elektron fallen läßt; zwei in hinreichend kurzem Abstand nacheinander gestreute Lichtquanten sollen dann innerhalb der klassischen Abbildungsgenauigkeit an derselben Stelle P' auftreffen. Nun sieht man aber leicht, daß sich in diesem Falle aus einer nachträglichen Impulsmessung nichts mehr über die Richtung folgern läßt, in der die einzelnen Lichtquanten gestreut worden sind, da der Impuls des Elektrons zwischen dem ersten und dem zweiten Streuprozeß um seinen eigenen Betrag unbestimmt ist; dasselbe gilt offenbar für jede andere Kontrolle der Ortsmessung. Wenn man andererseits die Impulsmessung an dem Elektron vornimmt, ohne die Ortsmessung *vorher* zu kontrollieren, so verliert, infolge der dadurch entstehenden Ortsunkenntnis, die Frage, ob das Mikroskop den Ort des Elektrons richtig liefert, ihren Sinn.

Schwierigkeiten, wie die eben diskutierte, rühren wesentlich davon her, daß der Begriff der Abbildung, der gebildet wurde zur Beschreibung von Beobachtungen, die mit sehr vielen Lichtquanten ausgeführt werden, hier übertragen wird auf einen Vorgang, an dem nur *ein* Lichtquant beteiligt ist, und bei dem deshalb die typisch quantentheoretischen Züge mehr hervortreten.

II. *Quantenelektrodynamische Durchrechnung.* Die folgenden Rechnungen sind ausgeführt mit Hilfe der von Heisenberg und Pauli¹⁾ angegebenen Formulierung der Quantenelektrodynamik. Unser Problem erhält hier folgende Form:

Es ist ein optisches System²⁾ gegeben, das nach der klassischen Elektrodynamik imstande ist, eine Abbildung einer Partikel, speziell eines Elektrons, zu liefern; dies läßt sich quantentheoretisch dadurch einfach ausdrücken, daß wir als Eigenschwingungen des Strahlungsfeldes nicht die stehenden Wellen eines kubischen Hohlraumes wählen, sondern Funktionen der folgenden Gestalt: „unterhalb“ der Linse, d. h. auf derjenigen Seite, wo das zu beobachtende Elektron liegt, sind sie fortschreitende ebene Wellen [die, um ein diskretes Spektrum zu erhalten, einer periodischen Randbedingung mit der Periode L unterworfen werden³⁾] von der Form

$$v_i^{\mathfrak{f}\lambda}(\mathbf{r}) = c \cdot \sqrt{\frac{8}{L^3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{v_k}} \cdot e_i^{\mathfrak{f}\lambda} \cdot e^{2\pi i \mathfrak{f} \cdot \mathbf{r}}. \quad (2)$$

Hierin bedeutet $e_i^{\mathfrak{f}\lambda}$ die Komponente in der i -ten Koordinatenrichtung eines Einheitsvektors, der zu \mathfrak{f} (der Richtung der Wellennormalen) senkrecht steht und die Richtung der durch den Index λ charakterisierten Polarisation angibt; λ kann dabei nur die Werte 1 und 2 annehmen, d. h. der longitudinale Teil der Wellen ist weggelassen; ferner ist

$$v_k = c \cdot |\mathfrak{f}|. \quad (3)$$

(2) gilt unterhalb der Linse; durch die Linse hindurch sollen sich die $v_i^{\mathfrak{f}\lambda}$ nun so fortsetzen, wie es der klassischen Optik entspricht, d. h. so, daß für die zeitabhängigen Funktionen

$$f_i^{\mathfrak{f}\lambda} = v_i^{\mathfrak{f}\lambda} \cdot e^{-2\pi i v_k t} \quad (4)$$

überall die Differentialgleichung

$$\Delta f - \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

gilt (n = Brechungsindex).

¹⁾ W. Heisenberg u. W. Pauli, ZS. f. Phys. 56, 1, 1929; 59, 168, 1930.

²⁾ Über seine besondere Natur braucht nichts vorausgesetzt zu werden; nur anschaulichkeitshalber wird im folgenden stets von einer Linse gesprochen.

³⁾ Siehe L. Landau u. R. Peierls, ZS. f. Phys. 62, 188, 1930.

Der Materieteil unseres Systems besteht aus zwei Elektronen. Der Ort des ersten¹⁾ soll bestimmt werden; entsprechend der Ortskenntnis, die wir vor dem Versuch haben, soll seine anfängliche Eigenfunktion u_0 nur in der Umgebung einer Ebene parallel zur Linse merklich von Null verschieden sein²⁾; einfachheitshalber nehmen wir an, es sei durch ein geeignetes Potential an diese Lage gebunden und befinde sich im tiefsten stationären Zustand. Das zweite Elektron gehört zu einem Atom, das sich, als Repräsentant des Schirmes S , an einem bestimmten Punkt der klassisch bestimmten Bildebene befindet³⁾; es soll ebenfalls im Grundzustand sein. Ferner sei im Anfangszustand des Systems nur in einer einzigen Eigenschwingung $\mathfrak{k}_0 \lambda_0$ des Strahlungsfeldes ein Lichtquant vorhanden. Die Aufgabe läßt sich dann so formulieren: aus dem eben beschriebenen Anfangszustand soll die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, daß nach einer gewissen Zeit das Atom in der Bildebene angeregt ist und daß sich gleichzeitig das erste Elektron am Ort \mathbf{r} befindet. Wir werden erwarten, daß diese Wahrscheinlichkeit, als Funktion von \mathbf{r} betrachtet, nur von Null verschieden ist in der Umgebung desjenigen Punktes, der sich nach der klassischen Optik aus der Lage des angeregten Atoms in der Bildebene berechnen läßt.

