

(Aus dem Naturkundig Laboratorium der N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven/Holland.)

## Beugung einer ebenen Welle an einem Spalt von endlicher Breite\*.

Von **M. J. O. Strutt** in Eindhoven (Holland).

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 13. April 1931.)

Wir befassen uns im vorliegenden Aufsatz mit der Beugung einer ebenen Licht- oder Schallwelle an einem geraden Spalt in einer unendlich ausgedehnten ebenen Schirmwand.

Die klassische Beugungstheorie von Young, Fresnel und Kirchhoff operiert bekanntlich mit dem Huygensschen Prinzip; sie nimmt keine Rücksicht auf die strengen Grenzbedingungen der elektromagnetischen Lichttheorie oder der mathematischen Akustik. Diesen Mangel hat Kirchhoff selber erkannt<sup>1)</sup>. Als erster hat H. Poincaré<sup>2)</sup> die Beugung des Lichtes an einem geraden Rand eines unendlich gut leitenden, ebenen Schirmes mathematisch streng in Angriff genommen. Die Lösung dieses Problems wurde dann von A. Sommerfeld<sup>3)</sup> vollendet.

K. Schwarzschild<sup>4)</sup> hat die Sommerfeldsche Lösung durch einen unendlichen Alternationsprozeß, dessen Konvergenz ihm nachzuweisen gelang, auf den Fall eines Spaltes erweitert. Hiermit ist prinzipiell wenigstens für senkrecht einfallende Wellen eine Lösung des uns interessierenden Problems geliefert.

Physikalisch kann man sich vorstellen, daß Sommerfelds Lösung, die ja als zu einem unendlich breiten Spalt gehörig aufgefaßt werden kann, wenn sie, wie von Schwarzschild durchgeführt, auf Spalte *endlicher* Breite erweitert wird, praktisch doch nur auf *sehr breite* Spalte anwendbar ist. Man kann dies auch mathematisch leicht zeigen, so zwar, daß eine Auswertung der Lösung von Schwarzschild für Spalte mäßiger Breite (z. B. einer Wellenlänge) nicht praktisch durchführbar erscheint. Dies hat auch Schwarzschild erkannt, wie aus folgendem Passus seiner Arbeit hervorgeht.

„Was der Lösung durch das Näherungsverfahren fehlt, ist die Berechenbarkeit — wenigstens die praktisch durchführbare — der höheren Glieder und damit des ganzen Intensitätsverlaufs für enge Spalte.“

Eine von Schwarzschild in Aussicht gestellte Ergänzung in dieser Richtung scheint nicht erschienen zu sein<sup>5)</sup>.

\* Die Zitate beziehen sich auf den Literaturnachweis am Ende des Aufsatzes.

In der Optik sind allerdings Spalte von einer Wellenlänge Breite selten. Anders in der Akustik. Die Absorption des Schalles durch ein offenes Fenster ist ein Problem, das nicht vollständig beherrscht werden kann ohne eine Beugungstheorie, die auf Spalte von kleiner Breite anwendbar ist.

Nun liegt eine Lösung von Lord Rayleigh<sup>6)</sup> vor für Spalte von *sehr* kleiner Breite, gemessen an der Wellenlänge. Wie weit diese Lösung, die man in akustischen Abhandlungen vielfach erwähnt findet, gültig ist, darüber fehlte bis zur Stunde jeder Anhalt.

Aus den erwähnten Gründen fanden wir es der Mühe wert, das Beugungsproblem nochmals aufzurollen und eine neue Lösung anzugeben, von gleicher mathematischer Strenge wie die Schwarzschildsche, aber, anders wie jene, auf alle und insbesondere auch *enge* Spalte rechnerisch anwendbar. Unsere Lösung enthält die Formeln von Rayleigh, Sommerfeld und Schwarzschild als Spezialfälle.

Da es mathematisch von Schall- zu Lichtwellen nur ein geringer Schritt ist, haben wir gleich beide Wellenarten in unsere Lösung eingeschlossen. Für Lichtwellen haben wir Polarisation parallel und senkrecht zum Spalt betrachtet. Die Welle fällt dabei *schräg* auf den Spalt ein, was ebenfalls eine wesentliche Erweiterung der bisherigen Theorie bedeutet.

Die Durchführung der Lösung beruht auf der Anwendung Mathieuscher Funktionen<sup>7)</sup>.

Wir beschäftigen uns mit den von Schwarzschild vernachlässigten engen Spalten als Sonderfall und zeigen, daß hier unsere Formeln im Limes, für verschwindende Spaltbreite, in die Rayleighschen übergehen.

Endlich zeigen wir numerisch am Beispiel einer akustischen Welle, daß die Rayleighsche Formel schon für Spalte von einer halben Wellenlänge Breite zu großen Fehlern Anlaß gibt, während überraschenderweise die Kirchhoffsche Formel hier schon innerhalb weniger Prozente gilt.

### *1. Mathematische Formulierung des Beugungsproblems für elektromagnetische und für akustische Wellen.*

Im Falle elektromagnetischer Wellen nehmen wir die Schirmwand unendlich gut leitend an. Es muß somit auf der Wand diejenige Komponente der elektrischen Feldstärke, welche dieser Wand parallel gerichtet ist, verschwinden. Der Schirm befinde sich in der  $XZ$ -Ebene. Die Wellen sollen von der Richtung, wo  $Y$  positiv ist, aus dem Unendlichen auf den Schirm fallen. Die Wellennormale soll einen Winkel, dessen  $\cos$  gleich  $\beta$  ist,

mit der Y-Achse bilden. Wir unterscheiden zwei wesentlich verschiedene Polarisationsrichtungen des einfallenden ebenen Wellenzuges:

1. Elektrischer Vektor parallel zu Z;
2. Magnetischer Vektor parallel zu Z.

Der andere Vektor liegt hierbei immer in der Wellenfrontebene und senkrecht zum oben genannten Vektor.

Im Falle 1 wählen wir den elektrischen Vektor als abhängige Veränderliche  $\Phi$ . Offenbar ist auf dem Schirm hierbei  $\Phi = 0$ .

Im Falle 2 wählen wir den magnetischen Vektor als abhängige Variable  $\Phi$ . Hier ist der elektrische Vektor proportional zu  $\partial\Phi/\partial n$ , wobei  $n$  die Richtung der Wellennormale anzeigt. Die Komponente des elektrischen Vektors parallel zur Schirmwand ist proportional zu  $\partial\Phi/\partial y$ . Dieser Ausdruck muß somit auf der Schirmwand verschwinden.

In beiden Fällen müssen die elektrischen und die magnetischen Vektoren stetig durch die Beugungsöffnung hindurchgehen. Dies bedingt, daß hier  $\Phi$ ,  $\partial\Phi/\partial y$  und  $\partial\Phi/\partial x$  stetig sein müssen.

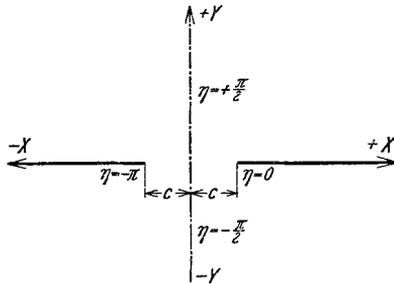


Fig. 1.  
Spaltabmessungen und Koordinaten.

Wir betrachten weiterhin eine ebene einfallende Schallwelle und benutzen in üblicher Weise das Geschwindigkeitspotential  $\Phi$  als abhängige Variable. Auf der Schirmwand muß die Geschwindigkeit der Luftteilchen senkrecht zu dieser Wand, die vollkommen starr sein soll, gleich Null sein, also  $\partial\Phi/\partial y = 0$  auf der Wand. In der Beugungsöffnung müssen wir die Stetigkeit von Druck und Geschwindigkeit verlangen. Diese sind stetig, sobald  $\Phi$ ,  $\partial\Phi/\partial x$  und  $\partial\Phi/\partial y$  stetig durch die Beugungsöffnung hindurchgehen.

