Inventiones math. 43, 15–52 (1977)

Inventiones mathematicae

Quasi-modes sur les varietes Riemanniennes

Yves Colin de Verdiere

Université Scientifique et médicale de Grenoble, Institut de mathématiques pures B.P. 116, F-38402 Saint-Martin-d'Hères

0. Introduction

Soit M une variété riemannienne compacte C^∞ de dimension n sans bord et Δ le laplacien opérant sur les fonctions sur M (avec la convention de signe: Δ est un opérateur auto-adjoint positif). Plusieurs résultats globaux relient le *spectre* de Δ, appelé aussi spectre de M (et noté $Sp(M)$) et le *flot géodésique*:

Génériquement, le spectre de M détermine l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques ([CV]; [DG]).

Si M_1 et M_2 ont même flot géodésique, au sens que les normes q_1 et q_2 sur les cotangents $T^*(M_1)\setminus 0$ et $T^*(M_2)\setminus 0$ sont conjuguées par un difféomorphisme canonique homogène et que, par exemple M_1 est simplement connexe et $n\geqq 3$, alors il existe un entier relatif a tel que $\lambda^1_{j-a}=\lambda^2_j+O(1)$ où λ^i_j est le spectre de M_i ([W 1]).

Dans cet article, on étudie le problème de la localisation de ce genre de résultats: si X est un fermé de $T_1^*(M)$ invariant par le flot géodésique (par exemple une géodésique périodique), existe-t-il et peut-on construire une famille de fonctions propes de Δ qui se concentrent en un sens convenable sur X? Ce problème a déjà été étudié par de nombreux auteurs, notamment pour le problème de Dirichlet dans un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ (voir par exemple [L2]); et V. Arnold ([A2]) a montré qu'on ne peut pas en général avoir une telle concentration des fonctions propres: on peut seulement espérer construire des quasi-fonctions propres ou *quasi-modes*; essentiellement, ce sont des solutions asymptotiques de

$$(\Delta-\tau_r)\,u(x,\tau_r)=O(\tau_r^{-N}) \qquad (N\geqq 0)$$

quand τ_r tend vers l'infini. Les fonctions $u(x,\tau_r)$ n'approximent pas toujours bien les vraies fonctions propres, mais les valeurs de τ_r fournissent une bonne approximation asymptotique d'une famille de valeurs propres, en effet, de

$$\|(\Delta-\tau_r)\,u(x,\tau_r)\|_{L^2}\leqq C\|u(x,\tau_r\|_{L^2},$$

on déduit, à l'aide de la caractérisation variationelle des valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint que $Sp(M)\cap[\tau_r-C,\tau_r+C]$ n'est pas vide. Cependant comme le fait Weinstein dans ([W1]), on peut remplacer cette propriété de solutions asymptotiques par une propriété d'entrelacement qui est plus maniable: on étudiera des sous-espaces vectoriels fermés F de $L^2(M)$ quasi-invariants par le laplacien au sens suivant: il existe un opérateur auto-adjoint P: $F \to F$ tel que $P - \Delta\restriction_F$ est un opérateur régularisant d'un certain ordre (on étudiera surtout des cas où c'est un opérateur borné et où c'est un opérateur de F dans $C^\infty(M)$), appelé ordre du quasi-mode.

L'organisation de l'article est la suivante:

Dans le chapite I, on étudie les axiomes des quasi-modes et on discute l'approximation des valeurs propres. On associe en utilisant la notion de «wave front» de Hörmander ([H1]) à tout quasi-mode un sous-ensemble X de $T_1^*(M)$, fermé, appelé *microsupport* dont on montre à partir du théorème de propagation des singularités ([DH]) qu'il est invariant par le flot géodésique. On étudie alors les relations d'orthogonalité: si deux quasi-modes ont des microsupports disjoints, ils sont orthogonaux; à une décomposition de $T_1^*(M)$ en fermés invariants par le flot géodésique, peut donc correspondre une décomposition de $L^2(M)$ en sous-espaces quasi-invariants. On étudie aussi le nombre optimum de valeurs propres que permet d'approcher asymptotiquement un quasi-mode, en montrant pour la fonction spectrale du quasi-mode une inégalité asymptotique $N(\lambda) \lesssim \frac{1}{n}(2\pi)^{-n}\operatorname{vol}(X)\,\lambda^{\frac{n}{2}}$ qui est optimale par rapport à la formule de H. Weyl pour la fonction spectrale de M.

Dans le chapitre II, on étudie le cas où le flot géodésique sur M est *complètement intégrable*: après un rappel sur les coordonnées «actions-angles», on construit en adaptant la méthode de Weinstein ([W1]), un opérateur qui permet d'enrelacer le laplacien sur M et un opérateur pseudo-différentiel à coefficients constants sur le tore $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. On montre ainsi que les conditions de quantification de Maslov permettent d'obtenir le nombre optimum de valeurs propres asymptotiques. En utilisant une adaptation d'un théorème de Van der Corput, on peut aussi montrer que la fonction spectrale de ces quasi-modes dans le ces non-dégénéré a un reste en $O(\lambda^{\frac{n}{2}-1+\frac{1}{n+1}})$ que l'on compare à ceux de Hörmander ([H2]) et de Duistermaat-Guillemin ([DG]). Nous remercions F. Dress et B. Randol qui nous ont donné des indications très utiles sur les adaptations du théorème de Van der Corput.

Dans le chapitre III, on fait une première étude du cas non intégrable et on construit un quasi-mode d'ordre ∞ ayant pour microsupport une variété lagrangienne invariante par le flot géodésique; on montre qu'on peut construire un tel quasi-mode sous deux hypothèses: une condition de quantification de Maslov asymptotique qui est vérifiée génériquement pour $n=2$ et une condition d'irrationnalité du flot géodésique sur la variété lagrangienne qui sera toujours vérifiée pour les variétés lagrangiennes dont l'existence est obtenue à partir des théorèmes de Kolmogorov-Arnold-Moser ([AA]).

Dans le chapitre IV, on construit un quasi-mode d'ordre ∞ dans la situation où on n'a plus un feuilletage lagrangien invariant par le flot géodésique (comme dans le chapitre II), mais seulement une famille discontinue de telles variétés lagrangiennes vérifiant les conditions d'irrationnalité du chapitre III. Les hypothèses faites sont plus fortes que les conclusions des théorèmes de Kolmogorov-Arnold-Moser, mais

Lazutkin ([L 1]) a prouvé qu'elles sont satisfaites dans le cas du difféomorphisme «twist» d'un anneau. Dans les chapitres III et IV, le point de départ a été l'étude des travaux de Lazutkin ([L 2]).

Enfin dans le chapitre V, on étudie les applications de III à la construction de quasi-modes au voisinage d'une géodésique périodique stable sur une surface. On obtient des résultats qu'on compare formellement à ceux obtenus par Babich, Lazutkin et repris par Voros, Guillemin et Ralston.

Plan de l'article

I. Le microsupport d'un quasi-mode

1. Axiomes des quasi-modes

(1.1) **Définition.** M étant une variété riemannienne C^∞, compacte et sans bord, Δ le laplacien sur M et $L^2(M)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure riemannienne canonique, on appelle *quasi-mode* (q.m. en abrégé) d'*ordre* σ (σ est un entier pair positif ou nul, ou $\sigma=+\infty$) la donnée d'un couple $\mathscr{E}=(E,P)$ où E est un *sous-espace vectoriel fermé* de dimention infinite de $L^2(M)$ et P *un opérateur auto-adjoint positif* non borné sur E tels que:

i) le projecteur orthogonal $\pi=\pi_E$ de $L^2(M)$ sur E s'étend en un opérateur continu de $\mathscr{D}'(M)$ dans $\mathscr{D}'(M)$ d'ordre O.

ii) $(P-\Delta)\circ\pi$ s'étend en un opérateur d'ordre $-\sigma$ de $\mathscr{D}'(M)$ dans $\mathscr{D}'(M)$.

On rappelle qu'un opérateur de $\mathscr{D}'(M)$ dans $\mathscr{D}'(M)$ est dit d'ordre m s'il envoie $H^s(M)$ dans $H^{s-m}(M)$.

On note alors $(u_r, \tau_r)_{r\in\mathbb{N}}$ une décomposition spectrale de P ($u_r \in E$ et τ_r est une suite croissante tendant vers $+\infty$). La suite $(u_r, \tau_r)_{r\in\mathbb{N}}$ détermine $\mathscr{E}$, on écrira donc aussi $\mathscr{E} = (u_r, \tau_r)$.

(1.2) **Proposition.** *Les fonctions u_r sont C^∞ et on a:*

$$\forall k\in\mathbb{Z},\ \forall (b_r)\in l^2(\mathbb{N}), \qquad \|\sum_r b_r \tau_r^{\frac{\sigma}{2}-k}(\Delta - \tau_r)\, u_r\|_{H^{2k}} < +\infty$$

et donc $\|(\Delta - \tau_r)\, u_r\|_{H^{2k}} = O(\tau_r^{k-\frac{\sigma}{2}})$.

En effet, pour $s\in\mathbb{Z}$, $\sum_r a_r u_r \in H^{2s}$ équivaut à $\sum |a_r|^2 \tau_r^{2s} < +\infty$. Car si $(a_r)\in l^2$, $\Delta(\sum a_r u_r) = \sum a_r \tau_r u_r + v$, où $v\in l^2$. Donc $\sum a_r u_r \in H^2$ équivaut à $\sum_r |a_r|^2 \tau_r^2 < +\infty$. Par récurrence, on en déduit le résultat pour $s\in\mathbb{N}$ et pour $s<0$ par dualité. On en conclut déjà que les u_r sont C^∞.

De plus, si $(b_r)\in l^2$ et $a_r = b_r \tau_r^{\frac{\sigma}{2}-k}$, $\sum a_r u_r \in H^{2k-\sigma}$, on en déduit que: $\|(\Delta - P)\sum_r a_r u_r\|_{H^{2k}} < +\infty$ et donc (1.2).

(1.3) **Proposition.** *Soit P_1: $L^2 \to L^2$ l'opérateur défini par $P_1 \restriction_E = P$ et $P_1 \restriction_{E^\perp} = (1 - \pi_E)\circ \Delta$; P_1 est un opérateur auto-adjoint positif et $P_1 - \Delta$ est d'ordre $-\sigma$.*

(1.4) **Corollaire.** *Il existe une application strictement croissante $r \mapsto j_r$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\lambda_{j_r} = \tau_r + O(\tau_r^{-\sigma/2})$, où $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ désigne le spectre du laplacien Δ.*

Preuve de (1.3). Il suffit évidemment de prouver la proposition pour $P_1 - \Delta$ restreint à $E^\perp$. Autrement dit de montrer qu'il existe une constante C_s telle que pour $u\in E^\perp$ et $v\in E$, on ait:

$$|\langle (P_1 - \Delta)\, u, v\rangle| \leqq C_s \|u\|_{H^s} \cdot \|v\|_{H^{-s-\sigma}}.$$

Soit:

$$|\langle \Delta u, v\rangle| \leqq C_s \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^{-s-\sigma}}.$$

On peut alors écrire $\langle \Delta u, v\rangle = \langle u, \Delta v\rangle = \langle u, (\Delta - P)\, v\rangle + \langle u, Pv\rangle$.

On finit alors en utilisant (1.1)ii) qui dit que $\|(\Delta - P)\, v\|_{H^{-s}} \leqq C \|v\|_{H^{-s-\sigma}}$ et le fait que $\langle u, Pv\rangle = 0$.

Preuve de (1.4). On tire de (1.3) que $P_1^{1+\frac{\sigma}{2}} - \Delta^{1+\frac{\sigma}{2}}$ est borné dans L^2; en utilisant la caractérisation variationnelle de la j-ième valeur propre d'un opérateur auto-adjoint positif, on en déduit que si μ_j est la j-ième valeur propre de P_1, on a: $\lambda_j^{1+\frac{\sigma}{2}} - \mu_j^{1+\frac{\sigma}{2}} = O(1)$ et donc $\lambda_j = \mu_j + O(\mu_j^{-\frac{\sigma}{2}})$. On remarque alors que la suite (τ_r) est une sous-suite de la suite (μ_j).

(1.5) **Définition.** *Deux q.m. d'ordre σ, $\mathscr{E} = (E, P)$ et $\mathscr{E}' = (E', P')$ sont dits équivalents si $\pi - \pi'$ est d'ordre $-(\sigma + 2)$.*

(1.6) **Proposition.** *Les q.m. (E, P) et $(E, \pi\circ\Delta)$ sont équivalents.*

Cela signifie qu'un quasi-mode $\mathscr{E}$ est défini à équivalence près par la seule donnée du sous-espace E de $L^2(M)$. Un tel sous-espace fermé de $L^2(M)$ sera appelé *quasi-invariant.*

Preuve de (1.6). Il suffit en fait de montrer que $(E, \pi\circ\Delta)$ est un q.m. d'ordre σ. Or $(\pi\Delta-\Delta)f=(P-\Delta)f+\pi(\Delta-P)f$ $(f\in E)$, or π est d'ordre 0 et $(P-\Delta)$ d'ordre $-\sigma$ sur E, on en déduit que $\pi\Delta-\Delta$ est d'ordre $-\sigma$.

(1.7) **Proposition.** *Si* (E,P) *et* (E',P') *sont équivalents, il existe* $j\in\mathbb{Z}$ *tel que* $\tau_{r-j}=\tau'_r+O(\tau_r'^{-\sigma/2})$.

Preuve de (1.7). Soit A la projection orthogonale de E sur E'; A^* la projection orthogonale de E' sur E; on a $A^*A=\mathrm{Id}_E+R$ où R est d'ordre $-(\sigma+2)$ et donc compact. En permutant au besoin E et E', on peut supposer que A est d'indice négatif (dimension $(\operatorname{Ker}A)\leqq$dimension $(\operatorname{Ker}A^*)$) et en le modifiant par un régularisant, on peut donc le rendre injectif. Si on pose $B=(1+R)^{-1/2}$, on a $B=1+R'$ où R' est d'ordre $-(\sigma+2)$; donc $C=AB$ est égal à A modulo un opérateur d'ordre $-(\sigma+2)$ et $C^*C=\mathrm{Id}_E$. (C est une isométrie injective.) Soit P'' le transporté de P sur $C(E)$ par C et $\tilde{P}$ égal à P'' sur $C(E)$ et à 0 sur son orthogonal dans E'. On voit sans difficultés que $P-\tilde{P}$ est d'ordre $-\sigma$ et $(E',\tilde{P})$ un quasi-mode d'ordre σ. On en déduit le résultat en appliquant la même méthode que dans (1.4) à $\tilde{P}^{1+\frac{\sigma}{2}}-P'^{1+\frac{\sigma}{2}}$ qui est borné sur E'.

On peut aussi construire des q.m. en essayant de faire une construction asymptotique des u_r et des τ_r. Supposons que (v_r,τ_r) vérifie les axiomes suivants:

(1.8) Pour tout s et tout N, $\|(\Delta-\tau_r)v_r\|_{H^s}=O(\tau_r^{-N})$,

(1.9) $(v_r,v_{r'})=\delta_{r,r'}+0\,(\inf(\tau_r,\tau_{r'})^{-N})$ pour tout N.

(1.10) **Proposition.** *Sous les hypothèses précédentes on peut construire un q.m. d'ordre* ∞, $(u_r,\tau_r)_{r\in\mathbb{N}}$ *avec pour tout* s *et tout* N,

$$\|u_r-v_r\|_{H^s}=O(\tau_r^{-N})$$

On considère A: $l^2(\mathbb{N})\to L^2(M)$ défini par $A((a_r))=\sum_r a_r u_r$, l'hypothèse (1.9) implique que A^*A-I est régularisant. On peut alors supposer A injectif en commençant à $r\geqq r_0$ et on rend A isométrique en posant $B=AC$ avec $C=(A^*A)^{-1/2}$, on a alors $B=A+R$ où R est régularisant et B est isométrique. Il suffit alors de poser $u_r=Be_r$, où e_r est la base orthonormée canonique de $l^2(\mathbb{N})$.

2. *Microsupport et orthogonalité*

(2.1) **Définition.** *Si* $\mathscr{E}=(E,P)$ *est un q.m. d'ordre* σ, *on pose pour* $\varepsilon>0$ (*éventuellement* $\varepsilon=+\infty$) $MS_\varepsilon(\mathscr{E})=\overline{\bigcup_{f\in E} WF_\varepsilon(f)}\cap T_1^*(M)$ *et* $MS(\mathscr{E})=\bigcap_{\varepsilon>0} MS_\varepsilon(\mathscr{E})$; $MS_\varepsilon(\mathscr{E})$ (*resp.* $MS(\mathscr{E})$) *est appelé microsupport d'ordre* ε (*resp. microsupport*) *de* $\mathscr{E}$.

Pour la définition des WF_ε, on peut voir [D.H.] p. 201. Il est clair que si les q.m. d'ordre σ, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ sont équivalents, on a $MS_\varepsilon(\mathscr{E})=MS_\varepsilon(\mathscr{E}')$ pour $\varepsilon<\sigma+2$ et donc $MS(\mathscr{E})=MS(\mathscr{E}')$. Dans toutes les constructions faites dans cet article, on aura, pout tout ε, $MS_\varepsilon(\mathscr{E})=MS(\mathscr{E})$.

(2.2) **Théorème.** *Pour tout* $\varepsilon>0$, $MS_\varepsilon(\mathscr{E})$ *est un fermé non vide de* $T_1^*(M)$ *et pour* $0<\varepsilon<\sigma+1$, $MS_\varepsilon(\mathscr{E})$ *est invariant par le flot géodésique (et donc* $MS(\mathscr{E})$ *aussi).*

Preuve de (2.2). D'abord si $MS_\varepsilon(\mathscr{E})=\emptyset$, on aurait $E\subset H^\varepsilon(M)$ et donc E serait de dimension finie.

