Inventiones math. 61, 199–225 (1980)

Inventiones mathematicae

Conditions de Whitney et sections planes

V. Navarro Aznar

Departamento de Mathemáticas, E.T.S.I.I.B, Universidad Politécnica de Barcelona, Diagonal 647, Barcelona-28, España

Introduction

Soit Z un espace K-analytique réduit, où K désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $Z = \bigcup_\alpha X_\alpha$ une stratification K-analytique qui vérifie les conditions de Whitney. R. Thom et J. Mather ont demontré que le type topologique de Z est constant le long de chaque strate, et H. Hironaka a demontré que si $K = \mathbb{C}$ la multiplicité de Z est également constante le long de chaque strate.

Nous démontrerons dans ce papier (cf. §4 et 11) le résultat ci-dessous, qui a comme corollaire le théorème d'Hironaka mentionné antérieurement (cf. §5).

Théorème. *Soit Z un sous-ensemble K-analytique d'un ouvert de $K^r \times K$, de dimension $m+1$, soit $0 \in Z$ et $Z = \bigcup_\alpha X_\alpha$ une stratification K-analytique qui vérifie les conditions de Whitney et telle que la strate qui contient l'origine est un ouvert Y de $0 \times K$. Pour tout i, $r-m+1 \leqq i \leqq r$, il existe un ouvert dense $U^{(i)}$ de la grassmanienne des $(i+1)$-plans de $K^r \times K$ qui contiennent Y, tel que pour tout $H \in U^{(i)}$*

$$Z \cap H = \bigcup_{\alpha \in A} (X_\alpha \cap H)$$

(où A est tel que si $\alpha, \beta \in A$ et $\alpha \neq \beta$ alors $X_\alpha \cap H \neq X_\beta \cap H$) est une stratification de Whitney de $Z \cap H$ dans un voisinage de 0 qui dépend de H.

Dans les paragraphes 6 et 7 nous déduirons de ce théorème et du théorème de Thom-Mather déjà cité, la constance le long de chaque strate du type topologique des sections planes génériques d'un espace $\mathbb{C}$-analytique stratifié $Z = \bigcup_\alpha X_\alpha$ qui vérifie les conditions de Whitney; et nous déduirons également de ces deux théorèmes (cf. §8, 9 et 10) la constance, dans une déformation différentiablement équisingulière d'un germe d'intersection complète à singularité isolée, des nombres de Milnor des fibres et de leurs sections planes génériques.

Les trois premiers paragraphes introduisent une nouvelle approche de la condition (W) de Verdier à partir de la déformation sur le cône normal. Cette condition (W) tient un rôle important dans la démonstration du théorème énoncé dans cette Introduction.

Soulignons finalement que dans tout ce qui suit nous considèrerons le cas analytique complexe, sauf dans le §11 où nous ferons quelques remarques sur le cas réel.

Sur la mise en relation des problèmes abordés ici avec ceux de l'équisingularité nous nous remettons aux références [16] et [21]; et en ce qui concerne la terminologie relative aux stratifications, conditions de Whitney et de Thom, nous avons essayé de suivre celle d'Hironaka et nous renvoyons donc à ses papiers [5] et [7].

Je dois remercier J. Ferrer, F. Guillén, M. Giusti, J.P. Henry, Lê D.T., F. Puerta et D. Trotman qui, en diverses occasions, m'ont apporté de précieuses indications et corrections. Le résultat final leur doit beaucoup.

1. La déformation sur le cône normal

(1.1) On commençe par rappeler quelques résultats sur le cône normal qu'on utilisera par la suite.

Supposons que nous ayons trois espaces analytiques $Y \subset Z \subset M$, avec Y et M lisses. Soit $\mathscr{I}_Z$, resp. $\mathscr{I}_Y$, l'idéal de Z, resp. Y, dans $\mathcal{O}_M$; alors, si $0 \in Y$ est un point fixe, et $f \in \mathscr{I}_{Z,0}$ on définit l'ordre de f le long de Y en 0 comme suit: $\nu_Y(f)_0$ est le plus grand entier $\nu \in \mathbb{N}$ tel que $f \in \mathscr{I}_{Y,0}^{\nu}$, s'il existe, et $\nu_Y(f)_0 = \infty$ si $f \in \mathscr{I}_{Y,0}^{\nu}$ pour tout ν. Si on prend des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$ de M au point 0 adaptées à Y, c'est-à-dire telles que $\mathscr{I}_{Y,0} = (x_1, \ldots, x_r)\,\mathcal{O}_{M,0}$, nous aurons si $\nu = \nu_Y(f)_0$

$$f(x, y) = \sum_{|\sigma| \geqq \nu} f_\sigma(y)\, x^\sigma$$

où $x^\sigma = x_1^{\sigma_1} \ldots x_r^{\sigma_r}$, $|\sigma| = \sigma_1 + \ldots + \sigma_r$ et $f_\sigma(y) \in \mathcal{O}_{Y,0}$. Dans ce cas nous dirons que

$$in_Y(f)_0 = \sum_{|\sigma| = \nu} f_\sigma(y)\, x^\sigma \in gr_{\mathscr{I}_{Y,0}}(\mathcal{O}_{M,0})$$

est la forme initiale de f le long de Y en 0.

On note $in_Y(M, Z)_0$ l'idéal homogène de $gr_{\mathscr{I}_{Y,0}}(\mathcal{O}_{M,0})$ engendré par les formes initiales $in_Y(f)_0$ des $f \in \mathscr{I}_{Z,0}$. Nous aurons besoin du résultat suivant: le germe au point $0 \in Y$ du cône normal à Y en Z, $C_{Z,Y} = \text{Specan}\; gr_{\mathscr{I}_Y}(\mathcal{O}_Z)$, admet $in_Y(M, Z)_0$ comme idéal dans $gr_{\mathscr{I}_{Y,0}}(\mathcal{O}_{M,0})$ (voir [6], Remark 3.2).

Finalement, si on note $\not{p}\colon C_{Z,Y} \to Y$ la projection naturelle et $g\colon Z^* \to Z$ l'éclatement de Z centré en Y, on rappelle que $Z^* = \text{Projan}\,(gr_{\mathscr{I}_Y}(\mathcal{O}_Z))$ et que $g^{-1}(y) = \text{Proj}\,\not{p}^{-1}(y)$, pour tout $y \in Y$.

(1.2) Soient, maintenant, $f_1, \ldots, f_p$ des générateurs de l'idéal $\mathscr{I}_{Z,0}$ de $\mathcal{O}_{M,0}$, choisis tels que les formes initiales $in_Y(f_i)_0$, $1 \leqq i \leqq p$, engendrent dans $gr_{\mathscr{I}_{Y,0}}(\mathcal{O}_{M,0})$ l'idéal $in_Y(M, Z)_0$, et notons $\nu_i = \nu_Y(f_i)_0$. On suppose pour simplifier que les f_i, $1 \leqq i \leqq p$, sont définies en M.

Considérons le sous-espace analytique $\mathscr{X}$ de $M \times \mathbb{D}$, où $\mathbb{D}$ est un disque de

$\mathbb{C}$ centré en 0 qui contient 1, défini par

$$F_i(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s, t) = \frac{1}{t^{\nu_i}} f_i(tx_1, \ldots, tx_r, y_1, \ldots, y_s) = 0 \qquad 1 \leqq i \leqq p.$$

Soit $\phi: \mathscr{X} \to \mathbb{D}$ la restriction à $\mathscr{X}$ de la projection sur le deuxième facteur. Il est évident que

$$\phi^{-1}(1) = Z \times \{1\}$$

et, d'après nos préliminaires, que

$$\phi^{-1}(0) = C_{Z,Y} \times \{0\}.$$

Nous dirons que ce morphisme ϕ est la déformation de Z sur le cône normal à Y en Z, au voisinage du point $0 \in Y$.

(1.3) Nous considèrerons aussi le morphisme $\psi: \mathscr{X} \to Z$, défini par

$$\psi(x, y, t) = (tx, y)$$

qui montre immédiatement que pour tout $t \neq 0$ le germe $(\phi^{-1}(t), (x, y, t))$ est isomorphe à $(Z, (x, y))$. Donc, si X est un ouvert de $Z_{\text{reg}} - Y$ alors $\psi^{-1}(X)$ est aussi un ouvert de $\mathscr{X}_{\text{reg}}$.

De même, on voit tout de suite que si $z = (x, y)$ est un point de Z, le vecteur

$$n = (n_1, \ldots, n_{r+s})$$

est un vecteur normal à Z en z si, et seulement si, le vecteur

$$\tilde{n}_t = (\bar{t} n_1, \ldots, \bar{t} n_r, n_{r+1}, \ldots, n_{r+s})$$

est un vecteur normal à $Z_t = \phi^{-1}(t)$ en $(x/t, y, t)$ par rapport à l'espace ambiant $M \times \{t\}$.

Ainsi, étant donné un chemin continu réel $a(z) \in Z - Y$ et un chemin continu réel $\tilde{a}(z) \in \mathscr{X} - \phi^{-1}(0)$, tel que $\psi(\tilde{a}(z)) = a(z)$, le morphisme ψ nous permettra soit de relever tout champ de vecteurs normaux à Z le long de $a(z)$, ce qui donnera un champ de vecteurs normaux aux fibres de ϕ le long de $\tilde{a}(z)$; soit de transporter à $a(z)$ tout champ de vecteurs normaux aux fibres de ϕ le long de $\tilde{a}(z)$, ce qui donnera un champ de vecteurs normaux à Z le long de $a(z)$.

(1.4) *Remarque.* On doit observer qu'il y a une $\mathbb{C}^*$-action sur $\mathscr{X}$ qui laisse $\phi^{-1}(0)$ fixe. Elle est donnée en prenant comme produit

$$\lambda \cdot (x, y, t) = (\lambda x, y, t/\lambda)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $(x, y, t) \in \mathscr{X}$.

(1.5) *Remarque.* Bien que la construction antérieure de la déformation de Z sur le cône normal à Y en Z utilise un choix de coordonnées dans M et un choix des générateurs f_i, on peut montrer que, de fait, cette déformation est intrinsèque à la paire $Y \in Z$ en la faisant apparaître comme la déformation de l'anneau local $\mathcal{O}_{Z,0}$ sur le gradué par rapport à la filtration donnée par $Y \subset Z$ ([2], Proposition 2; [15], 1.8).

2. La condition (A_{CN}) d'incidence

Nous introduisons dans ce paragraphe une nouvelle condition d'incidence entre strates qui tient un rôle important dans tout ce qui suit.

(2.1) *Définition.* Soit X un sous-espace analytique connexe, lisse et avec frontière analytique d'un espace analytique Z. Soit Y un sous-espace analytique lisse de Z contenu dans $\bar{X}-X$. On dira que le couple (X, Y) vérifie la condition (A_{CN}) d'incidence au point $y \in Y$ si, dans la déformation $\phi: \mathscr{X} \to \mathbb{D}$ de $\bar{X}$ sur le cône normal $C_{\bar{X},Y}$, le couple $(\psi^{-1}(X), Y \times \{0\})$ vérifie la condition A_ϕ de Thom au point $(y, 0)$.

En utilisant un résultat d'Hironaka on obtient immédiatement:

(2.2) **Théorème.** *Soit X un sous-espace analytique connexe, lisse et avec frontière analytique d'un espace analytique Z. Soit Y un sous-espace analytique lisse de Z contenu dans $\bar{X}-X$. Il existe un sous-espace analytique fermé S de Y tel que*

i) *$Y-S$ est dense dans Y, et*
ii) *le couple $(X, Y-S)$ vérifie la condition (A_{CN}) en tout point $y \in Y-S$.*

Démonstration. D'après Hironaka ([7], §5, Theorem 2), pour arriver à la conclusion du théorème il suffit que la restriction de ϕ a $\psi^{-1}(X)$ soit lisse et que $Y \times \{0\}$ soit un sous-espace analytique fermé de $\overline{\psi^{-1}(X)}-\psi^{-1}(X)$. Conditions qui dans ce cas sont toutes deux triviales.