Aus dieser Überlegung geht hervor, daß wir den Fall elektrischer Wellen jeder Polarisationsrichtung und den Fall akustischer Wellen vollständig beherrschen, sobald wir die zwei mathematischen Probleme:

- I.  $\Phi = 0$  auf der Wand,  $\Phi$ ,  $\partial\Phi/\partial x$  und  $\partial\Phi/\partial y$  stetig in der Beugungsöffnung,
- II.  $\partial\Phi/\partial y = 0$  auf der Wand,  $\Phi$ ,  $\partial\Phi/\partial x$  und  $\partial\Phi/\partial y$  stetig in der Öffnung

gelöst haben.

Außer diesen Bedingungen auf der Wand und in der Beugungsöffnung muß die mathematische Lösung, damit sie physikalisch einer ebenen einfallenden, zurückgeworfenen und einer hinter der Wand vom Spalt auslaufenden Welle entspricht, noch einige „Bedingungen im Unendlichen“ erfüllen.

Als einfallende Welle nehmen wir an:

$$\left. \begin{aligned} e^{+ik\beta y - ik\alpha x}, \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1, \\ k = 2\pi/\lambda, \\ \lambda \text{ Wellenlänge,} \end{aligned} \right\} (i = \sqrt{-1}). \quad (1)$$

Unserem zweidimensionalen Problem entsprechend hängt die auslaufende Welle vom Spalt hinter der Wand in großer Entfernung vom Spalt von dieser Entfernung  $r$  wie

$$\frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}}$$

ab. Dies müssen wir auch von unserer mathematischen Lösung fordern.

Die zurückgeworfene Welle vor der Schirmwand ist in den Fällen I und II verschieden. Man findet leicht, daß die Wellenamplitude der reflektierten Welle vor der Wand im Unendlichen sich im

$$\left. \begin{aligned} \text{Fall I wie } -e^{-ik\beta y - ik\alpha x}, \\ \text{Fall II wie } e^{-ik\beta y - ik\alpha x} \end{aligned} \right\} (2)$$

verhält. Durch Gleichung (1) und (2) ist auf der Wand das Verschwinden von  $\Phi$  bzw.  $\partial\Phi/\partial y$  verbürgt.

Wir haben zu (1) und (2) noch jene Ausdrücke zu addieren, welche von der Beugung am Spalt herrühren. Vor der Wand (pos.  $y$ ) sei der betreffende Ausdruck  $\psi$ , hinter der Wand (neg.  $y$ )  $\chi$  genannt.

Diese *Beugungsfunktionen* müssen im Zusammenhang mit den hingeschriebenen Ausdrücken (1) und (2) folgende Gleichungen befriedigen:

$$\left. \begin{aligned} \text{Fall I. } \psi \text{ und } \chi = 0 \text{ auf der Wand,} \\ \text{in der Öffnung: } \psi = \chi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} + 2ik\beta e^{-ik\alpha x} = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ \quad \quad \quad \frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \\ \text{Fall II. } \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ und } \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0 \text{ auf der Wand,} \\ \text{in der Öffnung: } \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \psi + 2e^{-ik\alpha x} = \chi, \\ \quad \quad \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} - 2ik\alpha e^{-ik\alpha x} = \frac{\partial \chi}{\partial x}. \end{aligned} \right\} (3)$$

Es ist jetzt unsere Aufgabe, Funktionen  $\psi$  und  $\chi$  zu finden, welche diesen Gleichungen genügen. Offenbar brauchen wir im Falle I und II jeweils nur die drei zuerst hingschriebenen Formeln (3) zu berücksichtigen. Die vierte Gleichung ist dann von selbst befriedigt.

II. *Elliptische Koordinaten; Mathieusche Gleichungen und die hier benötigte Form ihrer Lösungen.*

Wir nehmen die Spaltbacken ( $x = \pm c$ ) als Brennpunkte eines Systems von konfokalen Ellipsen und Hyperbeln. Diese Ellipsen und Hyperbeln benutzen wir als Koordinaten\*:

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \\ y &= c \operatorname{sh} \xi \sin \eta. \end{aligned}$$

Wir können leicht einsehen, weshalb diese neuen Koordinaten dem vorliegenden Problem besonders angepaßt erscheinen. Denn die Spaltöffnung entspricht dem Wert  $\xi = 0$ ; die ganze Schirmwand den Werten  $\eta = 0$  (+ X-Achse) und  $\eta = \pi$  (− X-Achse).

Unsere abhängige Variable  $\Phi$  genügt sowohl im elektrischen wie im akustischen Falle der Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = - \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \Phi, \quad (4)$$

wobei die Zeitabhängigkeit der elektromagnetischen und akustischen Größen durch den Faktor  $e^{i\omega t}$  ( $\omega$  Kreisfreq.) gegeben ist. Dieser Gleichung genügen auch die im vorigen Abschnitt eingeführten Beugungsfunktionen  $\psi$  und  $\chi$ . Auf die oben definierten elliptischen Koordinaten transformiert schreibt sich (4):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = - \Phi \cdot 2h^2 \cdot \{ \operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta \}, \quad 2h^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{c^2}{2}. \quad (5)$$

Diese partielle Differentialgleichung suchen wir nach Bernoulli durch Trennen der Variablen zu lösen:

$$\Phi = \Xi(\xi) \cdot H(\eta),$$

wodurch die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} + H(\Lambda - 2h^2 \cos 2\eta) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d^2 \Xi}{d\xi^2} + \Xi(-\Lambda + 2h^2 \operatorname{ch} 2\xi) = 0 \quad (7)$$

---

\*  $\operatorname{ch}$  = cosinus hyperbolicus;  $\operatorname{sh}$  = sinus hyperbolicus.

entstehen. Offenbar geht (7) aus (6) hervor durch Ersetzen von  $\eta$  durch  $i\xi$ . Wir brauchen uns mathematisch deshalb nur mit (6) wesentlich zu beschäftigen. In den folgenden Zeilen findet man die für ein Verständnis unserer Lösung notwendigen Tatsachen über die Mathieuschen Gleichungen (6) und (7). Im übrigen sei auf die Literatur verwiesen<sup>8)</sup>.

Wir suchen Lösungen von (6), welche periodisch in  $\eta$  sind, mit der Grundperiode  $2\pi$ . Hierdurch ist der Eigenwertparameter  $\lambda$  festgelegt. Es gibt solche Lösungen, die gerade, und solche, die ungerade Funktionen von  $\eta$  sind. Wir nennen sie bzw.

$$C_n(-h^2, \eta) \quad \text{und} \quad S_n(-h^2, \eta).$$

Der Index  $n$  ist bestimmt durch die Forderung:

$$\lim_{h \rightarrow 0} C_n(-h^2, \eta) = \cos n\eta,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} S_n(-h^2, \eta) = \sin n\eta.$$

Diese periodischen Lösungen sind überall reguläre Funktionen von  $\eta$ . Folglich kann man sie in Fouriersche Reihen entwickeln:

$$\left. \begin{aligned} C_n(-h^2, \eta) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{n,m}(-h^2) \cdot \cos m\eta, \\ S_n(-h^2, \eta) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m}(-h^2) \cdot \sin m\eta. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Jene Fourierreihen, die für  $h = 0$  mit einem ungeraden  $m$  anfangen, haben für alle  $n$  nur Glieder mit ungeradem  $m$ , ähnlich die Fourierreihen, die für  $h = 0$  mit geradem  $m$  anfangen. Wie aus (6) hervorgeht, gilt:

$$C_n(-h^2, \eta) = (-1)^l \cdot \begin{cases} C_n\left(h^2, \frac{\pi}{2} - \eta\right), & \left\{ l = \frac{n}{2} \text{ bei geradem } n, \right. \\ S_n\left(h^2, \frac{\pi}{2} - \eta\right), & \left. \left\{ l = \frac{n-1}{2} \text{ bei ungeradem } n. \right. \right. \end{cases}$$

Über die Koeffizienten der Reihen (8), die ganze transzendente Funktionen von  $h^2$  sind, werden wir im nächsten Abschnitt Näheres mitteilen.

