

Polyèdres de Newton et nombres de Milnor

A. G. Kouchnirenko (Moscou)

En mémoire de G. N. Turina

Un des résultats principaux de cet article est la démonstration d'une formule liant le nombre de Milnor (d'un point singulier isolé d'un germe d'une fonction analytique de plusieurs variables) avec certaines caractéristiques géométriques du polyèdre de Newton (de cette fonction). En dimension deux, cette formule affirme que si les extrémités de la frontière de Newton de la fonction f se trouvent sur les axes de coordonnées aux points $(a, 0)$ et $(0, b)$, et cette frontière, avec les segments des axes des coordonnées, limite un polygone d'aire S , alors le nombre de Milnor du point singulier 0 de la fonction f est supérieur ou égal à $2S - a - b + 1$ et, pour presque toutes les fonctions ayant la même frontière de Newton, le nombre de Milnor est égal à $2S - a - b + 1$.

L'article contient également la solution complète du problème suivant.

Soit \mathcal{M} un sous-ensemble quelconque de l'ensemble \mathbb{N}^k (où $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$). Existe-t-il une fonction analytique de la forme

$$f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{m \in \mathcal{M}} a_m x^m \quad \text{où } x^m = x_1^{m_1} \cdots x_k^{m_k} \quad (1)$$

pour laquelle l'origine des coordonnées est un point singulier isolé? Si une telle fonction existe, quelle est la valeur minimale du nombre de Milnor du point singulier 0 sur l'ensemble de toutes les fonctions de la forme (1)?

La réponse aux questions posées est donnée ci-dessous en termes de certaines caractéristiques géométriques du polyèdre de Newton de l'ensemble \mathcal{M} .

En outre, pour chaque fonction f de la forme (1), nous construisons sa partie principale. Si cette partie principale satisfait à une certaine condition de non-dégénérescence, le nombre de Milnor du point singulier 0 de la fonction f est minimal dans la classe des fonctions de la forme (1).

Des résultats analogues sont également obtenus dans cet article pour la somme des nombres de Milnor de tous les points singuliers d'un polynôme (ou d'un polynôme de Laurent) de plusieurs variables. Supposons, par exemple, que pour un polynôme f de deux variables, l'enveloppe convexe de l'ensemble constitué par 0 et par les puissances de tous les monômes qui figurent dans f avec des coefficients non-nuls, coupe les axes des coordonnées en des segments de longueur

$a \geq 1$, $b \geq 1$ et possède une aire égale à S . Alors, le nombre de Milnor des points singuliers isolés de f est inférieur ou égal à $2S - a - b + 1$ et en général, tous les points singuliers du polynôme f sont isolés et la somme de leurs nombres de Milnor est égale à $2S - a - b + 1$.

Une des étapes principales de la démonstration des assertions indiquées ci-dessus concernant les points singuliers d'une fonction analytique (polynôme ou polynôme de Laurent) est la démonstration d'assertions analogues concernant le nombre de solutions d'un système de k équations en k variables.

La plus grande partie des démonstrations du présent article sont de caractère purement algébrique. L'idée principale est la construction dans l'anneau des séries formelles (des polynômes et des polynômes de Laurent) d'une filtration que nous appelons *filtration de Newton*, et l'étude de l'anneau gradué associé.

§ 1. Énoncé des résultats

1.1. On appelle *multiplicité* ou *nombre de Milnor* d'un point singulier isolé $0 \in \mathbb{C}^k$ du germe $f: (\mathbb{C}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ le degré de la restriction de l'application gradient $x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ sur une sphère $|x_1|^2 + \dots + |x_k|^2 = r^2$ de rayon suffisamment petit [1].

Il est connu (voir [2]), que le nombre de Milnor $\mu(f)$ du point singulier 0 de la fonction f peut être calculé suivant la formule

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_k]] \left/ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right. . \quad (2)$$

Pour le polynôme $f: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$, désignons par $\tilde{\mu}(f)$ la somme des nombres de Milnor de tous les points singuliers de f . Il découle de (2) que l'on a

$$\tilde{\mu}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k] \left/ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right. . \quad (3)$$

Les formules (2) et (3) permettent de se servir des nombres de Milnor d'une manière purement algébrique.