Un argument inductif bien connu (voir par exemple [20], Theorem 19.2) donne alors:

(2.3) **Corollaire.** *Soit Z un espace analytique complexe et soit Y un sous-espace de Z, il existe une stratification analytique complexe de Z compatible avec Y, $Z = \bigcup_\alpha X_\alpha$, telle que, pour toute paire (α, β) si $X_\alpha \subset \bar{X}_\beta - X_\beta$, le couple (X_β, X_α) vérifie la condition (A_{CN}) d'incidence en tout point $y \in X_\alpha$.*

(2.4) Puisque la condition (A_{CN}) d'incidence que nous avons introduite dans la définition (2.1) est locale, nous pouvons considérer la situation suivante: on a dans un ouvert de $\mathbb{C}^q$ un sous-ensemble analytique X connexe, lisse et avec frontière analytique, et un sous-ensemble analytique Y lisse, qui contient l'origine $0 \in \mathbb{C}^q$, et tel que $Y \subset \bar{X}-X$. En réalisant une transformation analytique de coordonnées, si nécessaire, on peut supposer que Y est un ouvert d'un sous-espace linéaire de $\mathbb{C}^q$.

(2.5) *Notations.* On notera dorénavant $\langle\ ,\ \rangle$ le produit hermitien habituel sur $\mathbb{C}^q$.

Si Z est un sous-espace analytique de $\mathbb{C}^q$, non nécessairement réduit, on notera $T(Z, z)$ l'espace tangent à Z au point $z \in Z$, i.e.

$$T(Z, z) = \left\{ v \in \mathbb{C}^q;\ \sum_{i=1}^{q} v_i (D_i f)_{(z)} = 0, \text{ pour tout } f \in \mathscr{I}_{Z,z} \right\}$$

et $N(Z, z)$ l'espace orthogonal à $T(Z, z)$ dans $\mathbb{C}^q$.

Finalement, pour tout sous-espace linéaire L de $\mathbb{C}^q$ on notera π_L la projection orthogonale de $\mathbb{C}^q$ sur L.

Le résultat suivant montre la relation qui existe entre la condition (A_{CN}) et la condition (A) de Whitney.

(2.6) **Théorème.** *Soit X un sous-ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$, connexe, lisse et avec frontière analytique, et soit Y un ouvert du sous-espace linéaire $0 \times \mathbb{C}^s$, tel que $Y \subset \bar{X} - X$ et $0 \in Y$. Les affirmations qui suivent sont équivalentes:*

(2.6.1) *Le couple (X, Y) vérifie la condition (A_{CN}) au point* 0.

(2.6.2) i) *le couple (X, Y) vérifie la condition* (A) *de Whitney au point* 0; *et*

ii) *pour tout chemin analytique réel $\tilde{a}(z)$ sur $\mathscr{X}$, tel que $\tilde{a}(z) \in \psi^{-1}(X)$ si $z \neq 0$ et $\tilde{a}(0) = (0, 0)$, on a*

$$\lim_{z \to 0} T_{\tilde{a}(z)} \phi^{-1}(\phi(\tilde{a}(z))) = \lim_{z \to 0} T_{\psi(\tilde{a}(z))} X.$$

(2.6.3) *Le couple (X, Y) vérifie que pour tout $e < 1$*

$$\lim_{\substack{(x,y) \to 0 \\ (x,y) \in X}} \frac{|\langle n, t \rangle|}{|x|^e \, |\pi_{N(Y,0)}(n)|} = 0$$

où $n \in N(X, (x, y))$, $t \in T(Y, 0)$ et $|t| = 1$.

Démonstration

(2.6.1) $\Rightarrow$ (2.6.3) Supposons que pour un certain $e < 1$ la condition de (2.6.3) ne se vérifie pas, alors, d'après le lemme de selection du chemin, on aura un chemin analytique réel $a(z) = (p(z), q(z))$, avec $a(z) \in X$ si $z \neq 0$ et $a(0) = 0$, et des champs analytiques réels de vecteurs $n(z) = (n_1(z), \ldots, n_{r+s}(z)) \in N(X, a(z))$ et $t(z) \in T(Y, 0)$, $|t(z)| = 1$, tels que

$$\lim_{z \to 0} \frac{|\langle n(z), t(z) \rangle|}{|p(z)|^e \, |\pi_{N(Y,0)}(n(z))|} > 0. \tag{2.7}$$

Mais si nous considérons maintenant sur $\psi^{-1}(X)$ le chemin $\tilde{a}(z) = \left(\frac{p(z)}{|p(z)|^e}, q(z), |p(z)|^e \right)$ et le champ de vecteurs normaux aux fibres

$$\tilde{n}(z) = (|p(z)|^e n_1(z), \ldots, |p(z)|^e n_r(z), n_{r+1}(z), \ldots, n_{r+s}(z))$$

nous aurons d'après la condition (A_{CN}) que

$$\lim_{z\to 0} \frac{|\langle \tilde{n}(z), t\rangle|}{|\tilde{n}(z)|} = 0$$

pour tout $t \in T(Y, 0)$, $|t| = 1$; ou bien

$$\lim_{z\to 0} \frac{|\langle n(z), t\rangle|}{|(|p(z)|^e n_1(z), \ldots, n_{r+s}(z))|} = 0$$

puisque $\langle n(z), t\rangle = \langle \tilde{n}(z), t\rangle$, et ainsi on arrive à

$$\lim_{z\to 0} \frac{|\langle n(z), t(z)\rangle|}{|p(z)|^e |(n_1(z), \ldots, n_r(z))|} = 0$$

ce qui contredit (2.7).

(2.6.3) ⇒ (2.6.1) Supposons que le couple (X, Y) ne vérifie pas la condition (A_{CN}) au point 0, alors il existera d'après le lemme de sélection du chemin un chemin analytique $\tilde{a}(z) = (p(z), q(z), \tau(z))$, avec $\tilde{a}(z) \in \psi^{-1}(X)$ si $z \neq 0$ et $\tilde{a}(0) = (0, 0)$, et des champs analytiques de vecteurs $\tilde{n}(z) \in \mathcal{N}(\phi^{-1}(\phi(a(z)), a(z))$ et $t(z) \in T(Y, 0)$, $|t(z)| = 1$, tels que

$$\lim_{z\to 0} \frac{|\langle \tilde{n}(z), t(z)\rangle|}{|\tilde{n}(z)|} > 0. \tag{2.8}$$

Mais dans ce cas on aura un chemin analytique $a(z) \in \bar{X}$, $a(z) = (p(z)\tau(z), q(z))$, avec $a(z) \in X$ si $z \neq 0$ et $a(0) = 0$, et un champ analytique de vecteurs $n(z) = (n_1(z), \ldots, n_{r+s}(z)) \in \mathcal{N}(X, a(z))$, avec

$$\tilde{n}(z) = (\bar{\tau}(z)\, n_1(z), \ldots, \bar{\tau}(z)\, n_r(z), n_{r+1}(z), \ldots, n_{r+s}(z)),$$

tels que, d'après (2.6.3),

$$\lim_{z\to 0} \frac{|\langle n(z), t\rangle|}{|p(z)\,\tau(z)|^e |(n_1(z), \ldots, n_r(z))|} = 0$$

pour tout $e < 1$ et $t \in T(Y, 0)$, $|t| = 1$; ainsi, en prenant un e assez proche de 1, on voit que

$$\lim_{z\to 0} \frac{|\langle n(z), t\rangle|}{|\tau(z)|\, |(n_1(z), \ldots, n_r(z))|} = 0$$

d'où finalement

$$\lim_{z\to 0} \frac{|\langle \tilde{n}(z), t(z)\rangle|}{|\tilde{n}(z)|} = 0,$$

ce qui contredit (2.8).

(2.6.2) ⇒ (2.6.1) La démonstration est immédiate.

(2.6.1) ⇒ (2.6.2) Puisqu'on a déjà prouvé que (2.6.1) implique (2.6.3), et évidemment (2.6.3) implique la condition (A) de Whitney, il suffit donc de montrer que (2.6.1) implique (2.6.2) ii).

Soit maintenant

$$\tilde{T}=\lim_{z\to 0} T_{\tilde{a}(z)}\phi^{-1}(\phi(\tilde{a}(z)))$$

et

$$T=\lim_{z\to 0} T_{\psi(\tilde{a}(z))}X$$

puisque $\tilde{T}\supset 0\times\mathbb{C}^s$ et $T\supset 0\times\mathbb{C}^s$, on a

$$\dim \tilde{T}\cap\mathbb{C}^r\times 0=\dim T\cap\mathbb{C}^r\times 0=\dim X-s.$$

Si $\tilde{a}(z)=(p(z),\ q(z),\tau(z))$ on voit ainsi que $\mathbb{C}^r\times\{q(z)\}$ coupe transversalement $\phi^{-1}(\phi(\tilde{a}(z)))$ et X, en $\tilde{a}(z)$ et en $a(z)=(p(z)\,\tau(z),\ q(z))$, respectivement. Ainsi

$$\tilde{T}\cap\mathbb{C}^r\times 0=\lim_{z\to 0} T_{\tilde{a}(z)}\phi^{-1}(\phi(\tilde{a}(z)))\cap\mathbb{C}^r\times\{q(z)\}$$

et

$$T\cap\mathbb{C}^r\times 0=\lim_{z\to 0} T_{a(z)}X\cap\mathbb{C}^r\times\{q(z)\},$$

mais puisque

$$T_{\tilde{a}(z)}\phi^{-1}(\phi(\tilde{a}(z)))\cap\mathbb{C}^r\times\{q(z)\}=T_{a(z)}X\cap\mathbb{C}^r\times\{q(z)\}$$

on voit finalement que

$$\tilde{T}\cap\mathbb{C}^r\times 0=T\cap\mathbb{C}^r\times 0$$

et donc que

$$\tilde{T}=T.$$

3. Sur la condition (W)

On montre à la suite que la condition (A_{CN}) qu'on vient d'introduire dans (2.1) est, de fait, équivalente à la condition (W) introduite par Verdier en [19].

(3.1) **Théorème.** *Soit X un sous-ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^q=\mathbb{C}^r\times\mathbb{C}^s$, connexe, lisse et avec frontière analytique, et soit Y un ouvert du sous-espace linéaire $0\times\mathbb{C}^s$, tel que $Y\subset\bar{X}-X$. Le couple (X,Y) vérifie la condition (A_{CN}) en $0\in Y$, si, et seulement si, il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}^q$ et une constante $C<+\infty$ telle que*

$$(W)\ |\pi_{N(X,x)}(t)|\leqq C|x-\pi_Y(x)|$$

pour tout $t\in T(Y,0)$, $|t|=1$, et *$x\in X\cap U$.*

Démonstration. Elle est immédiate, d'après le théorème (2.6), si on utilise l'expression de la condition (W) comme condition (A) stricte avec exposant 1, c'est-à-dire, comme la condition

$$\lim_{\substack{(x,y)\to 0\\(x,y)\in X}}\frac{|\langle n,t\rangle|}{|x|^e\,|n|}=0$$

pour tout $e<1$, où $n\in N(X,(x,y))$, $t\in T(Y,0)$, et $|t|=1$.