Zur Rechnung³⁾ gehen wir aus von der von Oppenheimer⁴⁾ angegebenen Form der Differentialgleichung für die Wechselwirkung von Strahlung und Materie:

$$\left\{ -E + H_0 + \sum_{\mathfrak{t}\lambda} M_{\mathfrak{t}\lambda} h \nu_k + i \sum_n \sum_{\mathfrak{t}\lambda} [\mu_{\mathfrak{t}\lambda}^n (M_{\mathfrak{t}\lambda} + 1)^{1/2} \Delta_{\mathfrak{t}\lambda}^+ - \bar{\mu}_{\mathfrak{t}\lambda}^n M_{\mathfrak{t}\lambda}^{1/2} \Delta_{\mathfrak{t}\lambda}^-] \right\} \Psi(\mathbf{r}^{(n)} \varrho^{(n)} M_{\mathfrak{t}\lambda} t) = 0. \quad (6)$$

Hierin ist $\Psi(\mathbf{r}^{(n)} \varrho^{(n)} M_{\mathfrak{t}\lambda} t)$ die Wellenfunktion, deren Absolutquadrat die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß zur Zeit t das n -te Teilchen den Ortsvektor $\mathbf{r}^{(n)}$ und den Spin $\varrho^{(n)}$ hat und daß sich gleichzeitig in der Eigenschwingung $\mathfrak{k}\lambda$ der Strahlung $M_{\mathfrak{t}\lambda}$ Lichtquanten befinden. Ferner be-

¹⁾ Um Schwierigkeiten zu vermeiden, die mit dem gestellten Problem nichts zu tun haben, nehmen wir die klassische Statistik für die Elektronen an und reden im folgenden stets von dem „ersten“ und dem „zweiten“ Elektron.

²⁾ Von diesen speziellen Voraussetzungen über die Form der Eigenfunktionen wird in der folgenden Rechnung kein Gebrauch gemacht, erst in der Diskussion des Resultats spielen sie eine Rolle.

³⁾ Sie ist weitgehend analog insbesondere der zweiten der Arbeiten von S. Kikuchi, ZS. f. Phys. **66**, 568, 1930 (I); **68**, 803, 1931 (II), für deren Mitteilung im Manuskript ich Herrn Kikuchi zu großem Dank verpflichtet bin.

⁴⁾ J. R. Oppenheimer, Phys. Rev. **35**, 461, 1930.

deuten in (6): E den Energieoperator $\left(-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}\right)$; H_0 die Hamiltonfunktion der Materie ohne Wechselwirkung mit der Strahlung [über gleiche Indizes i und ρ, σ (Spinvariable) wird im folgenden stets summiert]:

$$H_0 = \sum_n \left[\left(\frac{\hbar c}{2\pi i} \alpha^i(n) \frac{\partial}{\partial q_i^{(n)}} + e \Phi_i^0 \right) + m c^2 \alpha^4(n) + e \Phi_0^0 \right] - \sum_{n \geq n'} \frac{e_n e_{n'}}{r_{nn'}}. \quad (7)$$

Das erste Glied von H_0 ist der Diracsche Operator für freie Elektronen im äußeren Felde Φ^0 ; das zweite, das die Coulombsche Wechselwirkung und die (als additive Konstante auftretende) Selbstenergie der Elektronen enthält, kann in unserem Falle weggelassen werden. In (6) ist weiter

$$\mu_{\mathfrak{k}\lambda}^n = e_n \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi}} \alpha^i(n) v_i^{\mathfrak{k}\lambda}(r^{(n)}), \quad (8)$$

worin $v_i^{\mathfrak{k}\lambda}$ die oben definierten Funktionen sind; $\Delta_{\mathfrak{k}\lambda}^+$ und $\Delta_{\mathfrak{k}\lambda}^-$ sind Operatoren, die die Zahl der Lichtquanten in der Eigenschwingung $\mathfrak{k}\lambda$ um 1 erhöhen bzw. erniedrigen.

Um nach (6) aus den gegebenen Anfangsbedingungen die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu berechnen, entwickeln wir nach Lösungen des ungestörten Problems und treiben Störungsrechnung nach der Methode der Variation der Konstanten. Dabei haben wir es nur mit zwei Elektronen zu tun; wir lassen daher den Index n weg und kennzeichnen die auf das zweite Elektron bezüglichen Eigenfunktionen, Energien und Koordinaten durch einen Strich; ferner soll stets der Index l die Zustände des ersten, der Index m die des zweiten Elektrons numerieren. Dann läßt sich schreiben

$$\begin{aligned} & \Psi(r \rho r' \rho' M_{\mathfrak{k}\lambda} t) \\ &= \sum_{l m} a_{l, m}(M_{\mathfrak{k}\lambda} t) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} (E_l + E'_m + \sum_{\mathfrak{k}\lambda} M_{\mathfrak{k}\lambda} \hbar \nu_{\mathfrak{k}}) t} u_l(r \rho) u'_m(r' \rho'). \end{aligned} \quad (9)$$

Hierin sind also die u die Eigenfunktionen der ungestörten Elektronen; der Exponentialfaktor enthält die Zeitabhängigkeit des ungestörten Systems; die Aufgabe der Störungsrechnung ist, die $a_{l, m}$ zu bestimmen. Dazu wird (9) in (6) eingesetzt. Dabei fällt das von $H_0 + \sum_{\mathfrak{k}\lambda} M_{\mathfrak{k}\lambda} \hbar \nu_{\mathfrak{k}}$ herrührende

Glied weg gegen denjenigen Summanden der zeitlichen Ableitung, der die Ableitung der e -Potenz enthält; also bleibt stehen

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar}{2\pi i} \sum_{l m} \frac{\partial a_{l, m}(M_{\mathfrak{k}\lambda} t)}{\partial t} e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} (E_l + E'_m + \sum_{\mathfrak{k}\lambda} M_{\mathfrak{k}\lambda} \hbar \nu_{\mathfrak{k}}) t} u_l(r \rho) u'_m(r' \rho') \\ &= -i \sum_{l m} \sum_{\mathfrak{k}\lambda} [(\mu_{\mathfrak{k}\lambda} + \mu'_{\mathfrak{k}\lambda}) (M_{\mathfrak{k}\lambda} + 1)^{1/2} \Delta_{\mathfrak{k}\lambda}^+ - (\bar{\mu}_{\mathfrak{k}\lambda} + \bar{\mu}'_{\mathfrak{k}\lambda}) \cdot M_{\mathfrak{k}\lambda}^{1/2} \Delta_{\mathfrak{k}\lambda}^-] \\ & \cdot a_{l, m}(M_{\mathfrak{k}\lambda} t) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} (E_l + E'_m + \sum_{\mathfrak{k}\lambda} M_{\mathfrak{k}\lambda} \hbar \nu_{\mathfrak{k}}) t} u_l(r \rho) u'_m(r' \rho'). \end{aligned} \quad (10)$$