1.2. Fixons une fois pour toutes le corps de base \mathcal{C} . Désignons par $\bar{\mathcal{C}}$ la fermeture algébrique de \mathcal{C} . Désignons respectivement par \mathbb{Z} , \mathbb{N} et \mathbb{R}_+ l'ensemble des nombres entiers, entiers non-négatifs et réels non-négatifs et identifions \mathbb{N} avec son inclusion naturelle dans \mathbb{Z} et dans \mathbb{R}_+ . Le nombre des variables est généralement désigné par k .

Les chiffres romains **I**, **II**, **III** indiquent que l'on a affaire aux anneaux des séries formelles $\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$, des polynômes $\mathcal{C}[x_1, \dots, x_k]$ et des polynômes de Laurent $\mathcal{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}]$ respectivement. Les notations pour les cas **II** et **III** diffèrent de celles du cas **I** par l'emploi des signes « \sim » et « $*$ » respectivement. Le lecteur qui s'intéresse seulement à la situation locale peut laisser de côté tout ce qui est indiqué par les chiffres **II** et **III** et les signes « \sim » et « $*$ ». A la place de (x_1, \dots, x_k) nous écrirons parfois simplement x . L'idéal engendré par les éléments f_1, \dots, f_k d'un certain anneau sera désigné par (f_1, \dots, f_k) . A la place

de $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ nous écrirons parfois $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$. Pour un semi-groupe P nous désignerons par $\mathcal{C}[P]$ l'anneau de semi-groupe de P sur \mathcal{C} .

1.3. *Définition. I.* Pour $f \in \mathcal{C}[[x]]$ posons $\mu(f) = \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[x]] / \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$. Nous appellerons $\mu(f)$ *nombre de Milnor de la série formelle f* . (Une des valeurs possibles de $\mu(f)$ est ∞ . Dans le cas complexe analytique, ceci correspond à un point singulier 0 non-isolé de la fonction f .)

II. Pour $f \in \mathcal{C}[x]$ posons $\tilde{\mu}(f) = \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[x] / \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

III. Pour $f \in \mathcal{C}[x, x^{-1}]$ posons $\mu^*(f) = \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[x, x^{-1}] / \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$. \square

1.4. *Définition.* Soit $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} a_n x^n$, où $x^n = x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$. Posons

$$\text{supp } f = \{n \in \mathbb{Z}^k : a_n \neq 0\}.$$

Puisque $\mathbb{N}^k \subset \mathbb{Z}^k$, cette définition est applicable aux trois cas I–III. \square

Nous définirons maintenant dans chacun des cas I–III la classe de séries (polynômes) «commodes». Le théorème I s'énoncera pour des séries quelconques, mais sera démontré par réduction à un théorème analogue pour les séries commodes. Dans l'énoncé des théorèmes II et III, nous nous limiterons, pour simplifier, aux cas des polynômes (polynômes de Laurent) commodes.

1.5. *Définition. I. II.* Nous appellerons la série (le polynôme) $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n$ *commode*, si pour chaque i de 1 à k le monôme $x_i^{n_i}$ ($n_i \geq 1$) figure dans f avec un coefficient non-nul.

III. Le polynôme de Laurent $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} a_n x^n$ s'appelle *commode*, si le point 0 de l'espace \mathbb{R}^k n'appartient à aucun plan des faces de dimension i ($1 \leq i \leq k-1$) du polyèdre qui est l'enveloppe convexe de l'ensemble $(\text{supp } f \setminus 0)$ dans \mathbb{R}^k .

Nous définirons maintenant dans chacun des cas I, II, III la frontière de Newton et la partie principale newtonienne.

1.6. *Définition. I.* Soit $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$. Posons $\Gamma_+(f) =$ (enveloppe convexe dans \mathbb{R}_+^k de l'ensemble $\bigcup (n + \mathbb{R}_+^k)$, où $n \in \text{supp } f \setminus 0$).

Appelons *frontière de Newton* de la série f à l'origine le polyèdre $\Gamma(f) =$ (réunion des faces fermées compactes du polyèdre $\Gamma_+(f)$).