(3.2) **Corollaire.** *Soit Z un sous-espace analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^q$ et soit Y un ouvert d'un sous-espace linéaire de $\mathbb{C}^q$, $Y \subset Z$. Il existe alors un ouvert dense V de Y tel que pour tout $y \in V$ il existe une constante $C_y < +\infty$ et un voisinage V_y de y dans $\mathbb{C}^q$ tels que*

$$\frac{|\pi_{N(Z,z)}(t)|}{|z-\pi_Y(z)|} \leqq C_y$$

pour tout $t \in T(Y,0)$, $|t|=1$, et *$z \in Z \cap V_y - Y$.*

Démonstration. D'après le corollaire (2.3) nous pouvons prendre une stratification de Z, $Z = \bigcup_\alpha X_\alpha$, subordonnée à Y et qui vérifie la condition (A_{CN}). Soient $\{X_\beta\}$ les strates contenues dans Y et de dimensions strictement inférieures à celles de Y, et prenons $V = Y - U X_\beta$ qui, clairement, est ouvert et dense. Soit maintenant $y \in V$ et $X_1, \ldots, X_l$ les strates de $Z - Y$ qui contiennent y dans leur adhérence, puisque les couples (X_i, Y) vérifient la condition (A_{CN}) au point y, il existe des constantes C_i et des voisinages U_i de y dans $\mathbb{C}^q$ tels que

$$\frac{|\pi_{N(X_i,z)}(t)|}{|z-\pi_Y(z)|} \leqq C_i < +\infty$$

pour tout $t \in T(Y,0)$, $|t|=1$, et $z \in X_i \cap U_i$, $i=1, \ldots, l$. Comme on a

$$|\pi_{N(Z,z)}(t)| \leqq |\pi_{N(X_i,z)}(t)|$$

pour tout $t \in T(Y,0)$, si $z \in X_i$, il suffit pour avoir le corollaire de prendre $C_y = \inf\{C_i, i=1, \ldots, l\}$ et $V_y = \bigcap_i U_i$.

On sait d'après Kuo et Verdier que si (X, Y) vérifie la condition (W) en $y \in Y$, alors (X, Y) vérifie aussi les conditions de Whitney en y. Nous donnerons dans (3.5) une conséquence géométrique de la condition (W) qui permet une comparaison plus étroite avec les conditions de Whitney.

(3.3) **Lemme.** *Soit X un sous-ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^q = \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$, connexe, lisse et avec frontière analytique, et soit Y un ouvert du sous-espace linéaire $0 \times \mathbb{C}^s$, tel que $Y \subset \bar{X} - X$. Si le couple (X, Y) vérifie la condition (W) au point $0 \in Y$, alors pour tout chemin analytique $a(z) = (p(z), q(z)) \in \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$, tel que $a(0)=0$ et $a(z) \in X$ si $z \neq 0$, l'espace limite d'espaces tangents aux fibres de ϕ le long de $\tilde{a}(z) = \left(\frac{p(z)}{|p(z)|}, q(z), |p(z)|\right) \in \mathscr{X}$ n'a aucun vecteur orthogonal dans $T(Y,0)$.*

Démonstration. Supposons que se vérifie la condition (W), nous devons prouver que pour tout champ de vecteurs normaux unitaires $n(z)$ le long de $a(z)$, on a

$$\lim_{z \to 0} \frac{|\langle \tilde{n}(z), t \rangle|}{|\tilde{n}(z)|} < 1$$

pour tout $t \in T(Y,0)$, $|t|=1$, et où

$$\tilde{n}(z) = (|p(z)|\, n_1(z), \ldots, |p(z)|\, n_r(z), n_{r+1}(z), \ldots, n_{r+s}(z)).$$

Ainsi on doit donc prouver que

$$\lim_{z\to 0} \frac{|n_{r+i}(z)|}{|(|p(z)|\, n_1(z), \ldots, |p(z)|\, n_r(z), n_{r+1}(z), \ldots, n_{r+s}(z))|} < 1$$

pour tout $i=1, \ldots, s$. Mais comme d'après la condition (W) on a

$$\frac{|n_{r+i}(z)|}{|p(z)|} \leqq C$$

il resulte que la limite antérieure est plus petite que $\sqrt{C^2/(1+C^2)}$ et donc <1.

(3.4) *Remarque.* Si dans le lemme antérieur la dimension de X est m, et si on note T l'espace limite d'espaces tangents, l'assertion du lemme $T(Y, 0) \cap T^{\perp} = \{0\}$ équivaut alors à $\dim(\mathbb{C}^r \times 0) \cap T = m - s$.

(3.5) **Théorème.** *Soit X un sous-ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^q = \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$, connexe, lisse et avec frontière analytique, et soit Y un ouvert du sous-espace linéaire $0 \times \mathbb{C}^s$, tel que $Y \subset \bar{X} - X$. Si le couple (X, Y) vérifie la condition (W) au point $0 \in Y$ on a une stratification $\mathbb{C}^*$-homogène de la fibre du cône normal $C_{\bar{X}, Y}$ en* 0, *telle que si $a(z) = (p(z), q(z)) \in \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$ est un chemin analytique sur X, avec*

$$\lim_{z\to 0} a(z) = 0, \quad \textit{et}$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{p(z)}{|p(z)|} = x \in C_{\bar{X}, Y}$$

alors l'espace $\lim\limits_{z\to 0} T_{a(z)} X$ contient l'espace tangent à la strate qui contient x.

Démonstration. Soit $\phi\colon \mathscr{X} \to \mathbb{D}$ la déformation de X sur le cône normal $C_{\bar{X}, Y}$ et considérons les sous-espaces $\mathscr{M} = \mathscr{X}_{\mathrm{reg}} - \phi^{-1}(0)$ et $\mathscr{N} = |\phi^{-1}(0)| \cap \mathbb{C}^r \times 0$. Alors $\mathscr{M}$ est lisse, ϕ induit un morphisme lisse de $\mathscr{M}$ sur $\mathbb{D} - \{0\}$ et $\mathscr{N} \subset \bar{\mathscr{M}} - \mathscr{M}$. Nous pouvons donc appliquer le théorème d'Hironaka cité précédemment ([7], § 5, Theorem 2) et conclure qu'il existe une stratification de $\mathscr{N}$, qui est la fibre du cône sur 0, $\mathscr{N} = \mathscr{N}_0 \cup \mathscr{N}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{N}_l$, où $l = \dim \mathscr{N}$, telle que

a) $\dim \mathscr{N}_i = i$, pour $i = 0, \ldots, l$;
b) toutes les paires $(\mathscr{M}, \mathscr{N}_i)$ satisfont la condition A_ϕ de Thom.

On peut de plus supposer que cette stratification est $\mathbb{C}^*$-homogène, puisque, si par induction on suppose que $\mathscr{N} - \bigcup\limits_{j \leqq i} \mathscr{N}_j$ est $\mathbb{C}^*$-homogène, alors le $\mathbb{C}^*$-saturé de $\mathscr{N}_i$, $(\mathscr{N}_i)^s$, aura

$$\dim(\mathscr{N}_i)^s = \dim \mathscr{N}_i,$$

et si au point $(x, 0, 0) \in (\mathscr{N}_i)^s$ la paire $(\mathscr{M}, (\mathscr{N}_i)^s)$ ne satisfaisait pas la condition A_ϕ de Thom, il existerait un chemin analytique $\alpha(z) = (x(z), y(z), t(z)) \in \mathscr{M}$ qui tendrait vers $(x, 0, 0)$, tel que

$$\lim_{z\to 0} T_{\alpha(z)}\, \phi^{-1}(t(z)) = T \not\supset T_{(x, 0, 0)}(\mathscr{N}_i)^s.$$

Mais comme il existe $\lambda \neq 0$ tel que $(\lambda x, 0, 0) \in \mathcal{N}_i$, nous pouvons considérer le chemin analytique $\beta(z) = (\lambda x(z), y(z), t(z)/\lambda)$ dans $\mathcal{M}$ qui a $\lim \beta(z) = (\lambda x, 0, 0)$ et par (3.3) et (3.4) on aura

$$\lim_{z \to 0} T_{\beta(z)} \phi^{-1}(t(z)/\lambda) \cap \mathbb{C}^r \times 0 = T \cap \mathbb{C}^r \times 0$$

donc

$$T \cap \mathbb{C}^r \times 0 \not\supset T_{(x, 0, 0)}(\mathcal{N}_i)^s = T_{(\lambda x, 0, 0)} \mathcal{N}_i$$

ce qui contredit le fait que le couple $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_i)$ satisfait la condition A_ϕ de Thom.

Nous prouverons que cette stratification vérifie l'assertion du théorème. Prenons un chemin analytique $a(z) = (p(z), q(z)) \in X$, avec

$$\lim_{z \to 0} a(z) = 0,$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{p(z)}{|p(z)|} = x,$$

on aura $(x, 0, 0) \in \mathcal{N}_i$, pour un certain $i = 1, \ldots, l$. Si nous considérons maintenant le chemin analytique $\alpha(z) = (p(z)/|p(z)|, q(z), |p(z)|)$ dans $\mathcal{M}$, on voit qu'il a pour limite $(x, 0, 0)$ et si on note

$$T = \lim_{z \to 0} T_{a(z)} X,$$

$$\tilde{T} = \lim_{z \to 0} T_{\alpha(z)} \phi^{-1}(|p(z)|),$$

d'après la définition des $\mathcal{N}_i$ on aura

$$\tilde{T} \cap \mathbb{C}^r \times 0 \supset T_{(x, 0, 0)} \mathcal{N}_i$$

mais puisque

$$\dim \tilde{T} \cap \mathbb{C}^r \times 0 = m - s$$

et on a aussi, d'après la condition (A),

$$\dim T \cap \mathbb{C}^r \times 0 = m - s$$

on arrive à

$$\tilde{T} \cap \mathbb{C}^r \times 0 = T \cap \mathbb{C}^r \times 0$$

d'où finalement

$$T \supset T_{(x, 0, 0)} \mathcal{N}_i.$$

Bien que Hironaka ait déjà prouvé dans [5], Theorem (6.1), que les conditions de Whitney impliquent la pseudo-platitude normale, pour montrer l'intérêt du théorème (3.6) on donne ci-dessous une preuve directe de la pseudo-platitude normale qu'entraine la condition (W)

(3.6) **Corollaire.** *Si le couple (X, Y) vérifie la condition (W) en tout point $y \in Y$, alors $\bar{X}$ est normalement pseudo-plat le long de Y.*

Démonstration. Puisque $\bar{X}$ est équidimensionnel, on doit prouver, d'après [5], Remark (2.5), que $\dim C_{\bar{X}, Y, y}$ est indépendante de $y \in Y$. En effet pour tout $y \in Y$ on a

$$\dim C_{\bar{X}, Y, y} = \dim X - \dim Y$$

puisque si l est la dimension de $C_{\bar{X}, Y, y}$ et $\mathcal{N}_l$ est une strate de $C_{\bar{X}, Y, y}$ de dimension l, on peut trouver une limite T d'espaces tangents à X telle que $T\mathcal{N}_l \subset T$, mais par la condition (A) de Whitney $Y \subset T$, et comme $T\mathcal{N}_l \perp Y$, on doit avoir

$$\dim T = \dim X \geqq \dim C_{\bar{X}, Y, y} + \dim Y,$$

ainsi on obtient

$$\dim C_{\bar{X}, Y, y} = \dim X - \dim Y,$$

puiqu'on a toujours

$$\dim C_{\bar{X}, Y, y} \geqq \dim X - \dim Y.$$

Nous mettons terme à cette aproche de la déformation sur le cône normal et les conditions (A_{CN}) et (W), avec le résultat suivant

(3.7) **Théorème.** *Soit X un sous-espace analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$, de dimension $> s+1$, connexe, lisse et avec frontière analytique, et soit Y un ouvert de $0 \times \mathbb{C}^s$, tel que $Y \subset \bar{X} - X$ et $0 \in Y$. Si le couple (X, Y) vérifie la condition (A_{CN}) au point 0, il existe un ouvert dense U de l'espace projectif des hyperplans de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$ qui contiennent Y, tel que si $H \in U$ alors $H \cap X$ est lisse au voisinage de 0 et $(X \cap H, Y)$ vérifie la condition (A_{CN}) au point 0.*

Démonstration. Soit $C_{\bar{X}, Y, y} = \mathrm{U}\mathcal{N}_i$ la stratification $\mathbb{C}^*$-homogène du théorème (3.5), nous prouverons qu'il suffit de considérer comme $\bar{U}$ l'ouvert dense des hyperplans qui coupent transversalement les strates $\mathcal{N}_i$.

