Inventiones math. 5, 349–356 (1968)

Une démonstration algébrique d'un théorème de Bott

MICHEL DEMAZURE (Orsay)

Le résultat de Bott dont il est question est la détermination des représentations d'un groupe semi-simple complexe G dans les espaces vectoriels de cohomologie $H^n(G/B, \mathscr{L})$ où B est un groupe de Borel de G et $\mathscr{L}$ un G/B-module localement libre de rang 1 (voir [2]). La démonstration proposée ici est, je le pense, nouvelle; elle offre à mon avis plusieurs avantages: a) elle est très simple, b) elle n'utilise pas le «vanishing theorem» de Kodaira et c) elle donne des isomorphismes explicites, là où les démonstrations classiques se contenent d'identifier des poids dominants. Elle en donne même trop, ce qui semble dans la nature des choses (voir remarque à la fin de l'article).

1. Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de schémas. Nous dirons que f (ou X) est une *forme localement triviale de la droite projective* s'il existe un recouvrement (Y_i) de Y par des sous-schémas ouverts tels que $f^{-1}(Y_i)$ soit Y_i-isomorphe à la droite projective $\boldsymbol{P}^1_{Y_i}$ pour chaque i. Notons $\mathbf{Top}(Y, \boldsymbol{Z})$ le groupe des applications localement constantes de l'espace topologique Y dans $\boldsymbol{Z}$.

Proposition. *Si $f\colon X \to Y$ est une forme localement triviale de la droite projective, il existe un homomorphisme a: $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to \mathbf{Top}(Y, \boldsymbol{Z})$ et un seul, ayant les deux propriétés suivantes:*

(i) *la suite*

$$0 \to H^1(Y, \mathcal{O}_Y^*) \xrightarrow{f^*} H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{a} \mathbf{Top}(Y, \boldsymbol{Z})$$

est exacte,

(ii) *on a $a(\Omega_{X/Y}) = -2$.*

(On note $\Omega_{X/Y}$ le X-module des 1-différentielles de X par rapport à Y; c'est un module inversible dont la classe dans $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ est également notée $\Omega_{X/Y}$.)

En effet, f^* est injectif, car $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X)$; l'unicité de a est claire. L'existence se prouve alors localement sur Y et on peut supposer $X = \boldsymbol{P}^1_Y$, ou plus généralement $X = \boldsymbol{P}(\mathscr{E})$, où $\mathscr{E}$ est un Y-module localement libre de rang 2. Si $\mathscr{L}_0$ est le X-module inversible canonique, et si $\mathscr{L}$

est un X-module inversible quelconque, il existe une partition

$$Y = \coprod_{n \in \mathbf{Z}} Y_n,$$

uniquement déterminée par $\mathscr{L}$, telle que $\mathscr{L}|f^{-1}(Y_n)$ soit isomorphe à un module de la forme $f^*(\mathscr{M}) \otimes \mathscr{L}_0^{\otimes n}$ (*confer* [5] dans le cas où Y est localement noethérien); on pose alors $a(\mathscr{L})(y) = n$ pour $y \in Y_n$. Il est connu que $\Omega_{X/Y}$ est isomorphe à $f^*(\Lambda^2 \mathscr{E}) \otimes \mathscr{L}_0^{\otimes(-2)}$; on a donc $a(\Omega_{X/Y}) = -2$ comme annoncé. L'assertion (i) est immédiate.

L'énoncé précédent signifie que le schéma de Picard relatif $\mathbf{Pic}_{X/Y}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{Z}_Y$, la classe de $\Omega_{X/Y}$ étant (-2).

Remarquons également que si $X = \mathbf{P}(\mathscr{E})$, où $\mathscr{E}$ est un Y-module localement libre de rang 2, et si $\mathscr{L}$ est le X-module inversible canonique, on a $a(\mathscr{L}) = 1$ et $f_*(\mathscr{L})$ s'identifie canoniquement à $\mathscr{E}$ ([6]); réciproquement si $\mathscr{L}$ est un X-module inversible tel que $a(\mathscr{L}) = 1$, $f_*(\mathscr{L})$ est localement libre de rang 2, et l'application rationnelle $X \to \mathbf{P}(f_*(\mathscr{L}))$ définie par $\mathscr{L}$ est un isomorphisme.