Appelons *partie principale newtonienne* de la série f à l'origine le polynôme $f_0 = \sum_{n \in \Gamma(f)} a_n x^n$. Posons $\Gamma_-(f) =$ (réunion de tous les segments d'origine 0 et d'extrémités sur $\Gamma(f)$).

II. Soit $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n \in \mathcal{C}[x_1, \dots, x_k]$ un polynôme commode. Posons $\tilde{\Gamma}_-(f) =$ (enveloppe convexe de l'ensemble $(0 \cup \text{supp } f)$ dans \mathbb{R}_+^k).

Appelons *frontière de Newton* du polynôme f à l'infini le polyèdre suivant:

$\tilde{\Gamma}(f) =$ (réunion des faces fermées qui ne passent pas par 0 du polyèdre $\tilde{\Gamma}_-(f)$).

Appelons *partie principale newtonienne* du polynôme f à l'infini le polynôme suivant

$$\tilde{f}_0 = \sum_{n \in \Gamma(f)} a_n x^n.$$

III. Soit $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} a_n x^n \in \mathcal{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}]$ un polynôme de Laurent commode. Posons:

$\Gamma_-^*(f)$ = (enveloppe convexe dans \mathbb{R}^k de l'ensemble $(\text{supp } f \setminus 0)$). Appelons *frontière de Newton du polynôme de Laurent f* le polyèdre

$$\Gamma^*(f) = \partial \Gamma_-^*(f).$$

Appelons *partie principale newtonienne* de f le polynôme de Laurent

$$f_0^* = \sum_{n \in \Gamma^*(f)} a_n x^n. \quad \square$$

Nous introduirons maintenant dans les cas **I**, **II**, **III** une caractéristique géométrique importante de la frontière de Newton — *le nombre de Newton*. Nos théorèmes principaux affirment qu'en règle générale le nombre de Milnor de la série f est égal au nombre de Newton (cas **I**), et que la somme des nombres de Milnor de f est égale au nombre de Newton (cas **II** et **III**) (si le corps \mathcal{C} est de caractéristique nulle).

1.7. Définition. I, II. Soit S un polyèdre compact de \mathbb{R}_+^k . Définissons *le nombre de Newton $v(S)$ du polyèdre S* par la formule

$$v(S) = k! V_k - (k-1)! V_{k-1} + \dots + (-1)^{k-1} 1! V_1 + (-1)^k$$

où V_k est le volume de dimension k du polyèdre S et, pour $1 \leq q \leq k-1$, V_q est la somme des volumes de dimension q des intersections de S avec tous les plans de coordonnées de dimension q . (Sur chaque plan de coordonnées L de dimension q dans \mathbb{R}_+^k , il existe un élément volume unique, normé par la condition que le volume du parallélépipède de base de semi-groupe $L \cap \mathbb{N}^k$ est égal à 1.)

III. Soit S un polyèdre compact de \mathbb{R}^k . Posons

$$v^*(S) = k! V_k(S). \quad \square$$

1.8. Définition. Soit f une série commode, un polynôme ou un polynôme de Laurent. Définissons *le nombre de Newton* de f de la manière suivante:

I. Pour $f \in \mathcal{C}[[x]]$ posons $\check{v}(f) = v(\Gamma_-(f))$.

II. Pour $f \in \mathcal{C}[x]$ posons $\tilde{v}(f) = v(\tilde{\Gamma}_-(f))$.

III. Pour $f \in \mathcal{C}[x, x^{-1}]$ posons $v^*(f) = v^*(\Gamma_-^*(f))$. \square

1.9. Définition. Soit $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ une série formelle *non-commode* dans laquelle on ne rencontre pas de monômes contenant une seule des variables x_1, \dots, x_q , mais on rencontre de tels monômes pour les variables x_{q+1}, \dots, x_k . Posons

$$v(f) = \sup_{m \in \mathbb{N}} v(f + x_1^m + \dots + x_q^m).$$

(Une méthode plus constructive pour calculer le nombre de Newton d'une série non-commode sera donnée après l'énoncé du théorème I.) \square

Les théorèmes I, II, III formulés ci-dessous donnent des formules exactes pour les nombres μ , $\tilde{\mu}$ et μ^* dans le cas où la partie principale newtonienne satisfait à une condition de non-dégénérescence, indiquée plus loin (cf. 1.19).