Nun entwickelt man $\mu_{t\lambda} \cdot u_l$ und $\mu'_{t\lambda} \cdot u'_m$ nach u_l bzw. u'_m

$$\mu_{t\lambda} u_l(\mathbf{r} \varrho) = \sum_{l'} C_{l'l}^{t\lambda} u_{l'}(\mathbf{r} \varrho), \quad (11)$$

$$C_{l'l}^{t\lambda} = \int \mu_{t\lambda} u_l(\mathbf{r} \varrho) \bar{u}_{l'}(\mathbf{r} \varrho) d\tau \quad (12)$$

und analog für das zweite Elektron. Die Entwicklungskoeffizienten von $\bar{\mu}_{t\lambda}$ nennen wir $D_{l'l}^{t\lambda}$; es gilt

$$D_{l'l}^{t\lambda} = \bar{C}_{l'l}^{t\lambda}. \quad (12a)$$

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten von Gliedern mit gleichen Indizes erhält man schließlich aus (10) die endgültige Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial a_{l,m}(M_{t\lambda} t)}{\partial t} \\ &= -i \sum_{t\lambda} \left\{ \sum_{l'} [C_{l'l}^{t\lambda} (M_{t\lambda} + 1)^{1/2} a_{l',m}(M_{t\lambda} + 1, t) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} (E_{l'} - E_l + \hbar \nu_k) t} \right. \\ & \quad \left. - D_{l'l}^{t\lambda} M_{t\lambda}^{1/2} a_{l',m}(M_{t\lambda} - 1, t) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} (E_{l'} - E_l - \hbar \nu_k) t}] \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m'} [C_{m'l}^{t\lambda} (M_{t\lambda} + 1)^{1/2} a_{l,m'}(M_{t\lambda} + 1, t) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} (E_{m'} - E_m + \hbar \nu_k) t} \right. \\ & \quad \left. - D_{m'l}^{t\lambda} M_{t\lambda}^{1/2} a_{l,m'}(M_{t\lambda} - 1, t) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} (E_{m'} - E_m - \hbar \nu_k) t}] \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Ehe wir zur näherungsweisen Lösung dieser Gleichung schreiten, müssen wir uns noch davon Rechenschaft geben, welche Funktion wir eigentlich suchen. Es ist offenbar nicht das in (9) dargestellte Ψ , das wir brauchen, sondern eine Funktion der Koordinaten des ersten und des Zustandes des zweiten Elektrons, die sich aus den $a_{l,m}$ folgendermaßen ergibt:

$$\psi(\mathbf{r} \varrho m 0_{t\lambda} t) = \sum_l a_{l,m}(0_{t\lambda} t) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} E_l t} u_l(\mathbf{r} \varrho). \quad (14)$$

In (14) ist bereits die spezielle Bedingung gestellt, daß in keiner Eigenschwingung noch Lichtquanten vorhanden sein sollen; denn wir hatten ursprünglich nur *ein* Lichtquant angenommen; dieses muß, um das Atom in den Zustand m zu heben, am ersten Elektron gestreut und dann von dem Atom absorbiert worden sein.

Genau genommen interessiert uns auch nicht ψ , sondern seine zeitliche Ableitung¹⁾.

¹⁾ Diese Überlegung verdanke ich Herrn Kikuchi (vgl. l. c. II).

Sie hat die Form

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_l a_{l,m}(0_{t\lambda} t) u_l \frac{\partial}{\partial t} e^{-\frac{2\pi i}{h} E_l t} + \sum_l \frac{\partial a_{l,m}(0_{t\lambda} t)}{\partial t} u_l e^{-\frac{2\pi i}{h} E_l t}. \quad (15)$$

Die beiden Glieder von (15) bedeuten eine zeitliche Änderung von ψ aus zwei Gründen. Das erste Glied verschwindet nicht, selbst wenn $a_{l,m}$ konstant ist, d. h. die Wechselwirkung zwischen Materie und Strahlung vernachlässigt wird; es entspricht dem Auseinanderlaufen des Wellenpakets des ersten Elektrons. Dies interessiert uns aber gar nicht, da es den Vorgang der Ortsbestimmung nicht mehr beeinflusst. Wir brauchen daher nur das zweite Glied

$$\varphi(r, \varrho, m, 0_{t\lambda} t) = \sum_l \frac{\partial a_{l,m}(0_{t\lambda} t)}{\partial t} e^{-\frac{2\pi i}{h} E_l t} u_l(r, \varrho) \quad (16)$$

zu berücksichtigen; während $|\psi|^2$ die Wahrscheinlichkeit dafür bedeutet, daß zu einer bestimmten Zeit das erste Elektron die Koordinaten r, ϱ hat und das zweite Elektron angeregt ist, stellt $\bar{\varphi} \psi + \bar{\psi} \varphi$ die Wahrscheinlichkeit dafür dar, daß zu derselben Zeit das erste Elektron die Koordinaten r, ϱ hat und das zweite Elektron angeregt wird.

Wir lösen nun Gleichung (13) näherungsweise, indem wir jeweils auf der rechten Seite für $a_{l,m}$ die n -te Näherungslösung einsetzen und dadurch links die $(n+1)$ -te Näherung erhalten. Die Ausgangslösung lautet

$$a_{0,c}(1_{t_0 \lambda_0} t) = 1; \text{ alle anderen } a = 0. \quad (17)$$

Da wir absehen von den Prozessen, in denen ein Lichtquant das zweite Elektron anregt, ohne vorher am ersten gestreut worden zu sein, liefern in erster und zweiter Näherung nur die zum ersten Elektron gehörigen Glieder in (13) einen Beitrag. Man erhält so den Übergang des Lichtquants in irgendeine andere Eigenschwingung $k\lambda$, wobei gleichzeitig das erste Elektron über einen Zwischenzustand l' in einen neuen Zustand l übergeht:

$$a_{l',0}^{(1)}(0_{t_0 \lambda_0} t) = C_{0,l'}^{t_0 \lambda_0} \frac{e^{-\frac{2\pi i}{h}(E_0 - E_{l'} + h\nu_0)t} - 1}{E_0 - E_{l'} + h\nu_0}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & a_{l,0}^{(2)}(1_{t\lambda} t) \\ &= \sum_{l'} C_{0,l'}^{t_0 \lambda_0} D_{l,l'}^{t\lambda} \left(\frac{e^{-\frac{2\pi i}{h}(E_0 - E_l + h\nu_0 - h\nu_k)t} - 1}{(E_0 - E_{l'} + h\nu_0)(E_0 - E_l + h\nu_0 - h\nu_k)} \frac{e^{-\frac{2\pi i}{h}(E_{l'} - E_l - h\nu_k)t} - 1}{(E_0 - E_{l'} + h\nu_0)(E_{l'} - E_l - h\nu_k)} \right). \quad (19) \end{aligned}$$