Il suffit de prouver que, pour $\varepsilon<\sigma+1$, si

$$(x_0,\xi_0)\in WF_\varepsilon(\sum_r a_r u_r) \qquad ((a_r)\in l^2(\mathbb{N})),$$

alors

$$\varphi_t(x_0,\xi_0)\in WF_\varepsilon(\sum_r a_r e^{-it\sqrt{\tau_r}} u_r) \qquad (\varphi_t\colon\ T^*(M)\smallsetminus 0\to T^*(M)\smallsetminus 0$$

désigne le flot géodésique). Soit $f(x,t)=\sum_r a_r e^{-it\sqrt{\tau_r}} u_r(x)$ et $f_t=f(.,t)$ $(f_t\in E)$.

(2.3) **Lemme.** *Pour* $\varepsilon<\sigma+2$, $WF_\varepsilon(f)\subset\{(x,\xi,t,\tau)\mid\tau+q(x,\xi)=0\}$ (q désigne la norme d'un vecteur cotangent).

Soit $\Box=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta$ l'opérateur des ondes, on a:

$\Box f=\sum_r a_r e^{-it\sqrt{\tau_r}}(\Delta-\tau_r)\,u_r=(\Delta-P)\,f_t$. On en déduit que $\Box f\in H^\sigma(M)$ uniformément en t. Par dérivation en t et utilisation de (1.2), on voit que $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^\sigma$ $\Box f\in L^2_{\text{loc}}(M\times\mathbb{R})$; on en déduit $\Box f\in H^\sigma_{\text{loc}}(M\times\mathbb{R})$ et par la théorie elliptique $WF_\varepsilon(f)\subset\{\tau^2-q^2(x,\xi)=0\}$. Il reste à prouver que $\tau<0$ sur $WF_\varepsilon(f)$. Si $v\in C_0^\infty(M)$, on a: $\widehat{vf}(\xi,t)=\sum_r a_r\,\delta(\tau+\tau_r)\,\widehat{v u_r}(\xi)$; cette fonction est nulle pour $\tau>0$. Par régularisation en t, on en déduit le résultat.

(2.4) **Lemme.** *Soit* $\Box_\pm=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial t}\pm\sqrt{\Delta}$ *et* $g=\Box_+ f$, *alors, pour tout* $\varepsilon'>0$, $g\in H^{\sigma+1-\varepsilon'}$.

En effet pour $\varepsilon<\sigma+2$, $WF_\varepsilon(f)\subset\{\tau+q(x,\xi)=0\}$ et donc $f\in H^{\sigma+2-\varepsilon'}$ sur $\{\tau+q(x,\xi)\neq 0\}$; g est $H^{\sigma+1-\varepsilon'}$ sur $\{\tau+q\neq 0\}$. On a $\Box_-\,g=\Box\,f\in H^\sigma_{\text{loc}}(M\times\mathbb{R})$ et $\Box_-$ est elliptique au voisinage de $\{\tau+q=0\}$, donc $g\in H^{\sigma+1}$ au voisinage de $\{\tau+q=0\}$.

Soit $f(x,t)=\sum_j a_j(t)\,\varphi_j(x)$ la décomposition spectrale de f_t et $g(x,t)=\sum_j b_j(t)\,\varphi_j(x)$ celle de g. Un calcul classique montre que:

$$f(x,t)=\sum_j a_j(0)\,\varphi_j(x)\,e^{-it\sqrt{\lambda_j}}+i\sum_j\left(\int_0^t e^{i(\theta-t)\sqrt{\lambda_j}}\,b_j(\theta)\,d\theta\right)\varphi_j(x),$$

$$f(x,t)=e^{-it\sqrt{\Delta}}f_0(x)+h(x,t).$$

Montrons que $h(.,t)\in H^{\sigma+1-\varepsilon'}(M)$ (pour tout $\varepsilon'>0$ et tout t); $h(x,t)=\sum_j d_j(t)\,\varphi_j(x)$ et:

$$|d_j(t)|^2 \leqq |t| \int_0^t |b_j(\theta)|^2\, d\theta,$$

et comme $\Delta^{\frac{\sigma+1-\varepsilon'}{2}} g\in L^2(M\times[0,t])$, on a

$$\sum_j \left(\int_0^t |b_j(\theta)|^2\, d\theta\right) \lambda_j^{\sigma+1-\varepsilon'} < +\infty,$$

donc $h(.,t)\in H^{\sigma+1-\varepsilon'}(M)$.

Pour tout $\varepsilon<\sigma+1$, on a donc $WF_\varepsilon(f_t)=WF_\varepsilon(e^{-it\sqrt{\Delta}}f_0)$, on utilise alors le théorème de propagation des singularités ou plus précisément le fait que $e^{-it\sqrt{\Delta}}$ est un opérateur intégral de Fourier d'ordre 0 elliptique associé au difféomorphisme canonique φ_t ([D.G.]) et donc:

$$WF_\varepsilon(e^{-it\sqrt{\Delta}}f_0)=\varphi_t[WF_\varepsilon(f_0)].$$

(2.5) **Théorème.** *Soient $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ deux q.m. tels que $MS_\infty(\mathscr{E}_1)\cap MS_\infty(\mathscr{E}_2)=\emptyset$, alors il existe un q.m. $\mathscr{E}_1'$ équivalent à $\mathscr{E}_1$ tel que E_1' et E_2 soient orthogonaux. $\mathscr{F}=(E_1'\oplus E_2,\, P_1'\oplus P_2)$ est alors évidemment un q.m.*

Soient $\Gamma_i=WF'(\pi_i)\subset T^*(M)\setminus 0\times T^*(M)\setminus 0$; comme $\pi_i^*=\pi_i$, Γ_i est symétrique. Montrons que la projection de Γ_i sur $T^*(X)\setminus 0$ est le cône de base $MS_\infty(\mathscr{E}_i)$. En effet, si $f\in E_i$, $\pi_i(f)=f$ et donc $WF(f)\subset\Gamma_i(\overline{WF(f)})$ est contenu dans la projection de Γ_i sur $T^*(X)\setminus 0$. Réciproquement si $\mu\notin\overline{\bigcup_{f\in E_i} WF(f)}$, et Q_i est un opérateur pseudo-différentiel elliptique en μ et régularisant sur $\overline{\bigcup_{f\in E_i} WF(f)}$, $Q_i\circ P_i$ est régularisant et on en déduit que μ n'est pas dans la projection de Γ_i sur $T^*(X)\setminus 0$. De l'hypothèse $MS_\infty(\mathscr{E}_1)\cap MS_\infty(\mathscr{E}_2)=\emptyset$, on déduit alors que $\pi_2\circ\pi_1$ et $\pi_1\circ\pi_2$ sont régularisants.

Soit $E_1'=(1-\pi_2)(E_1)$, E_1' est orthogonal à E_2. Les q.m. $(E_1',\pi_1'\circ\Delta)$ et $(E_1,\pi_1\circ\Delta)$ sont équivalents, il suffit de montrer que $\pi_1-\pi_1'$ est régularisant: on le montre en regardant successivement sur E_1, E_2 et $(E_1+E_2)^\perp$. Or $(E_1,\pi_1\circ\Delta)$ et (E_1,P_1) sont équivalents d'après (1.6).

(2.6) **Proposition.** *Si $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ sont deux q.m. orthogonaux (au sens $MS_\infty(\mathscr{E}_1)\cap MS_\infty(\mathscr{E}_2)=\emptyset$), on a $\langle u_r^1, u_{r'}^2\rangle\in\mathscr{S}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$(espace des suites à décroissance rapide).*

En effet la matrice de la projection orthogonale de E_2 sur E_1 par rapport aux bases u_r^1 et u_r^2 est $a_{rr'}=\langle u_r^1, u_{r'}^2\rangle$. Il suffit alors d'exprimer que cet opérateur est régularisant en utilisant le critère (1.2): $\sum a_r u_r\in H^s$ équivaut à $(a_r\tau_r^{s/2})\in l^2$.

(2.7) **Corollaire.** *Soit J: $T_1^*(M)\setminus 0\to T_1^*(M)\setminus 0$ l'involution $(x,\xi)\mapsto(x,-\xi)$ et un q.m. d'ordre σ tel que $MS_\infty(\mathscr{E})\cap J(MS_\infty(\mathscr{E}))=\emptyset$. Si on pose $\bar{\mathscr{E}}=(\bar E,\bar P)$ où $\bar E$ désigne l'espace vectoriel engendré par les $\bar u_r$ et $\overline{Pu_r}=\tau_r\bar u_r$; $\bar{\mathscr{E}}$ est un q.m. orthogonal à $\mathscr{E}$ et* *on en déduit qu'il existe une suite j_r avec $j_{r+1} \geqq j_r + 2$ telle que:*

$$\lambda_{j_r+1} = \lambda_{j_r} + O(\tau_r^{-\frac{\sigma}{2}}) = \tau_r + O(\tau_r^{-\frac{\sigma}{2}}).$$

(2.8) **Corollaire.** *Soit g une isométrie d'ordre N de M et $\mathscr{E}$ un q.m.; supposons que $MS_\infty(\mathscr{E}) \cap (g^*)^i(MS_\infty(\mathscr{E})) = \emptyset$ pour $i = 1, \ldots, N-1$. Alors les q.m. $\mathscr{E}_i = (u_r \circ g^i, \tau_r)$ sont deux à deux orthogonaux, et il y a donc un paquet de N valeurs propres qui s'accumulent autour de τ_r.*

Ce dernier corollaire est à la base de l'article d'Arnold ([A1]) où cet auteur montre que les fonctions u_r du quasi-mode $\mathscr{E}$ ne sont pas nécessairement asymptotiques à des fonctions propres. Si M a une symétrie d'ordre 3, il est raisonnable de penser, comme l'explique Arnold, que génériquement les deux tiers des valeurs propres de M sont doubles et le tiers restant est simple: les fonctions propres correspondant aux différentes représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ apparaissent indépendamment. Soit une telle M, soit $\mathscr{E}$ un q.m. vérifiant les hypothèses du corollaire (2.8), on ne peut pas avoir $u_r \to \varphi_{j_r}$ dans $L^2(M)$, car $(u_r, u_r \circ g, u_r \circ g^2)$ est asymptotiquement orthonormé; ce qui implique que λ_{j_r} est une valeur propre au moins triple pour r assez grand.

Pour un q.m. d'ordre ∞, on aura cependant un résultat de convergence de u_r vers φ_{j_r} si les valeurs propres vérifient une estimation du type $|\lambda_{j+1} - \lambda_j|^{-1} = O(\lambda_j^N)$ pour un certain N. Une telle estimation est improbable génériquement à cause de (2.7), mais on peut espérer des estimations du type $|\lambda_{j+2} - \lambda_j|^{-1} = O(\lambda_j^N)$.

Pour finir, signalons qu'on peut définir directement le microsupport d'ordre ∞ à partir de la suite u_r:

(2.9) **Proposition.** *Soit $\mathscr{E} = (u_r, \tau_r)$ un q.m. d'ordre ∞; alors $(x_0, \xi_0) \notin MS_\infty(\mathscr{E})$ équivaut à: il existe $v \in C_0^\infty(M)$ avec $v(x_0) \neq 0$ et un voisinage ω de ξ_0 tels que $\widehat{v u_r}(\tau \xi)$ soit à décroissance rapide quand r et $\tau \to \infty$ uniformément pour $\xi \in \omega$.*

D'abord il est clair qu'une telle condition de décroissance rapide implique que pour toute suite $(a_r) \in l^2$, $(x_0, \xi_0) \notin WF(\sum a_r u_r)$.

La réciproque utilise le théorème du graphe fermé: soit $(x_0, \xi_0) \notin MS_\infty(\mathscr{E})$ et $\Omega \times U$ un voisinage conique de (x_0, ξ_0) dans un système de coordonnées canonique tel que $(\Omega \times U) \cap MS_\infty(\mathscr{E}) = \emptyset$. Si $v \in C_0^\infty(\Omega)$, on a $|\sum_r a_r \widehat{v u_r}(\xi)| \leqq C_N((a_r))(1 + |\xi|)^{-N}$ pour tout ξ dans U. Cette propriété est vérifiée pour toute suite (a_r) à croissance lente, car $WF(P(\sum a_r u_r)) = WF(\sum a_r u_r)$ pour un q.m. d'ordre ∞. Soit E_k l'espace de Banach des suites (a_r) telles que $\sum_r |a_r| \tau_r^{-k} < +\infty$ muni de la norme: $\|a_r\|_k = \sum_r |a_r| \tau_r^{-k}$, l'application $(a_r) \mapsto \sum a_r \widehat{v u_r}(\xi)$ de E_k dans $\mathscr{S}(U)$ est continue d'après le théorème du graphe fermé, on en déduit:

$$|\sum_r a_r \cdot \widehat{v u_r}(\xi)| \leqq C_{N,k} \cdot (\sum_r |a_r| \tau_r^{-k}) \cdot (1 + |\xi|)^{-N}$$

en posant $a_r = \begin{cases} \tau_{r_0}^k & \text{si } r = r_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, on en déduit: $|\widehat{v u_{r_0}}(\xi)| \leqq C_{N,k} \tau_{r_0}^{-k} (1 + |\xi|)^{-N}$ ce qui montre ce qu'on voulait.

3. *Masse d'un quasi-mode*

Utilisant la relation $\mathrm{vol}(T_1^*(M)) = \mathrm{vol}(M) \times \mathrm{vol}(S^{n-1})$, on peut écrire la formule asymptotique d'Hermann Weyl sous la forme:

$$(3.1)\quad \#\{j \mid \lambda_j \leq \lambda\} \sim \frac{1}{n}(2\pi)^{-n}\, \mathrm{vol}(T_1^*(M))\, \lambda^{n/2}.$$

Cela conduit naturellement à poser pour un q.m. $\mathscr{E} = (u_r, \tau_r)$ la

(3.2) **Définition.** *On appelle masse du q.m. $\mathscr{E}$ et on note $m(\mathscr{E})$ le nombre défini par:*

$$m(\mathscr{E}) = n(2\pi)^n \cdot \limsup_{\lambda \to \infty} \frac{\#\{\tau_r \leqq \lambda\}}{\lambda^{n/2}}.$$

Utilisant (1.3) on voit que $0 \leqq m(\mathscr{E}) \leqq \mathrm{vol}(T_1^*(M))$. L'objet du § 3 est de prouver le:

(3.3) **Théorème.** *Pour tout q.m. $\mathscr{E}$, on a, $m(\mathscr{E}) \leqq \mathrm{vol}(MS(\mathscr{E}))$.*

En particulier, ce théorème montre qu'un fermé de $T_1^*(M)$ de mesure nulle invariant par le flot géodésique (par exemple une géodésique périodique) ne peut pas être le microsupport d'un q.m. de masse strictement positive; cela conduit à penser que si l'on veut construire des familles non négligeables de valeurs propres associées à une géodésique périodique stable, il ne faudra pas se contenter d'étudier les jets du flot géodésique sur cette trajectoire, mais étudier ce qui se passe réellement dans un voisinage de la géodésique (voir *V* pour plus de détails).

Comme on a $MS(\mathscr{E}) = \bigcap_{\varepsilon > 0} MS_\varepsilon(\mathscr{E})$, il suffit de montrer le théorème avec $MS_\varepsilon(\mathscr{E})$. Soit $N(\lambda) = \#\{\tau_r \leqq \lambda\}$, on a:

$$N(\lambda) = \sum_{\tau_r \leqq \lambda} \int_M |u_r(x)|^2\, v(x)\, dx.$$

Si

$$MS_\varepsilon(\mathscr{E}) \subset \bigcup_{l=1}^{L} U_l \times V_l,$$

où U_l est un domaine de carte et V_l un cône de $\mathbb{R}^n$ (en identifiant $U_l \times \mathbb{R}^n$ et $T^*(U_l)$ au moyen des coordonnées canoniques) et $\chi_l \in C_0^\infty(U_l)$ telles que

$$\sum_{l=1}^{L} \chi_l^2(x)\, dx = v(x)\, dx$$

(mesure riemannienne canonique); on peut écrire:

$$N(\lambda) = (2\pi)^{-n} \sum_{l=1}^{L} \sum_{\tau_r \leqq \lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\chi_l u_r}(\xi)|^2\, d\xi.$$

(3.4) **Lemme.** *Pour* $0<\varepsilon\leqq\frac{1}{2}$, *la suite* $w_r=\Delta^\varepsilon(\chi u_r)-\tau_r^\varepsilon(\chi u_r)$ *est bornée dans* $L^2(M)$.

En effet $(\Delta-\tau_r)u_r$ est bornée dans $L^2(M)$ et donc:

$$(\Delta-\tau_r)\chi u_r=2(d\chi, du_r)+u_r\Delta\chi+\chi(\Delta-\tau_r)u_r$$

est bornée dans $H^{-1}(M)$. Donc si $\chi u_r=\sum_j a_j^r\varphi_j$, on a:

$$\sum_j |a_j^r|^2\frac{|\lambda_j-\tau_r|^2}{\lambda_j}=O(1).$$

Or, pour $0<\varepsilon\leqq\frac{1}{2}$, $|\lambda_j^\varepsilon-\tau_r^\varepsilon|\leqq C|\lambda_j^{1/2}-\tau_r^{1/2}|$ (λ_j et $\tau_r\geqq 1$) et donc:

$\sum_j |a_j|^2|\lambda_j^\varepsilon-\tau_r^\varepsilon|^2=O(1)$, ce qu'on voulait prouver.