1.10. **Théorème I.** (i) *Le nombre de Milnor d'une série formelle f est supérieur ou égal au nombre de Newton:*

$$\mu(f) \geq v(f) \quad (\text{et on a } \mu(f) = \infty \text{ si } v(f) = \infty).$$

(ii) *Le nombre de Milnor d'une série formelle commode f est égal au nombre de Newton, si la partie principale f_0 de la série f à l'origine est non-dégénérée dans le sens 1.19 (Ainsi, le nombre de Milnor d'une série commode f avec une partie principale newtonienne non-dégénérée à l'origine s'obtient par la formule*

$$\mu(f) = k! V_k - (k-1)! V_{k-1} + \dots + 1! (-1)^{k-1} V_1 + (-1)^k, \quad (4)$$

où V_k est le volume de dimension k du polyèdre $\Gamma_-(f)$ et, pour $1 \leq q \leq k-1$, V_q est la somme des volumes de dimension q des intersections du polyèdre $\Gamma_-(f)$ avec les plans des coordonnées de dimension q .) Si $\text{char } \mathcal{C} = 0$, le nombre de Milnor est égal au nombre de Newton pour toute série formelle à partie principale newtonienne non-dégénérée à l'origine.

(iii) Si $\text{char } \mathcal{C} = 0$, l'ensemble des parties principales dégénérées est une sous-variété algébrique propre dans la variété de toutes les parties principales qui correspondent à la frontière de Newton donnée.

1.11. **Définition.** Pour $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$, posons

$$d(f) = \max_{n \in \Gamma(f)} |n|, \quad \text{où } n = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k \text{ et } |n| = n_1 + \dots + n_k. \quad \square$$

1.12. **Proposition.** Soit $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ une série non-commode ne contenant pas de monômes de la forme $x_i^{n_i}$ pour $i = 1, \dots, q$ et contenant des monômes de cette forme pour les autres variables. Alors

(i) soit $v(f) = \infty$, soit $v(f) = v(\Gamma_-(f))$,

(ii) si $\dim \Gamma(f) = k-1$, alors on a $v(f) = \infty$ si, et seulement si

$$v \left(f + \sum_{i=1}^q x_i^{(d(f))^{k+1}} \right) > (d(f) - 1)^k,$$

(iii) si $\mu(f) < \infty$ et f appartient au cube de l'idéal maximal, alors $\dim \Gamma(f) = k-1$.

1.13. **Remarques.** (i) Le théorème I donne une solution complète du problème posé dans l'introduction. En effet, soit \mathcal{M} un sous-ensemble quelconque de l'ensemble \mathbb{N}^k . Posons $v(\mathcal{M}) = v(g)$, où g est une série formelle quelconque qui satisfait à la condition $\text{supp } g = \mathcal{M}$. Alors, il existe une fonction analytique f de la forme (1) pour laquelle l'origine des coordonnées est un point singulier isolé si, et seulement si $v(\mathcal{M}) < \infty$ et la valeur minimale du nombre de Milnor du point singulier 0 est égale à $v(\mathcal{M})$.

(ii) Il existe une autre méthode, purement combinatoire, pour vérifier la condition $v(\mathcal{M}) < \infty$. Sans perte de généralité, on peut admettre que \mathcal{M} ne contient pas de points dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf une seule, qui est égale à 1. Posons $\mathcal{M}_i = \{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k : (n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_k) \in \mathcal{M}\}$. On déduit facilement des résultats du §6 que $v(\mathcal{M}) < \infty$ si et seulement si on a la condition suivante:

pour chaque q ($1 \leq q \leq k$) et tous les $i_1 < i_2 < \dots < i_q$ au moins $k - q$ ensembles de la forme $\{(n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{M}_j : n_{i_1} = \dots = n_{i_q} = 0\}$ sont non-vides ($1 \leq j \leq k$).