2. Proposition. 1) *Soient Y un $\mathbf{Q}$-schéma et $f\colon X \to Y$ une forme localement triviale de la droite projective. Soit $\mathscr{F}$ un X-module inversible. Alors $\mathscr{R}^i f_*(\mathscr{F})$ est un Y-module localement libre, nul pour $i \neq 0, 1$, de rang $\sup(0, a(\mathscr{F})+1)$ pour $i=0$ et $\sup(0, -a(\mathscr{F})-1)$ pour $i=1$. En particulier, si $a(\mathscr{F}) \geqq -1$, $\mathscr{R}^i f_*(\mathscr{F})$ est nul pour $i \neq 0$ et*

$$\mathscr{R}^i f_*(\mathscr{F} \otimes \Omega_{X/Y}^{\otimes(a(\mathscr{F})+1)}) \qquad \text{est nul pour } i \neq 1.$$

2) *On peut définir pour tout $\mathbf{Q}$-schéma X, toute forme localement triviale de la droite projective $f\colon X \to Y$ et tout X-module inversible $\mathscr{F}$ tel que $a(\mathscr{F}) \geqq -1$, un isomorphisme*

$$\varphi(X, Y, \mathscr{F})\colon \mathscr{R}^0 f_*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{R}^1 f_*(\mathscr{F} \otimes \Omega_{X/Y}^{\otimes(a(\mathscr{F})+1)})$$

de façon que: si

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

est un diagramme cartésien de schémas, où Y et f (donc aussi Y' et f') satisfont aux conditions précédentes, et si $\mathscr{F}$ est un X-module inversible tel que $a(\mathscr{F}) \geqq -1$, le diagramme suivant soit commutatif ($\mathscr{F}'$ désigne $g'^*(\mathscr{F})$, et on pose $n = a(\mathscr{F}) = a(\mathscr{F}')$)

$$\begin{tikzcd} g^*(\mathscr{R}^0 f_*(\mathscr{F})) \arrow[r, "g^*(\varphi(X,Y,\mathscr{F}))"] \arrow[d, "\text{can.}"'] & g^*(\mathscr{R}^1 f_*(\mathscr{F} \otimes \Omega_{X/Y}^{\otimes(n+1)})) \arrow[d, "\text{can.}"] \\ \mathscr{R}^0 f'_*(\mathscr{F}') \arrow[r, "\varphi(X',Y',\mathscr{F}')"] & \mathscr{R}^1 f'_*(\mathscr{F}' \otimes \Omega_{X'/Y'}^{\otimes(n+1)}). \end{tikzcd}$$

Naturellement, si $n \in \mathbf{Top}(Y, \mathbf{Z})$, on note $\Omega_{X/Y}^{\otimes n}$ le X-module qui coïncide avec $\Omega_{X/Y}^{\otimes m}$ au-dessus de l'ouvert de Y sur lequel n est constant de valeur m. Les assertions à démontrer sont locales sur Y, celles de 1) de manière évidente, celle de 2) parce que l'assertion de fonctorialité qui y est contenue implique qu'il suffit de définir $\varphi(f^{-1}(Z), Z, \mathscr{F}|Z)$ pour les ouverts Z d'un recouvrement de Y, et de vérifier la fonctorialité pour les changements de base $Z' \to Z$. On peut donc supposer que $a(\mathscr{F})$ est constant de valeur n, et que X peut s'écrire $\boldsymbol{P}(\mathscr{E})$, c'est-à-dire qu'il existe un X-module inversible $\mathscr{L}$ tel que $a(\mathscr{L})=1$. Il existe alors un Y-module inversible $\mathscr{G}$ et un isomorphisme

$$u\colon\ \mathscr{F} \xrightarrow{\sim} f^*(\mathscr{G}) \otimes \mathscr{L}^{\otimes n};$$

comme $\mathscr{G}$ est localement libre, u définit canoniquement un isomorphisme

$$v\colon\ \mathscr{R}^i f_*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{G} \otimes \mathscr{R}^i f_*(\mathscr{L}^{\otimes n});$$

les assertions de 1) sont alors des conséquences immédiates de [6].