Wir gehen jetzt zur Gleichung (7) über. Offenbar bekommen wir Lösungen dieser Gleichung, wenn wir in (8)  $\eta$  durch  $i\xi$  ersetzen. Die so entstandenen Lösungen genügen aber nicht den Bedingungen, die wir für unendliches  $\xi$  stellen. Wir fordern, daß alle Lösungen von (7), die hier betrachtet werden, für  $\xi \rightarrow \infty$  sich wie

$$\text{const} \frac{e^{-i k r}}{\sqrt{r}}, \quad \text{mit} \quad r = \frac{c}{2} \cdot e^\xi \quad (9)$$

verhalten, wobei der konstante Faktor nicht von  $\xi$  abhängt. Die Lösungen, welche durch Ersetzen von  $\eta$  in (8) durch  $i\xi$  entstehen, verhalten sich für  $\xi \rightarrow \infty$  wie

$$\frac{\sin kr}{\sqrt{r}} \quad \text{oder} \quad \frac{\cos kr}{\sqrt{r}}.$$

Lösungen von (7), die im Unendlichen in (9) übergehen, sind von Heine<sup>9)</sup> und Sieger<sup>10)</sup> angegeben worden. Wir benutzen die Reihen des zuletzt genannten Autors (bis auf geringe Änderungen der Bezeichnungen), da sie bessere Konvergenzeigenschaften zeigen. Diese Lösungen lauten:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{C}_{2n}(-h^2, i\xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{2n, 2m}(-h^2) \cdot H_m^{(2)}(he^\xi) \cdot J_m(he^{-\xi}), \\ \mathfrak{C}_{2n+1}(-h^2, i\xi) &= \operatorname{ch} \xi \cdot \sum_{m=1}^{\infty} a_{2n+1, m}(-h^2) \cdot H_m^{(2)}(he^\xi) \cdot J_m(he^{-\xi}), \\ \mathfrak{S}_{2n}(-h^2, i\xi) &= \operatorname{sh} \xi \cdot \operatorname{ch} \xi \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_{2n, m}(-h^2) \cdot H_{m+1}^{(2)}(he^\xi) \cdot J_{m+1}(he^{-\xi}), \\ \mathfrak{S}_{2n+1}(-h^2, i\xi) &= \operatorname{sh} \xi \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_{2n+1, m}(-h^2) \cdot H_m^{(2)}(he^\xi) \cdot J_m(he^{-\xi}). \end{aligned} \right\} (10)$$

Hierbei ist  $H_m^{(2)}$  die Hankelsche Funktion zweiter Art  $m$ -ter Ordnung,  $J_m$  die Besselsche Funktion erster Art  $m$ -ter Ordnung. Die Koeffizienten  $A_{2n, 2m}$  aus (10) sind die gleichen wie die entsprechenden in (8). Die übrigen Koeffizienten von (10) berechnen sich aus den Koeffizienten (8), die zum gleichen  $h$  gehören, wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} a_{2n+1, m} &= (-1)^m \cdot m \cdot \{A_{2n+1, 1} + A_{2n+1, 3} + \dots + A_{2n+1, 2m-1}\}, \\ b_{2n+1, m} &= m \{B_{2n+1, 1} - B_{2n+1, 3} + \dots + (-1)^{m+1} B_{2n+1, 2m-1}\} \\ &\quad \text{usw.} \end{aligned} \right\} (11)$$

Auf die Ableitung der Formeln (10) und (11) gehen wir, obwohl sie prinzipiell einfach ist, hier der Raumersparnis wegen nicht ein. Die Reihen (10) konvergieren alle für  $\xi > 0$ , und zwar sehr rasch wegen der Funktionen  $J_m$ , deren Argument schon für mäßiges  $\xi$  sehr klein ist. Für  $\xi \rightarrow \infty$  reduzieren sich alle Reihen (10) auf das erste Glied und dies verhält sich dabei, der bekannten Eigenschaft von  $H^{(2)}$  zufolge, wie (9), womit unsere Funktionen (10) die Bedingungen im Unendlichen erfüllen.

### III. Die Koeffizienten der Mathieuschen Funktionen.

Wir brauchen für unsere Rechnung numerisch die Koeffizienten der Reihen (8). Aus diesen berechnen sich dann in einfacher Weise jene der Reihen (10). Für kleine  $h$  sind die Potenzreihen, welche E. Mathieu<sup>11)</sup> für diese Koeffizienten angegeben hat, obwohl ihr allgemeines Glied nicht bekannt ist, doch gut brauchbar. Diese Potenzreihen lauten:

$$\begin{aligned}
A_{0,0} &= 1 \\
A_{0,2} &= -\frac{h^2}{2} + \frac{7h^6}{2^7} + 0(h^{10}), \\
A_{0,4} &= \frac{h^4}{32} - \frac{10h^8}{2^8 \cdot 3^2} + 0(h^{12}), \\
A_{0,6} &= -\frac{h^6}{2^7 \cdot 3^2} + 0(h^{10}), \\
A_{0,8} &= \frac{h^8}{2^{13} \cdot 3^2} + 0(h^{12}), \\
&\dots\dots\dots \\
A_{2,0} &= \frac{h^2}{4} - \frac{5h^6}{192} + \frac{1368 \cdot h^{10}}{221\,184} + 0(h^{14}), \\
A_{2,2} &= 1, \\
A_{2,4} &= -\frac{h^2}{12} - \frac{43h^6}{13\,824} + \frac{21\,059}{79\,626\,240}h^{10} + 0(h^{14}), \\
A_{2,6} &= \frac{h^4}{384} + \frac{287h^8}{2\,211\,840} + 0(h^{12}), \\
A_{2,8} &= -\frac{h^6}{23\,040} - \frac{41h^{10}}{16\,588\,800} + 0(h^{14}), \\
A_{2,10} &= \frac{h^8}{2\,211\,840} + 0(h^{12}), \\
A_{2,12} &= -\frac{h^{10}}{309\,657\,600} + 0(h^{14}), \\
&\dots\dots\dots \\
A_{4,0} &= \frac{h^4}{192} - \frac{h^8}{92\,160} + 0(h^{12}), \\
A_{4,2} &= \frac{h^2}{12} + 11\frac{h^6}{17\,280} - \frac{439h^{10}}{62\,208\,000} + 0(h^{14}), \\
A_{4,4} &= 1, \\
A_{4,6} &= -\frac{h^2}{20} - \frac{13h^6}{96\,000} - \frac{4037h^{10}}{2\,419\,200\,000} + 0(h^{14}), \\
A_{4,8} &= \frac{h^4}{960} + 23\frac{h^8}{6\,048\,000} + 0(h^{12}), \\
A_{4,10} &= -\frac{h^6}{80\,640} - \frac{53h^{10}}{1\,032\,192\,000} + 0(h^{14}), \\
A_{4,12} &= \frac{h^8}{10\,321\,920} + 0(h^{12}), \\
A_{4,14} &= -\frac{h^{10}}{1\,857\,945\,600} + 0(h^{14}), \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Ähnliche Reihen gelten für die übrigen Koeffizienten, die wir hier der Raumersparnis wegen nicht hinschreiben, weil wir sie im vorliegenden Aufsatz *numerisch* nicht verwenden.