(Konstante Faktoren sind hier und im folgenden stets weggelassen. Der obere Index von a numeriert die Näherungen.)

Wir machen die Voraussetzung, daß $h\nu_0$ groß ist gegen die Energiesprünge des Elektrons und streichen den zweiten Summanden in (19). Um das streng zu rechtfertigen, müßte man als Ausgangslösung statt (17) nach Weisskopf und Wigner¹⁾ ein exponentiell mit der Zeit abnehmendes $a^{(0)}$ wählen; dann würde sich herausstellen, daß der zweite Summand sehr rasch abklingt. Seine physikalische Bedeutung ist die rasch abklingende Anregung der Eigenfrequenzen des Atoms durch den Stoß des einfallenden Wellenzuges²⁾.

In dritter Näherung erhalten wir nun die Absorption des Lichtquants durch das zweite Elektron, also den Vorgang, der uns interessiert; daher brauchen wir, da in φ [siehe (16)] nur die zeitliche Ableitung von a vorkommt, nicht mehr zu integrieren. Wir nehmen ferner dem physikalischen Sinn des Experiments entsprechend an, der Abstand der betrachteten Energieniveaus des absorbierenden Atoms sei genau gleich der Energie $h\nu_0$ des zur Beobachtung verwendeten Lichtes:

$$E'_m - E'_0 = h\nu_0. \quad (20)$$

Dann ergibt sich

$$\frac{\partial a_{i,m}^{(3)}(0_{t_2} t)}{\partial t} = \sum_{i_2} \sum_{\nu'} C_0^{i_0 \lambda_0} D_{\nu' i_2}^{i_2 \lambda} C_{0m}^{i_2 \lambda} \frac{e^{-\frac{2\pi i}{h}(E_0 - E_{\nu'})t} - e^{-\frac{2\pi i}{h}(h\nu_k - h\nu_0)t}}{(E_0 - E_{\nu'} + h\nu_0)(E_0 - E_{\nu'} + h\nu_0 - h\nu_k)}. \quad (21)$$

Dies wird in (16) eingesetzt. Gleichzeitig ersetzen wir die C und D durch ihre Werte nach (12) und (8). Da in (21) drei C -Ausdrücke vorkommen, treten dabei drei Volumenintegrale und je drei Summationen über die Variablen ϱ und σ [auf welche die α^i in (8) wirken] und den Index i auf; wir unterscheiden sie durch die Indizes 1, 2, 3. Die dabei entstehende Formel ist aber nicht ganz so umständlich, wie sie aussieht, da sich durch Fortlassung des Unwesentlichen alsbald erhebliche Vereinfachungen ergeben. Sie lautet

$$\begin{aligned} & \varphi(r \varrho m 0_{t_2} t) \\ &= \sum_l \sum_{i_2} \sum_{\nu'} \int d\tau_1 \int d\tau_2 \int d\tau_3 \alpha_{\varrho_1 \sigma_1}^{i_1} \alpha_{\varrho_2 \sigma_2}^{i_2} \alpha_{\varrho_3 \sigma_3}^{i_3} v_{i_1}^{i_0 \lambda_0}(r_1) \bar{v}_{i_2}^{i_2 \lambda}(r_2) v_{i_3}^{i_2 \lambda}(r_3) \\ & \cdot u_0(r_1 \sigma_1) \bar{u}_{\nu'}(r_1 \varrho_1) u_{\nu'}(r_2 \sigma_2) \bar{u}_l(r_2 \varrho_2) u'_0(r_3 \sigma_3) \bar{u}'_m(r_3 \varrho_3) u_l(r \varrho) \\ & \cdot \frac{e^{-\frac{2\pi i}{h} E_l t} e^{-\frac{2\pi i}{h} (E_0 - E_{\nu'}) t} - e^{-\frac{2\pi i}{h} (h\nu_k - h\nu_0)t}}{(E_0 - E_{\nu'} + h\nu_0)(E_0 - E_{\nu'} + h\nu_0 - h\nu_k)}. \quad (22) \end{aligned}$$

¹⁾ V. Weisskopf u. E. Wigner, ZS. f. Phys. **63**, 54, 1930.

²⁾ Vgl. O. Halpern, ebenda **67**, 523, 1931.

Nun interessiert uns ja nur der Ort und nicht der Spin der Elektronen; da man sich auch leicht überlegen kann, daß die Summationen über die Spinvariablen nichts Wesentliches an der betrachteten Funktion ändern, können wir die sämtlichen Spinvariablen weglassen. Ferner kann man in Gleichung (2) die Einheitsvektoren aus den v_i^{λ} herausnehmen, d. h. neue Funktionen V^{λ} definieren, die beispielsweise unterhalb der Linse die Form haben:

$$V^{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{v_k}} e^{2\pi i \lambda \mathbf{r}}; \quad (23)$$

dann ist nämlich nach Kikuchi [siehe etwa l. c. I, Gleichung (22)] die Summation über λ und $i_1 i_2 i_3$ gleichwertig der Ausübung eines Operators, der nur die Ableitungen nach den Koordinaten enthält, auf die Funktion (22), wenn in dieser die v_i^{λ} durch die V^{λ} ersetzt werden. Dieser Operator kann aber auch weggelassen werden, da er das einzige, was uns an den in (22) vorkommenden Funktionen interessiert, nämlich ihre Eigenschaft, nur an bestimmten Stellen des Raumes von Null verschieden zu sein, nicht ändert; wir müssen dann nur das jetzt definitiv falsche Gleichheitszeichen in den aus (22) hervorgehenden Formeln durch ein Zeichen wie \rightarrow ersetzen, das bedeutet, daß beide Seiten gleichzeitig verschwinden.