Démontrons 2). Posons $n = a(\mathscr{F}) \geqq -1$ et $\Omega = \Omega_{X/Y}$. D'après le théorème de dualité de Serre ([6]), le cup-produit

$$\mathscr{R}^0 f_*(\mathscr{F}^{\otimes(-1)} \otimes \Omega^{\otimes(-n)}) \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{R}^1 f_*(\mathscr{F} \otimes \Omega^{\otimes(n+1)}) \to \mathscr{R}^1 f_*(\Omega),$$

combiné avec l'isomorphisme de $\mathscr{R}^1 f_*(\Omega)$ sur $\mathscr{O}_Y$ donné par la théorie des résidus, induit une dualité entre

$$\mathscr{R}^1 f_*(\mathscr{F} \otimes \Omega^{\otimes(n+1)}) \quad \text{et} \quad f_*(\mathscr{F}^{\otimes(-1)} \otimes \Omega^{\otimes(-n)}).$$

Pour démontrer 2), il suffit donc de définir une dualité

$$f_*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}_Y} f_*(\mathscr{F}^{\otimes(-1)} \otimes \Omega^{\otimes(-n)}) \to \mathscr{O}_Y,$$

«invariante par changement de base» (au sens évident du terme, *confer* énoncé de 2).

Supposons d'abord $a(\mathscr{F})=1$, et notons $\mathscr{F}=\mathscr{L}$ et $\mathscr{E}=f_*(\mathscr{L})$ pour retomber dans les notations antérieures; il s'agit de définir un homomorphisme

$$a_{\mathscr{L}}\colon\ f_*(\mathscr{L}) \otimes_{\mathscr{O}_Y} f_*(\mathscr{L}^{\otimes(-1)} \otimes \Omega^{\otimes(-1)}) \to \mathscr{O}_Y.$$

Pour ce faire, utilisons l'isomorphisme $\Omega \otimes \mathscr{L}^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} f^*(\Lambda^2 \mathscr{E})$, dont nous sommes déjà servi au n^0 1 (indiquons en passant qu'il correspond à la formule classique $x_1^2\, d(x_2/x_1) = x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1$); $\mathscr{L}^{\otimes(-1)} \otimes \Omega^{\otimes(-1)}$ s'identifie donc à $\mathscr{L} \otimes f^*(\Lambda^2 \mathscr{E})^{\otimes(-1)}$; son image directe s'identifie alors à $\mathscr{E} \otimes (\Lambda^2 \mathscr{E})^{\otimes(-1)}$ et l'accouplement $\mathscr{E} \otimes (\mathscr{E} \otimes (\Lambda^2 \mathscr{E})^{\otimes(-1)}) \to \mathscr{O}_Y$ est déduit de l'homomorphisme évident $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \to \Lambda^2 \mathscr{E}$.

Prenons maintenant $\mathscr{F}$ quelconque, et choisissons $\mathscr{L}$ tel que $a(\mathscr{L})=1$. Il existe un isomorphisme $u\colon \mathscr{F} \xrightarrow{\sim} f^*(\mathscr{G}) \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ qui induit des isomorphismes

$$u'\colon \mathscr{F}' \xrightarrow{\sim} f^*(\mathscr{G})^{\otimes(-1)} \otimes \mathscr{L}'^{\otimes n},$$

où

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L}^{\otimes(-1)} \otimes \Omega^{\otimes(-1)}, \qquad \mathscr{F}' = \mathscr{F}^{\otimes(-1)} \otimes \Omega^{\otimes(-n)},$$

$$v\colon f_*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{G} \otimes f_*(\mathscr{L}^{\otimes n}), \qquad v'\colon f_*(\mathscr{F}') \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}^{\otimes(-1)} \otimes f_*(\mathscr{L}'^{\otimes n}).$$