(iii) Soit $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ le germe d'une fonction analytique. Désignons par $\chi(f)$ la caractéristique de Euler de la fibre de la fibration de Milnor. On sait que si $\mu(f) < \infty$ alors $\mu(f) = (-1)^k(\chi(f) - 1)$. Posons maintenant la question suivante:

Trouver la valeur minimale du nombre $(-1)^k(\chi(f) - 1)$ sur l'ensemble de tous les germes analytiques de la forme (1). Nous proposons sous forme d'hypothèse la réponse suivante: $v(\Gamma_-(g))$, où g est une série formelle quelconque qui satisfait à la condition $\text{supp } g = \mathcal{M}$. \square

Avant d'énoncer les théorèmes II et III, clarifions la signification géométrique des nombres $\tilde{\mu}$ et μ^* dans le cas où le corps \mathcal{C} est algébriquement clos.

1.14. Propositions. *Supposons que le corps \mathcal{C} est algébriquement clos. Alors*

II. $\tilde{\mu}(f) < \infty$ si, et seulement si le nombre des points singuliers de f sur \mathcal{C}^k est fini et dans ce cas $\tilde{\mu}(f)$ est égal à la somme des nombres de Milnor des points singuliers de f sur \mathcal{C}^k .

III. $\mu^*(f) < \infty$ si et seulement si le nombre des points singuliers de f sur $(\mathcal{C} \setminus 0)^k$ est fini et dans ce cas $\mu^*(f)$ est égal à la somme des nombres de Milnor des points singuliers de f sur $(\mathcal{C} \setminus 0)^k$.

La démonstration se déduit facilement du fait qu'un anneau de Artin se décompose en un produit direct d'anneaux locaux de Artin ou simplement du théorème de Hilbert sur les zéros. \square

1.15. Théorème II. *Soit $f \in \mathcal{C}[x_1, \dots, x_k]$ un polynôme commode. Alors*

(i) *Si le corps \mathcal{C} est algébriquement clos et de caractéristique nulle, alors la somme des nombres de Milnor des points singuliers isolés de f est inférieur ou égal à $\tilde{v}(f)$. En particulier, si $\tilde{\mu}(f) < \infty$, alors*

$$\tilde{\mu}(f) \leq \tilde{v}(f).$$

(ii) *Si la partie principale newtonienne du polynôme f est non-dégénérée à l'infini (dans le sens de 1.19), on a*

$$\tilde{\mu}(f) = \tilde{v}(f) \quad (\text{en particulier } \tilde{\mu}(f) < \infty).$$

(iii) *Si $\text{char } \mathcal{C} = 0$, alors l'ensemble des parties principales dégénérées est une sous-variété algébrique propre de la variété de toutes les parties principales qui correspondent à la frontière de Newton donnée.*

1.16. Théorème III. *Soit $f \in \mathcal{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}]$ un polynôme de Laurent commode. Alors les assertions (i)–(iii) du théorème II reste vraies si l'on remplace « \sim » par « $*$ ».*

Une des étapes de la démonstration des théorèmes I–III est en fait la démonstration des formules pour le calcul du nombre de solutions d'un système d'équations polynomiales et le calcul de la multiplicité d'une solution isolée d'un système de k équations à k inconnues. Limitons-nous au cas III.

1.17. *Définition.* Supposons que le corps \mathcal{C} est algébriquement clos et

$$f_1, \dots, f_k \in \mathcal{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}].$$

Posons

$$\text{supp}(f_1, \dots, f_k) = \text{supp } f_1 \cup \dots \cup \text{supp } f_k,$$

$$\Gamma_-^*(f_1, \dots, f_k) = (\text{enveloppe convexe dans } \mathbb{R}^k \text{ de l'ensemble } \text{supp}(f_1, \dots, f_k)),$$

$$\Gamma^*(f_1, \dots, f_k) = \partial \Gamma_-^*(f_1, \dots, f_k), \quad v^*(f_1, \dots, f_k) = k! V_k,$$

où V_k est le volume de dimension k du polyèdre $\Gamma_-^*(f_1, \dots, f_k)$.

1.18. **Théorème III'.** (i) *Le nombre des solutions isolées du système*

$$f_1 = \dots = f_k = 0 \tag{5}$$

sur l'ensemble $(\mathcal{C} \setminus 0)^k$ (les multiplicités étant prises en considération) est inférieur ou égal à $v^*(f_1, \dots, f_k)$.