Or on sait que, si $f\in E$, f est dans H^ε sur $U_l\times\complement V_l$; par le graphe fermé, on en déduit que $\chi_l u_r$ est une suite borné de H^ε sur $U_l\times\complement V_l$:

$$\|\widehat{\Delta^{\varepsilon/2}(\chi_l u_r)}(\xi)\|_{L^2(\complement V_l)}=O(1).$$

En utilisant le lemme (3.4) avec $\frac{\varepsilon}{2}$, on en déduit:

$$\|\widehat{\chi_l u_r}(\xi)\|_{L^2(\complement V_l)}=O(\tau_r^{-\varepsilon/2}).$$

En reportant dans $N(\lambda)$, on trouve donc:

$$N(\lambda)=(2\pi)^{-n}\sum_{l=1}^{L}\sum_{\tau_r\leqq\lambda}\int_{V_l}|\widehat{\chi_l u_r}(\xi)|^2\,d\xi+O(\lambda^{\frac{n-\varepsilon}{2}}).$$

On va maintenant majorer $N(\lambda)$ par une intégrale analogue obtenue en remplaçant les u_r par les φ_j, mais en intégrant toujours sur les V_l; si

$$g_\lambda(x)=\sum_{\lambda_j\leqq(1+\alpha)\lambda}\widehat{\chi_l\varphi_j}(\xi)\cdot\varphi_j(x),$$

on a:

$$\|g_\lambda(x)\|_{L^2(M)}^2=\sum_{\lambda_j\leqq(1+\alpha)\lambda}|\widehat{\chi_l\varphi_j}(\xi)|^2\geqq\sum_{\tau_r\leqq\lambda}|(g_\lambda(x), u_r(x))|^2.$$

Or: $(g_\lambda, u_r)=\widehat{\chi_l u_r'}(\xi)$; où, si $u_r=\sum a_j\varphi_j$, $u_r'=\sum_{\lambda_j\leqq(1+\alpha)\lambda}a_j\varphi_j$. De l'estimation $\|(\Delta-\tau_r)(u_r-u_r')\|_{L^2(M)}=O(1)$, on déduit:

$$\|u_r-u_r'\|_{L^2(M)}=O\left(\frac{1}{\alpha\lambda}\right).$$

Donc, α étant fixé, on obtient:

$$\int_{V_l}\sum_{\lambda_r\leqq\lambda}|\widehat{\chi_l u_r}(\xi)|^2\leqq\int_{V_l}\sum_{\lambda_j\leqq(1+\alpha)\lambda}|\widehat{\chi_l\varphi_j}(\xi)|^2+O(\lambda^{\frac{n}{2}-1}).$$

Pour prouver le théorème, il suffit donc de prouver que:

$$(3.5)\quad \sum_{l=1}^{L} \sum_{\lambda_j \leqq \lambda} \int_{V_l} |\widehat{\chi_l \varphi_j}(\xi)|^2 \sim \operatorname{vol}\left(\bigcup_{l=1}^{L} (U_l \times V_l) \cap B_1^*(M)\right) \lambda^{n/2}.$$

où $B_1^*(M)$ désigne le fibré cotangent en boules. En effet, on peut choisir U_l et V_l pour que

$$\operatorname{vol}\left(\bigcup_{l=1}^{L} (U_l \times V_l) \cap T_1^*(M)\right) \leqq \operatorname{vol}(MS_\varepsilon(\sigma)) + \eta$$

où η est arbitrairement petit. Pour prouver (3.5), on va utiliser l'équation de la chaleur: d'une estimation pour le comportement asymptotique de

$$\sum_{l=1}^{L} \sum_{j} e^{-\lambda_j t} \int_{V_l} |\widehat{\chi_l \varphi_j}(\xi)|^2 = Z(t)$$

on déduira (3.5) à l'aide du théorème taubérien de Karamata.

Si g_l est la fonction caractéristique de V_l, on peut écrire:

$$Z(t) = \sum_{l=1}^{L} \int_{U_l \times U_l} e(t,x,y)\, \chi_l(x)\, \chi_l(y)\, \hat{g}_l(x-y)\, dx\, dy$$

où $e(t,x,y)$ est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur M ([BGM]). On pose alors $y = x + \sqrt{t} \cdot \omega$, et utilisant l'homogénéité de g_l et donc de $\hat{g}_l$, il vient:

$$Z(t) = \sum_{l=1}^{L} \int_{U_l \times \mathbb{R}^d} e(t,x,x+\sqrt{t}\,\omega)\, \chi_l(x)\, \chi_l(x+\sqrt{t}\,\omega)\, \hat{g}_l(-\omega)\, dx\, d\omega.$$

On utilise alors le lemme suivant que nous prouvons plus bas:

(3.6) **Lemme.** *Quand* $t \to 0^+$, $(4\pi t)^{n/2} \cdot e(t,x,x+\sqrt{t}\,\omega)\, \chi_l(x)\, \chi_l(x+\sqrt{t}\,\omega)$ *converge dans* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *vers* $\exp(-\frac{1}{4} Q_x(\omega)) \cdot \chi_l^2(x)$, *où* Q_x *est la métrique riemannienne en* x.

On en déduit:

$$Z(t) \sim (4\pi t)^{-n/2} \sum_{l=1}^{L} \int \hat{g}_l(-\omega)\, |\chi_l(x)|^2 \exp(-\tfrac{1}{4} Q_x(\omega))\, dx\, d\omega.$$

Par Fourier, il vient:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}_l(-\omega) \exp(-\tfrac{1}{4} Q_x(\omega))\, d\omega = (4\pi)^{n/2} |\text{dét}\, Q_x|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^n} g_l(\xi) \exp(-Q_x^{-1}(\xi)\, d\xi.$$

Donc remarquant que $v(x) = |\text{dét}(Q_x)|^{1/2}$, on a:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}_l(-\omega)\, |\chi_l(x)|^2 \exp(-\tfrac{1}{4} Q_x(\omega))\, d\omega\, dx$$

$$= \int_{U_l \times V_l} \exp(-Q_x^{-1}(\xi)) \cdot \frac{|\chi_l(x)|^2}{v(x)}\, dx\, d\xi.$$

Utilisant le fait que $dx\,d\xi$ est l'élément de volume de $T^*(M)$ et que $\sum_{l=1}^{L} \chi_l^2(x) = v(x)$, et remarquant que Q_x^{-1} est la métrique sur $T_x^*(M)$, on obtient:

$$Z(t) \sim t^{-n/2} \cdot \frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \operatorname{vol}\left(\bigcup_{l=1}^{L} (U_l \times V_l) \cap B_1^*(M)\right).$$

On applique alors le théorème taubérien de Karamata.

Preuve du lemme (3.6). Utilisant les calculs de [B.G.M.] p. 207 et suivantes, on voit qu'il suffit d'établir que

$$\exp\left(-\frac{1}{4t} d^2(x, x+\sqrt{t}\,\omega)\right) h(x, x+\sqrt{t}\,\omega)$$

converge dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ vers $\exp(-\frac{1}{4} Q_x(\omega)) \cdot h(x,x)$ quand $t \to 0^+$ pour $h \in C_0^\infty(U_l \times U_l)$, on a en effet des estimations du type:

$$(4\pi t)^{n/2} e(t,x,y) = \exp\left(-\frac{1}{4t} d^2(x,y)\right) \left(\sum_{i=1}^{k} U_i(x,y)\, t^i\right) + R_k(t,x,y)$$

où

$$|R_k(t,x,y)| = O\left(t^k \cdot \exp\left(-\frac{1}{2t} d^2(x,y)\right)\right)$$

et des estimations analogous pour les dérivées de R_k. Pour établir la convergence dans $\mathscr{S}$ annoncée plus haut; la convergence dans L^2 s'écrit par exemple:

$$\int \left| \exp\left(-\frac{1}{4t} d^2(x, x+\sqrt{t}\,\omega)\right) h(x, x+\sqrt{t}\,\omega) - \exp\left(-\frac{1}{4t} Q_x(\omega)\right) h(x,x) \right|^2 dx\, d\omega$$

tend vers 0 quand $t \to 0^+$; cela résulte sans difficultés du théorème de Lebesgue et d'une estimation du type $d^2(x, x+\sqrt{t}\,\omega) \geqq C t \|\omega\|^2$.

II. Quasi-modes sur les variétés Riemanniennes dont le flot géodésique est complètement intégrable

4. Les coordonnées actions-angles

Si M est une variété riemannienne compacte, C^∞, de dimension n, on dit que le flot géodésique sur M est *complètement intégrable* s'il existe une application C^∞ et positivement homogène de degré $1, f$: $T^*(M) \setminus 0 \to \mathbb{R}^n \setminus 0$ et un ouvert conique Ω de $T^*(M) \setminus 0$, dont le complémentaire est de codimension plus grande que 1, tels que:

i) $f\restriction_\Omega$: $\Omega \to \mathbb{R}^n \setminus 0$ est une submersion propre à fibres connexes.

ii) Si $f = (f_1, \ldots, f_n)$, on a $f_1(x,\xi) = (\sum_{i,j} g^{ij}(x)\, \xi_i \xi_j)^{1/2} = q(x,\xi)$ (norme du vecteur cotangent (x,ξ)).

iii) $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$, le crochet de Poisson $\{f_i, f_j\}$ est identiquement nul.

Les fonctions $(f_i)_{i \geqq 2}$ sont appellées intégrales premières, car elles sont invariantes par le flot géodésique.

Cette situation, bien que non générique, se rencontre dans un certain nombre d'exemples:

a) $M = S^2$ ou $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ munis d'une métrique de «révolution», i.e. dont le groupe d'isométrie contient S^1.

b) $M = SO(3)$ muni d'une métrique invariante à gauche (mouvement d'un solide autour de son centre de gravité).

c) M est un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ dont les axes sont de longueurs deux à deux distinctes, muni de la métrique induite par celle de $\mathbb{R}^n$.

d) $M = S^2$ munie d'une métrique de Zoll (i.e. dont le flot géodésique est périodique), pas nécessairement de révolution.

Les champs de vecteurs $(H_{f_i})_{1 \leqq i \leqq n}$ qui commutent et sont intégrables (car tangents aux fibres compactes de f) définissent une action de $\mathbb{R}^n$ sur Ω dont les orbites sont les fibres $\Lambda_a = f^{-1}(a)$ de f. Ω admet donc un feuilletage homogène par des tores invariants par le flot géodésique et lagrangiens, il n'est pas difficile de montrer qu'on aurait pu prendre cette définition pour le flot géodésique complètement intégrable. Il est classique qu'on peut pour étudier de tels feuilletages introduire les *coordonnées* dites «*actions-angles*»:

(4.1) **Théorème.** *Soit $a \in f(\Omega)$, il existe un voisinage conique convexe U de a dans $\mathbb{R}^n \setminus 0$ et un difféomorphisme canonique homogène χ d'un ouvert conique $X \times C$ du cotangent $X \times \mathbb{R}^n$ de X avec $X = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$* ($C$ est un cône ouvert de $\mathbb{R}^n \setminus 0$) *sur $f^{-1}(U)$ tel que:*

i) *χ^{-1} transforme le feuilletage $(\Lambda_a)_{a \in U}$ de $f^{-1}(U)$ en le feuilletage $(T_\xi)_{\xi \in C}$ avec $T_\xi = X \times \{\xi\}$. On pose $T_{\xi(a)} = \Lambda_a$.*

ii) *Si (γ_i) est la base canonique de $\pi_1(X)$, on en déduit une base notée $(\gamma_{i,\xi})$ de $\pi_1(T_\xi)$ et on a: $\xi_i(a) = \int_{\gamma_{i,\xi(a)}} \alpha$ où α est la forme de Liouville sur $T^*(M)$.*

iii) *On a $q \circ \chi(x, \xi) = K(\xi)$ où K est une fonction C^∞ homogène de degré 1 sur C. Donc le flot géodésique H_q a pour image par χ^{-1} le champ de vecteurs $(K'(\xi), 0)$ dont les intégrales sont $t \mapsto (x_0 + tK'(\xi_0), \xi_0)$; ce qui veut dire que, sur les tores Λ_a, le flot géodésique a des trajectoires quasi-périodiques.*

Pour prouver (4.1), on introduit au voisinage de Λ_a des coordonnées homogènes F: $X \times C' \to \Omega$ telles que $F(T_\xi)$ est une feuille Λ_a pour tout ξ de C' et que $(F^{-1})(H_{f_i})$ sont des champs de vecteurs constants le long de chaque T_ξ. On montre alors que $F^*(\omega)$ s'écrit

$$F^*(\omega) = \sum_{i=1}^{n} d(p_i(\xi)) \wedge d(x_i - g_i(\xi)).$$

Et on prend pour nouvelles coordonnées les $(x_i - g_i, p_i)$. Les conditions ii) et iii) sont automatiquement vérifiées.

La classe de Maslov de Λ_a s'interprète à l'aide de χ comme un élément μ_0 de $H^1(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^n$ indépendant de a, car U est connexe. La condition de quantification de Maslov sur $\chi(T_\xi)$ ([D]) s'écrit donc simplement

$$\frac{1}{2\pi}\xi = \nu + \tfrac{1}{4}\mu_0 \quad \text{avec } \nu \in \mathbb{Z}^n.$$

On peut donc formuler le:

(4.2) **Théorème.** *En utilisant les cartes $\xi \mapsto \chi(T_\xi)$, on munit l'ensemble des feuilles du feuilletage lagrangien d'une structure de cône affine de groupe structural $GL(n; \mathbb{Z})$. Dans ce cône, les variétés lagrangiennes vérifiant les conditions de quantification de Maslov forment un réseau décentré noté Q et on a la formule asymptotique suivante: pour tout cône V à base relativement compacte dans celle de $f(\Omega)$ et ayant une frontière C^1 par morceaux, on a:*

$$\#\{a \in V \mid \Lambda_a \in Q \text{ et } q(\Lambda_a) = a_1 \leqq \mu\} = (2\pi)^{-n} \operatorname{vol}(B_1^*(M) \cap f^{-1}(V))\, \mu^n + O(\mu^{n-1}).$$

La première assertion résulte de (4.1)ii) et du fait que les changements de base de $\pi_1(X) = \mathbb{Z}^n$ s'identifient aux éléments de $GL(n; \mathbb{Z})$.

Il suffit de vérifier la seconde assertion quand $f^{-1}(V)$ est dans un domaine de coordonnées actions-angles, on a alors:

$$\#\{a \in V \mid \Lambda_a \in Q \text{ et } q(\Lambda_a) \leqq \mu\} = \#\{\nu \in \mathbb{Z}^n \mid \nu + \tfrac{1}{4}\mu_0 \in V_1 \text{ et } 2\pi K(\nu + \tfrac{1}{4}\mu_0) \leqq \mu\}$$

où V_1 est l'ensemble des ξ tel que $\chi(T_\xi)$ est contenu dans $f^{-1}(V)$. De la formule classique donnant le comportement asymptotique du nombre de points d'un réseau dans une famille de domaines homothétiques à frontières C^1 par morceaux, on déduit:

$$\#\{a \in V \mid \Lambda_a \in Q \text{ et } q(\Lambda_a) \leqq \mu\} = \operatorname{vol}(\{K(\xi) \leqq 1\} \cap V_1) \times \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^n + O(\mu^{n-1})$$

et χ étant canonique, on a:

$$\operatorname{vol}(\{K(\xi) \leqq 1\} \cap V_1) = \operatorname{vol}(B_1^*(M) \cap f^{-1}(V)).$$

Ce théorème montre que, dans le cas complètement intégrable, le nombre de variétés lagrangiennes vérifiant les conditions de quantification de Maslov est optimal par rapport à la formule de H. Weyl. De plus localement le reste est du même ordre que celui obtenu par Hörmander ([H2]). Nous allons montrer dans 5 que cela permet de construire des q.m. de masse optimale.

On peut encore relier la classe de Maslov de χ et celle de Λ_a par la:

(4.3) **Proposition.** *Si $m(\chi) \in H^1(X \times C; \mathbb{Z})$ est la classe de Maslov de χ et j_{ξ_0} l'injection de X dans $X \times C$ défini par $j_{\xi_0}(x) = (x, \xi_0)$, on a pour tout ξ_0 de C:*

$$j_{\xi_0}^*(m(\chi)) = \mu_0.$$

Rappelons que la α-construction de Hörmander ([H1] p. 158 et suivantes) permet d'associer un indice entier $\operatorname{ind}(\gamma; \lambda_1, \lambda_2)$ à tout lacet γ fermé d'une variété symplectique Y si $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ sont des plans lagrangiens variant continument dans $T_{\gamma(t)}(E)$. La non-nullité de cet indice est une obstruction à trouver un plan lagrangien $\lambda(t)$ de $T_{\gamma(t)}(E)$ variant continument et transverse pour tout t à $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$. On a les relations suivantes:

$m(\chi)(\gamma)=\mathrm{ind}(\gamma;\, V_X, \chi^*(V_M))$ où V_X et V_M sont les fibrés lagrangiens verticaux de $T^*(X)\setminus 0$ et $T^*(M)\setminus 0$.

$\mu_0(\gamma)=\mathrm{ind}(\gamma;\, T_{\gamma(t)}\Lambda_a, V_M)$ si γ est un lacet tracé sur Λ_a. Soit H_X le fibré lagrangien des plans horizontaux de $T^*(X)=X\times\mathbb{R}^n$, on a par homotopie de H_X et V_X:

$m(\chi)(\gamma)=\mathrm{ind}(\gamma;\, H_X, \chi^*(V_M))$ et cet indice n'est autre que $\mu_0(\gamma)$ calculé avec le changement de variables χ.

5. *Construction d'un opérateur d'entrelacement*

Soit χ: $X\times C\to T^*(M)\setminus 0$ un système de coordonnées «actions-angles». Supposons en outre que:

(5.1) $m(\chi)=\pi_X^*(\mu_0)$.

Cette condition sera vérifiée d'après (4.3) si, par exemple, le cône C est simplement connexe; on pourra donc toujours trouver au voisinage d'une fibre de f un système de coordonnées «actions-angles» vérifiant cette condition. Soit E le fibré hermitien plat sur X associé à la classe μ_0 de $H^1(X;\mathbb{Z})$ par la représentation $n\mapsto e^{i\frac{\pi}{2}n}$ de $\mathbb{Z}$ dans $SU(1)$. On peut construire E comme quotient du fibré trivial $\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}$ au-dessus de $\mathbb{R}^n$, ce qui permet d'identifier canoniquement les sections f et E et les fonctions $\tilde{f}$: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ qui vérifient la condition suivante:

(5.2) $\forall v\in\mathbb{Z}^n,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\qquad \tilde{f}(x+v)=e^{i\frac{\pi}{2}\langle\mu_0,v\rangle}\tilde{f}(x).$

Une base orthonormée de $L^2(X;E)$ (par rapport à la mesure de Lebesgue sur X) est formée par les sections $(e_v)_{v\in\mathbb{Z}^n}$ telles que $\tilde{e}_v(x)=\exp(2\pi i\langle v+\frac{1}{4}\mu_0, x\rangle)$.