Außerdem läßt sich in (22) die Summation über ν ausführen. Außer in den u kommt ν nur in dem Ausdruck $E_0 - E_{\nu} + h\nu_0$ im Nenner vor; hier kann E_{ν} aber durch einen gewissen mittleren Wert ersetzt werden, weil bei dem Prozeß nach dem Impulssatz nur ein enger Wertebereich von E_{ν} mit nennenswerter Wahrscheinlichkeit vorkommt [für andere Werte verschwindet das Integral über \mathbf{r}_2 durch Interferenz¹⁾]. Die Summation geschieht dann nach der Relation

$$\sum_{\nu} \bar{u}_{\nu}(\mathbf{r}_1) u_{\nu}(\mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (24)$$

Nach (24) liefert jetzt die Integration über \mathbf{r}_2 den Faktor Eins; dabei muß überall \mathbf{r}_2 durch \mathbf{r}_1 ersetzt werden. Wenn wir noch den Ausdruck $1/(E_0 - E_{\nu} + h\nu_0)$ als konstanten Faktor weglassen, erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r} m 0 t) &\rightarrow \sum_i \sum_{\lambda} \int d\tau_3 \int d\tau_3 V^{\lambda_0}(\mathbf{r}_1) \bar{V}^{\lambda}(\mathbf{r}_1) V^{\lambda}(\mathbf{r}_3) u_0(\mathbf{r}_1) \bar{u}_{\lambda}(\mathbf{r}_1) u_{\lambda}(\mathbf{r}) \\ &\cdot u'_0(\mathbf{r}_3) \bar{u}'_m(\mathbf{r}_3) e^{-\frac{2\pi i}{h} E_1 t} e^{-\frac{2\pi i}{h} (E_0 - E_{\nu}) t} \frac{e^{-\frac{2\pi i}{h} (h\nu_k - h\nu_0) t}}{E_0 - E_{\nu} + h\nu_0 - h\nu_k}. \quad (25) \end{aligned}$$

¹⁾ Dies ist allerdings nur richtig, solange, wie gewöhnlich, die Frequenzverschiebung beim Comptoneffekt klein ist gegen den Betrag der Frequenz.

Um die Summation über \mathfrak{f} auszuführen, betrachten wir folgenden Bestandteil von (25) für sich:

$$\sum_{\mathfrak{f}} \bar{V}^{\mathfrak{f}}(\mathbf{r}_1) V^{\mathfrak{f}}(\mathbf{r}_3) \frac{e^{-\frac{2\pi i}{h}(E_0 - E_l)t} - e^{-\frac{2\pi i}{h}(h\nu_k - h\nu_0)t}}{E_0 - E_l + h\nu_0 - h\nu_k}. \quad (26)$$

Indem wir ihn mit $h \cdot e^{-2\pi i\nu_0 t}$ multiplizieren und die Abkürzung

$$E_0 - E_l + h\nu_0 = h\nu_l \quad (27)$$

eingeführen, erhalten wir den Ausdruck

$$S_l(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, t) = \sum_{\mathfrak{f}} \bar{V}^{\mathfrak{f}}(\mathbf{r}_1) V^{\mathfrak{f}}(\mathbf{r}_3) \frac{e^{-2\pi i\nu_l t} - e^{-2\pi i\nu_k t}}{\nu_l - \nu_k}. \quad (28)$$

Diese Summe können wir mit Hilfe von (23) und (5) dadurch auswerten, daß wir untersuchen, ob auch S_l , als Funktion eines der beiden Ortsvektoren und der Zeit, der Schwingungsgleichung (5) genügt. Da S_l bis auf ein Vorzeichen in \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_3 symmetrisch ist, können wir dabei willkürlich etwa \mathbf{r}_1 fest und \mathbf{r}_3 variabel wählen, was wir durch einen Index am Δ -Symbol andeuten. Nach (4) und (5) ist

$$\Delta_s S_l = \sum_{\mathfrak{f}} \left(\frac{2\pi n \nu_k}{c}\right)^2 \bar{V}^{\mathfrak{f}}(\mathbf{r}_1) V^{\mathfrak{f}}(\mathbf{r}_3) \frac{e^{-2\pi i\nu_l t} - e^{-2\pi i\nu_k t}}{\nu_l - \nu_k}. \quad (29)$$

Ferner ergibt sich

$$\left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 S_l}{\partial t^2} = \sum_{\mathfrak{f}} \left(\frac{2\pi n}{c}\right)^2 \bar{V}^{\mathfrak{f}}(\mathbf{r}_1) V^{\mathfrak{f}}(\mathbf{r}_3) \frac{\nu_l^2 e^{-2\pi i\nu_l t} - \nu_k^2 e^{-2\pi i\nu_k t}}{\nu_l - \nu_k}. \quad (30)$$

Die Differenz dieser beiden Ausdrücke verschwindet nun keineswegs. Um sie zu diskutieren, nehmen wir zunächst an, \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_3 lägen beide unterhalb der Linse, d. h. in dem Gebiet, wo (23) gilt. Hier ist (wie stets unter Weglassung konstanter Faktoren)

$$\Delta_s S_l - \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 S_l}{\partial t^2} = \sum_{\mathfrak{f}} \frac{1}{\nu_k} e^{2\pi i\mathfrak{f}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)} (\nu_k + \nu_l) e^{-2\pi i\nu_l t}, \quad (31)$$

$$= (S_l' + \nu_l S_l'') e^{-2\pi i\nu_l t}. \quad (32)$$

Die beiden reinen Raumfunktionen S_l' und S_l'' lassen sich leicht auswerten. Mit der Abkürzung

$$\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{31} \quad (33)$$

wird

$$\begin{aligned} S_l'(\mathbf{r}_{31}) &= \sum_{k_x, k_y, k_z} e^{2\pi i k_x x_{31}} e^{2\pi i k_y y_{31}} e^{2\pi i k_z z_{31}} \\ &= \delta(x_{31}) \cdot \delta(y_{31}) \cdot \delta(z_{31}) = \delta(\mathbf{r}_{31}). \end{aligned} \quad (34)$$