Wir sehen aus den gerade hingeschriebenen Ausdrücken, daß jene Koeffizienten  $A_{k,l}$  oder  $B_{k,l}$ , deren beide Indizes  $k$  und  $l$  gleich sind, gleich Eins werden. Offenbar liegt das daran, daß wir von unseren Funktionen gefordert haben, daß

$$\lim_{h \rightarrow 0} C_n(-h^2, \eta) = \cos n\eta,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} S_n(-h^2, \eta) = \sin n\eta.$$

Die Koeffizienten  $A_{k,l}$  oder  $B_{k,l}$ , deren Indizes sich um zwei unterscheiden:  $k = l \pm 2$ , sind für kleine  $h$  proportional zu  $h^2$ ; jene, deren Indizes sich um vier unterscheiden:  $k = l \pm 4$  sind für kleine  $h$  proportional zu  $h^4$  usw.

Wir haben einige der oben hingeschriebenen Koeffizienten, da wir sie numerisch im Abschnitt VI brauchen, für verschiedene  $h$  ausgerechnet. In den Tafeln findet man die Größe  $A_{nm}$  aus (8).

$m$	$n = 0$	2	$m$	$n = 0$	2
$h^2 = 0,2$			$h^2 = 0,75$		
0	1	0,049 $\epsilon$	0	1	0,178
2	-0,099 6	1	2	-0,352	1
4	0,001 24	-0,016 7	4	0,016 2	-0,063 7
6	-0,000 007 0	0,000 104	6	-0,000 621	0,001 51
8	0,000 000 02	-0,000 000 3	8	0,000 004 3	-0,000 018 3
$h^2 = 0,5$			$h^2 = 1$		
0	1	0,122	0	1	0,230
2	-0,243	1	2	-0,445	1
4	0,007 54	-0,042 0	4	0,026 9	-0,086 1
6	-0,000 184	0,000 659	6	-0,000 869	0,002 73
8	0,000 000 8	-0,000 005	8	0,000 013 57	-0,000 046

Wir geben noch eine Tabelle der Funktionen

$$\mathfrak{C}_{2n}(-h^2, 0),$$

für verschiedene Werte von  $n$  und  $h$ , wie wir sie in unserer numerischen Rechnung verwenden:

$n$	$h^2 = 0,2$	0,5	0,75	1,0
0	0,908 + $i \cdot 0,539$	0,799 + $i \cdot 0,251$	0,729 + $i \cdot 0,150$	0,672 + $i \cdot 0,0907$
2	-0,092 58 - $i \cdot 0,334$	-0,0160 - $i \cdot 0,351$	-0,0355 - $i \cdot 0,366$	-0,0602 - $i \cdot 0,376$
4	0,0000 + $i \cdot 0,165$	0,0000 + $i \cdot 0,161$	0,0000 + $i \cdot 0,164$	0,0000 + $i \cdot 0,167$

Für größere Werte von  $h^2$  als die in den Tafeln benutzten, genügen die Mathieuschen Potenzreihen nicht mehr. Ihre Fortsetzung für höhere Potenzen erfordert sehr langwierige Rechnungen. Deshalb ist hier ein anderer Weg vorzuziehen, der von Ince<sup>8b)</sup> und Goldstein<sup>8c)</sup> besprochen

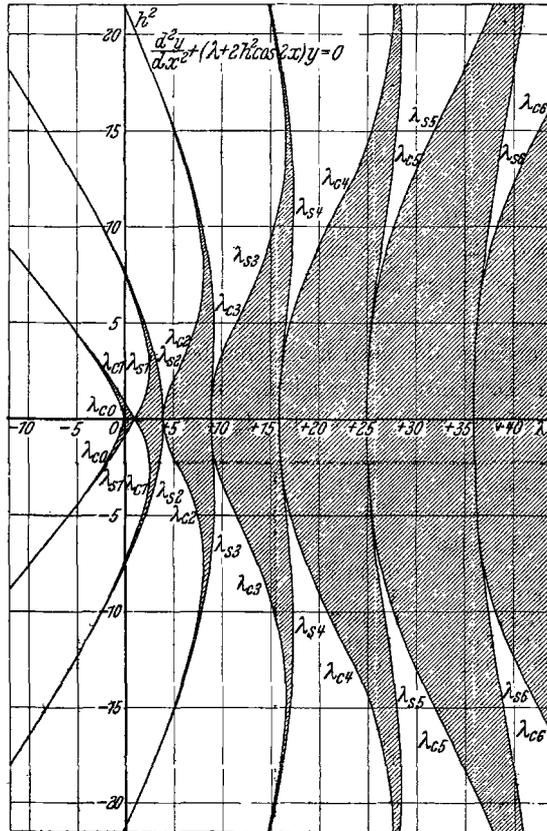


Fig. 2.

Eigenwerte  $\lambda$  der Mathieuschen Differentialgleichung, zu verschiedenen Werten des Parameters  $h$  und zu verschiedenen Eigenfunktionen  $S_n$  bzw.  $C_n$  gehörend.

wurde und auf einem Approximationsverfahren durch Kettenbrüche beruht. Für einige Mathieusche Funktionen hat insbesondere Goldstein (l. c.) diese Koeffizienten bis zu sehr großen Werten von  $h$  numerisch angegeben. Sobald solche Tafeln auch für die Mathieuschen Funktionen höherer Ordnung vorliegen, steht ihrer Anwendung und damit der numerischen Auswertung unserer Formeln des nächsten Abschnittes für beliebige  $h$  nichts mehr im Wege.

Nach der Formel (5) ist

$$h = \frac{2\pi c}{2\lambda},$$

d. h.  $h$  gleich der Spaltbreite  $2c$ , multipliziert mit  $\pi$  und dividiert durch die doppelte Wellenlänge  $2\lambda$ . Für  $h = 1$  haben wir somit einen Spalt von etwa  $\frac{2}{3}$  Wellenlänge Breite. Deshalb sind die  $h$ -Werte, die wir in unseren Tafeln angeben, zur numerischen Rechnung besonders interessant, denn sie enthalten gerade jenes Gebiet der Spaltbreite, für welches die Rayleighsche Grenzformel für sehr kleine Spaltbreiten in die Kirchhoffsche für sehr große Spaltbreiten übergehen muß. Wie wir im Abschnitt VI zeigen, gilt die Kirchhoffsche Formel für  $h = 1$  schon für gewisse Zwecke innerhalb einiger Prozente. Damit entfällt von selbst die Notwendigkeit, unsere Formeln des nächsten Abschnittes für größere  $h$ -Werte numerisch anzuwenden. Alles, was wir wissen wollten: die Größe der Gültigkeitsgebiete von Kirchhoffs und Rayleighs Formeln, können wir aus Rechnungen mit den  $h$ -Werten in den obigen Tafeln erfahren.

Der Übersicht wegen haben wir in Fig. 2 den Eigenwertparameter  $\lambda$  der Gleichungen (6) und (7) als Funktion von  $h$  für die verschiedenen Mathieschen Funktionen aufgetragen.