D'après [6], les homomorphismes d'algèbres canoniques

$$\boldsymbol{S} f_*(\mathscr{L}) \to \coprod_{m \in N} f_*(\mathscr{L}^{\otimes m}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{S} f_*(\mathscr{L}') \to \coprod_{m \in N} f_*(\mathscr{L}'^{\otimes m})$$

induisent des isomorphismes

$$w\colon \boldsymbol{S}^n f_*(\mathscr{L}) \xrightarrow{\sim} f_*(\mathscr{L}^{\otimes n}), \qquad w'\colon \boldsymbol{S}^n f_*(\mathscr{L}') \xrightarrow{\sim} f_*(\mathscr{L}'^{\otimes n}).$$

Or l'accouplement $a_{\mathscr{L}}\colon f_*(\mathscr{L}) \otimes f_*(\mathscr{L}') \to \mathscr{O}_Y$ se prolonge en un accouplement $a_{\mathscr{L}}^{(n)}\colon \boldsymbol{S}^n f_*(\mathscr{L}) \otimes \boldsymbol{S}^n f_*(\mathscr{L}') \to \mathscr{O}_Y$ (ne pas oublier que Y est un $\boldsymbol{Q}$-schéma), d'où enfin l'accouplement cherché:

$$a_{\mathscr{L},\mathscr{F}} = a_{\mathscr{L}}^{(n)} \circ (w^{-1} \otimes w'^{-1}) \circ (v \otimes v')\colon f_*(\mathscr{F}) \otimes f_*(\mathscr{F}') \to \mathscr{O}_Y.$$

Il ne reste plus qu'à démontrer que $a_{\mathscr{L},\mathscr{F}}$ est indépendant du choix de $\mathscr{L}$ (il est clair en effet qu'un changement de base $\bar{Y} \to Y$ transformant $\mathscr{L}$ en $\bar{\mathscr{L}}$ et $\mathscr{F}$ en $\bar{\mathscr{F}}$ transforme $a_{\mathscr{L},\mathscr{F}}$ en $a_{\bar{\mathscr{L}},\bar{\mathscr{F}}}$). Soit donc $\mathscr{L}_1$ tel que $a(\mathscr{L}_1) = 1$; montrons d'abord que $a_{\mathscr{L}_1} = a_{\mathscr{L},\mathscr{L}_1}$. Prenant $\mathscr{F} = \mathscr{L}_1$ dans la construction précédente, cela revient à vérifier que, si $\mathscr{L}_1 = f^*(\mathscr{M}) \otimes \mathscr{L}$, la suite d'isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} &f_*(\mathscr{L}_1) \otimes f_*(\mathscr{L}_1^{\otimes(-1)} \otimes \Omega^{\otimes(-1)}) \\ &\qquad \xrightarrow{\sim} (f_*(\mathscr{L}) \otimes \mathscr{M}) \otimes (f_*(\mathscr{L}^{\otimes(-1)} \otimes \Omega^{\otimes(-1)}) \otimes \mathscr{M}^{-1}) \\ &\qquad \xrightarrow{\sim} f_*(\mathscr{L}) \otimes f_*(\mathscr{L}^{\otimes(-1)} \otimes \Omega^{\otimes(-1)}) \end{aligned}$$

transforme $a_{\mathscr{L}}$ en $a_{\mathscr{L}_1}$, ce qui résulte de la définition (non donnée) de l'isomorphisme $\Omega \otimes \mathscr{L}^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} f^*(\Lambda^2 f_*(\mathscr{L}))$.