Soit C_1 un cône à base compacte dans C et K_1 une fonction C^∞ homogène de degré un sur $\mathbb{R}^n\setminus 0$ et égale à K au voisinage de C_1. Soit P l'opérateur auto-adjoint positif sur $L^2(X;E)$ défini par $Pe_v=4\pi^2[K_1(v+\frac{1}{4}\mu_0)]^2 e_v$.

(5.3) **Proposition.** *P est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 2 dont le symbole complet dans une carte exponentielle de X est $p(x,\xi)=[K_1(\xi)]^2$; en particulier, si on identifie les fonctions et les demi-densités, grâce à la mesure de Lebesgue sur X, le symbole principal de P est $[K_1(\xi)]^2$ et le symbole sous-principal de P est nul.*

Pour toute section f de E, on a:

$$P\tilde{f}(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\langle\xi,x-y\rangle}K_1^2(\xi)\,\tilde{f}(y)\,dy\,d\xi,$$

en effet c'est vrai pour $f=e_v$ par définition de P. Soit maintenant $v\in\mathscr{E}'(U;E)$ où U est un ouvert de X domaine d'une carte exponentielle (p: $U_1\to U$ est un difféomorphisme). Soit $v_0=v\circ p\in\mathscr{E}'(U_1)$, on a:

$$\tilde{v}(y)=\sum_{v\in\mathbb{Z}^n}\exp\left(i\frac{\pi}{2}\langle\mu_0,v\rangle\right)\cdot v_0(y-v)$$

et donc:

$$Pv(x)=(2\pi)^{-n}\Big[\int e^{i\langle\xi,x-y\rangle}K_1^2(\xi)\,v_0(y)\,dy\,d\xi$$
$$+\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}\int e^{i\left[\langle\xi,x-y\rangle+\frac{\pi}{2}\langle\mu_0,\nu\rangle\right]}K_1^2(\xi)\,v_0(y-\nu)\,dy\,d\xi\Big].$$

Par intégration par parties en ξ, on montre que la somme $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}$ est C^∞ au voisinage de $\mathrm{Supp}(v_0)$. On obtient alors le résultat.

Soit F le sous-espace vectoriel fermé de $L^2(X;E)$ engendré par les e_ν tels que $\nu+\frac{1}{4}\mu_0$ soit dans C_1, on a le:

(5.4) **Lemme.** *Pour tout f de F, $WF(f)\subset X\times C_1$.*

Soit U_1 et U comme dans la preuve de (5.3) et $v\in C_0^\infty(U)$, $v_1=v\circ p$, $v_1\in C_0^\infty(U_1)$, on a: $vf\circ p(x)=v_1(x)\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}a_\nu\exp(2i\pi\langle\nu+\frac{1}{4}\mu_0,x\rangle)$ où les a_ν sont nuls pour $\nu+\frac{1}{4}\mu_0\notin C_1$. Donc:

$$\widehat{vf\circ p}(\xi)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}a_\nu\,\hat{v}_1(\xi-2\pi(\nu+\tfrac{1}{4}\mu_0)).$$

En utilisant le fait que $\hat{v}_1$ est à décroissance rapide, on voit sans difficultés que $\widehat{vf\circ p}(\xi)$ est à décroissance rapide dans tout cône fermé disjoint de C_1.

On va adapter la construction de Weinstein ([W1]) pour construire un opérateur d'entrelacement entre $P\restriction_F$ et le laplacien sur M; plus précisément:

(5.5) **Théorème.** *Il existe un opérateur intégral de Fourier A d'ordre 0 associé à χ et elliptique au voisinage de $X\times C_1$ tel que:*

i) *$B=A\restriction_F$ est une isométrie injective de F dans $L^2(M)$: $B^*B=\mathrm{Id}_F$.*

ii) *L'opérateur $\Delta B-BP\restriction_F$ est borné de F dans $L^2(M)$.*

On peut aussi formuler ceci en disant que $\mathscr{E}=(A(F),B\circ P\restriction_F\circ B^{-1})$ est un quasi-mode d'ordre 0 sur M et de microsupport

$$MS(\mathscr{E})=MS_\infty(\mathscr{E})=\chi(X\times C_1)\cap T_1^*(M).$$

Ce quasi-mode est de masse optimale par rapport au théorème (3.3).

(5.6) **Corollaire.** *Il existe une application $\nu\mapsto j_\nu$ injective de $\{\nu\in\mathbb{Z}^n\mid\nu+\frac{1}{4}\mu_0\in C_1\}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\lambda_{j_\nu}-4\pi^2[K(\nu+\frac{1}{4}\mu_0)]^2=O(1)$.*

Construction de A isométrique.

Si E est un fibré vectoriel complexe sur une variété X et Λ une sous-variété lagrangienne conique de $T^*(X)\setminus 0$, on définit en utilisant les trivialisations locales de E un espace de distributions intégrales de Fourier $I^m(X;\Lambda;E)\supset C_0^\infty(X;E)$. Si π_Λ est la projection canonique de Λ sur X et M_Λ désigne le fibré de Maslov de Λ, on définit pour u dans $I^m(X;\Lambda;E)$ un symbole principal d'ordre m, $\sigma(u)$ dans l'espace $S^m(\Lambda,\Omega_{1/2}\otimes M_\Lambda\otimes\pi_\Lambda^*(E))$ comme dans Hörmander ([H1] p. 148). Dans notre cas, on veut construire un opérateur A: $C_0^\infty(X;E)\to C^\infty(M,\mathbb{C})$ il faut donc chercher $K_A\in I^0(X\times M;\Lambda_\chi;p_\chi^*(E'))$ où p_χ: $X\times M\to X$ est la première projection et E' le fibré dual de E. Le symbole principal a de A sera donc, en ramenant tout sur $T^*(X)\setminus 0$ et en supprimant le facteur $\Omega_{1/2}$ grâce à la densité canonique sur $T^*(X)$, un élément de

$S^0(T^*(X)\setminus 0, p_X^*(E)\otimes p_X^*(E'))$ (car $p_X^*(E)$ est par construction de E le fibré du Maslov de χ). Finalement a est dans $S^0(T^*(X)\setminus 0;\mathbb{C})$ canoniquement.

(5.7) **Lemme.** *On peut choisir $A\in I^0(X,E;M:\chi)$ tel que $a=1$ au voisinage de $X\times C_1$ et $WF'(A^*A-\mathrm{Id}_X)\subset X\times(\mathbb{R}^n\setminus C_1)$.*

On construit A par récurrence: $A=A_0+A_1+\cdots+A_n+\cdots$ où A_n est dans $I^{-n}(X,E;M;\chi)$; $a_0=1$ au voisinage de $X\times C_1$ et est à support à base compacte dans $X\times C$ et si $B_n=A_0+\cdots+A_n$, on veut avoir $B_n^*B_n-\mathrm{Id}_X$ d'ordre $-(n+1)$ au voisinage de $X\times C_1$. Pour $n=0$, c'est vérifié, car $A_0^*A_0-\mathrm{Id}_X$ a pour symbole $|a_0|^2-1$ qui est nul au voisinage de $X\times C_1$. On veut avoir $(B_{n-1}+A_n)^*(B_{n-1}+A_n)-\mathrm{Id}_X$ d'ordre $-(n+1)$ au voisinage de $X\times C_1$, c'est-à-dire que le symbole d'ordre $-n$ est nul:

$$\sigma_{-n}(B_{n-1}^*B_{n-1}-\mathrm{Id})+\bar{a}_0\,a_n+\bar{a}_n\,a_0=0$$

au voisinage de $X\times C_1$, on peut construire a_n sans difficultés car $B_{n-1}^*B_{n-1}-\mathrm{Id}$ est auto-adjoint et donc son symbole principal est réel.

(5.8) **Lemme.** *En modifiant par un régularisant l'opérateur A obtenu précédemment, on peut le rendre isométrique de F dans $L^2(M)$.*

Soit $\tilde{A}=A\restriction_F$, on a $\tilde{A}^*\tilde{A}=\mathrm{Id}_F+K$ où K est régularisant, donc $\dim(\mathrm{Ker}A_1)<+\infty$. De plus $\dim(\mathrm{coker}(A_1))=+\infty$, car $\chi\restriction_{X\times C_1}$ n'est pas surjective. On peut donc modifier A par un régularisant pour rendre $\tilde{A}$ injectif. Soit alors $G=(\tilde{A}^*\tilde{A})^{-1/2}$, on voit que $G=\mathrm{Id}_F+R$ où R est régularisant et si on pose $B=\tilde{A}G$, on a $B^*B=\mathrm{Id}_F$, de plus B est la restriction à F d'un opérateur qui diffère de A par un régularisant.

La propriété d'entrelacement.

(5.9) **Lemme.** *$A\circ P-\Delta\circ A$ est un opérateur intégral de Fourier d'ordre* 0 *au voisinage de $X\times C_1$.*

On a

$$K_{AP-\Delta A}=(1_M\otimes P-\Delta_M\otimes 1_X)\,K_A.$$

La difficulté est que $1_X\otimes P$ n'est pas un opérateur pseudo-différentiel; cependant, on a $WF(K_A)\subset T^*(X)\setminus 0\times T^*(M)\setminus 0$, on peut montrer alors que $1_M\otimes P$ opère sur K_A comme un opérateur pseudo-différentiel de symbole total $K_1^2(\xi)$. On en déduit que le symbole principal d'ordre 2 de $(1_M\otimes P-\Delta_M\otimes 1_X)\,K_A$ est nul au voisinage de $X\times C_1$, car on a alors $q\circ\chi=K=K_1$. De même pour le symbole principal d'ordre 1 sur $X\times C_1$, car, d'après Hörmander, il est somme de deux termes: le premier est une dérivée de Lie du symbole de K_A qui est constant égal à 1 au voisinage de $X\times C_1$; le deuxième fait intervenir le symbole sous-principal de $1_M\otimes P-\Delta_M\otimes 1_X$ qui est nul. Donc le symbole d'ordre 1 est nul aussi. Cela prouve le lemme et donc le théorème.

6. La fonction spectrale dans le cas complètement intégrable non dégénéré

(6.1) **Définition.** *Si M est une variété riemannienne de dimension n dont le flot géodésique est complètement intégrable dans Ω, on dit qu'il est non dégénéré s'il existe* *un système de cartes «actions-angles»* χ_i: $X \times C_i \to \Omega_i$, *tels que* $U\Omega_i = \Omega$ *et que* $K_i = q \circ \chi_i$ *ait une dérivée seconde partout de rang maximum sur* C_i *(soit* $n-1$, *car* K_i *homogène de degré* 1). *C'est alors vrai pour tout système de coordonnées actions-angles.*

Le flot géodésique est en général non dégénéré pour une surface de révolution; il est dégénéré pour une surface de Zoll ($K_i'' \equiv 0$).

(6.2) **Théorème.** *Si* M *a un flot géodésique complètement intégrable non dégénéré, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une partie* A_ε *de* $Sp(M) = \{\lambda_j | j \in \mathbb{N}\}$ *telle que:*

i) $\#\{\lambda_j \leqq \lambda | \lambda_j \notin A_\varepsilon\} \sim \varepsilon (2\pi)^{-n} \lambda^{n/2}$.

ii) $\#\{\lambda_j \leqq \lambda | \lambda_j \in A_\varepsilon\} = (2\pi)^{-n} (\operatorname{vol}(B_1^*(M)) - \varepsilon) \lambda^{n/2} + O(\lambda^{\frac{n}{2} - 1 + \frac{1}{n+1}})$.

De plus, si $\Omega = T^*(M) \setminus 0$ *et qu'on a un système global de coordonnées «actions-angles»* χ: $T^*(X) \setminus 0 \to T^*(M) \setminus 0$, *on peut prendre* $\varepsilon = 0$ *et* $A_\varepsilon = Sp(M)$ *dans les formules précédentes.*

(6.3) **Corollaire.** *Sous les hypothèses précédentes, on a:* $|\lambda_{j+1} - \lambda_j| = O(\lambda_j^{1/n+1})$.

(6.4) *Remarque.* Je ne connais pas de cas, en dehors des tores plats, où $\Omega = T^*(M) \setminus 0$. Dans le cas des tores plats on connaît des restes meilleurs que ceux proposés par (6.2).

(6.5) *Remarque.* Si on note $N(\lambda) = \#\{\lambda_j \leqq \lambda\}$, Hörmander ([H2]) a montré qu'on a toujours $N(\lambda) = (2\pi)^{-n} \operatorname{vol}(B_1^*(M)) \cdot \lambda^{n/2} + O(\lambda^{n-1/2})$; Duistermaat et Guillemin ([DG]) ont montré qu'on a $o(\lambda^{n-1/2})$ dans la situation générique. Notre résultat montre que, dans le cas intégrable non dégénéré, une grande partie du spectre a une répartition plus régulière que celle donnée par ces auteurs.

(6.6) *Remarque.* On peut obtenir des résultats intermédiaires entre

$$O(\lambda^{\frac{n}{2} - 1 + \frac{1}{n+1}}) \quad \text{et} \quad O(\lambda^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}})$$

en faisant des hypothèses sur le rang de $K''(\xi)$, ou encore plus précisément sur la nature des singularités de $K'(\xi)$.

La preuve de (6.2) est basée sur un résultat de Van der Corput ([VdC]) qui nous a été signalé par *F.* Dress et dont Randol nous a communiqué une démonstration très élégante que nous adaptons ici ([RL]).

Soit $\chi_i: X \times C_i' \to \Omega_i \subset \Omega$ une famille finie de systèmes de coordonnées «actions-angles» telle que les images Ω_i soient deux à deux disjointes et que les $\Omega_i \cap T_1^*(M)$ recouvrent $T_1^*(M)$ à un ensemble de mesure petite près. On choisit des cônes ouverts C_i à base relativement compacte dans C_i' tels que:

$$\operatorname{vol}((\Omega \setminus \bigcup_i \chi_i(X \times C_i)) \cap B_1^*(M)) \leqq \varepsilon.$$

On utilise alors le théorème (5.5), son corollaire (5.6), l'orthogonalité des q.m. de microsupports d'ordre ∞ disjoints (2.5) et le:

(6.7) **Lemme.** *Soit* (a_j) *et* (b_j) *deux suites re réels tendants vers* $+\infty$ *et vérifiant* $a_j = b_j + O(1)$ *et* $\#\{b_j \leqq \lambda\} = c\,\lambda^{n/2} + O(\lambda^{n/2-\alpha})$, *alors* (a_j) *a la même propriété à condition que* α *soit inférieur ou égal à* 1.

On se ramène ainsi à prouver le:

(6.8) **Théorème.** *Soit $K: \mathbb{R}^n \setminus 0 \to \mathbb{R}^+$, C^∞ homogène de degré 1 telle que $K''(x)$ soit de rang $n-1$ partout, posons $m_0 = \frac{1}{4}\mu_0$ et soient C et C' deux cônes ouverts de $\mathbb{R}^n \setminus 0$ tels que C soit à base relativement compacte dans C', il existe une partie X de $\mathbb{R}^n$ telle que $C \subset X \subset C'$ et telle que:*

$$\#\{\nu \in \mathbb{Z}^n \mid \nu + m_0 \in X \ \text{et} \ K(\nu + m_0) \leqq \mu\} = c_0 \mu^n + O(\mu^{n-2+\frac{2}{n+1}})$$

avec

$$\operatorname{vol}(\{K \leqq 1\} \cap C) \leqq c_0 \leqq \operatorname{vol}(\{K \leqq 1\} \cap C').$$

Rappelons les deux résultats suivants ([RL]):

(6.9) Si φ est la fonction caractéristique de la boule $\{K \leqq 1\}$, on a:

$$\hat{\varphi}(\xi) = O((1+|\xi|)^{-\frac{n+1}{2}}).$$

La preuve de (6.9) est basée sur la méthode de la phase stationnaire: on calcule la transformée de Fourier $\hat{\varphi}(\xi)$ par une intégrale oscillante sur la sphère $\{K=1\}$ et l'hypothèse de rang sur K'' assure que les points critiques qui apparaissent sont non dégénérés.

(6.10) Le résultat du théorème (6.8) est vrai si $C = C' = \mathbb{R}^n$.