En effet, si $H \in U$, alors d'après le théorème (2.6) H coupe transversalement toute limite de plans tangents aux fibres de ϕ le long des chemins sur $\psi^{-1}(X)$. Mais puisque l'espace total de la deformation de $X \cap H$ sur $C_{\overline{X \cap H}, Y}$ au voisinage de 0 est simplement $\mathscr{X} \cap H$, on a

$$\lim_{z \to 0} T_{\tilde{a}(z)} \phi^{-1}(\phi(\tilde{a}(z))) \cap H = H \cap \lim_{z \to 0} T_{\tilde{a}(z)} \phi^{-1}(\phi(\tilde{a}(z))) \supset 0 \times \mathbb{C}^s \times 0$$

pour tout chemin $\tilde{a}(z)$ sur $\mathscr{X} \cap H$, avec $\tilde{a}(z) \in \psi^{-1}(X \cap H)$ si $z \neq 0$ et $\tilde{a}(0) = 0$, dont on déduit que $(X \cap H, Y)$ vérifie la condition (A_{CN}) au point 0.

4. La stabilité des conditions de Whitney pour des sections planes génériques

(4.1) Dans ce qui suit, étant donné un chemin analytique réel $a(z) = (p(z), q(z)) \in \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$, tel que $a(0) = 0$, on notera $\alpha = \inf\{v(p_i(z)),\ i = 1, \ldots, r\}$ et $\beta = v(q(z))$, où v est la valuation de l'anneau des germes en 0 des fonctions analytiques réelles à valeurs complexes.

(4.2) **Lemme.** *Soit X un sous-ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$, connexe, lisse et avec frontière analytique, soit Y un ouvert de l'espace linéaire $0 \times \mathbb{C}$, tel que $Y \subset \bar{X} - X$ et $0 \in Y$. Il existe un ouvert dense $U_{0,0}$ de l'espace projectif $\mathbb{P}_{r-1}$ des hyperplans de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$ qui contiennent Y, tel que pour tout $H \in U_{0,0}$ si*

i) *$a(z)$ est un chemin analytique réel sur $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$, avec $a(0) = 0$ et $\alpha \leqq \beta$,*
ii) *$H(z)$ est un chemin analytique réel sur $\mathbb{P}_{r-1}$ avec $H(0) = H$, et*
iii) *$a(z) \in X \cap H(z)$, pour tout $z \neq 0$,*

alors

$$H \not\supset \lim_{z \to 0} T_{a(z)} X.$$

Démonstration. Evidemment, il suffit de vérifier l'assertion du lemme pour l'ouvert affine de $\mathbb{P}_{r-1}$ formé des hyperplans d'équation $x_1 - \sum_{i=2}^{r} a_i x_i = 0$.

Soit $\bar{X} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^r \times \mathbb{C};\ f_\lambda(x, y) = 0,\ 1 \leqq \lambda \leqq p\}$ et considérons le sous-ensemble analytique

$$Z = \left\{ (x_2, \ldots, x_r, y, a_2, \ldots, a_r) \in \mathbb{C}^{r-1} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{r-1}; \right.$$
$$\left. f_\lambda \left(\sum_2^r a_i x_i, x_2, \ldots, x_r, y \right) = 0, \quad 1 \leqq \lambda \leqq p \right\}$$

puisque l'espace $A = 0 \times 0 \times \mathbb{C}^{r-1} \subset Z$ nous pouvons appliquer le Corollaire (3.2) et ainsi il existe un ouvert dense V de A tel que si $a \in V$ il existe une constante $C_a < +\infty$ et un voisinage V_a de a dans $\mathbb{C}^{r-1} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{r-1}$ tel que

$$\text{(4.3)} \qquad \frac{|\pi_{N(Z,z)}(t)|}{|z - \pi_A(z)|} \leqq C_a$$

pour tout $t \in T(A, a)$, $|t| = 1$, et $z \in Z \cap V_a - A$.

Nous prouverons que cet ouvert dense V satisfait l'assertion du lemme sous une forme équivalente: soit H l'hyperplan qui correspond à un point $a \in V$, soit h un vecteur normal unitaire à H et soit $n(z)$ un champ de vecteurs normaux unitaires à X le long du chemin analytique réel $a(z)$, alors

$$\lim_{z \to 0} |\langle h, n(z) \rangle| < 1.$$

On prend pour simplifier $a = 0 \in V$, alors $h = (1, 0, \ldots, 0)$ et si $n(z) = (n_1(z), \ldots, n_{r+1}(z))$ on doit donc prouver que

$$v(n_1(z)) \geqq \inf\{v(n_i(z)), i = 2, \ldots, r+1\}.$$

Prenons sur Z le chemin analytique $(p_2(z), \ldots, p_r(z), q(z), h_2(z), \ldots, h_r(z))$, où $(h_2(z), \ldots, h_r(z))$ est l'expression du chemin $H(z)$ dans l'ouvert affine que l'on a pris de $\mathbb{P}_{r-1}$, et le champ de vecteurs normaux non nuls $\tilde{n}(z) = (\tilde{n}_2(z), \ldots, \tilde{n}_{2r}(z))$ où

$$\text{(4.4)} \qquad \begin{aligned} \tilde{n}_i(z) &= n_1(z) \bar{h}_i(z) + n_i(z), \quad 2 \leqq i \leqq r \\ \tilde{n}_{r+1}(z) &= n_{r+1}(z) \\ \tilde{n}_{r+i}(z) &= \bar{p}_i(z)\, n_1(z), \quad 2 \leqq i \leqq r. \end{aligned}$$

D'après (4.3) on a pour tout $i = 2, \ldots, r$

$$\lim_{z \to 0} \frac{|\tilde{n}_{r+i}(z)|}{|(p_2, \ldots, q)|\ |(\tilde{n}_2(z), \ldots, \tilde{n}_{2r}(z))} \leqq C_0 < \infty$$

d'où

$$\text{(4.5)} \qquad v(\tilde{n}_{r+i}(z)) \geqq \alpha + \inf\{v(\tilde{n}_i), i = 2, \ldots, r\}, \quad 2 \leqq i \leqq r,$$

puisque, par hypothèse,

$$\alpha = \inf\{v(p_i), i = 1, \ldots, r\} \leqq \beta = v(q).$$

Mais puisque

$$v(\tilde{n}_{r+i}(z)) = v(p_i(z)) + v(n_1(z)), \qquad 2 \leqq i \leqq r,$$

il resulte de (4.5) que

$$v(n_1(z)) \geqq \inf\{v(\tilde{n}_i(z)), \quad i=2, \ldots, r\}$$

et, d'après (4.4), on a

$$v(n_1(z)) \geqq \inf\{v(n_i(z)), i=2, \ldots, r\}.$$

Dans le lemme précédent on n'a consideré que des chemins analytiques $a(z)$ qui n'étaient pas tangents à Y; dans le lemme suivant, de plus difficile démonstration, on considerera les chemins analytiques tangents à Y.

(4.6) **Lemme.** *Soit X un sous-ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$, connexe, lisse et avec frontière analytique, soit Y un ouvert de l'espace linéaire $0 \times \mathbb{C}$, tel que $Y \subset \bar{X} - X$, et supposons que le couple (X, Y) vérifie les conditions de Whitney au point $0 \in Y$. Pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ il existe un ouvert dense $U_{k,l}$ de l'espace projectif $\mathbb{P}_{r-1}$ des hyperplans de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$ qui contiennent Y, tel que pour tout $H \in U_{k,l}$ si*

i) *$a(z)$ est un chemin analytique sur $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$, avec $a(0)=0$, et $k\beta < l\alpha < k(\beta+1)$,*

ii) *$H(z)$ est un chemin analytique sur $\mathbb{P}_{r-1}$ avec $H(0)=H$, et*

iii) *$a(z) \in X \cap H(z)$, pour tout $z \neq 0$*

alors

$$H \not\supset \lim_{z \to 0} T_{a(z)} X.$$

Démonstration. On commence comme dans le lemme (4.2) mais en considérant dans $\mathbb{C}^{r-1} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{r-1}$ le sous-espace analytique

$$Z = \Big\{(x_2, \ldots, x_r, y, a_2, \ldots, a_r) \in \mathbb{C}^{r-1} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{r-1};$$

$$f_\lambda\left(\sum_{i=2}^{r} a_i x_i^k, x_2^k, \ldots, x_r^k, y_l\right) = 0, 1 \leqq \lambda \leqq p\Big\}.$$

On doit prouver comme dans le cas du lemme (4.2) que

$$v(n_1(z)) \geqq \inf\{v(n_i(z)), i=2, \ldots, r+1\}.$$

Supposons maintenant que ce soit faux et prenons sur Z le chemin continu

$$((p_2(z))^{1/k}, \ldots, (p_r(z))^{1/k}, (q(z))^{1/l}, h_2(z), \ldots, h_m(z))$$

et le champ de vecteurs normaux non nuls $\tilde{n}(z) = (\tilde{n}_2(z), \ldots, \tilde{n}_{2r}(z))$, où

$$\text{(4.7)} \qquad \tilde{n}_i(z) = k\bar{h}_i(z)(\bar{p}_i(z))^{\frac{k-1}{k}} n_1(z) + k(\bar{p}_i(z))^{\frac{k-1}{k}} n_i(z), \qquad i=2, \ldots, r,$$

$$\tilde{n}_{r+1}(z) = l(\bar{q}(z))^{\frac{l-1}{l}} n_{r+1}(z),$$

et

$$\tilde{n}_{r+i}(z) = \bar{p}_i(z)\, n_1(z), \qquad i=2, \ldots, r.$$

Comme dans la preuve de (4.2) on arrive d'après (4.3) à

$$\lim_{z\to 0} \frac{|\tilde{n}_{r+i}(z)|}{|(p_2^{1/k}, \ldots, q^{1/l})|\,|(\tilde{n}_2, \ldots, \tilde{n}_{r+1})|} \leqq C_0 < +\infty \tag{4.8}$$

pour tout $i=2, \ldots, r$.