Um S'_i auszuwerten, ersetzen wir die Summe über \mathfrak{k} durch ein Integral und führen für \mathfrak{k} Polarkoordinaten k, ϑ, φ ein, wobei wir als Polarachse die Richtung von \mathbf{r}_{31} wählen. Bis auf konstante Faktoren ist dann $\nu_{\mathfrak{k}} = k$ und

$$S'_i(\mathbf{r}_{31}) = \int \frac{1}{k} e^{2\pi i k r_{31} \cos \vartheta} k^2 dk \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (35)$$

Die Integration über die Winkel liefert

$$S'_i(\mathbf{r}_{31}) = \frac{1}{r_{31}} \int_0^{\infty} (e^{2\pi i k r_{31}} - e^{-2\pi i k r_{31}}) dk \quad (36)$$

oder, wenn wir das Integral durch Einführung eines kleinen reellen Gliedes im Exponenten konvergent machen,

$$\begin{aligned} S'_i(\mathbf{r}_{31}) &= \frac{1}{r_{31}} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} (e^{(2\pi i r_{31} - \alpha)k} - e^{(-2\pi i r_{31} - \alpha)k}) dk \\ &= \frac{1}{r_{31}} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\pi i r_{31} - \alpha} + \frac{1}{2\pi i r_{31} + \alpha} \right) = \frac{1}{\pi i r_{31}^2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Der Ausdruck $(S'_i + \nu_i S''_i)$, d. h. der Wert von (32) zur Zeit $t = 0$, wird also für $r_{31} = 0$ singularär; dagegen können wir ihn für $r_{31} > 0$ vernachlässigen, denn S'_i nimmt mit $1/r_{31}^2$ ab, ist also von der Größenordnung der Coulombschen Kräfte, die in dieser ganzen Rechnung vernachlässigt werden, und S'_i ist ohnehin die δ -Funktion.

Dies läßt sich so interpretieren: S_i genügt, als Funktion von \mathbf{r}_3 betrachtet, in hinreichender Entfernung von \mathbf{r}_1 in der Tat der gewöhnlichen Differentialgleichung der Lichtwellen; Gleichung (5) garantiert uns, daß auch die nicht explizite bekannten Ausdrücke der $V^{\mathfrak{f}}$ in und jenseits der Linse dasselbe Resultat liefern. Dagegen befindet sich im Punkte \mathbf{r}_1 nach (32) eine mit der Frequenz ν_i schwingende Singularität, welche Wellen derselben Frequenz liefern muß. Zur Zeit $t = 0$ ist nach (28) $S_i = 0$ und $\frac{\partial S_i}{\partial t} = S''_i$; da ferner nach (32) anderweitige „Lichtquellen“ als $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1$ für S_i nicht vorhanden sind, muß es zunächst unterhalb der Linse die Form einer Kugelwelle haben, die sich im Moment $t = 0$ vom Punkte \mathbf{r}_1 auszubreiten beginnt:

$$\begin{aligned} S_i(\mathbf{r}_{31}, t < \frac{r_{31}}{c}) &= 0, \\ S_i(\mathbf{r}_{31}, t > \frac{r_{31}}{c}) &= \frac{1}{r_{31}} e^{-2\pi i \nu_i (t - \frac{r_{31}}{c})} \end{aligned} \quad (38)$$

(bis auf die kleinen Abweichungen, die an der Wellenfront und durch das Glied S_l'' entstehen). Jenseits der Linse setzt sich S_l gemäß der klassischen Optik fort und ist insbesondere in der durch die Lage von \mathbf{r}_1 definierten Bildebene innerhalb der klassischen Genauigkeitsgrenzen (Größe des Beugungsscheibchens) nur in einem Punkte von Null verschieden. Messen wir r_{31} längs der „Lichtstrahlen“ von S_l , oder besser, ersetzen wir r_{31} durch den Lichtweg $l_{31} = \int n dr_{31}$ im Sinne des Fermatschen Prinzips, so können wir (38) in etwas allgemeinerer Form für den ganzen Raum beibehalten:

$$S_l(\mathbf{r}_{31}, t > \frac{l_{31}}{c}) = f(\mathbf{r}_{31}) e^{-2\pi i \nu_l (t - \frac{l_{31}}{c})}. \quad (39)$$

Die Formeln (38), (39) geben bereits dasselbe anschauliche Abbild des betrachteten physikalischen Vorganges wie die klassische Theorie; da aber in (25) über \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_3 noch integriert wird, ist noch eine genauere Betrachtung dieser Formel nötig. Sie erhält jetzt folgende Gestalt:

$$\varphi(\mathbf{r} m \mathbf{0} t) \gg \sum_l \int d\tau_1 \int d\tau_3 V^{l_0}(\mathbf{r}_1) u_0(\mathbf{r}_1) \bar{u}_l(\mathbf{r}_1) S_l(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3 t) u'_l(\mathbf{r}_3) \bar{u}'_m(\mathbf{r}_3) e^{-\frac{2\pi i}{h}(E_l - h\nu_0)t} u_l(\mathbf{r}). \quad (40)$$

Diesen Ausdruck werden wir im folgenden für verschiedene Anfangsbedingungen diskutieren.