Cette vérification étant faite (resp. escamotée), montrons que $a_{\mathscr{L},\mathscr{F}} = a_{\mathscr{L}_1,\mathscr{F}}$; il suffit manifestement de le faire lorsque $\mathscr{F} = \mathscr{L}_1^{\otimes n}$, le passage de $\mathscr{F}$ à $\mathscr{F} \otimes f^*(\mathscr{G})$ étant trivial. Or cela résulte du cas $n=1$, et du fait que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \boldsymbol{S}^n f_*(\mathscr{L} \otimes f^*(\mathscr{M})) & \xrightarrow{\sim} & \boldsymbol{S}^n(f_*(\mathscr{L}) \otimes \mathscr{M}) & \xrightarrow{\sim} & \boldsymbol{S}^n f_*(\mathscr{L}) \otimes \mathscr{M}^{\otimes n} & \xrightarrow{\sim} & f_*(\mathscr{L}^{\otimes n}) \otimes \mathscr{M}^{\otimes n} \\ \| & & & & & & \| \\ \boldsymbol{S}^n f_*(\mathscr{L}_1) & \xrightarrow{\sim} & f_*(\mathscr{L}_1^{\otimes n}) & \xrightarrow{\sim} & f_*(\mathscr{L}^{\otimes n} \otimes f^*(\mathscr{M}^{\otimes n})) & \xrightarrow{\sim} & f_*(\mathscr{L}^{\otimes n}) \otimes \mathscr{M}^{\otimes n}, \end{array}$$

car c'est la composante de degré n d'un diagramme d'algèbres dont la composante de degré 1 est commutative. Ceci achève la démonstration.

Remarques. 1) Ce qui précède, ainsi que le n^0 4 suivant, reste valable lorsque $f\colon X \to Y$ est un Y-schéma de Severi-Brauer de rang 1, non nécessairement localement trivial; les démonstrations sont identiques, on raisonne localement pour la topologie plate.

2) Ces assertions restent également valables si on ne suppose plus nécessairement que Y est un $\boldsymbol{Q}$-schéma, mais seulement que tout entier >0 inférieur à une des valeurs de $a(\mathscr{F})$ est inversible sur Y. Cela s'applique en particulier en caractéristique $p \neq 0$, lorsque $a(\mathscr{F}) < p$.

3) L'opération $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}' = \mathscr{F}^{\otimes(-1)} \otimes \Omega_{X/Y}^{\otimes(-n)}$ induit un automorphisme du groupe $H^*(X, \mathcal{O}_X^*)$, qui laisse fixe la classe de $\Omega_{X/Y}$, et dont le carré est l'identité; sa nature profonde, ainsi que celle de la dualité entre $f_*(\mathscr{F})$ et $f_*(\mathscr{F}')$, reste pour moi mystérieuse.

3. Soient X, Y et $\mathscr{F}$ comme dans la partie 1) de la proposition 2. Soit d'autre part G un $\boldsymbol{Q}$-schéma en groupes opérant de manière compatible sur X, Y et $\mathscr{F}$; l'isomorphisme $\varphi(X, Y, \mathscr{F})$ est compatible avec les opérations de G sur les deux membres. En effet, l'opération de G se traduit par un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\pi_X} & X \\ {\scriptstyle \mathrm{Id}_G \times f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ G \times Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \end{array}$$

et par un homomorphisme $\pi_X^*(\mathscr{F}) \to \mathrm{pr}_2^*(\mathscr{F})$ satisfaisant à certaines conditions; appliquant la partie 2) de la proposition au diagramme cartésien précédent, on en déduit sans difficultés l'assertion annoncée.