(ii) Si f_1, \dots, f_k sont non-dégénérés dans le sens de 1.19, alors toutes les solutions du système (5) sont isolées et leur nombre (les multiplicités étant prises en considération) est égal à $v^*(f_1, \dots, f_k)$.

(iii) « En règle générale » f_1, \dots, f_k sont non-dégénérés. \square

Enonçons maintenant la condition de non-dégénérescence dans les cas I, II, III, III'.

1.19. *Définition.* Soient $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} a_n x^n$ et Δ -un sous-espace compact de \mathbb{R}^k . Posons: $g_\Delta = \sum_{n \in \Delta \cap \mathbb{Z}^k} a_n x^n$.

I, II, III. Nous dirons que la partie principale newtonienne d'une série (d'un polynôme ou d'un polynôme de Laurent) f est *non-dégénéré*, si pour chaque face fermée Δ de la frontière de Newton des polynômes de Laurent

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_\Delta, \dots, \left(x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_\Delta$$

ne s'annulent pas en même temps sur $(\bar{\mathcal{C}} \setminus 0)^k$.

III'. Nous dirons que f_1, \dots, f_k sont *non-dégénérés*, si pour chaque face fermée Δ du polyèdre $\Gamma^*(f_1, \dots, f_k)$ les polynômes de Laurent $(f_1)_\Delta, \dots, (f_k)_\Delta$ ne s'annulent pas en même temps sur $(\mathcal{C} \setminus 0)^k$.

1.20. *Formulation équivalente des conditions de non-dégénérescence.* Soit Δ un polyèdre compact convexe de dimension q dans \mathbb{R}^k , dont les sommets appartiennent à \mathbb{Z}^k ($0 \leq q \leq k-1$). Supposons que Δ n'est pas situé dans un sous-espace linéaire de dimension q . Désignons par Cône(Δ) le cône convexe de sommet 0 et de base Δ , i.e. la réunion de toutes les demi-droites de \mathbb{R}^k d'origine 0 qui

passent par Δ . Posons $P(\Delta) = \mathbb{Z}^k \cap \text{Cône}(\Delta)$. Il est évident que $P(\Delta)$ est un sous-semi-groupe du (semi) groupe \mathbb{Z}^k . Considérons l'ensemble

$$\mathcal{C}[P(\Delta)] \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{C}[x, x^{-1}] : \text{supp } f \subset P(\Delta)\}.$$

C'est évidemment un sous anneau unitaire de l'anneau $\mathcal{C}[x, x^{-1}]$. Il est évident que les dérivations

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

de l'anneau $\mathcal{C}[x, x^{-1}]$ appliquent le sous-anneau $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ en lui-même.

I–III. Nous dirons que le polynôme de Laurent g est non-dégénéré sur Δ , si les éléments

$$\left(x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}\right)_\Delta, \dots, \left(x_k \frac{\partial g}{\partial x_k}\right)_\Delta$$

de l'anneau $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ engendrent dans $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ un idéal de codimension finie. Nous dirons que la partie principale newtonienne est non-dégénérée si elle est non-dégénérée sur chaque face de la frontière newtonienne. \square

1.21. *Remarque.* Une série commode $f \in \mathcal{C}[[x]]$ peut être dégénérée dans le sens de 1.19, mais posséder tout de même un nombre de Milnor égal au nombre de Newton. Exemple le plus simple: $f = (x_1 + x_2)^2 + x_1 x_3 + x_3^2$. \square

Des théorèmes de Lê et de Ramanujam [3] on déduit facilement.