III. Diskussion des Resultats. Wir wollen zunächst zeigen, daß unter den im ersten Teil betrachteten Voraussetzungen nach (40) in der Tat eine Abbildung zustande kommt. u_0 ist dann nur in der Umgebung der vorgegebenen Ebene von Null verschieden; nur dort kann also die Integration über \mathbf{r}_1 einen endlichen Wert ergeben. Also brauchen wir nur diejenigen $S_l(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3 t)$ zu betrachten, für die \mathbf{r}_1 in dieser Ebene liegt. Andererseits sind die u' nur in einem Punkte der zugeordneten Bildebene von Null verschieden; also spielen für den Wert von (40) nur die Werte von $S_l(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3 t)$, wo \mathbf{r}_3 in dieser Ebene liegt, eine Rolle. Nun ist aber $S_l(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3 t)$ bei festem \mathbf{r}_1 nur in einem Punkte dieser Ebene bis auf die klassische Abbildungsungenauigkeit nicht Null; ferner liefert bei der Integration über \mathbf{r}_3 nur dasjenige $S_l(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3 t)$ einen Beitrag, das gerade an demselben Punkte wie die u' einen endlichen Wert hat. Also ist durch die Lage der u' (d. h. des Atoms in der Bildebene) infolge der Eigenschaften von S_l rückwärts (innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der klassischen Abbildung) ein einziger Punkt \mathbf{r}_1 ausgezeichnet, in dem die Integration über \mathbf{r}_1 einen endlichen Wert ergibt. Wenn man nun noch zeigen könnte, daß die Summation über l die δ -Funktion von $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$ ergibt, so würde die Aufgabe gelöst scheinen, denn dann wäre

durch die Lage des Atoms in der Bildebene ein Punkt \mathbf{r} bestimmt, in dessen nächster Umgebung die Wahrscheinlichkeit $\bar{\varphi} \psi + \bar{\psi} \varphi$ allein von Null verschieden wäre.

Dies ist nun aber nicht richtig, da in (40) außer den Eigenfunktionen $\bar{u}_l(\mathbf{r}_1) \cdot u_l(\mathbf{r})$ noch andere von l abhängige Glieder vorkommen; es wäre aber auch gar nicht zu erwarten. Denn aus (38) bzw. (39) folgt, daß S_l , wenn \mathbf{r}_1 in der Objekt- und \mathbf{r}_3 in der Bildebene liegt, und mit S_l der ganze Ausdruck (40) erst für Zeiten $t > \frac{l_{31}}{c}$ einen endlichen Wert annimmt, wobei jetzt l_{31} der bekannte Lichtweg zwischen den beiden ausgezeichneten Punkten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_3 ist; dies ist einfach die klassisch triviale, von Kikuchi (l. c. I) auch für die Quantenelektrodynamik abgeleitete Tatsache, daß die betrachtete Absorptionswahrscheinlichkeit erst von endlicher Größe wird nach der Zeit, die das Licht braucht, um vom ersten zum zweiten Elektron zu gelangen. Zu diesem Zeitpunkt kann aber das erste Elektron gar nicht mehr auf einen so engen Bereich komprimiert sein wie im Moment der Streuung des Lichtquants. Man sieht auch nach (27) und (39), daß bei der Multiplikation der beiden noch von l (und der Zeit) abhängigen Glieder in (40) zwar das Glied $E_l t$ im Exponenten fortfällt, aber, außer einem unwesentlichen periodischen Zeitfaktor von konstanter Frequenz, noch der Faktor $e^{-\frac{2\pi i}{h} E_l \frac{l_{31}}{c}}$ stehen bleibt. Betrachten wir einen Augenblick l_{31} als eine ortsunabhängige Größe. Die Summe

$$\sum_l \bar{u}_l(\mathbf{r}_1) u_l(\mathbf{r}) e^{-\frac{2\pi i}{h} E_l \frac{l_{31}}{c}} \quad (41)$$

stellt dann gerade dasjenige der Diracgleichung genügende Wellenpaket zur Zeit $t = t_0 + \frac{l_{31}}{c}$ dar, das zur Zeit $t = t_0$ die δ -Funktion von $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$ war; also genau das Wellenpaket, das wir zu erwarten haben. Man kann rückwärts aus der Wellenfunktion zur Zeit t durch die Transformationstheorie auf die Ortswahrscheinlichkeit zur Zeit $t_0 = t - \frac{l_{31}}{c}$ schließen. Führt man diese Rechnung an (41) durch, so ergibt sich trivialerweise eben die δ -Funktion, und für die Ortswahrscheinlichkeit (40) ein Paket der Größe $\frac{\lambda}{\sin \varepsilon}$ (klassische Abbildungsgenauigkeit).

Diese Betrachtungen muß man jetzt etwas verfeinern, da l_{31} innerhalb der durch die Dicke Δz der Objektebene gegebenen Grenzen variieren kann. Reduziert man das Wellenpaket (41) also auf eine Zeit, die etwa

dem Mittelwert von l_{31} in der Ebene nach der Gleichung $t_0 = t - \frac{\overline{l_{31}}}{c}$ entspricht, so bleibt ein Wellenpaket der Form (41) stehen, das noch Größen der Ordnung $\frac{l_{31}}{c} \sim \frac{\Delta z}{c}$ im Exponenten enthält. Da sich ein ursprünglich punktförmig zusammengedrängtes Elektron mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, wird also die Ausdehnung des reduzierten Wellenpakets in allen Richtungen von der Ordnung Δz . Also bekommt man auch für die Ortswahrscheinlichkeit ein Paket der Größenordnung $\frac{\lambda}{\sin \varepsilon}$. Der Zeitpunkt t_0 des Streuprozesses läßt sich übrigens durch Messung des Zeitpunktes der Absorption nur bis auf eine Ungenauigkeit von der Größe $> \frac{1}{v_1}$ festlegen.

Da in der Rechnung von der speziellen Gestalt der Eigenfunktionen u und u' kein Gebrauch gemacht wurde, können wir mit Hilfe von (40) auch andere Anfangsbedingungen diskutieren. Wenn beispielsweise der Ort des Elektrons von Anfang an sehr genau bekannt, d. h. u_0 nur in der Umgebung eines Punktes von Null verschieden ist, so kann φ nur dann einen endlichen Wert annehmen, wenn der durch u_0 ausgezeichnete Punkt \mathbf{r}_1 gerade mit dem durch die u' und S_i ausgezeichneten zusammenfällt.

Ferner ergibt sich aus unseren Formeln noch, daß man, unter genauer Umkehrung des im Teil I diskutierten Einwandes gegen die Ortsmessung, etwas über den Impuls des Elektrons erfahren kann, wenn man das absorbierende Atom nicht in die *Bildebene*, sondern in die *Brennebene* setzt. Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall, daß über den ursprünglichen Ort des Elektrons gar nichts bekannt sei; hingegen nehmen wir die anfänglichen Impulse des Lichtquants und des Elektrons als genau bekannt an. Anschaulich würde man in diesem Falle so argumentieren: ein in der Brennebene absorbiertes Lichtquant muß, ehe es durch die Linse ging, einer ebenen Welle gleichwertig gewesen sein, deren Fortpflanzungsrichtung sich aus der Lage des absorbierenden Atoms berechnen läßt. Andererseits ist durch Energie- und Impulssatz beim Comptoneffekt jedem Streuwinkel eine Frequenz eindeutig zugeordnet; man kennt also Richtung und Betrag des Impulses des gestreuten Lichtquants und kann daraus den Impuls des Elektrons nach dem Stoß berechnen.