Soit maintenant $v(p_2)=\inf\{v(p_i),\ i=2, \ldots, r\}$, puisque par hypothèse $k\beta < l\alpha$ on a

$$\lim_{z\to 0} \frac{|(p_2^{1/k}, \ldots, q^{1/l})|\,|q^{l-1/l}\, n_{r+1}|}{|p_2 n_1|} = \lim_{z\to 0} \frac{|q n_{r+1}|}{|p_2 n_1|}. \tag{4.9}$$

Etant donné qu'on suppose que $v(n_1) < \inf\{v(n_i), i=2, \ldots, r+1\}$ on aura

$$\lim_{z\to 0} \frac{|q n_{r+1}|}{|p_2 n_1|} \leqq \lim_{z\to 0} \frac{|a(z)|\,|n_{r+1}|}{|p_2 n_1|} = \lim_{z\to 0} \frac{|a(z)|\,|\langle (0,1), n(z)\rangle|}{|p(z)|} \tag{4.10}$$

mais cette dernière limite est 0

$$\lim_{z\to 0} \frac{|a(z)|\,|\langle (0,1), n(z)\rangle|}{|p(z)|} = 0 \tag{4.11}$$

d'après Kuo ([10], Theorem 2). Ainsi à partir de (4.9), (4.10) et (4.11) on arrive à

$$\lim_{z\to 0} \frac{|(p_2^{1/k}, \ldots, q^{1/l})|\,|q^{l-1/l}\, n_{r+1}|}{|p_2 n_1|} = 0 \tag{4.12}$$

et de (4.8) et (4.12) on déduit que

$$\lim_{z\to 0} \frac{|p_2 n_1|}{|q^{1/l}|\,|(\tilde{n}_2, \ldots, \tilde{n}_r)|} < +\infty. \tag{4.13}$$

Soit j, $2 \leqq j \leqq r$, tel que pour tout $i=2, \ldots, r$,

$$\lim_{z\to 0} \frac{|\tilde{n}_i|}{|\tilde{n}_j|} < +\infty,$$

alors (4.13) équivaut à

$$\lim_{z\to 0} \frac{|p_2 n_1|}{|q^{1/l}|\,|\tilde{n}_j|} < +\infty \tag{4.14}$$

et, d'après (4.7), (4.14) donne

$$\lim_{z\to 0} \frac{|p_2 n_1|}{|q^{1/l}|\,|p_j^{k-1/k}\bar{h}_j n_1 + p_j^{k-1/k} n_j|} < +\infty. \tag{4.15}$$

Nous montrerons maintenant que

$$v(h_j n_1) > v(n_j), \tag{4.16}$$

en effet, dans le cas contraire on déduit de (4.15) que

$$\lim_{z\to 0} \frac{|p_2 n_1|}{|q^{1/l}|\,|p_j^{k-1/k} h_j n_1|} < +\infty$$

et ainsi

$$klv(p_2)+klv(n_1) \geqq kv(q)+l(k-1)\,v(p_j)+klv(h_j)+klv(n_1)$$

donc

$$kl\alpha \geqq k\beta + l(k-1)\,v(p_j)+klv(h_j) \geqq k\beta + l(k-1)\,\alpha + kl$$

ou bien

$$l\alpha \geqq k(\beta + l),$$

ce qui contredit l'hypothèse du lemme $l\alpha < k(\beta+1)$.

Ainsi de (4.15) et (4.16) on arrive à

$$\lim_{z\to 0} \frac{|p_2 n_1|}{|q^{1/l}|\,|p_j^{k-1/k} n_j|} < +\infty$$

d'où

(4.17) $$klv(p_2)+klv(n_1) \geqq kv(q)+l(k-1)\,v(p_j)+klv(n_j),$$

comme on a supposé que

$$v(n_1) < \inf\{v(n_i),\, i=2, \ldots, r+1\}$$

on déduit de (4.17) que

$$kl\alpha + klv(n_1) \geqq k\beta + l(k-1)\,\alpha + klv(n_1) + kl$$

d'où

$$l\alpha \geqq k(\beta + l),$$

ce qui contredit l'hypothèse du lemme $l\alpha < k(\beta+1)$, et montre donc que

$$v(n_1) \geqq \inf\{v(n_i),\, i=2, \ldots, r+1\}.$$

(4.18) **Théorème.** *Soit X un sous-ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$, connexe, lisse et avec frontière analytique, soit Y un ouvert de l'espace linéaire $0 \times \mathbb{C}$, tel que $Y \subset \bar{X} - X$, et supposons que le couple (X, Y) vérifie les conditions de Whitney au point $0 \in Y$. Il existe un ouvert de Zariski dense $U^{(i)}$, $i=1, \ldots, r$, de la grassmanienne des $(i+1)$-plans de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$ qui contiennent Y, tel que si $H \in U^{(i)}$ il existe un voisinage W_H de 0 dans $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$, dépendant de H, de manière que H coupe transversalement toute limite d'espaces tangents à X le long des chemins analytiques réels contenus dans H et convergents vers des points de W_H.*

Démonstration. On se ramène au cas $i=r-1$ en considérant un $(i+1)$-plan comme l'intersection de $r-i$ r-plans.

Notons $\mathbb{G}(m, r+1)$ la grassmanienne des m-plans dans $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$, où $m = \dim X$, et $\mathbb{P}_{r-1}$ l'espace projectif des hyperplans de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$ qui contiennent Y.

On considère l'ensemble

$$\Gamma=\{(x, T_x X, H), x\in X\cap H\}\subset X\times \mathbb{G}(m, r+1)\times \mathbb{P}_{r-1}$$

et on note que $\bar{\Gamma}\subset\bar{X}\times\mathbb{G}(m, r+1)\times\mathbb{P}_{r-1}$ est un sous-ensemble analytique fermé, ainsi l'ensemble

$$V=\bar{\Gamma}\cap\{(0, T, H), T\subset H\}\subset\{0\}\times\mathbb{G}(m, r+1)\times\mathbb{P}_{r-1}$$

est un fermé de Zariski de $\{0\}\times\mathbb{G}(m, r+1)\times\mathbb{P}_{r-1}$.

Si π: $\{0\}\times\mathbb{G}(m, r+1)\times\mathbb{P}_{r-1}\to\mathbb{P}_{r-1}$ est la projection, on a évidemment que

$$F=\pi(V)$$

est un fermé de Zariski de $\mathbb{P}_{r-1}$. Nous montrerons que l'ouvert de Zariski

$$U=\mathbb{P}_{r-1}-F$$

n'est pas vide et vérifie l'assertion du théorème.

Pour montrer que U n'est pas vide nous prouverons que si $U_{k,l}$, $k, l\geqq 0$, sont les ouverts denses introduits dans les lemmes (4.2) et (4.6), alors

$$\bigcap_{k,l\geqq 0} U_{k,l}\subset U.$$

En effet, soit $H\in\cap U_{k,l}$ et supposons que $H\in F$, alors il existera un $T\in\mathbb{G}(m, r+1)$ tel que

$$(0, T, H)\in V$$

mais, d'après le lemme de sélection du chemin il existera un chemin analytique réel

$$\gamma(z)=(a(z), T(z), H(z))\in\bar{X}\times\mathbb{G}(m, r+1)\times\mathbb{P}_{r-1}$$

tel que

$$\begin{gathered} a(z)\in H(z)\cap X, \quad \text{pour tout } z\neq 0 \\ a(0)=0 \quad\text{et}\quad H(0)=H, \\ T(z)=T_{a(z)}X, \quad \text{pour tout } z\neq 0, \quad\text{et} \\ \lim_{z\to 0} T(z)=T\subset H, \end{gathered}$$

mais pour le chemin $a(z)$ on aura ou bien $\alpha\leqq\beta$, ce qui contredirait que $H\in U_{0,0}$, ou bien $k\beta<l\alpha<k(\beta+1)$ pour k et l appropriés, ce qui contredirait que $H\in U_{k,l}$. Ainsi que $H\notin F$.

Maintenant nous montrerons que U vérifie l'assertion du théorème. En effet, si on suppose que pour tout voisinage de 0 on a un point y et un chemin analytique réel $b(z)$ contenu dans H, qui converge vers y, et tel que H contient la limite d'espaces tangents à X le long de $b(z)$, alors le lemme de sélection du chemin donne un chemin analytique réel $a(z)$, qui converge vers 0 et tel que H contient la limite d'espaces tangents à X le long de $a(z)$. Mais dans ce cas $(0, T, H)\in V$, c'est-à-dire, $H\notin U$.

(4.19) **Théorème.** *Soit Z un sous-ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$, de dimension $m+1$, et qui contient un ouvert Y du sous-espace linéaire $0 \times \mathbb{C}$, et soit $Z = \bigcup_\alpha X_\alpha$ une stratification de Whitney de Z telle que la strate qui contient l'origine $0 \in \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$ est Y. Pour tout i, $i = r-m+1, \ldots, r$, il existe un ouvert de Zariski dense $U^{(i)}$ de la grassmanienne des $(i+1)$-plans de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$ qui contiennent Y, tel que pour tout $H \in U^{(i)}$*

$$Z \cap H = \dot{\bigcup_{\alpha \in A}} (X_\alpha \cap H)$$

(où A est tel que si $\alpha, \beta \in A$ et $\alpha \neq \beta$ alors $X_\alpha \cap H \neq X_\beta \cap H$) est une stratification de Whitney de $Z \cap H$ dans un voisinage W_H de 0 qui dépend de H.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas $i = r-1$.

Soient $X_1 = Y$, $X_2, \ldots, X_l$ les strates de Z qui contiennent 0 dans leur adhérence et soient U_2, $U_3, \ldots, U_l$ les ouverts denses qui correspondent à $X_2, \ldots, X_l$ suivant le théorème antérieur; il suffira alors de prendre comme $U^{(r-l)}$ l'intersection $U_2 \cap U_3 \cap \ldots \cap U_l$. En effet, si $H \in U^{(r-1)}$ il existera un voisinage W_H de 0 dépendant de H dans lequel les intersections $X_j \cap H$ sont lisses, $j = 1, \ldots, l$, et tel que H ne contient aucune limite d'espaces tangents à X_j le long des chemins analytiques sur $X_j \cap H$, $j = 2, \ldots, l$, et convergents vers des points de W_H. On verra que tous les couples $(X_j \cap H, X_k \cap H)$, avec $X_k \cap H \subset \overline{X_j \cap H} - X_j \cap H$, vérifient les conditions de Whitney aux points de $X_k \cap H \cap W_H$.

Prenons deux chemins analytiques réels $a(z)$ sur $X_j \cap H$ et $b(z)$ sur $X_k \cap H$ qui convergent vers $x \in X_k \cap W_H$, et tels que

$$\ell = \lim_{z \to 0} \overline{a(z)\, b(z)}$$

$$T = \lim_{z \to 0} T_{a(z)}(X_j \cap H).$$

Puisque (X_j, X_k) vérifie les conditions de Whitney on a

$$\ell \subset \lim_{z \to 0} T_{a(z)} X_j = T_j$$

et comme d'autre part $\ell \subset H$, on obtient $\ell \subset T_j \cap H$.

Etant donné que $T \subset T_j \cap H$ il nous suffit de prouver que $\dim T = \dim T_j \cap H$, pour obtenir $T = T_j \cap H$, et ainsi $\ell \subset T$. Mais $\dim T = \dim T_j - 1$, et comme $H \not\supset T_j$, puisque $H \in U^{(r-1)}$, on en déduit que $\dim T_j \cap H = \dim T_j - 1$, d'où le théorème.

5. Les conditions de Whitney impliquent la constance de la multiplicité

Dans ce paragraphe, comme dans ceux qui suivent, nous utiliserons les résultats antérieurs (4.18) et (4.19) pour montrer que si une stratification vérifie les conditions de Whitney, elle possède aussi quelques autres traits intéressants d'équisingularité.

Plus concrètement, nous présenterons dans cette section une nouvelle preuve du théorème suivant d'Hironaka:

(5.1) **Théorème** ([5], Corollary 6.2). *Soit Z un espace analytique complexe réduit et soit $Z=\bigcup_\alpha X_\alpha$ une stratification de Whitney de Z. Si X est une strate de cette stratification, alors la multiplicité de Z est constante le long de X.*

Démonstration. Si Z_β est une composante irréductible de Z, on sait qu'il existe une strate X_β telle que $\overline{X_\beta}=Z_\beta$, ainsi si $Z_\beta \cap X \neq \emptyset$, en utilisant la propriété de frontière, on voit que $X \subset Z_\beta$. Donc on peut supposer que, d'après la formule d'additivité des multiplicités, Z est irréductible.