Die Mathieschen Funktionen (8) genügen den Orthogonalitätsgleichungen

$$\int_0^\pi d\eta \cdot S_n \cdot S_m = 0, \quad \int_0^\pi d\eta \cdot C_n \cdot C_m = 0, \quad n \neq m. \quad (12)$$

#### IV. Lösung der Beugungsprobleme.

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Problem I. Die Lösung setzt sich hier wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} \text{Für pos. } y: \Phi &= e^{+ik\beta y - ik\alpha x} - e^{-ik\beta y - ik\alpha x} + \psi, \\ \text{für neg. } y: \Phi &= \chi. \end{aligned}$$

Diese Lösung befriedigt die Grenzbedingungen:

$$\Phi = 0 \text{ auf der Wand, } \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial \Phi}{\partial y} \text{ stetig im Spalt,}$$

sobald  $\psi$  und  $\chi$  den ersten vier Gleichungen (3) genügen. Wir setzen:

$$\begin{aligned} \psi = -\chi &= \sum_{n=1}^{\infty} D_{2n} \cdot \mathfrak{G}_{2n}(-h^2, i\xi) \cdot S_{2n}(-h^2, \eta) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1} \cdot \mathfrak{G}_{2n+1}(-h^2, i\xi) \cdot S_{2n+1}(-h^2, \eta) \quad (13) \end{aligned}$$

und suchen die konstanten Koeffizienten  $D_{2n}$  und  $E_{2n+1}$  aus den Grenzbedingungen zu bestimmen. Zunächst bemerken wir, daß  $\psi$  und  $\chi$  für  $\eta = 0$  und  $\eta = \pi$  verschwinden, wodurch  $\psi$  auf der Wand Null wird, wie gefordert. Zur Bestimmung von den  $D$  und  $E$  bleibt uns die Gleichung:

$$\left\{ \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial y} \right\}_{\xi=0} = \left\{ \frac{2}{c \sqrt{1 - \cos^2 \eta}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right\}_{\xi=0} = -2ik\beta e^{-ik\alpha x}. \quad (14)$$

Mit Hilfe der Formel:

$$\begin{aligned} (e^{-ik\alpha x})_{\xi=0} &= e^{-ikc\alpha \cos \eta} \\ &= J_0(kc\alpha) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} (-i)^s \cdot J_s(kc\alpha) \cdot \cos s\eta \end{aligned} \quad (15)$$

gelingt diese Bestimmung leicht, sobald wir von den Orthogonalitätseigenschaften (12) der in (13) verwendeten Mathieschen Funktionen  $S_{2n}$  bzw.  $S_{2n+1}$  Gebrauch machen. Wir multiplizieren zunächst die Gleichung (14) links und rechts mit  $c \cdot \sin \eta \cdot S_{2n}(-h^2, \eta)$  und integrieren über  $\eta$  von 0 bis  $\pi$ . Nur jene Glieder der Reihe (15), die ungerades  $s$  haben, liefern einen Beitrag und wir erhalten:

$$\begin{aligned} D_{2n} &= \frac{-ikc\beta}{N_{2n} \cdot \mathfrak{S}'_{2n}(-h^2, 0)} \cdot \int_0^{\pi} d\eta \cdot \sin \eta \cdot S_{2n}(-h^2, \eta) \\ &\cdot \left\{ 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-i)^{2s+1} \cdot J_{2s+1}(kc\alpha) \cdot \cos(2s+1)\eta \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Hierbei ist:

$$\begin{aligned} N_{2n} &= \int_0^{\pi} \{S_{2n}(-h^2, \eta)\}^2 d\eta, \\ \mathfrak{S}'_{2n}(-h^2, 0) &= \left\{ \frac{d\mathfrak{S}(-h^2, i\xi)}{d\xi} \right\}_{\xi=0}. \end{aligned}$$

In analoger Weise erhalten wir die Koeffizienten  $E_{2n+1}$ , indem wir (14) links und rechts mit  $c \cdot \sin \eta \cdot S_{2n+1}(-h^2, \eta)$  multiplizieren und über  $\eta$  von 0 bis  $\pi$  integrieren:

$$\begin{aligned} E_{2n+1} &= \frac{-ikc\beta}{N_{2n+1} \cdot \mathfrak{S}'_{2n+1}(-h^2, 0)} \cdot \int_0^{\pi} d\eta \cdot \sin \eta \cdot S_{2n+1}(-h^2, \eta) \\ &\cdot \left\{ J_0(kc\alpha) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \cdot J_{2s}(kc\alpha) \cdot \cos 2s\eta \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

Die Bedeutung der Symbole ist analog denjenigen in Gleichung (16). Mit den Gleichungen (13), (16) und (17) haben wir das Beugungsproblem I

streng gelöst. Die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (13) folgt aus den Sätzen über die Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach Liouville'schen Eigenfunktionen, wenn man beachtet, daß der Betrag von  $\mathfrak{C}_{2n}$  und  $\mathfrak{C}_{2n+1}$  für alle  $\xi$  endlich ist. Auf den Beweis soll hier nicht eingegangen werden. Außerdem genügt unsere Lösung der „Bedingung im Unendlichen“, da  $\mathfrak{C}_{2n}$  und  $\mathfrak{C}_{2n+1}$  für  $\xi \rightarrow \infty$  sich alle wie

$$\frac{\text{const}}{\sqrt{r}} e^{-ikr}$$

verhalten.

Die Lösung des Problems II, die wir jetzt hinschreiben, verläuft genau so einfach, wie jene des Problems I. Es ist:

$$\begin{aligned} \text{für pos. } y: \Phi &= e^{ik\beta y - ik\alpha x} + e^{-ik\beta y - ik\alpha x} + \psi, \\ \text{für neg. } y: \Phi &= \chi. \end{aligned}$$

Die Grenzbedingungen:  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$  auf der Wand,  $\Phi$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  und  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  stetig im Spalt, sind befriedigt, wenn  $\psi$  und  $\chi$  den zweiten vier Gleichungen von (3) genügen.

Es sei:

$$\begin{aligned} \psi = -\chi &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} \cdot \mathfrak{C}_{2n}(-h^2, i\xi) \cdot C_{2n}(-h^2, \eta) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} G_{2n+1} \cdot \mathfrak{C}_{2n+1}(-h^2, i\xi) \cdot C_{2n+1}(-h^2, \eta). \end{aligned} \quad (18)$$

Offenbar verschwinden  $\partial \psi / \partial y$  und  $\partial \chi / \partial y$ , die für  $\eta = 0$  bzw.  $\pi$  (auf der Wand) proportional zu  $\partial \psi / \partial \eta$  und  $\partial \chi / \partial \eta$  sind, auf der Wand. Hierdurch ist die Bedingung:  $\partial \Phi / \partial y = 0$  auf der Wand befriedigt. Bleiben die Stetigkeitsbedingungen im Spalt. Der Differentialquotient  $\partial \Phi / \partial y$  ist hier stetig, denn es ist:

$$\begin{aligned} \text{für pos. } y: \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{\xi=0} &= + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{c \sqrt{1 - \cos^2 \eta}}, \\ \text{für neg. } y: \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{\xi=0} &= - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{c \sqrt{1 - \cos^2 \eta}}. \end{aligned}$$

Wegen unserer Wahl (18) ist somit:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial y}.$$

Die andere Stetigkeitsbedingung im Spalt ( $\Phi$  stetig) liefert uns alle Koeffizienten  $F$  und  $G$  aus (18). Hierzu multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung:

$$\begin{aligned} (\psi - \chi)_{\xi=0} &= 2 \psi|_{\xi=0} = -2 e^{-ikc\alpha x} = -2 e^{-ikc\alpha \cos \eta} \\ &= -2 \left\{ J_0(kc\alpha) + \sum_{s=1}^{\infty} (-i)^s \cdot J_s(kc\alpha) \cdot \cos s\eta \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

mit  $C_{2n}(-h^2, \eta)$  und integrieren über  $\eta$  von 0 bis  $\pi$ . Alle Glieder mit ungeradem Index der Reihen links und rechts in (19) fallen heraus und wir erhalten:

$$\left. \begin{aligned} F_{2n} &= \frac{-1}{N_{2n} \cdot C_{2n}(-h^2, 0)} \cdot \int_0^{\pi} d\eta \cdot C_{2n}(-h^2, \eta) \\ &\quad \cdot \left\{ J_0(kc\alpha) + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \cdot J_{2s}(kc\alpha) \cdot \cos 2s\eta \right\}, \\ N_{2n} &= \int_0^{\pi} \{C_{2n}(-h^2, \eta)\}^2 \cdot d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

