Bemerkung zur Quantelung des harmonischen Oszillators im Magnetfeld.

Von **V. Fock** *, zurzeit in Göttingen.

(Eingegangen am 12. Januar 1928.)

Die exakten Werte der Energieniveaus des isotropen ebenen harmonischen Oszillators in einem zu seiner Ebene senkrechten homogenen Magnetfeld sind

$$E = (n_1 - n_2) h \nu_1 + (n_1 + n_2 + 1) h \sqrt{\nu_0^2 + \nu_1^2}$$
$$(n_1, n_2 = 0, 1, 2 \ldots),$$

wo ν_0 die Eigenfrequenz des ungestörten Oszillators und $\nu_1 = \frac{eH}{4 \pi m c}$ die Larmorfrequenz bezeichnet.

Der isotrope ebene harmonische Oszillator in einem zu seiner Ebene senkrechten homogenen Magnetfeld liefert das einfachste Beispiel der Anwendung der Störungsrechnung auf ein entartetes mechanisches System. Es könnte daher die exakte Lösung dieses einfachen Problems von einigem Interesse sein. Der Zweck dieser Notiz ist die Ableitung einer solchen Lösung.

Die Hamiltonsche Funktion für das betrachtete Problem lautet

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 (x^2 + y^2) + \frac{eH}{2mc}(y p_x - x p_y) + \frac{e^2 H^2}{8 m c^2}(x^2 + y^2).$$

Hier bezeichnet m die Masse, e die Ladung, $\frac{\omega_0}{2\pi} = \nu_0$ die Eigenfrequenz des Oszillators, H die magnetische Feldstärke. Führt man die Larmorfrequenz

$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}, \qquad \omega_1 = \frac{eH}{2mc}$$

ein, so läßt sich die Hamiltonsche Funktion schreiben

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \omega_1 (y p_x - x p_y) + \frac{1}{2} m (\omega_0^2 + \omega_1^2)(x^2 + y^2).$$

---

* International Education Board Fellow.

Die entsprechende Schrödingersche Amplitudengleichung ist

$$\Delta\psi \mp \frac{4\pi i m}{h}\omega_1\left(y\frac{\partial\psi}{\partial x} - x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left[E - \frac{1}{2}m(\omega_0^2+\omega_1^2)(x^2+y^2)\right]\psi = 0.$$

Wir führen als Längeneinheit die Größe

$$b = \left(\frac{h}{2\pi m}\right)^{1/2}(\omega_0^2+\omega_1^2)^{-1/4}$$

ein und bezeichnen

$$\frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_0^2+\omega_1^2}} = \omega, \quad \frac{2\pi}{h}\frac{E}{\sqrt{\omega_0^2+\omega_1^2}} = W.$$

Benutzt man die dimensionslosen Polarkoordinaten

$$x = b\,r\cos\varphi, \qquad y = b\,r\sin\varphi,$$

so wird die Amplitudengleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \pm 2i\omega\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + (2W - r^2)\psi = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich leicht durch Separation der Variablen lösen. Setzt man

$$\psi = e^{in\varphi}R(r),$$
$$W \mp n\omega = W_1,$$

so erhält man für $R(r)$ die Gleichung

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(2W_1 - \frac{n^2}{r^2} - r^2\right)R = 0,$$

d. h. genau die Gleichung, die man bekommt, wenn man den isotropen ebenen Oszillator ohne Magnetfeld in Polarkoordinaten behandelt. Durch die Substitution

$$r^2 = \varrho$$

findet man daraus

$$\frac{d^2R}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dR}{d\varrho} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{W_1}{2\varrho} - \frac{n^2}{4\varrho^2}\right)R = 0.$$

Diese Gleichung ist bereits von Schrödinger* untersucht worden. Die Eigenwerte sind hier

$$W_1 = 2k + n + 1 \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

* E. Schrödinger, Quantisierung als Eigenwertproblem, 3. Mitteilung. Ann. d. Phys. **80**, 484, 1926.

und die Eigenfunktionen

$$R_{n,k} = \varrho^{n/2} e^{-\varrho/2} L^n_{n+k}(\varrho)$$

mit

$$L^n_{n+k}(\varrho) = \frac{d^n}{d\varrho^n} L_{n+k}(\varrho)$$

[$L_{n+k}(\varrho)$ Laguerresches Polynom].

Berechnet man daraus die Energie E und führt man wieder die Frequenzen ν_0 und ν_1 ein, so erhält man

$$E = \pm n h \nu_1 + (2k + n + 1) h \sqrt{\nu_0^2 + \nu_1^2}$$

oder

$$E = (n_1 - n_2) h \nu_1 + (n_1 + n_2 + 1) h \sqrt{\nu_0^2 + \nu_1^2},$$

wo n_1 und n_2 zwei nicht-negative ganze Zahlen sind.

Dem International Education Board bin ich für die Ermöglichung meines Göttinger Aufenthaltes zu herzlichem Dank verpflichtet.