Etant donné que ce qui nous intéresse est une question locale, nous pouvons localiser la situation et supposer que Z est un sous-ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$, de dimension $m+s$, irréductible, et que X est un ouvert de l'espace linéaire $0 \times \mathbb{C}^s$, qui contient l'origine. Nous montrerons que la multiplicité de Z est constante le long de X au voisinage de 0.

Pour cela, il suffit de montrer sa constance au voisinage de 0, le long de tout ouvert Y de droite complexe, $Y \subset X$; et puisque dans ce cas les couples (X_α, Y) vérifient aussi les conditions de Whitney, on peut supposer $\dim X=1$ (i.e. $s=1$).

Soient maintenant $X_1, \ldots, X_l$ les strates de Z, différentes de X, qui contiennent 0 dans leur adhérence, soient $U_1^{(r-m)}, \ldots, U_l^{(r-m)}$ les sous-ensembles résiduels qui leur correspondent suivant (4.18), et soit $H \in U_1^{(r-m)} \cap \ldots \cap U_l^{(r-m)}$. Nous montrerons que $(Z \cap H)_{\mathrm{red}}=X$ au voisinage de 0. En effet, si $(Z \cap H)_{\mathrm{red}} \neq X$ au voisinage de 0, il existerait un chemin analytique réel $a(z)$, avec $a(z) \in X_i \cap H - X$ si $z \neq 0$ et $a(0)=0 \in X$, pour un certain i, $1 \leqq i \leqq l$. Mais dans ce cas on aurait que la limite T des espaces tangents à X_i le long de $a(z)$ contiendrait X par la condition (A) de Whitney, et contiendrait aussi la limite des droites $a(z)-\pi_X(a(z))$, $z \neq 0$, par la condition (B), ainsi $\dim T \cap H \geqq 2$, et, par conséquent, H ne couperait pas transversalement T, ce qui contredirait le choix de H.

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit de faire remarquer que H permet de définir alors un morphisme $h: Z \to \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}$ tel que h est fini au voisinage de 0 et $h^{-1}(0 \times \mathbb{C})=X$. On conclut ainsi la preuve comme dans [5] Remark (3.2).

6. Le type topologique profond

Dans cette section nous nous proposons d'introduire les types topologiques des sections planes génériques d'un germe de sous-ensemble analytique et de démontrer leur invariance analytique.

(6.1) **Lemme.** *Soit $(X, 0)$ un germe de sous-ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^r$, de dimension $m>0$, alors pour tout $i=r-m+1, \ldots, r$, il existe un ouvert de Zariski dense $V^{(i)}$ de la grassmanienne $\mathbb{G}(i-1, r-1)$ des i-plans de $\mathbb{C}^r$ passant par 0, tel que si H et $H' \in V^{(i)}$, alors $(X \cap H, 0)$ et $(X \cap H', 0)$ ont le même type topologique.*

Démonstration. Soit X un représentant du germe et considérons dans l'espace analytique $X \times \mathbb{G}(i-1, r-1)$ le sous-espace $\Gamma=\{(x, H);\, x \in H\}$, de toute évidence Γ contient le sous-espace $0 \times \mathbb{G}(i-1, r-1)$ et par conséquent on peut prendre une stratification de Whitney de Γ subordonnée à $0 \times \mathbb{G}(i-1, r-1)$. Soit $V^{(i)}$ la strate de plus grande dimension contenue dans $0 \times \mathbb{G}(i-1, r-1)$, alors d'après le premier lemme d'isotopie de Thom ([17], Corollaire 2.1.2, [12], Proposition 1.1.1) on aura $(X \cap H, 0) \cong (X \cap H', 0)$ si H et H' sont dans $V^{(i)}$.

(6.2) *Définition.* Soit $(X, 0)$ un germe de sous-ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^r$ de dimension $m > 0$, on appellera type topologique d'une section i-plane générique de $(X, 0)$, $i = r - m + 1, \ldots, r$, le type topologique de $(X \cap H, 0)$, oú $H \in V^{(i)}$, et on le notera $(X, 0)^{(r-i)}$.

On appellera type topologique profond de $(X, 0)$ la classe définie, à un isomorphisme près, dans la catégorie puissance m-iéme de la catégorie des germes d'espaces topologiques par

$$((X, 0)^{(0)}, (X, 0)^{(1)}, \ldots, (X, 0)^{(m-1)}),$$

et on le notera $(X, 0)^*$.

(6.3) *Remarque.* Soit S_ε la sphère réelle de dimension $(2r-1)$ et de rayon ε dans $\mathbb{C}^r$ et soit K_ε l'intersection $X \cap S_\varepsilon$. Il est bien connu que si ε_0 est suffisamment petit, K_ε est homéomorphe a $K_{\varepsilon'}$ si $\varepsilon, \varepsilon' < \varepsilon_0$, et que X est homéomorphe au voisinage de 0 au cône sur K_ε. Cela veut dire que donner $(X, 0)^*$ équivaut à donner une suite de variétés réelles compactes $(K_0, K_1, \ldots, K_{m-1})$. Un cas qui présente un intérêt particulier est celui dans lequel le germe $(X, 0)$ est à singularité isolée, puisque, alors, les germes $(X \cap H, 0)$ sont aussi à singularité isolée et par conséquent les variétés K_i sont des variétés différentiables.

(6.4) **Théorème.** *Soit Z un sous-ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$ qui contient un ouvert Y de $0 \times \mathbb{C}^s$ et qui admet une stratification de Whitney pour laquelle Y est une strate. Soit $\pi\colon Z \to 0 \times \mathbb{C}^s$ la restriction de la projection $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s \to 0 \times \mathbb{C}^s$, alors le type topologique profond des fibres $\pi^{-1}(y)$, $y \in Y$, est constant.*

Démonstration. Nous noterons $X_y = \pi^{-1}(y)$ et supposerons que $\dim X_y = m$, pour $y \in Y$.

On prend, pour le moment, $s = 1$.

Soit $r - m \leqq i \leqq r$, et (y_n) une suite de points de Y tendant vers $0 \in Y$.

Il existe un ouvert dense V_0 de $(i+1)$-plans passant par Y tel que $(X_0 \cap H, 0) = (X_0, 0)^{(r-i)}$, pour $H \in V_0$.

Pour tout $n \in N$, il existe un ouvert dense V_n de $(i+1)$-plans passant par Y tel que $(X_{y_n} \cap H, y_n) = (X_{y_n}, y_n)^{(r-i)}$, pour $H \in V_n$.

D'après le théorème (4.19) il existe un ouvert dense $U^{(i)}$ de $(i+1)$-plans passant par Y, tel que pour tout $H \in U^{(i)}$, il existe un voisinage ouvert W_H de 0 dans lequel Y est une strate d'une stratification de Whitney de $Z \cap H$. Ainsi, pour $H \in U^{(i)}$, on déduit du premier lemme d'isotopie de Thom que $(X_y \cap H, y)$ est homéomorphe à $(X_0 \cap H, 0)$ pour tout $y \in W_H$.

Prenons alors un $(i+1)$-plan

$$H \in U^{(i)} \cap V_0 \cap (\bigcap_n V_n)$$

(ce dernier ensemble est dense) et un point $y_n \in W_H$, nous obtenons

$$(X_{y_n}, y_n)^{(r-i)} = (X_{y_n} \cap H, y_n) = (X_0 \cap H, 0) = (X_0, 0)^{(r-i)}.$$

Ainsi pour toute suite (y_n) de points de Y tendant vers 0, $(X_{y_n}, y_n)^{(r-i)}$ est constant et égal à $(X_0, 0)^{(r-i)}$ dès que n est suffisamment grand. Ceci implique que le type topologique profond est constant au voisinage de 0, et par conséquent constant sur Y.

On peut maintenant passer au cas s arbitraire.

D'après ce qu'on vient de prouver il suffira de montrer que pour tout point $y \in Y$ dans un voisinage convexe de 0, la restriction de la stratification de Z a l'image inverse par π de la droite ℓ qui unit y à 0, est une stratification de Whitney de cette image inverse dans un voisinage de ℓ, qui a ℓ comme une strate. Mais ceci est une conséquence du fait que la restriction de π aux strates de Z est submersive au voisinage de Y.

(6.5) **Corollaire.** *Soit $(X,0)$ un germe de sous-ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^r$, alors le type topologique profond de $(X,0)$ est un invariant analytique du germe.*

Démonstration. Supposons qu'au voisinage de 0

$$X = \{x \in \mathbb{C}^r; f_\lambda(x) = 0,\ \lambda = 1, \ldots, p\}.$$

Si $(X', 0)$ est un germe analytiquement équivalent à $(X, 0)$ on peut construire une déformation

$$\pi\colon Z \to \mathbb{C}$$

avec

$$Z = \{(x, t) \in \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}; f_\lambda(\gamma(z, t)) = 0,\ \lambda = 1, \ldots, p\}$$
$$\pi(x, t) = t, \qquad \text{pour tout } (x, t) \in Z,$$

telle que $(X, 0)$ et $(X', 0)$ soient isomorphes à $(\pi^{-1}(0), (0, 0))$ et $(\pi^{-1}(1), (0, 1))$, respectivement. Il suffit pour cela de prendre comme $\gamma(z, t)$ une déformation de l'identité de $\mathbb{C}^r$ par isomorphismes analytiques telle que $\gamma(z, 1)$ réalise l'isomorphisme de $(X', 0)$ et $(X, 0)$.

Puisque Z est analytiquement le produit $X \times \mathbb{C}$, on peut stratifier Z de manière que $0 \times \mathbb{C}$ soit une strate et que la stratification soit de Whitney. On conclut ainsi en utilisant le théorème (6.4).

(6.6) **Corollaire.** *Soit Z un espace analytique complexe réduit, Y un sous-espace de Z qui est une strate d'une stratification de Whitney de Z et soit $\pi\colon Z \to Y$ une rétraction de Z sur Y. Alors le type topologique profond des fibres $(\pi^{-1}(y), y)$, $y \in Y$, est constant.*

Démonstration. Puisque l'assertion est locale et le type topologique profond est un invariant analytique, on peut supposer que Z est un sous-ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$ et que π est la projection sur $0 \times \mathbb{C}^s$, mais dans ce cas nous nous ramenons au théorème (6.4).

7. Les conditions de Whitney impliquent la constance du type topologique profond

On sait d'après Thom et Mather que si on a un espace différentiablement stratifié $Z = \bigcup_\alpha X_\alpha$ qui satisfait les conditions de Whitney, alors le type topologique de Z est constant le long de chaque strate; nous montrerons dans (7.3) que si on considère une stratification analytique complexe qui satisfait les conditions de Whitney, alors tout le type topologique profond de Z est constant le long de chaque strate.

(7.1) **Lemme.** *Soit Z un sous-ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^q$ et soit $Z = \bigcup_\alpha X_\alpha$ une stratification de Whitney de Z. Si r_1 et r_2 sont deux rétractions locales de Z sur X_α, au voisinage de $z_0 \in X_\alpha$, alors $(r_1^{-1}(z_0), z_0)$ et $(r_2^{-1}(z_0), z_0)$ ont le même type topologique profond.*

Démonstration. Supposons que $\mathbb{C}^q = \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$, que X_α est un ouvert de $0 \times \mathbb{C}^s$ et que r_1 est la restriction de la projection $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s \to 0 \times \mathbb{C}^s$.