Soit alors $\rho \in C_0^\infty(S^{n-1})$ telle que $\rho = 1$ sur $C \cap S^{n-1}$ et $\rho = 0$ hors de C'; on pose

$$\varphi_\mu(x) = \varphi\left(\frac{x}{\mu}\right) \quad \text{et} \quad \Psi_\mu(x) = \rho\left(\frac{x}{|x|}\right)(\varphi_\mu(x) - \varphi_{\mu/2}(x)).$$

(6.11) **Lemme.** *Si $N_\rho(\mu) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \Psi_\mu(\nu + m_0)$, on a:*

$$N_\rho(\mu) = \frac{c_0}{2}\mu^n + O(\mu^{n-2+\frac{2}{n+1}})$$

avec

$$c_0 = \int \rho\left(\frac{x}{|x|}\right)\varphi(x)\,dx.$$

Preuve de (6.11). On introduit une fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$ telle que $\int \chi = 1$, on pose $\chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ et:

$$N_{\rho,\varepsilon}(\mu) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} (\Psi_\mu * \chi_\varepsilon)(\nu + m_0).$$

On évalue d'abord $N_{\rho,\varepsilon}(\mu)$ pour $\varepsilon = \mu^{-\alpha}$, avec $\alpha = \dfrac{n-1}{n+1}$ par la formule de Poisson sur $\mathbb{R}^n$:

$$N_{\rho,\varepsilon}(\mu) = \hat{\Psi}_\mu \hat{\chi}_\varepsilon(0) + \sum_{\nu \neq 0} \mu^n \hat{\Psi}_1(2\pi\mu\nu) \cdot \hat{\chi}(2\pi\mu^{-\alpha} \cdot \nu)\, e^{2\pi i \nu m_0}.$$

Le premier terme vaut exactement $\frac{c_0}{2}\mu^n$. Pour évaluer le $\sum_{\nu \neq 0}$ on utilise la majoration de $\hat{\Psi}_1$ obtenue à partir de celle de $\hat{\varphi}$ (6.9) et la majoration $\hat{\chi}(\xi)=O((1+|\xi|)^{-\frac{n}{2}})$: on obtient ainsi:

$$N_{\rho,\varepsilon}(\mu)=\frac{c_0}{2}\mu^n+O\left(\sum_{\nu \neq 0}\frac{\mu^n}{(1+|\mu\nu|)^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{1}{(1+|\nu|\mu^{-\alpha})^{n/2}}\right).$$

Le reste $R_\varepsilon(\mu)$ est donc majoré par:

$$|R_\varepsilon(\mu)|\leqq C\cdot\mu^{\frac{n-1}{2}}\sum_{j=1}^{\infty} j^{-3/2}\cdot\left(\frac{1}{j}+\mu^{-\alpha}\right)^{-n/2}.$$

En décomposant la somme en $\sum_{j\leqq\mu^\alpha}$ et $\sum_{j>\mu^\alpha}$, on obtient:

$$R_\varepsilon(\mu)=O(\mu^{n-2+\frac{2}{n+1}}).$$

Il reste à évaluer la différence entre $N_\rho(\mu)$ et $N_{\rho,\varepsilon}(\mu)$. On a:

$$N_\rho(\mu)-N_{\rho,\varepsilon}(\mu)=\sum_\nu(\Psi_\mu-\Psi_\mu*\chi_\varepsilon)(\nu+m_0).$$

$(\Psi_\mu-\Psi_\mu*\chi_\varepsilon)(x)$ est nulle sauf pour $\frac{\mu}{2}-\mu^{-\alpha}\leqq K(x)\leqq\mu+\mu^{-\alpha}$. On décompose cette région en trois régions $A(\mu)$, $B(\mu)$ et $C(\mu)$:

$$A(\mu)=\left\{x\,\middle|\,\frac{\mu}{2}-\mu^{-\alpha}\leqq K(x)\leqq\frac{\mu}{2}+\mu^{-\alpha}\right\},$$

$$B(\mu)=\{x\,|\,\mu-\mu^{-\alpha}\leqq K(x)\leqq\mu+\mu^{-\alpha}\},$$

$$C(\mu)=\left\{x\,\middle|\,\frac{\mu}{2}+\mu^{-\alpha}\leqq K(x)\leqq\mu-\mu^{-\alpha}\right\}.$$

On vérifie sans difficultés que l'on a partout $|\Psi_\mu-\Psi_\mu*\chi_\varepsilon|\leqq 1$, on en déduit:

$$\left|\sum_{\nu+m_0\in A(\mu)}(\Psi_\mu-\Psi_\mu*\chi_\varepsilon)(\nu+m_0)\right|\leqq\#\{\nu\,|\,\nu+m_0\in A(\mu)\}$$

et on majore convenablement en utilisant (6.10).

On fait de même pour la somme dans $B(\mu)$.

Dans $C(\mu)$, on a: $\Psi_\mu*\chi_\varepsilon(x)=\tilde{\rho}*\chi_\varepsilon(x)$ où $\tilde{\rho}(x)=\rho\left(\frac{x}{|x|}\right)$, et on a:

$$(\tilde{\rho}-\tilde{\rho}*\chi_\varepsilon)(x)=\int\left(\rho\left(\frac{x}{|x|}\right)-\rho\left(\frac{y}{|y|}\right)\right)\cdot\chi_\varepsilon(x-y)\,dy.$$

Donc

$$|(\tilde{\rho}-\tilde{\rho}*\chi_\varepsilon)(x)|\leqq C\int\left|\frac{x}{|x|}-\frac{y}{|y|}\right|\cdot\chi_\varepsilon(x-y)\,dy,$$

$$|(\tilde{\rho}-\tilde{\rho}*\chi_\varepsilon)(x)|=O(\mu^{-(1+\alpha)})\qquad\text{pour } |x|^{-1}=O(\mu^{-1}).$$

De plus on a: $\#\{\nu \mid \nu+m_0 \in C(\mu)\} = O(\mu^n)$; on en déduit finalement:

$$|N_\rho(\mu) - N_{\rho,\varepsilon}(\mu)| = O(\mu^{n-2+\frac{2}{n+1}})$$

ce qui prouve le lemme (6.11).

Soit alors $N'_\rho(\mu) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \tilde{\rho}\, \varphi_\mu(\nu+m_0)$, on a:

$$N'_\rho(\mu) = N_\rho(\mu) + N_\rho\left(\frac{\mu}{2}\right) + \cdots + N_\rho\left(\frac{\mu}{2^j}\right) + \cdots.$$

Et donc:

$$N'_\rho(\mu) = c_0\, \mu^n + O(\mu^{n-2+\frac{2}{n+1}}).$$

Il suffit donc de montrer qu'on peut trouver X tel que:

$$N'_\rho(\mu) = \#\{\nu+m_0 \in X \mid K(\nu+m_0) \leqq \mu\} + O(1).$$

Soit $L(\mu) = \#\{\nu+m_0 \in C \mid K(\nu+m_0) \leqq \mu\}$ et $L'(\mu) = \#\{\nu+m_0 \in C' \mid K(\nu+m_0) \leqq \mu\}$, on a: pour tout μ, $L(\mu) \leqq N'_\rho(\mu) \leqq L'(\mu)$ et de plus en tout point a de discontinuité de ces fonctions (i.e. tel que il existe $\nu \in \mathbb{Z}^n$, avec $a = K(\nu+m_0)$) les sauts de L, N'_ρ et L' sont en ordre croissant. On peut donc fabriquer X, par récurrence sur la suite des points de l'ensemble $E = \{K(\nu+m_0) \mid \nu \in \mathbb{Z}^n\}$, avec $C \subset X \subset C'$.

III. Quasi-modes associés a une sous-variété Lagrangienne

7. *Enoncé des résultats*

Nous allons montrer dans ce paragraphe III comment on peut construire des quasi-modes ayant pour microsupport une variété lagrangienne invariante par le flot géodésique; l'énoncé du théorème qui suit est à rapprocher de ceux de Lazutkin ([L2]) et aussi des énoncés relatifs aux conditions de Maslov que donne Duistermaat dans ([D]).

(7.1) **Théorème.** *Soit M une variété riemannienne compacte, de dimension n, sans bord; Λ une sous-variété lagrangienne compacte de $T^*(M)$ contenue dans le fibré unitaire $T_1^*(M)$ et vérifiant les deux conditions suivantes.*

i) *Il existe sur Λ une densité C^∞, ρ, ne s'annulant pas, invariante par le flot géodésique H_q et telle que, pour toute fonction f C^∞ sur Λ d'intégrale nulle par rapport à ρ, l'équation $dg(H_q) = f$ ait une solution $g \in C^\infty(\Lambda)$.*

ii) *Si $\theta \in H^1(\Lambda; \mathbb{R})$ est la classe de Liouville de Λ et $\alpha \in H^1(\Lambda; \mathbb{Z})$ la classe de Keller-Arnold-Maslov-Hörmander, il existe une suite croissante $(k_r)_{r\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs tels que $|k_{r+1} - k_r| \geqq C > 0$ et que:*

$$\text{distance}\left(\frac{k_r}{2\pi}\,\theta - \tfrac{1}{4}\alpha,\, H^1(\Lambda; \mathbb{Z})\right) = O\left(\frac{1}{k_r}\right).$$

On pose alors $\frac{k_r}{2\pi}\theta-\frac{1}{4}\alpha=\frac{1}{2\pi k_r}\sum_{i=1}^{p}\beta_{r,i}e_i \pmod{H^1(\Lambda;\mathbb{Z})}$ *avec* $\beta_{r,i}=O(1)$ *et* (e_i) *une base de* $H^1(\Lambda;\mathbb{R})$.

Conclusion: il existe un q.m. $\mathscr{E}=(u_r,\tau_r)$ *d'ordre* ∞ *et de microsupport* Λ *tel que* $\tau_r\cong k_r^2+\sum_{j=0}^{\infty}P_j(\beta_{r,i})\,k_r^{-j}$ *où les* P_j *sont des polynômes de degré* $j+1$ *à* p *variables.*

(7.2) *Remarque.* Le théorème de Maslov concerne le cas où l'on peut trouver une progression arithmétique $k_r=k_0(1+r\,d)$ telle que $\frac{k_r}{2\pi}\theta-\frac{1}{4}\alpha\in H^1(\Lambda;\mathbb{Z})$ (dans ce cas on prend $\beta_{r,i}\equiv 0$); de plus sans la condition i) on peut seulement construire un q.m. d'ordre 0 et donc une suite de valeurs propres $\lambda_{j_r}=(k_r)^2+O(1)$.

Faisons quelques remarques sur les conditions i) et ii).

(7.3) **Proposition.** *L'hypothèse* i) *implique que, pour tout* $\lambda_0\in\Lambda$, *la trajectoire* $t\mapsto\varphi_t(\lambda_0)$ *est dense dans* Λ *et que pour toute fonction continue* f,

$$\Big(\int_\Lambda \rho\Big)^{-1}\int_\Lambda f\cdot\rho=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi_t(\lambda))\,dt.$$

Donc ρ *si elle existe est unique à un facteur près.*

Supposons que la trajectoire $t\mapsto\varphi_t(\lambda_0)$ ne soit pas dense, on peut trouver une fonction $f\in C^\infty(\Lambda)$ telle que $\int_\Lambda f\cdot\rho=0$ et $f=1$ sur la trajectoire de λ_0. On a alors pour toute solution g de $dg(H_q)=f$; $g(\varphi_t(\lambda_0))-g(\lambda_0)=t$, donc g ne serait pas bornée.

La deuxième assertion se démontre d'abord pour $f\,C^\infty$; pour f continue on la démontre alors par approximation uniforme. Supposons $\int_\Lambda\rho=1$, on peut écrire $f=\int_\Lambda f\cdot\rho+f_1$, avec $\int_\Lambda f_1\cdot\rho=0$ et soit $g\in C^\infty(\Lambda)$ telle que $dg(H_q)=f_1$, on a:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi_t(\lambda_0))\,dt=\frac{1}{T}\Big(T\cdot\int_\Lambda f\cdot\rho+g(\varphi_T(\lambda_0))-g(\lambda_0)\Big).$$

On en déduit facilement le résultat.

(7.4) **Proposition.** *Si* Λ *est difféomorphe au tore* $X=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ *par un difféomorphisme que transforme* H_q *en un champ constant* $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)$ *(mouvement quasi-périodique) vérifiant la condition: il existe* $C>0$ *et* $\beta>0$ *tels que, pour tout* $k\in\mathbb{Z}^n$, $|\langle k,\omega\rangle|\geqq C\|k\|^{-\beta}$; *l'hypothèse* i) *est satisfaite.*

On prend pour ρ la mesure de Lebesgue sur X et on utilise les développements en série de Fourier: $f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n-0}a_k\exp(2\pi i\langle k,x\rangle)$

$$(a_0=0 \text{ car } \int_X f=0) \quad\text{et}\quad g(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n-0}b_k\exp(2\pi i\langle k,x\rangle).$$

On doit donc avoir $b_k=\frac{a_k}{2\pi i\langle k,\omega\rangle}$; f étant C^∞, la suite (a_k) est à décroissance rapide et l'inégalité $|\langle k,\omega\rangle|\geqq C\|k\|^{-\beta}$ assure que la suite (b_k) est aussi à décroissance rapide et donc $g\,C^\infty$.

(7.5) **Proposition.** *Si* $H^1(\Lambda;\mathbb{R})$ *est de dimension* 2, *la condition* ii) *est générique: il suffit que* θ *exprimée dans une base de classes entières ait une pente irrationelle pour que* ii) *soit vérifiée.*

On choisit une base (e_1, e_2) du réseau $H^1(\Lambda;\mathbb{Z})\subset H^1(\Lambda;\mathbb{R})$ telle que $\alpha = a\,e_1$ $(a\in\mathbb{N})$ et donc $\theta = a_1 e_1 + a_2 e_2$, la condition ii) s'écrit

$$\frac{k_r}{2\pi} a_1 - \tfrac{1}{4} a \equiv O\left(\frac{1}{k_r}\right) \ (\mathrm{mod}\ \mathbb{Z}), \qquad \frac{k_r}{2\pi} a_2 \equiv O\left(\frac{1}{k_r}\right) \ (\mathrm{mod}\ \mathbb{Z}).$$

Si $a_2 = 0$, on est dans le cas de la quantification exacte, on prend $k_r = \dfrac{2\pi}{a_1}\left(r + \dfrac{a}{4}\right)$. Sinon on cherche k_r sous la forme $k_r = \dfrac{2\pi}{a_2} n_r$ $(n_r \in \mathbb{Z})$ et on doit donc avoir

$$n_r \cdot \frac{a_1}{a_2} - \tfrac{1}{4} a \equiv O\left(\frac{1}{k_r}\right) \ (\mathrm{mod}\,\mathbb{Z}).$$

Si $\dfrac{a_1}{a_2}$ est irrational, un théorème de Minkowski assure l'existence d'une telle suite n_r et donc de k_r (cf. [CA] p. 48).

8. *Preuve du théorème* (7.1)

(8.1) *Rappel sur le calcul symbolique des fonctions oscillantes.* Dans ce qui suit, on précise les calculs de Duistermaat ([D]) dans le cadre suivant; on va définir pour une sous-variété lagrangienne compacte de $T^*(M)\setminus 0$ et pour un sous-ensemble A non borné de $\mathbb{R}^+$ des espaces $O^\mu(\Lambda; A)$ de fonctions oscillantes, des espaces $S^\mu(\Lambda; A)$ de symboles (on utilisera uniquement des μ entiers) et un isomorphisme de calcul symbolique de $O^\mu/O^{\mu-1} \to S^\mu$ noté $u \mapsto [\sigma_u]$; un relèvement de S^μ dans O^μ étant ce que Maslov appelle *l'opérateur canonique.*

Construction de $O^\mu(\Lambda; A)$. On choisit une fois pour toutes dans la suite: – un recouvrement fini $(\Omega_l)_{l\in L}$ de Λ par des ouverts simplement connexes assez petits pour que l'ouvert Ω_l de Λ puisse être défini par une fonction phase $\varphi_l(x,\xi) = \langle x, \xi\rangle - H_l(\xi)$ ((x,ξ) étant des coordonnées canoniques dans $T^*(\mathcal{U}_l)$ et H_l une application différentiable d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$). On pose alors $\Phi_l = \varphi_l\restriction_{\Omega_l}$ et on a donc $d\Phi_l = \xi\, dx\restriction_{\Omega_l}$: les fonctions Φ_l: $\Omega_l \to \mathbb{R}$ définissent en cohomologie de Čech la classe de Liouville de Λ.

– Une partition de l'unité C^∞, χ_l subordonnée au recouvrement $(\Omega_l)_{l\in L}$ sur Λ.

– On note $m_l(\lambda)$ la *section du fibré de Maslov* au-dessus de Ω_l associée à φ_l, c'est-à-dire qu'on a, pour $\lambda \in \Omega_l \cap \Omega_{l'}$:

$$m_{l'}(\lambda) = m_l(\lambda) \exp\left(i\frac{\pi}{2}\alpha_{l\,l'}\right)$$

avec

$$\alpha_{l\,l'} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{Sgn}\, d^2_{\xi\xi}\varphi_{l'}(\lambda) - \mathrm{Sgn}\, d^2_{\xi\xi}\varphi_l(\lambda)).$$

(8.2) **Définition.** *$O^\mu(\Lambda; A)$ est l'ensemble des fonctions u sur $M \times A$ définies par*

$$u(x,k) = k^{n/2+\mu} \sum_{l \in L} \int_{\mathscr{V}_l} \exp(i k \varphi_l(x,\xi)) \cdot a_l(x,\xi,k)\, d\xi.$$

Où $a_l(x,\xi,k)$ est une fonction C^∞ de (x,ξ) à support compact dans $\mathscr{V}_l$ en ξ de la forme:

$$a_l(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{l,j}(x,\xi,\beta(k)) \cdot k^{-j}$$

où $\beta(k)$ varie dans un compact K d'un espace $\mathbb{R}^N$ et $a_{l,j}(x,\xi,\beta)$ sont des fonctions C^∞ de (x,ξ,β). Le signe $\sim$ signifiant: $\forall \alpha$ multi-indice et $\forall J \in N$,

$$\|D^\alpha_{(x,\xi)} a_l(x,\xi,\beta) - D^\alpha_{(x,\xi)} \sum_{j=0}^{J} a_{l,j}(x,\xi,\beta(k))\, k^{-j}\|_{L^\infty} = O(k^{-(J+1)}).$$

Remarquons que les symboles ainsi décrits sont plus généraux que ceux de [D] et n'admettent pas de partie principale bien définie. L'introduction de tels symboles est rendue nécessaire à cause de la condtion de quantification qui est vérifiée asymptotiquement (7.1) ii).

Il résulte de [D] que les espaces $O^\mu(\Lambda; A)$ ainsi définis ne dépendent pas des choix faits plus haut. D'autre part, on voit facilement que $O^\mu(\Lambda, A) = k^\mu \cdot O^0(\Lambda, A)$ et que, si on se donne m et N', pour N assez grand, on aura: $u \in O^{-N}(\Lambda; A)$ implique $\|u(x;k)\|_{C^m(M)} = O(k^{-N'})$.

Construction de $S^\mu(\Lambda; A)$. On se donne une fois pour toute une densité C^∞, ρ positive partout sur Λ.