In analoger Weise multiplizieren wir jetzt beide Seiten von (19) mit  $C_{2n+1}$  und integrieren wieder über  $\eta$  von 0 bis  $\pi$ . Diesmal fallen alle geraden Reihenglieder heraus und wir erhalten:

$$\begin{aligned} G_{2n+1} &= \frac{-1}{N_{2n+1} \cdot C_{2n+1}(-h^2, 0)} \cdot \int_0^{\pi} d\eta \cdot C_{2n+1}(-h^2, \eta) \\ &\quad \cdot \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} (-i)^{2s+1} \cdot J_{2s+1}(kc\alpha) \cdot \cos(2s+1)\eta \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Hiermit ist auch das Beugungsproblem II durch die Gleichungen (18), (20) und (21) vollständig gelöst. Über die Konvergenz der lösenden Reihe kann man Gleiches bemerken wie oben.

*V. Die Rayleigh'schen Formeln als Grenzfälle unserer allgemeinen Lösung, wenn die Wellenlänge sehr groß wird.*

Lord Rayleigh hat die beiden gerade behandelten Probleme I und II in seiner zitierten Arbeit <sup>6)</sup> für den folgenden Grenzfall gelöst.

$\alpha = 0$  (Front der primär einfallenden Welle parallel zur Schirmwand),  
 $kc = \frac{2\pi}{\lambda} c \rightarrow 0$  und somit  $h \rightarrow 0$ .

Wir werden im vorliegenden Abschnitt zeigen, daß unter diesen Annahmen die Formeln des vorigen Abschnitts genau auf Rayleighs Gleichungen führen. Hierzu werden wir verschiedene Eigenschaften der

Mathieuschen Funktionen, die im Abschnitt III erwähnt wurden, heranziehen.

Zunächst das *Problem I*.

Wir zeigen, daß bei Vernachlässigung aller Potenzen von  $h = \pi c/\lambda$  höher als die erste alle Koeffizienten  $D_{2n}$  verschwinden. Dies ist für jedes  $n$  sofort einzusehen, da für kleine Werte von  $kc$  die Funktionen

$$J_{2s+1}(kc\alpha) \text{ proportional zu } (kc\alpha)^{2s+1}$$

werden.

Bei den Koeffizienten  $E_{2n+1}$  bedenke man, daß unter den gegebenen Bedingungen vom Ausdruck (17) in den geschweiften Klammern unter dem Integralzeichen nur das Glied

$$J_0(kc\alpha = 0) = 1$$

beibehalten werden muß. Wir haben somit Integrale von der Form

$$\int_0^\pi \sin \eta \cdot S_{2n+1}(-h^2, \eta) \cdot d\eta$$

zu berechnen. Unter der Bedingung  $h \rightarrow 0$  gehen diese über in

$$\int_0^\pi \sin \eta \cdot \sin(2n+1)\eta \cdot d\eta,$$

liefere somit ein von Null verschiedenes, die Größe  $h$  nicht mehr enthaltendes Ergebnis. Auch die Nenner von  $E_{2n+1}$  enthalten für  $h \rightarrow 0$  die Größe  $h$  nicht. Lassen wir jetzt  $\xi \rightarrow \infty$  werden (große Entfernung vom Spalt hinter dem Schirm), so wird

$$\mathfrak{S}_{2n+1}(-h^2, i\xi) = \frac{K \cdot h}{\sqrt{r}} e^{-ikr}, \quad \text{mit } r = \frac{c}{2} e^\xi.$$

Hierbei ist der konstante Faktor  $K$  von  $h$  und  $r$  unabhängig. Bei Beschränkung auf die niedrigste Potenz von  $h$  (insgesamt die zweite) schrumpft somit der Ausdruck (13) zusammen zu:

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} \psi = E_1 \mathfrak{S}_1 S_1 = \text{const} \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}} \cdot h^2 \cdot \sin \eta. \quad (13a)$$

Hierbei ist der konstante Faktor von  $h$ ,  $\eta$  und  $r$  unabhängig. Dieser Ausdruck (13a) ist identisch mit der Rayleighschen Formel [i. c. Gl. (54)] für die Beugungsfunktion bei verschwindender Spaltbreite im Falle des Problems I. Insbesondere zeigt sich, daß die Amplitude der durch den Spalt dringenden Welle für kleine Spaltbreiten dem *Quadrate* dieser Breite, im Verhältnis zur Wellenlänge, proportional ist. Physikalisch kann man, nach Abschnitt I,

an Stelle von  $\Phi$  die Amplitude des elektrischen Vektors, bei einer einfallenden, parallel zur Spaltlänge polarisierten Lichtwelle lesen.

Wir wenden uns jetzt dem *Problem II* zu und zeigen, daß auch hier unsere allgemeine Lösung für sehr große Wellenlänge in bezug auf die Spaltbreite auf eine von Rayleigh aufgestellte Formel führt.

Hier zeigen wir zunächst, daß für  $h \rightarrow 0$  alle Koeffizienten  $G_{2n+1}$  verschwinden. Dies folgt unmittelbar aus (21). Denn die Zähler verschwinden für  $h \rightarrow 0$  wie  $h^{2n+1}$ , also mindestens wie  $h$ . Diese Nenner verschwinden für  $h \rightarrow 0$  nicht. Auf ihr Verhalten kommen wir gleich zurück. Folglich sind alle  $G_{2n+1}$  für  $h \rightarrow 0$  gleich Null. Dagegen sind die Zähler aller Koeffizienten  $F_{2n}$  für  $h \rightarrow 0$  endlich, wie aus (20) folgt.

Wir kommen zu den Funktionen  $\mathfrak{C}_{2n}$ . Diese verhalten sich für  $\xi \rightarrow \infty$  wie:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathfrak{C}_{2n}(-h^2, i\xi) = \text{const} \cdot A_{2n,0} \cdot \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}},$$

wobei der konstante Faktor von  $h$  und  $\xi$  unabhängig ist. Die Koeffizienten  $A_{2n,0}$  sind, wie aus den Reihen des Abschnitts III folgt, für  $h \rightarrow 0$  alle Null, außer für  $n=0$ :  $A_{00} = 1$ . Folglich reduziert sich die Reihe (18) auf den Ausdruck:

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} \psi = F_0 \cdot \mathfrak{C}_0(-h^2, i\xi) \cdot C_0(-h^2, \eta) = \frac{\text{const}}{\mathfrak{C}_0(-h^2, 0)} \cdot \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}}. \quad (18a)$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow 0}} (\mathfrak{C}_0(-h^2, i\xi)) &= J_0(h) - iN_0(h) \\ &= 1 - i \cdot \frac{2}{\pi} \{\ln(h) - \ln 2 + \gamma\}, \end{aligned}$$

wobei

$$\gamma = 0,57722 \dots \quad (\text{Eulersche Konstante}).$$

Hierdurch ist (18a) bis auf einen gleichgültigen von  $h$ ,  $\eta$  und  $r$  unabhängigen Faktor mit der Rayleigh'schen Formel (l. c. Gleichung (47)] für diesen Fall identisch.