4. Corollaire. *Soient Y un $\boldsymbol{Q}$-schéma, $f\colon X \to Y$ une forme localement triviale de la droite projective, $\mathscr{F}$ un X-module inversible tel que $a(\mathscr{F}) \geqq -1$, et G un $\boldsymbol{Q}$-schéma en groupes opérant sur X, Y et $\mathscr{F}$ de manière compatible. On a alors pour tout $n \in \boldsymbol{Z}$ un isomorphisme de G-modules:*

$$\varphi^n(X, Y, \mathscr{F})\colon\ H^n(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} H^{n+1}(X, \mathscr{F} \otimes \Omega_{X/Y}^{\otimes(a(\mathscr{F})+1)}).$$

En effet, on a des isomorphismes canoniques de G-modules

$$H^n(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} H^n(Y, \mathscr{R}^0 f_*(\mathscr{F})),$$

$$H^{n+1}(X, \mathscr{F} \otimes \Omega_{X/Y}^{\otimes(a(\mathscr{F})+1)}) \xrightarrow{\sim} H^n(Y, \mathscr{R}^1 f_*(\mathscr{F} \otimes \Omega_{X/Y}^{\otimes(a(\mathscr{F})+1)})).$$

5. Soit G un $\boldsymbol{Q}$-groupe *semi-simple déployé simplement connexe*, B (resp. T) son groupe de Borel (resp. tore maximal) canonique, $X(T)$ le groupe des caractères de T, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X(T)$ les racines simples, $s_1, \ldots, s_n$ les symétries par rapport à ces racines et $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$ les coracines correspondantes; on a donc

$$s_i(\chi) = \chi - \langle \alpha_i^*, \chi \rangle\, \alpha_i$$

pour $\chi \in X(T)$.

Pour chaque $\chi \in X(T)$, considérons le $\mathcal{O}_{G/B}$-module inversible $\mathscr{L}(\chi)$ défini par le fibré vectoriel de rang 1 associé par le caractère χ de B à la fibration $G \to G/B$. On obtient ainsi un homomorphisme

$$\mathscr{L}: X(T) \to H^1(G/B, \mathcal{O}^*_{G/B}),$$

dont on sait ([4]) qu'il est bijectif; si $\mathscr{L}_i = \mathcal{O}_{G/B}(D_i)$, où D_i est le diviseur défini par l'adhérence de la cellule de codimension 1 correspondant à s_i, on a $\mathscr{L}(\chi) = \otimes \mathscr{L}_i^{\otimes \langle \alpha_i^*, \chi \rangle}$, de sorte que $\mathscr{L}(\chi)$ est positif si et seulement si $\chi \in X(T)_+$, où

$$X(T)_+ = \{\chi \in X(T) \mid \langle \alpha_i^*, \chi \rangle \geqq 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, n\}$$

(cf. [4]).

6. Soit P_i le sous-groupe parabolique de G engendré par B et par le centralisateur Z_i de $\operatorname{Ker} \alpha_i$. On sait ([1]) que la fibration $G \to G/P_i$ est localement triviale et que P_i/B est isomorphe à $Z_i/Z_i \cap B \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{Q}}$; il en résulte que la projection canonique f_i: $G/B \to G/P_i$ est une forme localement triviale de la droite projective. Considérons donc l'application a_i: $H^1(G/B, \mathcal{O}^*_{G/B}) \to \boldsymbol{Z}$ introduite dans 1.

Lemme. (i) *On a* $\Omega_{(G/B)/(G/P_i)} \simeq \mathscr{L}(-\alpha_i)$.

(ii) $a_i(\mathscr{L}(\chi)) = \langle \alpha_i^*, \chi \rangle$ *pour* $\chi \in X(T)$.

On a une suite exacte de G/B-modules:

$$0 \to f_i^*(\Omega_{(G/P_i)/\boldsymbol{Q}}) \to \Omega_{(G/B)/\boldsymbol{Q}} \to \Omega_{(G/B)/(G/P_i)} \to 0,$$