(8.3) **Définition.** *$\Sigma^\mu(\Lambda; A)$ est l'ensemble des sections C^∞, $\sigma(\lambda,k)$ du fibré de Maslov au dessus de Λ qui s'écrivent:*

$$\sigma(\lambda,k) = k^\mu \cdot [\sum_{l \in L} \exp(i k \Phi_l(\lambda)) \cdot f_l(\lambda, \beta(k))\, m_l(\lambda) + O(k^{-1})]$$

où $f_l(\lambda,k)$ est C^∞ à support compact dans Ω_l en λ. On pose

$$S^\mu(\Lambda; A) = \Sigma^\mu(\Lambda; A)/\Sigma^{\mu-1}(\Lambda; A).$$

A une fonction u de $O^\mu(\Lambda; A)$, on associe un élément σ_u de $\Sigma^\mu(\Lambda; A)$ dont on notera $[\sigma_u]$ la classe dans $S^\mu(\Lambda; A)$, appellée *symbole principal* d'ordre μ de u.

On peut trouver des fonctions g_l C^∞ sur Ω_l ne dépendant pas de u telles que pour u écrit comme dans (8.2), on ait:

(8.4) $$\sigma_u(\lambda, k) = k^\mu \{\sum_{l \in L} \exp(i k \Phi_l(\lambda)) \cdot g_l(\lambda) \cdot a_{l,0}(\lambda, \beta(k))\, m_l(\lambda)\}.$$

Par application de la méthode de la phase stationnaire, on a aussi: si $v \in C_0^\infty(\mathscr{U}_l)$, $v(x_0) = 1$ et $\lambda = (x_0, \xi_0)$:

$$[\sigma_u(\lambda; k)] = [(2\pi)^{-n/2} \cdot \sum_{l \in L} (g_l(\lambda) \cdot \int_{\mathscr{U}_l} u(x,k)\, e^{-ik\langle x - x_0, \xi_0 \rangle} v(x)\, dx)\, m_l(\lambda)].$$

(8.5) **Proposition.** *Si ρ est invariante par le flot géodésique et $\Lambda \subset T_1^*(M)$, pour une fonction u de $O^\mu(\Lambda; A)$, la fonction $v = (\Delta - k^2)\, u$ est dans $O^{\mu+1}(\Lambda; A)$ et le symbole* *d'ordre $\mu+1$ de v est:*

$$[\sigma_v(\lambda,k)]=\left[k^{\mu+1}\cdot\sum_{l\in L}\left(\exp(ik\Phi_l(\lambda))\cdot\frac{2}{i}df_l(H_q)(\lambda,\beta(k))\right)m_l(\lambda).\right]$$

si le symbole σ_u s'écrit comme dans (8.3).

L'opérateur canonique.

Si on a un symbole σ_0 de Σ^μ écrit comme dans (8.3), on pose

$$U(\sigma_0)=k^{n/2+\mu}\cdot\sum_{l\in L}\left(\int_{\mathscr{V}_l}\exp(ik\varphi_l(x,\xi))\cdot\Psi_l(\xi)f_l(x,\xi,\beta(k))\cdot d\xi\right).$$

Avec $\Psi_l=(g_l)^{-1}$. On a alors $[\sigma_{U(\sigma_0)}]=[\sigma_0]$. Cela résulte facilement de (8.4).

(8.6) *Preuve du théorème* (7.1). On prend désormais pour A l'ensemble des $(k_r)_{r\in\mathbb{N}}$ dont l'existence est supposée dans (7.1) ii) et pour ρ la mesure invariante par le flot géodésique dont l'existence est supposée dans (7.1) i).

L'hypothèse ii) assure l'existence de réels $c_l^r\in[0,2\pi]$ tels que, pour tout r de $\mathbb{N}$ et tout l,l' de L, et pour tout λ de $\Omega_l\cap\Omega_{l'}$; on ait:

$$(8.7)\quad k_r(\Phi_l(\lambda)-\Phi_{l'}(\lambda))-\frac{\pi}{2}\alpha_{ll'}+c_l^r-c_{l'}^r-\frac{1}{k_r}\sum_{i=1}^{p}\beta_{r,i}e_{i,ll'}\in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Soit $\sigma_0=\sum_{l\in L}\exp(ic_l^r+ik_r\Phi_l(\lambda))\cdot\chi_l(\lambda)\,m_l(\lambda)$; à cause de la relation précédente ce symbole de $\Sigma^0(\Lambda;A)$ est bien défini modulo $\Sigma^{-1}(\Lambda;A)$ indépendamment des choix qu'on aurait pu faire pour les $\Omega_l,\chi_l,\dots$.

Ce symbole vérifie l'équation $\frac{1}{i}\mathscr{L}_{H_q}[\sigma_0]=k_r[\sigma_0]$, c'est donc une section propre de l'opérateur $\frac{1}{i}\mathscr{L}_{H_q}$ sur les sections de $S^0(\Lambda)$, associée à la valeur propre k_r. Si maintenant f est dans $C^\infty(\Lambda)$, on pose $U(f)=U(f\cdot\sigma_0)$ avec un petit abus de notations.

On va maintenant construire par récurrence des fonctions f_j de $C^\infty(\Lambda)$ avec $f_0=1$ et des polynômes P_j de degré $j+1$ tels que, si on pose $U_j=U(f_j)$, on ait:

$$\begin{aligned}(8.8)(*j)\quad &(\Delta-(k_r^2+P_0(\beta_{i,r})+\dots+P_j(\beta_{i,r})\cdot k_r^{-j}))(U_0+\cdots\\ &+k_r^{-(j+1)}U_{j+1})\in O^{-(j+1)}(\Lambda;A).\end{aligned}$$

La *première étape* pour $j=-1$, s'écrit $(\Delta-k_r^2)\,U_0\in O^0(\Lambda;A)$. D'après (8.5), $(\Delta-k_r^2)\,U_0\in O^1(\Lambda;A)$ et son symbole principal d'ordre 1 est nul d'après le choix de σ_0.

Pour la *récurrence*, supposons vérifiées $*(j-1)$ et que $f_{j'}(\lambda,\beta_{i,r})$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à j' en $(\beta_{i,r})$ pour tout j' inférieur ou égal à j. Montrons comment on peut alors construire f_{j+1} et P_j de façon à vérifier $(*j)$ et que f_j soit un polynôme de degré au plus $j+1$ en les $\beta_{i,r}$.

Soit $V_j=(\Delta-(k_r^2+\dots+P_{j-1}\cdot k_r^{-(j-1)}))(U_0+\dots+k_r^{-j}\cdot U_j)$, on sait par $*(j-1)$ que V_j est dans O^{-j} et on veut que $V_j-P_j\cdot k_r^{-j}U_0+(\Delta-k_r^2)\,k_r^{-(j+1)}U_{j+1}$ soit dans $O^{-(j+1)}$. Il suffit donc d'annuler le symbole principal d'ordre $(-j)$ de cette intégrale oscillante. On a:

$$\sigma_{P_j \cdot k_r^{-j} \cdot U_0} = k_r^{-j} P_j \sigma_0,$$

$$\sigma_{(\Delta - k_r^2) \cdot k_r^{-(j+1)} U_{j+1}} = k_r^{-j} \frac{2}{i} df_{j+1}(H_q) \cdot \sigma_0.$$

Montrons que le symbole d'ordre $(-j)$ de V_j peut s'écrire $\sigma_{V_j} = Q_j(\beta_{i,r}; \lambda)\,\sigma_0$ où Q_j est un polynôme de degré inférieur ou égal à $j+1$ en les $\beta_{i,r}$.

On va calculer ce symbole à l'aide de la méthode de la phase stationnaire (formule (8.4)).

(8.9) **Lemme.** *Soit $u(\lambda, k_r) = U(f(\lambda, \beta_{i,r}))$ où f est un polynôme de degré inférieur ou égal à N par rapport aux $\beta_{i,r}$, dans l'intégrale*

$$\int_M \exp(-i\,k_r \langle x - x_0, \xi_0 \rangle)\, u(x, k_r)\, v(x)\, dx,$$

le coefficient de $k_r^{-N'}$ est le produit de $\exp(i\,c_l^r + i\,k_r \Phi_l(\lambda))$ par un polynôme de degré inférieur ou égal à $N + N'$ en $\beta_{i,r}$.

Cela résulte facilement de l'application de la méthode de la phase stationnaire et du développement en puissance de k_r^{-1} de $\exp\left(\frac{i}{k_r} \sum_{i=1}^{p} \beta_{r,i} \cdot e_{i,ll'}\right)$.

On a donc l'équation

$$\text{(8.10)} \quad \frac{2}{i} df_{j+1}(H_q)(\lambda, \beta_{i,r}) = P_j(\beta_{i,r}) - Q_j(\lambda, \beta_{i,r}).$$

On peut supposer que $\int_\Lambda \rho = 1$ et on pose $P_j = \int_\Lambda Q_j \cdot \rho$. On peut alors trouver f_{j+1} d'après l'hypothèse i) de 7.1.; P_j et f_{j+1} sont bien des polynômes de degré inférieur ou égal à $j+1$ en $\beta_{i,r}$.

Soit maintenant $\tau_r \sim \mathrm{Re}(k_r^2 + \cdots + P_j \cdot k_r^{-j} + \cdots)$ et u_r'

$$u_r' \sim U_0 + \cdots + k_r^{-j} U_j + \cdots; \qquad v_r = \frac{u_r'}{\|u_r'\|_{L^2}}.$$

Il suffit maintenant de montrer que $(v_r; \tau_r)$ vérifient les hypothèses (1.8) et (1.9), ce qui permettra d'après (1.10) de construire un quasi-mode d'ordre ∞, $\mathscr{E} = (u_r, \tau_r)$.

L'axiome (1.8) résulte du fait que $(\Delta - \tau_r)\, v_r \in O^{-\infty}(\Lambda; A)$ et de la remarque faite après la définition (8.2). L'axiome (1.9) du fait que l'inégalité $|k_{r+1} - k_r| \geqq C > 0$ implique une inégalité du même type sur les τ_r pour r assez grand. On applique alors la méthode usuelle pour montrer l'orthogonalité de vecteurs propres d'un opérateur auto-adjoint correspondant à deux valeurs propres distinctes.

Il reste seulement à prouver que le *microsupport* de $\mathscr{E}$ est Λ. Supposons montré que $MS(\mathscr{E}) \subset \Lambda$, alors on a égalité, car $MS(\mathscr{E})$ est un fermé non vide de Λ invariant par le flot géodésique (utiliser (7.3)). Pour montrer $MS(\mathscr{E}) \subset \Lambda$, il suffit (d'après (2.9)) de prouver le:

(8.11) **Lemme.** *Soit $u_r(x) = \int \exp(i\,k_r\,\varphi(x, \alpha))\, a(x, \alpha, k_r)\, d\alpha$ une intégrale oscillante où $a(x, \alpha, k_r)$ est un symbole du type introduit dans (8.2), on a: $\widehat{v\,u_r}(\xi)$ est à décroissance rapide en k_r et en ξ quand ξ est dans un cône fermé disjoint de Λ_φ.*

Posant $k_r = \omega k'_r$ et $\xi = \omega \xi'$, on doit évaluer l'intégrale

$$\widehat{v u_r}(\omega \xi') = \iint \exp(i\omega(k'_r \varphi(x,\alpha) - \langle x, \xi' \rangle) \cdot a(x,\alpha,\omega k'_r)\, v(x)\, d\alpha\, dx$$

qui est à décroissance rapide en ω pour $k'_r d_x \varphi \neq \xi'$ ou $d_\alpha \varphi \neq 0$, uniformément quand k'_r et ξ' restent dans des compacts.

IV. Cas non intégrable: Quasi-modes de masse positive

9. *Énoncé des résultats*

Nous allons construire des quasi-modes de masse positive sur des familles de variétés lagrangiennes vérifiant des conditions d'irrationnalité du type du chapitre III, mais en utilisant la méthode d'entrelacement du chapitre II.

La situation où nous nous plaçons est la suivante: on se donne un difféomorphisme canonique homogène χ: $X \times C \to T^*(M) \setminus 0$ (mêmes notations que dans le chapitre II) où C est un cône de $\mathbb{R}^n \setminus 0$ suffisamment simple pour que $m(\chi) = \pi_X^*(\mu_0)$. On suppose en outre qu'il existe un cône C_1 à base compacte dans C tel que les propriétés suivantes soient satisfaites:

(9.1) Si f: $C \to \mathbb{R}$, C^∞, est nulle sur C_1, elle est nulle à l'ordre ∞ sur C_1.

(9.2) $q \circ \chi(x,\xi)$ est indépendant de x sur $X \times C_1$: il existe une fonction C^∞ homogène de degré un, K: $\mathbb{R}^n \setminus 0 \to \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $(x,\xi) \in X \times C_1$, $q \circ \chi(x,\xi) = K(\xi)$.

(9.3) Le flot géodésique vérifie sur $\chi(X \times C_1)$ la condition d'irrationnalité suivante: il existe des constantes D et β positives telles que pour tout k de $\mathbb{Z}^n$, et tout ξ de C_1, on ait: $|\langle k, K'(\xi) \rangle| \geqq D|k|^{-\beta}$.

On introduit alors comme dans le chapitre II le fibré E sur X et les fonctions e_ν et on considère pour $0 < \alpha < 1$ fixé dans la suite, le sous-espace vectoriel fermé $F = F_\alpha$ de $L^2(X; E)$ engendré par les e_ν tels que $d(\nu + \frac{1}{4}\mu_0, C_1) \leqq |\nu|^\alpha$.

On peut alors énoncer le:

(9.4) **Théorème.** *Sous les hypothèses précédentes, il existe un opérateur intégral de Fourier $A \in I^0(X, E; M; \chi)$ et un opérateur pseudo-différentiel auto-adjoint P sur $C^\infty(X; E)$ dont le symbole total dans les cartes exponentielles de χ est de la forme:*

$$p(x,\xi) = K(\xi) + p_0(\xi) + p_{-1}(\xi) + \cdots + p_{-i}(\xi) + \cdots$$

où les p_i sont homogénes de degré i sur $\mathbb{R}^n \setminus 0$ tels que:

i) *A est une isométrie de F dans $L^2(M)$,*

ii) *$\Delta \circ A - A \circ P$ est régularisant sur F.*

Si on note $B = A\restriction_F$: $F \to A(F)$, on peut aussi dire qu'on a un q.m. d'ordre ∞, $\mathscr{E} = (A(F), BP\restriction_F B^{-1})$. De plus la masse de ce quasi-mode est optimale.

(9.5) **Corollaire.** *Il existe une application injective $\nu \mapsto j_\nu$ de l'ensemble des $\nu \in \mathbb{Z}^n$ tels que $d(\nu + \frac{1}{4}\mu_0, C_1) \leqq \|\nu\|^\alpha$ dans $\mathbb{N}$ telle que*

$$\lambda_{j_\nu} = 4\pi^2 K(\nu + \tfrac{1}{4}\mu_0) + \sum_{i=0}^{\infty} (2\pi)^{-i} P_{-i}(\nu + \tfrac{1}{4}\mu_0) + O(\|\nu\|^{-\infty}).$$

(9.6) *Remarque.* La condition (9.1) n'est pas difficile à remplir: si C_1' vérifie (9.2) et (9.3). On note $W = C_1' \cap S^{n-1}$, W' l'ensemble des points de densité positive de W; alors mesure $(W - W') = 0$ et on peut prendre pour C_1 le plus petit cône fermé contenant W'.

(9.7) *Remarque.* Dans le cas où le flot géodésique est intégrable, on définit C_1' par (9.3) et C_1 comme dans 9.6. Si on est dans le cas non dégénéré (6), en choisissant β assez grand et en faisant tendre D vers 0, on obtient $\operatorname{mes}(C_1 \cap S^{n-1})$ aussi voisin qu'on veut de $\operatorname{mes}(C \cap S^{n-1})$. On pourra obtenir ainsi un q.m. d'ordre ∞ et de masse optimale dont le microsupport est aussi voisin qu'on veut de $T_1^*(M)$.

(9.8) *Remarque.* Nous discutons dans le 11 l'application de ce théorème à des cas non intégrables.

10. Preuve du théorème (9.4)

(10.1) **Lemme.** *Soit $p(x,\xi) \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^n \setminus 0)$ réel et homogène de degré m, il existe un opérateur P sur X* (ou sur $C^\infty(X; E)$) *tel que P est auto-adjoint d'ordre m, a pour symbole principal $p(x,\xi)$ et un symbole sous-principal nul; de plus si p est indépendant de x sur $X \times C_1$, on peut choisir le symbole complet de P avec la même propriété.*

Soit Q tel que

$$\sigma_Q(x,\xi) = p(x,\xi) - \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial \xi_j}(x,\xi),$$

on a $\operatorname{sub}(Q) = 0$ et

$$\sigma_{Q^*} = \left(p(x,\xi) + \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial \xi_j} \right) - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial \xi_j} + \cdots.$$

Donc $\operatorname{sub}(Q^*) = 0$, on pose alors $P = \frac{1}{2}(Q + Q^*)$.