Um diese Vorstellung nachzuprüfen, betrachten wir nicht die Ortswahrscheinlichkeit $\bar{\varphi} \psi + \bar{\psi} \varphi$, sondern die Wahrscheinlichkeit

$$\bar{a}_{i,m} \frac{\partial a_{i,m}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{a}_{i,m}}{\partial t} a_{i,m}$$

dafür, daß das erste Elektron im Zustand l ist und das Atom in der Brennebene angeregt wird. Nach (16) und (40) ist

$$\frac{\partial a_{l,m}(0,t)}{\partial t} \rightarrow \int d\tau_1 \int d\tau_3 V^{l_0}(\mathbf{r}_1) u_0(\mathbf{r}_1) \bar{u}_l(\mathbf{r}_1) S_l(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, t) u'_0(\mathbf{r}_3) \bar{u}'_m(\mathbf{r}_3) e^{2\pi i \nu_0 t}. \quad (42)$$

Zur Diskussion dieser Gleichung benutzen wir die Tatsache, daß S_l bis auf das Vorzeichen von \mathbf{r}_{31} , d. h. bis auf die Fortpflanzungsrichtung der Wellen, in \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_3 symmetrisch ist, so daß es also auch als eine von \mathbf{r}_3 ausgehende Kugelwelle im \mathbf{r}_1 -Raum angesehen werden kann. Da die u' nur in der Umgebung eines Punktes der Brennebene von Null verschieden sind, hat das Integral über \mathbf{r}_3 nur für das von diesem Punkte ausgehende $S_l(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, t)$ einen endlichen Wert; dieses S_l ist aber unterhalb der Linse eine ebene Welle der Form

$$S_l(\mathbf{r}_1, t) = e^{-2\pi i(\nu_l t + \mathfrak{k}_l \mathbf{r}_1)}. \quad (43)$$

[Der Vektor \mathfrak{k}_l wurde in (43) so definiert, daß er die zur Wellennormalen entgegengesetzte Richtung, also die nach der anschaulichen Betrachtung für das wirkliche gestreute Lichtquant berechnete hat.] Da auch die Eigenfunktionen des als völlig frei betrachteten Elektrons ebene Wellen sind, läßt sich für (42) schreiben

$$\frac{\partial a_{l,m}(0,t)}{\partial t} \rightarrow \int d\tau_1 e^{2\pi i t_0 \tau_1} e^{\frac{2\pi i}{h} p_0 \tau_1} e^{-\frac{2\pi i}{h} p_l \tau_1} e^{-2\pi i \mathfrak{k}_l \tau_1}. \quad (44)$$

Dabei sind die jetzt unwesentlichen von \mathbf{r}_3 und t abhängigen Faktoren weggelassen, von denen wir uns nur zu merken brauchen, daß sie als Richtung von \mathfrak{k}_l die anschaulich für das gestreute Lichtquant berechnete festlegen.

Das Integral (44) muß nun offenbar stets durch Interferenz verschwinden, wenn nicht die Summe der Exponenten Null ist. D. h., das Elektron kann nur mit merklicher Wahrscheinlichkeit im Zustand l sein, wenn gilt

$$h \mathfrak{k}_0 + p_0 = h \mathfrak{k}_l + p_l; \quad (45)$$

ferner ist nach (3) und (27)

$$h c \cdot |\mathfrak{k}_l| = h \nu_l = E_0 + h \nu_0 - E_l. \quad (46)$$

(45) und (46) bedeuten, wenn man $h \mathfrak{k}_l$ als den Impuls des gestreuten Lichtquants betrachtet, gerade Impuls- und Energiesatz; also müssen die aus ihnen folgenden Werte p_l und E_l für die (44) nicht verschwindet, mit den aus der anschaulichen Betrachtung folgenden Impuls- und Energiewerten übereinstimmen.

Eine analoge Überlegung gilt auch noch, wenn man das Elektron nicht als frei, sondern, wie es zur Ortsmessung nötig war, als an eine Ebene (etwa $z = 0$) gebunden betrachtet. Man kann seine Eigenfunktionen dann schreiben:

$$u(xyz) = e^{\frac{2\pi i}{h}(p_x x + p_y y)} \cdot f(z) \quad (47)$$

und erhält so für die beiden Impulskomponenten in der Ebene wieder eine Formel wie (45). Da von \mathfrak{k}_i experimentell nur die Richtung bekannt ist, folgt daraus, solange über die Impulskomponente senkrecht zur Ebene nichts ausgesagt werden kann, nur eine Beziehung zwischen p_x und p_y . Fügt man aber noch die Annahme hinzu, daß die Bindung an die Ebene so stark ist, daß das Elektron bei dem Streuprozeß nicht in den nächsthöheren stationären Zustand in der z -Richtung übergegangen sein kann, so daß man also die gesamte Energieänderung der Impulsänderung in der Ebene zuschreiben darf, so kann man wieder p_x und p_y selbst berechnen.

Schließlich sei bemerkt, daß unser Resultat, daß die Abbildungsungenauigkeit auch quantentheoretisch nicht größer wird als $\frac{\lambda_0}{\sin \varepsilon}$, für

$\lambda_0 \sim \frac{h}{\mu c}$ wegen der Größe der Impulsübertragung beim Comptoneffekt nicht mehr garantiert werden kann, da dann die bei der Summation über l' gemachte Annahme, der Nenner $E_0 - E_\nu + h\nu_0$ in (22) dürfe konstant gehalten werden, unter Umständen falsch wird. Auf die schwierige Diskussion dieses Falles soll hier aber nicht eingegangen werden.

Herrn Prof. Heisenberg danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit und zahlreiche Ratschläge bei ihrer Ausführung.