et T opère sur les fibres de ces modules au point marqué de G/B. Les poids de T dans la première (resp. la seconde) de ces fibres sont les racines négatives $\neq -\alpha_i$ (resp. les racines négatives). La troisième fibre est donc un T-module simple de poids $-\alpha_i$, d'où (i). Prouvons (ii); si $\chi \in X(T)$ et $\langle \alpha_i^*, \chi \rangle = 0$, χ s'annule sur $T \cap \boldsymbol{D}(Z_i)$, donc se prolonge en un caractère de $\boldsymbol{D}(Z_i) B = P_i$; par construction de $\mathscr{L}(\chi)$, cela entraîne que $\mathscr{L}(\chi)$ provient d'un G/P_i-module, donc que $a_i(\mathscr{L}(\chi)) = 0$. Il existe donc un entier n tel que $a_i(\mathscr{L}(\chi)) = n \cdot \langle \alpha_i^*, \chi \rangle$ pour $\chi \in X(T)$; prenant $\chi = -\alpha_i$, on trouve $-2 = n \langle \alpha_i^*, -\alpha_i \rangle = -2n$, d'où $n = 1$.

Appliquant 4, on en déduit:

Proposition. *Si* $\chi \in X(T)$, *si* $\langle \alpha_i^*, \chi \rangle \geqq -1$, *et si* $n \in \boldsymbol{Z}$, *les* G-*modules* $H^n(G/B, \mathscr{L}(\chi))$ *et* $H^{n+1}(G/B, \mathscr{L}(\chi - (\langle \alpha_i^*, \chi \rangle + 1) \alpha_i))$ *sont isomorphes.*

7. Soit ρ la demi-somme des racines positives; on a $\langle \alpha_i^*, \rho \rangle = 1$ pour $i = 1, \ldots, n$. Soit W le groupe de Weyl de G et, pour $w \in W$, soit $n(w)$ la longueur de w (c'est le plus petit entier n tel que w s'écrive comme produit de n symétries fondamentales).

Théorème. *Soient* $\chi \in X(T)$, $w \in W$ *et* $n \in \boldsymbol{Z}$. *Si* $\chi + \rho \in X(T)_+$, *les* G-*modules* $H^n(G/B, \mathscr{L}(\chi))$ *et* $H^{n+n(w)}(G/B, \mathscr{L}(w(\chi + \rho) - \rho))$ *sont isomorphes.*

Si $w = s_i$, *on a*

$$w(\chi+\rho)-\rho=\chi+\rho-\langle\alpha_i^*,\chi+\rho\rangle\,\alpha_i-\rho=\chi-(\langle\alpha_i^*,\chi\rangle+1)\,\alpha_i,$$

et le théorème résulte de la proposition précédente. Dans le cas général raisonnons par récurrence sur $n(w)$ et écrivons $w=s_i w'$ où $n(w')=n(w)-1$. Si on pose $\chi'=w'(\chi+\rho)-\rho$, il suffit de prouver que $\langle\alpha_i^*,\chi'\rangle\geqq -1$. Mais cela s'écrit $\langle\alpha_i^*, w'(\chi+\rho)\rangle\geqq 0$, ou encore $\langle w'^{-1}(\alpha_i)^*,\chi+\rho\rangle\geqq 0$, et résulte du fait que $\chi+\rho\in X(T)_+$ et que $w'^{-1}(\alpha_i)$ est une racine positive ([3]).

8. Corollaire. *Soit* $\chi\in X(T)$.

(i) *S'il existe i tel que* $\langle\alpha_i^*,\chi+\rho\rangle=0$ *(c'est-à-dire* $\langle\alpha_i^*,\chi\rangle=-1$*),* $H^n(G/B,\mathscr{L}(\chi))=0$ *pour tout n.*

(ii) *Si* $\chi\in X(T)_+$, *alors* $H^n(G/B,\mathscr{L}(\chi))=0$ *pour* $n>0$.

(i) En effet, d'après la proposition 6, $H^n(G/B,\mathscr{L}(\chi))$ et $H^{n+1}(G/B,\mathscr{L}(\chi))$ sont isomorphes pour tout $n\in\boldsymbol{Z}$, donc nuls.