(10.2) **Lemme.** *Soit $a(x,\xi) \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^n \setminus 0; \mathbb{R})$ homogène de degré* 0, *il existe $b(x,\xi)$ et $p(x,\xi)$, ayant les mêmes propriétés que a, et vérifiant:*

i) *$p(x,\xi)$ est indépendant de x sur $X \times C_1$.*

ii) *Si $r(x,\xi) = q \circ \chi(x,\xi)$, on a: $\mathcal{L}_{H_r} b = a - p$.*

Soit $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ telle que $\rho(t) = 1$ pour $t \leqq \frac{D}{2}$ et $\rho(t) = 0$ pour $t \geqq D$. On décompose a et b en séries de Fourier en x:

$$a(x,\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k(\xi)\, e^{2\pi i \langle k, x \rangle}; \qquad b(x,\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} b_k(\xi)\, e^{2\pi i \langle k, x \rangle}$$

et $p(x_0,\xi) = p_0(\xi)$ (x_0 fixé dans la suite). Ecrivant l'équation ii) sur $X \times C_1$, il vient:

$$2\pi i \langle k, K'(\xi) \rangle\, b_k(\xi) = a_k(\xi),$$
$$a_0(\xi) - p_0(\xi) = 0.$$

Tenant compte de (9.2), on peut résoudre ceci en posant; pour $k \neq 0$:

$$b_k(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{a_k(\xi)}{\langle k, K'(\xi)\rangle + i\rho(|\langle k, K'(\xi)\rangle| \, |k|^\beta)}.$$

La série ainsi obtenu converge bien, car:

$$\text{Si } |\langle k, K'(\xi)\rangle| \geqq \frac{D}{2}|k|^{-\beta}, \quad \text{on a: } |b_k(\xi)| \leqq \frac{1}{2\pi}\frac{2}{D}|a_k(\xi)| \, |k|^\beta.$$

$$\text{Si } |\langle k, K'(\xi)\rangle| \leqq \frac{D}{2}|k|^{-\beta}, \quad \text{on a: } |b_k(\xi)| \leqq \frac{1}{2\pi}|a_k(\xi)|.$$

Donc comme (a_k) est à décroissance rapide en k uniformément en ξ, on a la même propriété pour (b_k). On raisonne de même pour les dérivées par rapport à ξ. On pose alors $p(x,\xi) = a(x,\xi) - \mathscr{L}_{H_r} b(x,\xi)$. L'équation ii) est donc bien vérifiée et sur $X \times C_1$, on a $p(x,\xi) = p_0(\xi)$ indépendant de x.

Il reste à vérifier que si a est réel, b et p le sont aussi; il suffit de le vérifier pour b: or a réel équivaut à $a_{-k} = \bar{a}_k$ pour tout k de $\mathbb{Z}^n$, on en déduit facilement la même propriété pour b_k.

(10.3) **Lemme.** *On peut résoudre par récurrence pour $j \geqq 0$, les équations: $A_j \in I^{-j}(X, E; M; \chi)$; P_0 opérateur pseudo-différentiel d'ordre 2 auto-adjoint sur $C^\infty(X; E)$, P_j opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints d'ordre $-(j-1)$ sur $C^\infty(X; E)$ ayant des symboles indépendants de x sur $X \times C_1$ tels que:*

(i) $\Delta(A_0 + \cdots + A_j) - (A_0 + \cdots + A_j)(P_0 + \cdots + P_j)$ *est un opérateur intégral de Fourier d'ordre $-j$ sur $X \times C'$.*

(ii) $(A_0 + \cdots + A_j)^*(A_0 + \cdots + A_j) - \mathrm{Id} = 0 \pmod{C^\infty}$ *sur $X \times C'$ où C' est un cône à base compacte avec $C_1 \subset C' \subset C$.*

Pour $j = 0$, on doit avoir

i) $\Delta A_0 - A_0 P_0$ est d'ordre 0 sur $X \times C'$,

ii) $A_0^* A_0 - \mathrm{Id} = 0 \pmod{C^\infty}$ sur $X \times C'$.

On choisit P_0 auto-adjoint et à symbole sous-principal nul de façon que son symbole principal soit $r(x,\xi)$ et on applique la même méthode que dans le chapitre II.

Supposons qu'on ait réussi à construire $P_0, \ldots, P_{j-1}$ et $A_0, \ldots, A_{j-1}$ et soit $B_j = A_0 + \cdots + A_{j-1}$. L'équation i) s'écrit:

$$\Delta B_j - B_j(P_0 + \cdots + P_{j-1}) + \Delta A_j - A_j P_0 - A_0 P_j$$

est d'ordre $-j$ sur $X \times C'$.

Soit en passant aux symboles:

$$\sigma_{-(j-1)}(\Delta B_j - B_j(P_0 + \cdots + P_{j-1})) + \frac{1}{i}\mathscr{L}_{H_{r^2}} a_j - a_0 p_j = 0.$$

L'équation ii) s'écrit:

$$(B_j + A_j)^*(B_j + A_j) - I = 0 \pmod{C^\infty} \qquad \text{sur } X \times C'.$$

Soit en passant aux symboles principaux:

$\bar{a}_j b_0 + \bar{b}_0 a_j = 0.$

Comme $b_0 = 1$ sur $X \times C'$, il suffit de trouver a_j imaginaire pur. On cherchera ensuite par récurrence les coefficients suivants de A_j. On remarque alors que

$$\sigma_{-(j-1)}(\Delta B_j - \mathrm{B}_j(P_0 + \cdots + P_{j-1}))$$

est réel, en effet en multipliant par B_j^* dont le symbole principal vaut 1, on trouve $B_j^* \Delta B_j - (P_0 + \cdots + P_{j-1})$ qui est auto-adjoint. On est donc amené à résoudre l'équation $\frac{2r}{i} \mathscr{L}_{H_r} a_j = p_j - b_j$, où b_j est homogène réelle de degré $-(j-1)$ et on cherche a_j homogène imaginaire pur de degré $-j$. On utilise pour cela le lemme (10.2) en se ramenant par multiplication par une puissance convenable de r à des fonctions homogène de degré 0.

On prend alors pour A la somme asymptotique des A_j et pour P' la somme des P_j. On rend A isométrique sur F (et même sur un espace plus grand associé à $X \times C'$ si l'on veut) comme dans II, et il reste à prouver que P' opère sur F à un régularisant près comme l'opérateur P obtenu en gelant les coefficients de P' en un point x_0 de X.

(10.4) **Lemme.** *Soit Q un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole total est nul sur $X \times C_1$, alors Q est régularisant sur F.*

D'après (9.1) le symbole total de Q est nul à l'ordre ∞ sur $X \times C_1$; soit $q(x, \xi)$ ce symbole, on peut supposer qu'on regarde seulement la partie principale et que Q est d'ordre 0. Soit $\tilde{Q}$ l'opérateur sur $\mathbb{R}^n$ ayant même symbole total (q considérée comme fonction périodique de x) il est clair d'après le calcul fait en 5.3 que $\tilde{Q} \cdot \tilde{f} = \widetilde{Qf}$ (mod C^∞) si f est une section de E sur X.

Soit $f \in F$, $\tilde{f} = \sum a_\nu \tilde{e}_\nu$ où la somme porte sur les ν tels que $d(\nu + \frac{1}{4}\mu_0, C_1) = O(\|\nu\|^\alpha)$ $(\alpha < 1)$, on a:

$$\tilde{Q}\tilde{f}(x) = (2\pi)^{-n} \sum_\nu a_\nu q(x, 2\pi(\nu + \tfrac{1}{4}\mu_0)) \cdot \tilde{e}_\nu(x).$$

Utilisant le fait que q est nul à l'ordre ∞ sur C_1, et donc:

$$|q(x, \xi)| \leqq C_N \cdot \frac{[d(\xi, C_1)]^N}{|\xi|^N},$$

on obtient:

$$|q(x, \tfrac{1}{4}\mu_0 + \nu)| = O(|\nu|^{(\alpha-1)N}).$$

Donc en choisissant N assez grand, on montre que $\tilde{Q}\tilde{f}$ est C^∞ et donc aussi Qf.

Pour prouver le théorème, il reste à montrer que la masse du q.m. ainsi obtenu est optimale:

(10.5) **Lemme.** *On a une estimation asymptotique:*

$$\#\{\nu \in \mathbb{Z}^n \mid d(\nu + \tfrac{1}{4}\mu_0, C_1) \leqq \|\nu\|^\alpha \text{ et } K(\nu + \tfrac{1}{4}\mu_0) \leqq \lambda\} \sim \mathrm{vol}(\{K \leqq 1\} \cap C_1) \times \lambda^n$$

à condition que $0 < \alpha < 1$.

En effet ce nombre $N(\lambda)$ est égal au volume de la réunion des cubes de rayon $\frac{1}{2}$ centrés aux points $v+\frac{1}{4}\mu_0$ vérifiant les conditions précédentes. Cette réunion contient

$$\{\xi\in C_1 \mid K(\xi)\leqq\lambda\}\cap\{\|\xi\|\geqq 1\}$$

dont le volume est équivlaent à $\mathrm{vol}(C_1\cap\{K\leqq 1\})\,\lambda^n$. On montre sans difficultés l'inégalité dans l'autre sens, qui résulte aussi des généralités sur les quasi-modes (3.3).

11. Coordonnées actions-angles pour une famille discontinue de variétés Lagrangiennes

Nous montrons dans ce paragraphe comment on peut adapter les coordonnées actions-angles à une situation où la famille de variétés lagrangiennes invariantes par le flot géodésique ne forment plus un feuilletage, mais une famille discontinue paramétrée par des ensembles du type Kantor; cela permettrait d'appliquer le théorème (9.4) à des situations qui sont de petites perturbations de cas complètement intégrable si on savait améliorer les théorèmes de Kolmogorov-Arnold-Moser comme le fait Lazutkin dans le cas des difféomorphismes «twist» de l'anneau ([L1]); il s'agirait essentiellement de montrer que la famille de tores lagrangiens invariants, bien que discontinue peut être prolongée par un vrai feuilletage différentiable, mais pas nécessairement lagrangien; on va alors montrer qu'on peut la plonger localement dans un vrai feuilletage lagrangien, mais où les nouvelles feuilles introduites ne seront plus nécessairement invariantes par le flot géodésique.

(11.1) **Théorème.** *Soit $F: X\times\Gamma\to T^*(M)\setminus 0$ où $X=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, Γ est un cône de $\mathbb{R}^n\setminus 0$ et F un difféomorphisme homogène sur un ouvert conique de $T^*(M)\setminus 0$ (F n'est pas supposée symplectique). Soit $\Gamma_1\subset\Gamma$ un cône, vérifiant la propriété* (9.1) *(si f est C^∞ nulle sur Γ_1, elle est nulle à l'ordre ∞ sur Γ_1), tel que pour tout μ de Γ_1, $\Lambda_\mu=F(X\times\{\mu\})$ soit une sous-variété lagrangienne de $T^*(M)\setminus 0$ invariante par le flot géodésique (q est donc constante sur chaque Λ_μ, $\mu\in\Gamma_1$). Si μ_0 est dans Γ_1, on peut trouver un voisinage conique Ω de Λ_{μ_0} et un difféomorphisme canonique homogène χ d'un ouvert $X\times C$ de $T^*(X)\setminus 0$ dans Ω tel que:*

i) *Pour tout μ de Γ_1 tel que $\Lambda_\mu\subset\Omega$, $\chi^{-1}(\Lambda_\mu)=X\times\{\xi\}$. On désigne par C_1 l'ensemble de ces ξ.*

ii) *$q\circ\chi(x,\xi)=K(x,\xi)$ où K est indépendante de x sur $X\times C_1$.*

(11.2) *Remarque.* Le théorème précédent permet de montrer que les hypothèses (9.1) et (9.2) sont satisfaites. Si on est dans un cas où on a appliqué les théorèmes de Kolmogorov-Arnold-Moser, (9.3) sera automatiquement vérifiée.

(11.3) **Lemme.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\omega=d\alpha$ une structure symplectique sur $X\times U$. On suppose qu'il existe $U_1\subset U$ tel que pour tout $\xi\in U_1$, $T_\xi=X\times\{\xi\}$ est lagrangien. Alors pour tout ξ_0 de U_1, il existe un voisinage V de ξ_0 et une forme symplectique $\omega'=d\alpha'$ sur $X\times V$ tels que:*

i) *Pour tout ξ de V, T_ξ est lagrangien pour ω'.*

ii) *En tout point de $X\times(V\cap U_1)$, $\alpha=\alpha'$.*

iii) *Si* U_1 *vérifie la proprieté* (9.1), $\omega=\omega'$ *en tout point de* $X\times(V\cap U_1)$.

iv) *Si* U *et* U_1 *sont coniques et* α *homogène, on peut prendre* V *conique et* α' *homogène.*

Preuve de (11.3). Soit $\pi\colon \mathbb{R}^n\to X$ la projection canonique et pour $\xi\in\mathbb{R}^n$, $p_\xi\colon \mathbb{R}^n\to X\times\mathbb{R}^n$ définie par $p_\xi(x)=(\pi(x),\xi)$. Si γ_i est la base canonique de lacets de X, on pose $p_i(\xi)=\int_{\gamma_i\times\{\xi\}}\alpha$. Soit enfin $\gamma_x\colon [0,1]\to\mathbb{R}^n$ défini par $\gamma_x(t)=t\cdot x$. On pose

$$f(x,\xi)=[\int_{\gamma_x} p_\xi^*(\alpha)]-\sum_{i=1}^n x_i p_i(\xi).$$

Alors f est C^∞ sur $\mathbb{R}^n\times U$ et périodique en x de période $\mathbb{Z}^n$ pour ξ dans U_1. Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\sum_{v\in\mathbb{Z}^n}\varphi(x-v)=1$ et $\tilde f(x,\xi)=\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^n}(f\varphi)(x-v,\xi)$. Pour ξ dans U_1, on a $\tilde f=f$; pour tout ξ dans U, $\tilde f$ est périodique en x. Soit $g(x,\xi)\colon X\times U\to\mathbb{R}$ telle que $\tilde f\circ p_\xi=g$. Et posons

$$\alpha'=\sum_{i=1}^n\left(p_i(\xi)\,dx_i+\frac{\partial g}{\partial x_i}(x,\xi)\,dx_i\right)+\sum_{i=1}^n b_i(x,\xi)\,d\xi_i$$

où on a:

$$\alpha=\sum_{i=1}^n a_i(x,\xi)\,dx_i+\sum_{i=1}^n b_i(x,\xi)\,d\xi_i.$$

Alors il est clair que, pour tout (x,ξ) tel que $\xi\in U_1$, on a $\alpha=\alpha'$; en effet il suffit de le vérifier pour leurs restrictions aux T_ξ qui sont égales par construction: $\alpha\restriction_{T_\xi}$ est la différentielle de sa primitive obtenue par intégration de long de γ_x. Les conclusions iii) et iv) se vérifient facilement.

(11.4) **Lemme.** *Sous les hypothèses* 11.3 i), ii) *et* iii), *il existe au voisinage de* T_{ξ_0} *pour* $\xi_0\in U_1$, *un feuilletage* T'_ξ *défini pour* $\xi\in V_2$ *voisinage de* ξ_0 *tel que* $T'_\xi=T_\xi$ *pour* $\xi\in U_1\cap V_2$ *et* T'_ξ *est lagrangien pour* ω. *De plus, si* U *et* U_1 *sont coniques et* α *homogène, on peut choisir* V_2 *conique et* (T'_ξ) *homogène.*

Preuve de (11.4). Utilisant la méthode de Moser-Weinstein ([W2]), ω et ω' étant égale sur T_{ξ_0} sont conjuguées au voisinage de T_{ξ_0} par un difféomorphisme φ. De plus on peut choisir φ de façon que $\varphi=\mathrm{Id}$ là où $\alpha=\alpha'$, car φ est obtenu par intégration d'un champ de vecteur X_t dépendant du temps tel que $i(X_t)\,\omega_t=-(\alpha-\alpha')$ et donc nul là où $\alpha=\alpha'$, donc $\varphi=\mathrm{Id}$ pour $\xi\in U_1$. On pose alors $T'_\xi=\varphi^{-1}(T_\xi)$ et (T'_ξ) vérifie les conditions (11.4).

Preuve de (11.1). On applique 11.4 au feuilletage Λ_μ. On peut donc pour $\mu_0\in\Gamma_1$, trouver dans un voisinage conique de Λ_{μ_0} un feuilletage lagrangien homogène $\tilde\Lambda_\mu$ qui coïncide avec Λ_μ pour μ dans Γ_1. On définit pour $\tilde\Lambda_\mu$ un système de coordonnées «actions-angles» $\chi\colon X\times C\to T^*(M)\setminus 0$ et on définit C_1 par $X\times C_1=\chi^{-1}(\{\Lambda_\mu|\mu\in\Gamma_2\})$. Pour $\xi\in C_1$, $\chi^*(H_q)$ est tangent à $X\times(\xi)$ et donc $q\circ\chi$ est indépendant de x sur $X\times C_1$.

(11.5) **Corollaire.** *Sous les hypothèses de* (11.1), *les mouvements sur les tores* Λ_μ *pour* $\mu \in \Gamma_1$ *sont quasi-périodiques; si* A *est une partie relativement compacte de* Γ *contenue dans* Γ_1 *et* $p_i(\mu) = \int_{\gamma_i \times \{\mu\}} F^*(\alpha)$, *on a:*

$$\operatorname{vol}\Big(\bigcup_{\mu \in A} \Lambda_\mu\Big) = \int_A dp_1 \wedge \cdots \wedge dp_n.$$

V. Quasi-modes au voisinage des géodésiques fermées stables

12. Géométrie des géodésiques fermées stables sur une surface ($n=2$)

Soit $t \mapsto \gamma(t)$ une géodésique périodique simple de période $T>0$ et $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \xi(t))$ son relèvement canonique dans $T_1^*(M)$ (courbe intégrale de H_q de projection γ). On peut définir l'application de Poincaré P_γ de la façon suivante ([AA]): si Σ est un germe d'hypersurface de $T_1^*(M)$ (donc de dimension 2) transverse à $\tilde{\gamma}$ en $\tilde{\gamma}(0)$, $\omega \restriction_\Sigma$ ne s'annule pas au point $\tilde{\gamma}(0)$ et donc ω induit sur Σ une structure symplectique (et en particulier une orientation canonique). Pour u dans Σ, $P_\gamma(u)$ est le premier point où $\varphi_t(u)$ rencontre à nouveau Σ pour $t>0$; P_γ est un germe de difféomorphisme symplectique de Σ dans Σ laissant $\tilde{\gamma}(0)$ fixe. Si on change Σ en Σ', P_γ ne change pas à conjugaison près par un difféomorphisme symplectique de Σ dans Σ'. On dit que γ est de type *elliptique* si les valeurs propres de $dP_\gamma(\tilde{\gamma}(0))$ sont de module 1 et non égales à 1. Elles s'écrivent donc $e^{\pm i\alpha}$ avec $\alpha \in]0, 2\pi[$ où α est choisi pour que, dans une carte symplectique convenable de Σ, $dP_\gamma(\tilde{\gamma}(0))$ soit une rotation d'angle α. D'après un résultat classique, ([S] p. 155) si α n'est pas multiple de $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{3}$, on peut trouver une carte symplectique de Σ sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$ muni de la structure symplectique canonique telle que, en coordonnées polaires (ρ, θ), P_γ s'écrive de la façon suivante:

(12.1) $\quad P_\gamma(\rho, \theta) = (\rho_1, \theta_1)$

avec

$$\rho_1 = \rho + f(\rho, \theta), \qquad \theta_1 = \theta + \alpha + \gamma_1 \rho^2 + g(\rho, \theta)$$

où f et g sont $O(\rho^3)$ et $\gamma_1 \in \mathbb{R}$.