Aus dem Vergleich dieser beiden Grenzfälle folgt, daß eine elektromagnetische Welle mit elektrischem Vektor parallel zu den Spaltbacken viel weniger stark durch kleine Spalte dringt als eine ebensolche Welle mit elektrischem Vektor senkrecht zu den Spaltbacken, ein bekanntes und physikalisch durch „Antennenwirkung“ der Spaltbacken verständliches Ergebnis. Weiter sieht man, daß für sehr enge Spalte im Vergleich

zur Wellenlänge die Richtung der einfallenden Welle ohne Einfluß auf die durchgelassene Energie ist.

VI. *Beugung einer Schallwelle an einem Spalt;  
numerische Anwendung unserer Lösung.*

Wir lassen eine ebene Schallwelle schräg auf einen Spalt treffen und interessieren uns für den *Absorptionskoeffizienten des Spaltes*, d. h. für die durchgelassene Energie dividiert durch die auftreffende Energie.

Die Schallenergie läßt sich aus dem von uns berechneten Geschwindigkeitspotential  $\Phi$  in einfacher Weise erhalten. Der Energiestrom pro Flächeneinheit senkrecht zur Fortschrittrichtung ist, wenn wir uns weit entfernt vom Spalt befinden, proportional zu  $|\Phi^2|$ . Für die einfallende Welle ist also der auf den Spalt treffende Energiestrom proportional zu

$$2 c \beta, \tag{22}$$

wobei  $\beta$  der Kosinus des Winkels der einfallenden Wellennormale mit  $y$  bedeutet.

Der vom Spalt hinter der Wand ausgehende Energiestrom ergibt sich aus (18). Er ist proportional zu

$$E = r \int_0^{-\pi} d\eta \cdot |\chi^2|$$

( $r$  radiale Entfernung von der Spaltmitte). Indem wir für  $\chi$  die Summen (18) einsetzen und die Summenzeichen mit dem Integral vertauschen, finden wir, unter Heranziehung von

$$\int_0^{\pi} C_n(-h^2, \eta) \cdot C_m(-h^2, \eta) \cdot d\eta = 0 \quad \text{für } n \neq m,$$

$$\int_0^{\pi} \{C_n(-h^2, \eta)\}^2 d\eta = N_n,$$

$$E = r \sum_{n=0}^{\infty} |F_{2n}^2 \mathfrak{C}_{2n}^2(-h^2, i\xi)| N_{2n} + r \sum_{n=0}^{\infty} |G_{2n+1}^2 \mathfrak{C}_{2n+1}^2| N_{2n+1}. \tag{23}$$

Dividieren wir (23) durch (22), so entsteht der gewünschte *Absorptionskoeffizient des Spaltes für Schallwellen*.

Wir werden diese Verhältnisse jetzt für den Spezialfall  $\beta = 1$  numerisch verfolgen, also für senkrechten Einfall der primären Welle. In diesem Falle verschwinden alle Koeffizienten  $G_{2n+1}$  der Formel (23), wie aus (21) hervorgeht, wo  $\alpha = 0$  zu setzen ist. Weiter gilt die Beziehung:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathfrak{C}_{2n}(-h^2, i\xi) = - \frac{A_{2n,0}}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi k r}} e^{-i(kr - \frac{\pi}{4})}, \quad \text{mit } r = \frac{c}{2} e^{\xi},$$

also

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} |\mathfrak{C}_{2n}^2| = \frac{1}{r} \cdot \frac{2A_{2n,0}^2}{\pi k}.$$

Folglich schreibt sich der Ausdruck (23) im vorliegenden Falle, mit Rücksicht auf (20), wo wieder  $\alpha = 0$  zu setzen ist:

$$E = \frac{\pi}{k} \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{A_{2n,0}^4}{|\mathfrak{C}_{2n}(-h^2, 0)|^2} \cdot \frac{1}{N_{2n}}. \tag{23a}$$

Wir dividieren (23a) durch (22) mit  $\beta = 1$  und erhalten als Absorptionskoeffizienten

$$A = \frac{\pi}{2h} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{2n,0}^4}{|\mathfrak{C}_{2n}(-h^2, 0)|^2} \cdot \frac{1}{N_{2n}}. \tag{24}$$

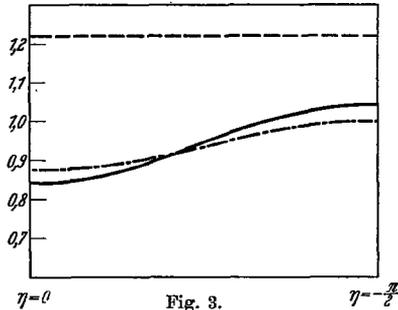


Fig. 3.

Schallamplitude als Funktion der Strahlungsrichtung in großer Entfernung hinter dem Spalt. Ausgezogene Kurve: strenges Rechenergebnis:

$$2\pi \cdot \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{2n}^2 \cdot C_{2n}}{\mathfrak{C}_{2n} \cdot N_{2n}} \right|;$$

gestrichelte Kurve: Rayleighsche Näherung:

$$2 \cdot \left\{ 1 - i \cdot \frac{2}{\pi} \cdot (\ln h - \ln 2 + \ln \gamma) \right\}^{-1};$$

strichpunktierte Kurve: Kirchhoffsche Näherung:

$$\frac{\sin(2h \cos \eta)}{2h \cos \eta}.$$

Für große Spaltbreiten und somit großes  $h$  ist der Absorptionskoeffizient 1, somit die Reihe rechts gleich  $2h/\pi$ . Interessant ist der Verlauf von  $A$  für kleine Werte von  $h$ , den wir aus den Tabellen des Abschnitts III berechnet haben:

$h$	$\rightarrow 0$	0,447	0,707	0,866	1	$\rightarrow \infty$
$A \dots$	$\rightarrow \frac{\pi^2}{16h \cdot (\ln h)^2}$	0,995	0,980	0,984	1,002	$\rightarrow 1$

Für sehr kleine Spalte dringt *mehr* Energie durch den Spalt hindurch<sup>12)</sup>, als man erwarten würde. Der Absorptionskoeffizient ist aber schon für

Spalte von nur etwa  $\frac{2}{3}$  Wellenlängen Breite ( $h = 1$ ) bis auf weniger als 1% auf seinem asymptotischen Endwert 1 angelangt. Dies läßt erwarten, daß die Kirchhoffsche, für  $h \rightarrow \infty$  streng gültige Näherung hier schon gut erfüllt ist.

Um dies noch genauer zu verfolgen, haben wir für  $h^2 = 0,2$  Strahlungsdiagramme hinter dem Spalt gezeichnet, d. h. die vom Spalt auslaufende Schallamplitude weit vom Spalt in willkürlichem Maßstab als Funktion der Strahlungsrichtung  $\eta$  aufgetragen. Als Vergleich haben wir auch die Amplituden nach den Näherungsformeln von Rayleigh (sehr kleine Spalte) und Kirchhoff (sehr breite Spalte) aufgetragen. Wie ersichtlich, weicht überraschenderweise die Kirchhoffsche Näherung vom exakten Ergebnis viel weniger ab als die Rayleighsche, sogar für eine Spaltbreite von nur  $2c = 0,447 \cdot \lambda \cdot 2/\pi \sim \lambda/3$ .

Die numerische Rechnung wurde von Herrn F. de Reeper fast durchwegs mit einem Schieber von 25 cm Länge ausgeführt und vom Verfasser kontrolliert. Ich schätze den maximalen Fehler der Endresultate auf 1%.