(ii) Si $w\in W$ est la symétrie, on a $n(w)=\dim G/B$, d'où

$$H^n(G/B,\mathscr{L}(\chi))\simeq H^{n+\dim(G/B)}(G/B,\mathscr{L}(w(\chi+\rho)-\rho))=0 \qquad \text{pour } n>0.$$

9. Si $\chi+\rho$ est *régulier*, c'est-à-dire si $\langle\alpha_i^*,\chi+\rho\rangle\neq 0$ pour tout i, il existe $w_0\in W$ et $\chi_0\in X(T)_+$, *uniques*, tels que $\chi=w_0(\chi_0+\rho)-\rho$ ([3]). D'après 7 et 8, on a donc $H^n(G/B,\mathscr{L}(\chi))=0$ pour $n\neq n(w_0)$ et $H^{n(w_0)}(G/B,\mathscr{L}(\chi))$ est un G-module isomorphe à $H^0(G/B,\mathscr{L}(\chi_0))$ (et donc *absolument simple*, [4]).

10. *Remarque.* Choisissons pour chaque racine simple α_i un isomorphisme de $\Omega_{(G/B)/(G/P_i)}$ sur $\mathscr{L}(-\alpha_i)$, ce qui revient à «épingler» le groupe déployé G. Soient $\chi\in X(T)_+$, $w\in W$ et $\chi'=w(\chi+\rho)-\rho$. A chaque décomposition réduite $\boldsymbol{s}$: $w=s_{i_1}\dots s_{i_{n(w)}}$, nous avons donc associé un isomorphisme de G-modules bien déterminé

$$f(\boldsymbol{s},\chi)\colon\ H^0(G/B,\mathscr{L}(\chi))\to H^{n(w)}(G/B,\mathscr{L}(\chi')).$$

Or $H^0(G/B,\mathscr{L}(\chi))$ est un G-module absolument simple; si $\boldsymbol{s}'$ est une autre décomposition réduite de W, il existe donc $\lambda(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}',\chi)\in\boldsymbol{Q}$ avec

$$f(\boldsymbol{s},\chi)=\lambda(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}',\chi)\,f(\boldsymbol{s}',\chi).$$

Il n'est donc pas possible, *a priori*, de définir canoniquement un isomorphisme $H^0(G/B,\mathscr{L}(\chi))\to H^{n(w)}(G/B,\mathscr{L}(\chi'))$. Cela explique pourquoi les démonstrations classiques ne donnent pas d'isomorphismes explicites.

Naturellement, il se pourrait que l'on ait toujours $\lambda(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}',\chi)=\pm 1$, ce qui permettrait de définir canoniquement un isomorphisme au signe près, mais cela est peu vraisemblable.

11. *Problème. Calculer les* $\lambda(s, s', \chi)$. Vu la structure connue du groupe de Weyl, le pas essentiel est d'étudier le cas où $s = (s_i, s_j, s_i, s_j, \ldots)$ et $s' = (s_j, s_i, s_j, \ldots)$, w étant la symétrie dans le groupe de rang 2 correspondant à α_i et α_j.

Bibliographie

1. Borel, A., et J. Tits: Groupes réductifs. Publications de l'I.H.E.S., No. 27, PUF, 1965.
2. Bott, R.: Homogeneous vector bundles. Annals of Math., Series 2, **66**, 203–248 (1957).
3. Bourbaki, N.: Groupes et Algèbres de Lie. Chapitres V et VI, à paraître.
4. Chevalley, C.: Classification des groupes de Lie algébriques. Séminaire 1956–58, exposés 15 et 16, Multigraphié.
5. Grothendieck, A.: Eléments de géométrie algébrique. II, 4.2.7. Publ. Math. I.H.E.S., No. 8, PUF 1960.
6. Grothendieck, A.: Eléments de géométrie algébrique. III, 2.1.15 et 2.1.16. Publ. Math. I.H.E.S., No. 11, PUF 1961.

M. Demazure
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
F 91 – Orsay

(Reçu le 30 Mars 1968)