De plus, en général $\gamma_1 \neq 0$, c'est ce qu'on appelle le *cas elliptique générique*; on peut appliquer à cette situation le théorème de Moser sur les difféomorphismes «twist» de l'anneau, ce qui donne:

(12.2) **Théorème** (Moser, cf. [S] p. 225). *Il existe une famille* $(c_\omega)_{\omega \in D}$ *de cycles de* Σ *entourant* $\tilde{\gamma}(0)$ *et invariants par* P_γ *tels que:*

i) *l'action de* P_γ *sur* c_ω *est* C^∞ *conjuguée à une rotation d'angle* ω *de* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

ii) *Les* ω *de* D *vérifient des conditions diophantiennes du type: il existe* $c>0$ *et* $\beta>0$ *tels que, pour tout* p *et* q *de* $\mathbb{Z}$, *on ait:*

$$\left|\omega - \frac{p}{q}\right| \geqq c|q|^{-\beta}.$$

iii) *Si on note* d_ω *le disque de* Σ *contenant* $\tilde{\gamma}(0)$ *et de bord* c_ω, *les* d_ω *forment une base de voisinages de* $\tilde{\gamma}(0)$ *dans* Σ; *cela implique notamment que la géodésique périodique* γ *est topologiquement stable.*

iv) *La densité au point* $\tilde{\gamma}(0)$ *de la réunion des* c_ω *est* 1.

Au cycle c_ω, on associe le tore lagrangien $\Lambda_\omega \subset T_1^*(M)$ défini par $\Lambda_\omega = \{\varphi_t(c_\omega) | t \in \mathbb{R}\}$. Nous allons calculer les classes de *Liouville* et de *Maslov* de Λ_ω en nous inspirant des calculs de Voros ([V]). Pour cela, on introduit les deux lacets de bases γ_1^ω et γ_2^ω de Λ_ω définis de la façon suivante:

(12.3) γ_1^ω est le lacet c_ω orienté comme bord de d_ω dans Σ orientée. Soit, pour x dans Σ, $t(x) = \inf\{t > 0 | \varphi_t(x) \in \Sigma\}$ et soit $s \mapsto c_\omega(s)$ un difféomorphisme positif de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans c_ω qui conjugue P_γ à une rotation d'angle ω sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. γ_2^ω est le lacet obtenu en considérant d'abord $t \mapsto \varphi_t(c_\omega(0))$ pour $t \in [0, t(c_\omega(0))]$ et en refermant ce chemin en suivant c_ω de $c_\omega(\omega)$ à $c_\omega(0)$ en sens inverse de l'orientation de c_ω.

(12.4) *Calcul de la classe de Liouville de* Λ_ω. Soit $\rho: [0, a[\to \Sigma$ un rayon issu de $\tilde{\gamma}(0)$, et supposons que, pour tout ω de D, $c_\omega(0)$ est sur la rayon ρ. On pose $\rho' = P_\gamma(\rho)$ et on note a_ω le secteur limité par ρ, ρ' et une partie de γ_2^ω dans Σ. Soit $A(\omega)$ (resp. $D(\omega)$) les aires de a_ω (resp. d_ω). On a, par Stokes:

$$\int_{\gamma_1^\omega} \xi\, dx = D(\omega) \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_2^\omega} \xi\, dx = \int_{\tilde{\gamma}} \xi\, dx + \iint_S d\xi \wedge dx$$

où S est formée de $-a_\omega$ et de la variété lagrangienne engendrée par $\varphi_t(\rho \cap d_\omega)$. On a donc $\int_{\gamma_2^\omega} \xi\, dx = T - A(\omega)$.

(12.5) *Calcul de la classe de Maslov de* Λ_ω (on suppose que γ ne désoriente pas M). Remarquons d'abord que, dans ce cas, les indices de Maslov des lacets fermés de Λ_ω sont pairs, comme il a été remarqué par Souriau ([SU]):

(12.6) **Proposition.** *Soit* Λ *une sous-variété lagrangienne orientable de* $T^*(X) \setminus 0$ *où* X *est une variété orientable, alors l'indice de Maslov des lacets de* Λ *est pair.*

Preuve. Il suffit de le montrer pour Λ en position générale; c'est-à-dire quand l'indice de Maslov est donné par le nombre d'intersection avec le lieu singulier Λ_0 de Λ (ensemble des points où la projection de Λ sur X n'est pas de rang maximum) ([A2]). Supposons alors qu'on ait orienté Λ et X et soit Λ^+ (resp. Λ^-) les ouverts de $\Lambda \setminus \Lambda_0$ où π_X: $\Lambda \to X$ conserve (resp. inverse) l'orientation. Un lacet fermé doit recontrer un nombre pair de fois Λ_0 et donc son indice de Maslov est pair.

Soit γ_ω la géodésique $t \mapsto \pi_X(\varphi_t(c_\omega(0)))$ et supposons $c_\omega(0)$ dans $\Lambda_{\omega,0}$ (lieu singulier de Λ_ω). Soit $T(\omega) = t(c_\omega(0))$. Comme α est différent de 0 et π, $\gamma(0)$ et $\gamma(T)$ ne sont pas conjugués le long de γ et donc $\gamma_\omega(0)$ et $\gamma_\omega(T(\omega))$ non plus le long de γ_ω pour c_ω assez voisin de $\tilde{\gamma}(0)$. De plus le nombre de points conjugués sur γ entre $\gamma(0)$ et $\gamma(T)$ et sur γ_ω entre $\gamma_\omega(0)$ et $\gamma_\omega(T(\omega))$ est le même. On peut alors faire le tableau suivant en tenant compte du fait que l'indice de Maslov de γ_2^ω sur Λ_ω est: $m(\gamma_2^\omega) =$ nombre de points conjugués sur γ entre $\gamma(0)$ et $\gamma(T) + \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \alpha < \pi \\ -1 & \text{si } \pi < \alpha < 2\pi. \end{cases}$

Nombre de points conjugués sur γ		$2k$		$2k+1$	
α	0		π		2π
$m(\gamma_2^\omega)$		$2k$		$2k$	
Indice de Morse de γ comme géodésique fermée		$2k+1$		$2k+1$	

Finalement $m(\gamma_2^\omega)=$(indice de Morse de γ)-1 pour c_ω assez voisin de $\gamma(0)$; $m(\gamma_1^\omega)$ vaut $+2$. On pose $n(\gamma)=m(\gamma_2^\omega)$.

13. Les hypothèses du théorème (7.1) *sont vérifiées pour la plupart des* Λ_ω

(13.1) *Vérification de la condition* ii) *de* (7.1). On a vu (7.5) que cette condition est vérifiée dès que la classe de Liouville de Λ_ω a une pente irrationnelle; c'est-à-dire d'après les calculs de (12.4) dès que $p(\omega)=\dfrac{D(\omega)}{T-A(\omega)}$ est irrationnel; or cette fonction est strictement croissante au sens suivant; $d_{\omega_1}\subsetneqq d_{\omega_2}$ implique $p(\omega_1)<p(\omega_2)$, on en déduit qu'elle prend sur D qui est non dénombrable (car la réunion des c est de mesure strictement positive) une valeur irrationnelle sauf sur un sous-ensemble dénombrable: *il n'y a qu'un nombre au plus dénombrable des* Λ_ω *qui ne vérifient pas la condition* ii) *de* (7.1).

(13.2) *Vérification de la condition* i) *du théorème* (7.1). Nous allons montrer qu'elle est vérifiée pour toutes les variétés Λ_ω. Soit ω dans D fixé dans la suite et j; $\mathbb{R}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to T_1^*(M)$ définie par $j(t,s)=\varphi_t(c_\omega(s))$; j est une immersion lagrangienne dont l'image est Λ_ω. Un domaine fondamental est défini, par exemple, par

$$G=\{(t,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}\,|\,0\leqq t\leqq t(c_\omega(s))=T(s)\};$$

j définit à des ensembles de mesure nulle près une bijection de G sur Λ_ω; prenons pour ρ la mesure image par j de la mesure de Lebesgue sur G. Autrement dit pour une fonction continue f sur Λ_ω, on pose:

$$\int_{\Lambda_\omega} f\cdot\rho=\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} ds\int_0^{T(s)} f(j(t,s))\,dt.$$

Il faut montrer que ρ est une densité C^∞, invariante par φ_t et qu'on peut résoudre les équations de transport sur Λ_ω pour des second membres d'intégrale nulle par rapport à ρ.

(13.3) *Invariance de* ρ *par* φ_{t_0}.

$$\int_{\Lambda_\omega} f\circ\varphi_{t_0}\cdot\rho=\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} ds\cdot\left\{\left(\int_0^{T(s)}-\int_0^{t_0}+\int_{T(s)}^{t_0+T(s)}\right)f(j(t,s))\,dt\right\}$$

car $(f\circ\varphi_{t_0})(j(t',s))=f(j(t+t_0,s))$ par définition de j, et on utilise alors le fait que $j(t+T(s),\omega)=j(t,s+\omega)$ pour montrer l'invariance de ρ par φ_t. Cela montre aussi que ρ est C^∞, car elle est invariante par φ_t et C^∞ hors de c_ω.

(13.4) *Résolution de l'équation de transport.* On va utiliser le fait que ω vérifie une condition diophantienne pour ramener l'équation différentielle sur Λ_ω à une équation aux différences sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ que l'on résoudra par des séries de Fourier. On doit résoudre

$$\frac{d}{dt}[f(j(t,s))]=g(j(t,s))$$

où f et g sont C^∞ sur Λ_ω et $\int_{\Lambda_\omega} g\cdot\rho=0$.

Posons $\tilde{f}(s)=f(j(0,s))$ et $\tilde{g}(s)=g(j(0,s))$, par intégration de 0 à $T(s)$ il vient:

$$\tilde{f}(s+\omega)-\tilde{f}(s)=\int_0^{T(s)} g(j(t,s))\,dt=\tilde{g}(s).$$

où $\tilde{g}$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ d'intégrale nulle par rapport à ds (par définition de ρ). Il suffit donc de montrer que l'équation précédente a une solution $\tilde{f}$ C^∞. Passant aux séries de Fourier, il vient:

$$\tilde{f}(s)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{2\pi iks}, \qquad \tilde{g}(s)=\prod_{k\in\mathbb{Z}-\{0\}} b_k\cdot e^{2\pi iks}$$

et il suffit donc de prendre $a_k=\dfrac{b_k}{|e^{2\pi ik\omega}-1|}$. A cause de l'hypothèse iii) de (12.2), si b_k est à décroissance rapide, a_k le sera aussi et donc $\tilde{f}$ sera C^∞.

(13.5) *Enoncé des résultats et comparaison formelle avec ceux de Babich et Lazutkin* ([BL], [B]), *de Guillemin* ([G]), *Ralston* ([R]) *et Voros* ([V]).

On a donc vu que, pour presque tout ω de D, la variété lagrangienne Λ_ω satisfait aux hypothèses du théorème (7.1). C'est-à-dire que, *si k_r est une suite tendant vers $+\infty$, telle que*

$$\frac{k_r}{2\pi}D(\omega)-\tfrac{1}{2}=O\left(\frac{1}{k_r}\right)\ (\operatorname{mod}\mathbb{Z}),$$

$$\frac{k_r}{2\pi}(T-A(\omega))-\tfrac{1}{4}n(\gamma)=O\left(\frac{1}{k_r}\right)\ (\operatorname{mod}\mathbb{Z})$$

il existe un quasi-mode $\mathscr{E}_\omega=(u_r,\tau_r)$ de microsupport Λ_ω et tel que $\tau_r=k_r^2+O(1)$.

Formellement (i.e. en supposant qu'on puisse adapter à cette situation les résultats du chapitre IV), on pourrait en regroupant ces quasi-modes $\mathscr{E}_\omega$ construire un q.m. $\mathscr{E}=(u_{n_1,n_2},\ \tau_{n_1,n_2})$ où $(n_1,\ n_2)$ décrit une partie de $\mathbb{Z}^2$ du type $\mathscr{R}=\{(n_1,\ n_2)|0\leqq n_1\leqq n_2\}$ et τ_{n_1,n_2} est donné par élimination de ω entre les deux équations précédentes:

$$\sqrt{\tau_{n_1,n_2}}\cong\frac{2\pi}{T}\left(n_1+\tfrac{1}{4}n(\gamma)+\frac{A(\omega)}{D(\omega)}(n_2+\tfrac{1}{2})\right).$$

Si maintenant, on fixe n_2 et qu'on fait tendre n_1 vers $+\infty$, c_ω tend vers $\gamma(0)$, et on trouve des quasi-modes $\mathscr{E}_{n_2}$ dont le microsupport est $\tilde{\gamma}$; on a alors

$$\sqrt{\tau_{n_1,n_2}} \cong \frac{2\pi}{T}\left(n_1 + \tfrac{1}{4} n(\gamma) + \frac{\alpha}{2\pi}(n_2 + \tfrac{1}{2})\right).$$

$\left(\text{car } \dfrac{A(\omega)}{D(\omega)} \text{ tend vers } \dfrac{\alpha}{2\pi} \text{ quand } c_\omega \text{ tend vers } \tilde{\gamma}(0)\right)$. Ces suites de valeurs propres approchées τ_{n_1,n_2} où n_2 est fixé et n_1 tend vers $+\infty$ sont exactement celles trouvées par Babich, Lazutkin, Guillemin, Ralston et Voros par d'autres constructions. Pour rendre ce passage moins formel, il faudrait d'abord comprendre ce qui se passe dans le cas complètement intégrable là où un feuilletage lagrangien se réduit à un tore invariant de dimension plus petite que n. Le passage au cas non intégrable pourrait alors se faire par la même technique que dans le chapitre IV et en utilisant une généralisation du théorème de Lazutkin ([L1]).

Bibliographie

A1 Arnold, V.I.: Modes and quasi-modes. Functional Analysis and its applications **6**, 94–101 (1972)

AA Arnold, V.I., Avez, A.: Ergodic problems of classical mechanics. New-York-Amsterdam: Benjamin 1967

A2 Arnold, V.I.: On a caracteristic class entering in the quantization conditions. Functional Analysis and its applications **1**, 1–13 (1967)

BGM Berger, M., Gauduchon, P., Mazet, E.: Le spectre d'une variété riemannienne. Lectures Notes 194. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971

CA Cassels, J.W.S.: An Introduction to diophantine approximation. Cambridge: Cambridge University Press 1965

CV Colin de Verdiere, Y.: Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques fermées II. Compositio mathematica, **27**, 159–184 (1973)

D Duistermaat, J.J.: Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities. Comm. Pure and Appl. Math., **27**, 207–281 (1974)

D.G Duistermaat, J.J., Guillemin, V.: The spectrum of positiv elliptic operators and periodic geodesics. Invent. Math., **29**, 39–79 (1975)

D.H. Duistermaat, J.J., Hörmander, L.: Fourier integral operators II. Acta Math. **128**, 183–269 (1972)

G Guillemin, V.: Symplectic Spinors and partial differential equations. Colloque international de géométrie symplectique et physique mathématique. Aix (Juin 1974), C.N.R.S.

H1 Hörmander, L.: Fourier integral operators I. Acta Math. **127**, 79–183 (1971)

H2 Hörmander, L.: The spectral function of an elliptic operator. Acta Math. **121**, 193–218 (1968)

K Klingenberg, W.: Der Indexsatz für geschlossene Geodätische. Math. Zeit. **139**, 231–256 (1974)

L1 Lazutkin, V.F.: The existence of caustics for a billiard problem in a convex domain. Math. USSR Izvestija **7**, 185–214 (1973)

L2 Lazutkin, V.F.: Asymptotics of the eigenvalues of the laplacian and quasi-modes .... Math. USSR Izvestija **7**, 439–466 (1973)

RL Randol, B.: A lattice-point problem. Trans. Amer. Math. Soc. **121**, 257–268 (1966)

R Ralston, J.V.: Construction of approximate eigenfunctions .... Preprint (1975)

S Moser, J.K., Siegel, C.L.: Lectures on Celestial mechanics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971

SU Souriau, J.M.: Indice de Maslov des variétés lagrangiennes orientables, comptes-rendus de l'Académie des sciences de Paris **276 A**, 1025–1026 (1973)

V Voros, A.: The WKB-method for non-separable systems. Colloque international de géométrie symplectique et physique mathématique. Aix (Juin 1974), C.N.R.S.

V de C van der Corput, J.G.: Over roosterpunten in het platte vlak. Groningen: Noordhoff 1919

W 1 Weinstein, A.: Fourier integral operators, quantization and the spectra of riemannian manifold; colloque international de géométrie symplectique et physique mathématique. Aix (Juin 1974), C.N.R.S.

W 2 Weinstein, A.: Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds. Advances in Math. **6**, 329–346 (1971)

B.L. Babich, Lazutkin, V.F.: On eigenfunctions concentrated at a closed geodesic; problems in Math. Phys. N 2, Leningrad University, 1967

B. Babich: On eigenfunctions concentrated at a closed geodesic; Zapiski Nauchnyck Seminarov Lomi, N 9, Leningrad (1968) (Englisch translation: Math. Problems in Wawe propagation theory, Consultant Bureau, New York-London, 1970)

B.B. Babich, Bouldyrev: Asymptotical methods in the theory of short waves deffractions. Moscow Nauka (1972)

Received April 16; revised February 20, 1977