*Zusammenfassung.* Für das bisher von Schwarzschild mathematisch für senkrechten Einfall zwar allgemein, aber praktisch nur für breite Spalte gelöste Problem der Beugung einer ebenen elektromagnetischen oder akustischen Welle an einem Spalt von endlicher Breite in einem unendlich ausgedehnten ebenen Schirm wird unter Heranziehung von Mathieuschen Funktionen eine neue strenge Lösung angegeben. Diese Lösung umfaßt den Fall einer schräg einfallenden primären Welle und geht für kleine Spaltbreiten asymptotisch in Näherungsformeln von Lord Rayleigh (the late) über. Gezeigt wird numerisch am Beispiel einer Schallwelle, daß die Kirchhoffsche Näherung für sehr breite Spalte schon für Spalte von nur etwa einer halben Wellenlänge Breite dem exakten Ergebnis viel näher kommt als Rayleighs Näherung für sehr kleine Spaltbreiten. Für Spalte von mehr als etwa einer Wellenlänge Breite stimmt die klassische Beugungstheorie von Young, Fresnel und Kirchhoff innerhalb weniger Prozente mit der exakten Rechnung überein.

#### Literatur.

- <sup>1)</sup> G. Kirchhoff, Optik, Zweite Vorlesung.
- <sup>2)</sup> H. Poincaré, Sur la polarisation par Diffraction, Acta Mathematica **16**, 297, 1892.
- <sup>3)</sup> A. Sommerfeld, neueste Darstellung im Riemann-Weber, Bd. II, S. 433—487. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges., 1927.
- <sup>4)</sup> K. Schwarzschild, Die Beugung und Polarisation des Lichtes durch einen Spalt, Math. Ann. **55**, 177—247, 1902.

<sup>5)</sup> Vgl. die neueste Zusammenfassung über diesen Gegenstand: G. Wolfsohn, *Strenge Theorie der Interferenz und Beugung*, Handbuch der Physik Bd. XX, S. 263—316, insbesondere S. 281—286. Berlin, Julius Springer.

<sup>6)</sup> Lord Rayleigh (the late), *On the passage of Waves through apertures in plane Screens and allied problems*, Scientific Papers 4, 284,—296, 1897.

<sup>7)</sup> Bereits Schwarzschild (l. c.) erkannte, daß diese Funktionen dem vorliegenden Problem angepaßt sind, wie aus folgendem Satz seiner Arbeit hervorgeht: „Die Rolle, welche für den geraden Rand den Besselschen Zylinderfunktionen zufällt, spielen für den Spalt die Funktionen des elliptischen Zylinders und wie jene als Grenzfall der Kugelfunktionen erscheinen, bilden diese einen Grenzfall der Laméschen Funktionen. Indessen trifft man bei einem Versuch, von der Theorie der Laméschen Funktionen auszugehen, auf Schwierigkeiten, die der verwickelten Natur der Laméschen Funktion entspringen und ein Vordringen von dieser Seite vorläufig zu vereiteln scheinen“.

<sup>8)</sup> Literatur über Mathieusche Funktionen und verwandte Probleme. A. Zusammenfassungen mit Verzeichnissen der älteren Literatur. E. T. Whittaker u. G. N. Watson, *A course of modern Analysis*. 2<sup>nd</sup> Ed. Cambridge, Univ. Press, 1920, S. 404. P. Humbert, *Fonctions de Lamé et Fonctions de Mathieu*. Paris, Gauthier-Villars, 1926, 58 S. B. Neuere mathematische Literatur, in den obigen Zusammenfassungen nicht erwähnt: a) O. Haupt, Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten; Bemerkung zur Arbeit gleichen Titels von Herrn Hamel. *Math. Ann.* **79**, 278—285, 1919. b) E. L. Ince, *Researches into the characteristic numbers of the Mathieu equation*, first paper, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **46**, 20—29, 1925; second paper, *ibid.* **46**, 316—322, 1926; third paper, *ibid.* **47**, 294—301, 1927. c) S. Goldstein, *Mathieu Functions*; *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **22**, 303—336, 1927. d) S. Goldstein, *A note on certain approximate Solutions of linear differential equations of the second order, with an application to the Mathieu equation*. *Proc. London Math. Soc.* (2) **28**, 81—101, 1927. e) H. Bremekamp, *On the solution of Mathieu's equation*. *Nieuw Archief voor Wiskunde* **15**, 1927, S. 292—301. Derselbe, *Over de periodieke oplossingen der vergelijking van Mathieu*, *ibid.* 1925, S. 138—146. f) S. Goldstein, *The second solution of Mathieu's equation*. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **24**, 223—230, 1928. g) E. T. Whittaker, *On the recurrence formulae of the Mathieu functions*. *Proc. London Math. Soc.* **4**, 88—96, 1928. h) M. J. O. Strutt, *Der Verlauf der Grenzkurven zwischen labilen und stabilen Lösungsgebieten der Mathieuschen Differentialgleichung*. *Math. Ann.* **99**, 625—628, 1928. i) M. J. O. Strutt, *Der charakteristische Exponent der Hill'schen Differentialgleichung*. *Math. Ann.* **101**, 559—569, 1929. j) S. Goldstein, *On the asymptotic expansion of the characteristic numbers of the Mathieu equation*. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **49**, 210—223, 1929. k) H. P. Mulholland u. S. Goldstein, *The characteristic numbers of the Mathieu equation with purely imaginary parameter*. *Phil. Mag.* **7**, 834—840, 1929. — C. *Physikalische Literatur*, in den Zusammenfassungen (A) nicht erwähnt, in der die Mathieusche Gleichung auftritt. a) B. van der Pol, *Stabiliseering door kleine trillingen*. *Physica* **5**, 157—163, 1925. b) H. Bremekamp, *Over de voortplanting van een golfbeweging in een medium van periodieke structuur*. *Physica* **6**, 136—144, 1926. c) B. van der Pol u. M. J. O. Strutt, *On the stability of the solutions of Mathieu's Equation*. *Phil. Mag.* **5**, 18—38, 1928. d) M. J. O. Strutt, *Wirbelströme im elliptischen Zylinder*. *Ann. d. Phys.* **84**, 485—506, 1927. e) Derselbe, *Stabiliseering en labiliseering door trillingen*. *Physica* **7**, 265—271, 1927. f) Derselbe, *Eigenschwingungen einer Saite mit sinusförmiger Massenverteilung*. *Ann. d. Phys.* **85**, 129—136, 1928.

g) Derselbe, Zur Wellenmechanik des Atomgitters. *Ebenda* **86**, 319—324, 1928. h) E. U. Condon, The physical pendulum in quantum mechanics. *Phys. Rev.* **31**, 891—894, 1928. i) P. E. Morse, Quantum mechanics of electrons in Crystals. *Phys. Rev.* **35**, 1310—1324, 1930. j) R. de L. Kronig u. W. G. Penney, Quantum mechanics in Crystal lattices. *Proc. Roy. Soc. London (A)* **130**, 499—513, 1931.

<sup>9)</sup> E. Heine, *Handbuch der Kugelfunktionen*, Bd. I, 2. Aufl., S. 401—415; II, S. 202—210, 1891.

<sup>10)</sup> B. Sieger, Die Beugung einer ebenen elektrischen Welle an einem Schirm von elliptischem Querschnitt. *Ann. d. Phys.* **27**, 626—664, 1908.

<sup>11)</sup> E. Mathieu, *Cours de Physique mathématique*, S. 122—140. Paris, Gauthier-Villars Verlag, 1873.

<sup>12)</sup> Vgl. hierzu H. Lamb, *The dynamical theory of sound*, 2. Aufl., S. 248—257. London, Edward Arnold Verlag.

*Eindhoven*, Naturkundig Laboratorium, 17. Februar 1931.

---