Si au voisinage de $z_0 = (0, y)$, $Z = \{(x, y) \in \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s;\ f_\lambda(x, y) = 0,\ \lambda = 1, \ldots, p\}$ on considère l'ensemble analytique

$$\tilde{Z} = \{(x, y, t) \in \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{C};\ f_\lambda(\gamma(x, y, t)) = 0,\ \lambda = 1, \ldots, p\}$$

où $\gamma(x, y, t)$ est une déformation de l'identité dans $\mathbb{C}^q$ par isomorphismes analytiques telle que

$$\gamma(x, y, 1) = (x, \rho(x, y)), \qquad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{C}^q$$

où ρ est tel que $r_2(x, \rho(x, y)) = y$, dans un voisinage de z_0. Puisque $\tilde{Z}$ est analytiquement le produit $Z \times \mathbb{C}$, on peut stratifier $\tilde{Z}$ de manière que $X_\alpha \times \mathbb{C}$ soit une strate et que la stratification soit de Whitney. Si $\pi\colon Z \to \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}$ est la restriction de la projection $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}$ on aura, d'après le théorème (6.4), que $(\pi^{-1}(y_0, 0), (0, y_0, 0))$ et $(\pi^{-1}(y_0, 1), (0, y_0, 1))$ ont le même type topologique profond, mais $(\pi^{-1}(y_0, 0), (0, y_0, 0))$ est isomorphe à $(r_1^{-1}(y_0), (0, y_0))$ et $(\pi^{-1}(y_0, 1), (0, y_0, 1))$ est isomorphe à $(r_2^{-1}(y_0), (0, y_0))$, ce qui finit la démonstration.

D'après (6.6) et (7.1) nous pouvons donner la definition suivante:

(7.2) *Définition.* Soit Z un espace analytique complexe réduit et soit $Z = \bigcup_\alpha X_\alpha$ une stratification de Whitney de Z. Nous appellerons type topologique profond de la fibre locale de Z sur la strate X_α, que nous noterons $(F_\alpha, 0)^*$, le type topologique profond $(r^{-1}(y), y)^*$, où $y \in X_\alpha$ et r est une rétraction de Z sur X_α dans un voisinage de y, r et y étant arbitraires.

On a alors le résultat suivant:

(7.3) **Théorème.** *Soit Z un espace analytique complexe réduit et soit $Z = \bigcup_\alpha X_\alpha$ une stratification de Whitney de Z. Si X_α est une strate de cette stratification de dimension s et telle que la dimension de Z aux points de X_α est $s+m$, alors le type topologique profond de Z aux points de X_α est donné par*

$$((F_\alpha \times \mathbb{C}^s, 0), (F_\alpha \times \mathbb{C}^{s-1}, 0), \ldots, (F_\alpha \times \mathbb{C}, 0), (F_\alpha, 0), (F_\alpha, 0)^{(1)}, \ldots, (F_\alpha, 0)^{(m-1)}).$$

Ainsi, le type topologique profond de Z est constant le long de chaque strate.

Démonstration. Soit $y \in X_\alpha$, puisque le type topologique profond est un invariant analytique on peut supposer qu'on a un plongement de Z au voisinage de y dans $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$ tel que X_α est un ouvert de $0 \times \mathbb{C}^s$ et que $y=(0,0)$.

Prenons maintenant un i-plan générique H, $r-m<i<r+s$, de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$ qui contient l'origine, et tel que $(Z \cap H, 0)$ donne le type topologique d'une section i-plane générique de $(Z, 0)$, i.e. $(Z, 0)^{(r+s-i)}$.

Si $i>r$, H coupe transversalement $0 \times \mathbb{C}^s$, c'est-à-dire qu'on aura comme intersection un espace linéaire de dimension $i-r$. Dans ce cas, on voit immédiatement que $\bigcup_\alpha (X_\alpha \cap H)$ est une stratification de $Z \cap H$ au voisinage de l'origine, qui admet comme strate $X_\alpha \cap H$, donc par le lemme d'isotopie de Thom le type topologique de $(Z \cap H, 0)$ est celui de $(F_\alpha \times (X_\alpha \cap H), 0)$, qui est aussi celui de $(F_\alpha \times \mathbb{C}^{i-r}, 0)$.

Si $i \leqq r$, H continue à couper génériquement $0 \times \mathbb{C}^s$, mais dans ce cas ceci signifie que l'intersection doit être uniquement l'origine. On prend un r-espace E qui contient H et qui est complémentaire de $0 \times \mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$, alors $Z \cap E$ n'est autre que F_α et $Z \cap H$ est $F_\alpha \cap H$. Comme H est générique entre les i-plans de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$ qui passent par 0, il sera aussi générique entre les i-plans de E qui passent par 0, et, par conséquent, $(F_\alpha \cap H, 0)$ sera $(F_\alpha, 0)^{(r-i)}$.

8. Les conditions de Whitney impliquent μ constant

Soit $(X,0)$ un germe d'intersection complète à singularité isolée et de dimension m, défini dans un voisinage U de $0 \in \mathbb{C}^r$ par les fonctions $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{O}_r$ et notons f: $\mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^p$ l'application $f=(f_1, \ldots, f_p)$. Si $\varepsilon>0$ est suffisamment petit et $y \in \mathbb{C}^p$, $0<|y| \ll \varepsilon$, est une valeur régulière de f, on sait d'après Milnor et Hamm ([13, 4]) que $f^{-1}(y) \cap B_\varepsilon$ a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères m-dimensionelles. On démontre que le nombre de sphères de ce bouquet est une invariante analytique du germe $(X, 0)$ et on l'appelle nombre de Milnor de $(X, 0)$, $\mu(X, 0)$.

(8.1) **Théorème.** *Soit Z un espace analytique, et soit ϕ: $Z \to Y$ une déformation d'un germe d'intersection complète à singularité isolée $(X, 0)$, de base Y lisse et connexe, munie d'une section σ: $Y \to Z$ telle que $Z-\sigma(Y)$ est lisse sur Y. Si le couple $(Z-\sigma(Y), \sigma(Y))$ vérifie les conditions de Whitney alors $\mu((\phi^{-1}(y), \sigma(y))$ est constant.*

Démonstration. En utilisant la K-détermination de Mather ([11], Theorems (3.5) et (9.2)) on peut supposer que

$$X=\{z \in \mathbb{C}^r; f_1(z)=\ldots=f_p(z)=0\}$$

où les f_i sont des polynômes en $z \in \mathbb{C}^r$, $i=1, \ldots, p$. De plus, d'après le théorème de transversalité paramétrique ([8], Theorem 3.2.7) nous pouvons également supposer que les f_i sont tels que si on les homogénéise en ajoutant une nouvelle variable, à un degré d assez haut ($>\tau+1$, voir plus bas), la variété V_0 qu'ils definissent en $\mathbb{P}_r$ est une intersection complète dont la seule singularité est $[1,0, \ldots, 0]$.

Soit maintenant $\pi\colon T\to S$ la déformation semiuniverselle de $(X,0)$ ([18], Theorem 8.1; [9], Theorem), on sait que si $\{P_j(z), 1\leqq j\leqq\tau\}$ est une base de $T^1(X)$ (qui peut d'ailleurs être choisie polynomiale et de degré $<\tau$, où $\tau=\dim T^1(X)$), alors T admet comme équations en $\mathbb{C}^r\times\mathbb{C}^\tau$:

$$f_i(z)+\sum_{j=1}^{\tau} s_j P_j^{(i)}(z)=0, \qquad 1\leqq i\leqq p,$$

où $P_j^{(i)}$ est la composante i-ième de P_j. Comme S on peut prendre l'espace $\mathbb{C}^\tau$ et comme π la restriction à T de la projection $\mathbb{C}^r\times\mathbb{C}^\tau\to\mathbb{C}^\tau$.

D'après la versalité de π, il existera un morphisme $g\colon Y\to S$ tel que la déformation $\phi\colon Z\to Y$ s'obtient par changement de base à partir de π, mais cela signifie que Z admet comme équations en $\mathbb{C}^r\times Y$:

$$G_i(z,y)=f_i(z)+\sum g_j(y)\,P_j^{(i)}(z)=0, \qquad 1\leqq i\leqq p,$$

où les $g_j(y)$ sont les composantes de g. En définitive, on voit que les $G_i(z,y)$ sont des polynômes en z qui ont pour coefficients des fonctions analytiques de y.

Si maintenant nous homogénéisons les $G_i(z,y)$ en relation avec les z au degré d antérieurement choisi, nous obtenons, en rétrécissant Y si nécessaire, une famille $V\to Y$ d'intersections complètes V_y de degrés égaux en $\mathbb{P}_r$, sans autre singularité que $[1,\sigma(y)]$. C'est-à-dire que nous obtenons une application propre $V\to Y$, munie d'une section $\sigma\colon Y\to V$ telle que $V-\sigma(Y)$ est lisse sur Y et le couple $(V-\sigma(Y), \sigma(Y))$ vérifie les conditions de Whitney. Ainsi, d'après le premier lemme d'isotopie de Thom, on établit que V_y est homéomorphe à V_0, pour n'importe quel $y\in Y$, donc que $\chi(V_y)=\chi(V_0)$. Il suffira de voir que

$$\chi(V_y)=\chi(\underline{d};r-p)+(-1)^{r-p+1}\mu(V_y,\sigma(y))$$

pour tout $y\in Y$, où $\chi(\underline{d};r-p)$ est indépendant de y pour conclure que $\mu(V_y,\sigma(y))$ est constant.

Pour obtenir $\chi(V_y)$ considérons les équations de V_y au voisinage de $\sigma(y)$ dans $\mathbb{C}^r$

$$G_i(z,y)=f_i(z)+\sum g_j(y)\,P_j^{(i)}(z)=0, \qquad 1\leqq i\leqq p,$$

(notons que maintenant y est constant) et soient

$$G_i(z,y)=t_i, \qquad 1\leqq i\leqq p,$$

les équations de la fibre de Milnor de X_y. Si on prend $t=(t_l,\dots,t_p)$ suffisamment petit, la variété projective $V_{y,t}$ que l'on obtient en homogénéisant les équations antérieures au degré d sera une variété lisse qui en dehors d'une petite boule B_ε dans $\mathbb{C}^r$ autour de $\sigma(y)$ sera difféomorphe à V_y.

Comme les variétés $V_y\cap S_\varepsilon$ et $V_{y,t}\cap S_\varepsilon$ sont des variétés différentiables orientables, compactes et de dimension impaire, on a

$$\chi(V_y\cap S_\varepsilon)=\chi(V_{y,t}\cap S_\varepsilon)=0$$

et ainsi les expressions

$$\chi(V_y)=\chi(V_y-V_y\cap B_\varepsilon)+\chi(V_y\cap B_\varepsilon)-\chi(V_y\cap S_\varepsilon)$$
$$\chi(V_{y,t})=\chi(V_{y,t}-V_{y,t}\cap B_\varepsilon)+\chi(V_{y,t}\cap B_\varepsilon)-\chi(V_{y,t}\cap S_\varepsilon)$$

donnent

$$\chi(V_y)=\chi(V_{y,t})+\chi(V_y\cap B_\varepsilon)-\chi(V_{y,t}\cap B_\varepsilon).$$

Mais d'après le lemme de structure cônique

$$\chi(V_y\cap B_\varepsilon)=1$$

et comme

$$\chi(V_{y,t}\cap B_\varepsilon)=1+(-1)^{r-p}\mu(V_y,\sigma(y))$$

on a

$$\chi(V_y)=\chi(V_{y,t})+(-1)^{r-p+1}\mu(V_y,\sigma(y)).$$

On note pour finir que $V_{y,t}$ est une intersection complète lisse dans $\mathbb{P}_r$ de degrés $(d,d,\ldots,d)$ pour tout $y\in Y$, et donc que $\chi(V_{y,t})$ est indépendant de y.

9. Présentation topologique de la suite μ^*

On introduit dans de paragraphe, en s'inspirant d'une idée de B. Tessier ([14], I. §1), une suite de nombres de Milnor qui correspond aux nombres de Milnor des sections i-planes génériques du germe. M. Giusti et J.P. Henry donnent une autre présentation, algébrique cette fois, de la même suite dans [3].

(9.1) **Lemme.** *Soit* $(X,0)\subset(\mathbb{C}^r,0)$ *un germe d'intersection complète à singularité isolée et de dimension m. Pour tout i,* $r-m<i\leqq r$*, il existe un ouvert de Zariski dense* $V^{(i)}$ *de la grassmanienne* $\mathbb{G}(i-1,r-1)$ *des i-plans de* $\mathbb{C}^r$ *passant par* 0, *tel que*

a) *si* $H\in V^{(i)}$, $(X\cap H,0)$ *est un germe d'intersection complète à singularité isolée;*

b) *si H et* $H'\in V^{(i)}$, $\mu(X\cap H,0)=\mu(X\cap H',0)$.

Démonstration. L'existence d'un ouvert dense $V_a^{(i)}$ pour lequel a) est vrai est bien connu ([14], Lemme 1.1). Il nous reste à prouver qu'il existe un autre ouvert de Zariski dense $V_b^{(i)}$ pour lequel b) est vrai.

On considère $\Gamma=\{(z,H)\in X\times V_a^{(i)};\ z\in H\}$ et le morphisme $\pi\colon\Gamma\to V_a^{(i)}$, restriction de la projection correspondante. En appliquant le théorème de Whitney ([20], Theorem 19.2), on déduit l'existence d'un sous-ensemble analytique fermé propre A de $V_a^{(i)}$ tel que si $\Gamma_0=0\times V_a^{(i)}$ le couple $(\Gamma-\pi^{-1}(A),\Gamma_0-\pi^{-1}(A))$ vérifie les conditions de Whitney. Il suffit alors d'appliquer le théorème (8.1) à la déformation $\pi\colon\Gamma-\pi^{-1}(A)\to V_a^{(i)}-A$ pour en déduire le lemme.

(9.2) *Définition.* Soit $(X,0)\subset(\mathbb{C}^r,0)$ un germe d'intersection complète à singularité isolée et de dimension m. On appellera nombre de Milnor d'une section i-plane générique de $(X,0)$ $r-m<i\leqq r$, le nombre de Milnor de $(X\cap H,0)$, où $H\in V^{(i)}$, et on le notera $\mu^{(r-i)}(X,0)$. On notera aussi

$$\mu^*(X,0)=(\mu^{(0)}(X,0),\ \mu^{(1)}(X,0),\ \ldots,\ \mu^{(m-1)}(X,0)).$$

10. Les conditions de Whitney impliquent μ^* constant

Le résultat suivant généralise au cas des intersections complètes un résultat antérieur de Briançon-Speder établi pour les hypersurfaces ([1], Théorème 2).

(10.1) **Théorème.** *Soit Z un sous-ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$ qui contient un ouvert Y de $0 \times \mathbb{C}^s$ et tel que le couple $(Z-Y, Y)$ vérifie les conditions de Whitney. Soit $\pi\colon Z \to Y$ la restriction de la projection $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s \to 0 \times \mathbb{C}^s$, et supposons que $Z-Y$ soit lisse sur Y et que π soit une déformation du germe d'intersection complète à singularité isolée $(\pi^{-1}(0), 0)$, alors $\mu^*(\pi^{-1}(y), y)$ est constant.*

Démonstration. On laisse la preuve au lecteur, puisque, une fois qu'on a le théorème (8.1), elle diffère à peine de celle de (6.4).

(10.2) **Corollaire.** *Soit $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^r, 0)$ un germe d'intersection complète à singularité isolée, alors la suite $\mu^*(X, 0)$ est un invariant analytique du germe.*

Démonstration. Supposons qu'au voisinage de 0

$$X = \{x \in \mathbb{C}^r ; f_\lambda(x) = 0, \lambda = 1, \ldots, p\}$$

si $(X', 0)$ est un germe analytiquement équivalent à $(X, 0)$ on peut construire une déformation

$$\pi\colon Z \to \mathbb{C}$$

avec

$$Z = \{(x, t) \in \mathbb{C}^r \times \mathbb{C} ; f_\lambda(\gamma(x, t)) = 0, \lambda = 1, \ldots, p\}$$

$$\pi(x, t) = t, \qquad \text{pour tout } (x, t) \in Z,$$

telle que $(X, 0)$ et $(X', 0)$ soient isomorphes à $(\pi^{-1}(0), (0, 0))$ et à $(\pi^{-1}(1), (0, 1))$, respectivement, et telle qu'on puisse stratifier Z de manière que $0 \times \mathbb{C}$ soit une strate et que la stratification soit de Whitney (voir la démonstration du corollaire (6.5)). D'après le théorème (10.1) on conclut maintenant que

$$\mu^*(X, 0) = \mu^*(X', 0).$$

(10.3) **Corollaire.** *Soit Z un espace analytique, soit $\phi\colon Z \to Y$ une déformation d'un germe d'intersection complète à singularité isolée $(X, 0)$, de base Y lisse et connexe, munie d'une section $\sigma\colon Y \to Z$ telle que $Z - \sigma(Y)$ est lisse sur Y. Alors si le couple $(Z - \sigma(Y), \sigma(Y))$ vérifie les conditions de Whitney, $\mu^*(\phi^{-1}(y), \sigma(y))$ est constant.*

Démonstration. Puisque l'assertion est locale et la suite μ^* est un invariant analytique d'après (10.2), on peut supposer que Z est un sous-ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$, que Y est on ouvert de $0 \times \mathbb{C}^s$ et que $\phi\colon Z \to Y$ est la restriction de la projection sur le deuxième facteur. Ainsi d'après (10.1) on conclut que $\mu^*(\phi^{-1}(y), \sigma(y))$ est constant.

11. Sur le cas réel

Bien que l'intention première de ce travail était d'étudier le comportement des conditions de Whitney par rapport aux sections planes dans le cas complexe, à la suite d'une remarque de D. Trotman sur la condition (W) de Verdier, je me suis aperçu que certains des résultats présentés dans les paragraphes antérieurs sont aussi valables dans le cas réel et qu'ils ont un intérêt propre.

Concrètement, pour le paragraphe 4 on n'utilise des précédents que le corollaire (3.2), et on peut obtenir ce corollaire dans le cas réel avec la même preuve qu'ici, en utilisant le théorème (2.2) de [19], au lieu de nos résultats (2.3) et (3.1). Ainsi, on peut démontrer les résultats (4.2), (4.6), (4.18) et (4.19) avec des démonstrations analogues à celles du § 4. De fait le seul point qu'il faille spécifier est que dans le lemme (4.6) on doit prendre les nombres k et l *impairs.* Nous énonçons à la suite ce qu'on obtient au lieu de (4.19).

(11.1) **Théorème.** *Soit Z un sous-ensemble analytique réel d'un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$; de dimension $m+1$, et qui contient un ouvert Y du sous-espace linéaire $0 \times \mathbb{R}$, et soit $Z = \bigcup_\alpha X_\alpha$ une stratification de Whitney telle que la strate qui contient l'origine 0 est Y. Pour tout i, $i = r-m+1, \ldots, r$, il existe un ouvert dense $U^{(i)}$ de la grassmanienne des $(i+1)$-plans de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ qui contiennent Y, tel que pour tout $H \in U^{(i)}$*

$$Z \cap H = \bigcup_{\alpha \in A} (X_\alpha \cap H)$$

(où A est tel que si $\alpha, \beta \in A$ et $\alpha \neq \beta$ alors $X_\alpha \cap H \neq X_\beta \cap H$) est une stratification de Whitney de $Z \cap H$ dans un voisinage W_H de 0 qui dépend de H.

En ce qui concerne les résultats des § 6 et 7, bien qu'on puisse aussi introduire le concept de type topologique profond dans le cas réel, ce type topologique profond, en général, n'est pas constant le long d'une strate dans une stratification de Whitney, et on arrive seulement à montrer un résultat de semicontinuité du type topologique profond.

Nous concluerons avec un exemple qui montre qu'on peut ne pas avoir de type topologique profond constant le long d'une strate dans le cas réel, et qui peut illustrer le résultat de semicontinuité dont nous avons parlé ci-dessus.

On considère dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ le sous-ensemble analytique réel Z défini par

$$t^2(x^2+y^2)+(1-t^2)(x^2+y^2)^2=(1-t^2)z^2+t^2z^4$$

on vérifie alors que, si $Y = 0 \times \mathbb{R}$ est l'axe des t, $X = Z - Y$ est la partie régulière de Z et que le couple (X, Y) vérifie les conditions de Whitney. Mais pour $t=0$, X_0 est

$$(x^2+y^2)^2=z^2,$$

et n'a comme section générique qu'un paire de droites topologiques; pour $t=1$, X_1 est

$$x^2+y^2=z^4,$$

et n'a comme section générique qu'un point; et c'est seulement la fibre générique, par exemple, $X_{\sqrt{1/2}}$

$$x^2+y^2=z^2,$$

qui a comme section générique soit une paire de droites, soit un point.

Bibliographie

1. Briançon, J., Speder, J.P.: Les conditions de Whitney impliquent «μ^* constant». Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **26**, 153–163 (1976)
2. Gerstenhaber, M.: On the deformation of rings and algebras II. Ann. of Math., **84**, 1–19 (1966)
3. Giusti, M., Henry, J.P.G.: Minorations de nombres de Milnor. Tirage Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, No M378.0978 (1978)
4. Hamm, H.A.: Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume. Math. Ann. **191**, 235–252 (1971)
5. Hironaka, H.: Normal cones in analytic Whitney stratifications. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. n° **36**, 127–138 (1969)
6. Hironaka, H.: Introduction to the theory of infinitely near singular points, Memorias de matemática del instituto Jorge Juan, Madrid, N° 28 (1974)
7. Hironaka, H.: Stratification and flatness. Dans: Real and complex singularities, Nordic Summer School, Oslo 1976, pp. 199–265. Alphen aan den Rijn: Sijthoff & Noordhoff 1977
8. Hirsch, M.W.: Differential Topology. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
9. Kas, A., Schlessinger, M.: On the Versal Deformation of a Complex Space with an Isolated Singularity. Math. Ann. **196**, 23–29 (1972)
10. Kuo, T.C.: The ratio test for analytic Whitney stratifications. Dans: Liverpool Singularities Symposium I, pp. 141–149. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
11. Mather, J.: Stability of C^∞-Mappings III, Finitely Determined Map-Germs, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. n° **35**, 127–156 (1968)
12. Mather, J.: Notes on topological stability, Harvard University, 1970
13. Milnor, J.: Singular Points of Complex Hypersurfaces, Ann. of Math. Studies, vol. 61, Princeton U.P., 1968
14. Teissier, B.: Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney, Astérisque n° **7–8**, 285–362, (1973)
15. Teissier, B.: Appendice au cours de O. Zariski: Le problème des modules pour les branches planes. Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique 1973
16. Teissier, B.: Introduction to equisingularity probelms. Proc. Symposia in Pure Math. Amer. Math. Soc. **29**, 581–632 (1975)
17. Thom, R.: Ensembles et morphismes stratifiés, Bull. Amer. Math. Soc. **75**, 240–284 (1969)
18. Tjourina, G.: Locally semiuniversal flat deformations of isolated singularities of complex spaces. Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. **33**, 967–999 (1970)
19. Verdier, J.L.: Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard. Invent. math. **36**, 295–312 (1976)
20. Whitney, H.: Tangents to an analytique variety. Ann. of Math. **81**, 496–543 (1965)
21. Zariski, O.: Collected Papers, vol. IV, Equisingularity on Algebraic Varieties, Cambridge-Massachusetts: The MIT Press, 1979

Reçu le 19 mai 1979 / Revisé le 28 avril 1980