1.22. **Corollaire.** Soit $f: (\mathbb{C}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ le germe d'une application analytique, qui possède à l'origine un point critique isolé, la partie principale newtonienne f_0 du germe f étant non-dégénérée dans le sens de 1.19. Alors (pour $k \neq 3$) le type topologique du niveau nul de f et le type topologique de la fibration de Milnor sont déterminés par la frontière de Newton $\Gamma(f)$. \square

1.23. *Problème.* Exprimer les propriétés topologiques du germe f en termes de la frontière de Newton. Quelles propriétés analytiques du germe f peuvent être exprimées en termes de la frontière de Newton (ou en termes des fonctions $f_\Delta, \Delta \subset \Gamma(f)$)? \square

1.24. V.I. Arnold a découvert expérimentalement une formule pour le nombre des modules des fonctions de deux variables avec une partie principale newtonienne non-dégénérée à l'origine [4, 9.9]. Cette formule sera démontrée dans le paragraphe 7 à l'aide de la filtration de Newton et de la formule (4). \square

Rappelons que le polynôme f s'appelle quasi-homogène de type $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ et de degré 1 si pour chaque monôme x^n à coefficient non-nul dans f nous avons $\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_k n_k = 1$ (nous supposons que les nombres α_i sont rationnels et positifs). On peut déduire du théorème 1 une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un polynôme quasi-homogène de type α et de degré 1 avec points critiques isolés (dans le cas d'un corps de caractéristique nulle).

1.25. **Théorème.** *Supposons $\text{char } \mathcal{C} = 0$, $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$. Une fonction quasi-homogène de type α et de degré 1 à point critique isolé existe si et seulement si on a l'égalité*

$$\prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{\alpha_i} - 1 \right) = v(h + x_1^m + \dots + x_k^m)$$

où h est la somme de tous les monômes quasi-homogènes de type α et de degré 1 et

$$m = k \cdot \left(\max_{1 \leq i \leq k} \left(\text{partie entière} \left(\frac{1}{\alpha_i} + 1 \right) \right) \right). \quad \square$$

1.26. Pour démontrer les théorèmes I–III, nous nous servons du résultat principal du travail de M. Hohster [5]. Ce même résultat a été démontré plus tard par Mumford et ses collaborateurs dans [6]. Il peut être également démontré par les méthodes du présent travail (voir § 5).

Les anneaux de la forme $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ qui figurent dans la définition de la non-dégénérescence 1.20 se rencontrent chez plusieurs auteurs. Dans les travaux de A. D. Bruno [7, 8] de tels anneaux apparaissent en relation aux polyèdres de Newton. Dans le livre [6], de tels anneaux sont étudiés systématiquement. \square

1.27. Pendant que V. I. Arnold travaillait le texte de l'article [4], il m'a communiqué l'hypothèse de l'indépendance des nombres de Milnor (d'une fonction de dimension deux «typique» à frontière de Newton fixe) des variations des coefficients des monômes situés au-dessus de la frontière de Newton et indiqua un exemple d'une fonction «non-typique». V. I. Arnold supposa également que, pour certaines conditions de non-dégénérescence, cette hypothèse doit rester vraie dans le cas de dimension supérieure. Le théorème I démontre cette hypothèse pour les fonctions commodas satisfaisant aux conditions de non-dégénérescence 1.19¹. Je suis reconnaissant à V. I. Arnold pour l'attention constante qu'il a manifesté pour le présent travail.

Après que j'eus exposé le théorème I à O. V. Liachko celui-ci m'a montré des exemples de calcul de la somme de nombres de Milnor pour des représentants polynomiaux des germes de singularités unimodales en dimension deux; ce fait, ainsi que l'intérêt manifesté par Arnold, m'a amené à trouver les expressions pour $\tilde{\mu}$ et μ^* . Je suis reconnaissant à A. M. Gabrielov, O. V. Liachko et D. B. Fuks pour des discussions utiles. \square

1.28. Les principaux résultats de cet article ont été annoncés dans [9]. Les résultats qui se rapportent aux systèmes d'équations ont été annoncés dans [10].

Après que le présent article fut préparé pour publication, D. N. Bernstein trouva une généralisation encourageante du théorème III':

1.29. **Théorème.** *Soient $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ des polyèdres compacts convexes dans \mathbb{R}^k avec des sommets aux coordonnées entières. Alors, pour presque toutes les familles de polynômes de Laurent sur le corps \mathcal{C} f_1, \dots, f_k qui satisfont à la condition*

¹ Il y a quelques mois cette hypothèse a été démontrée également (de manière topologique) par O. A. Gelfond.

$\text{supp } f_i \subset \Gamma_i$, le nombre de solutions du système d'équations $f_1 = \dots = f_k = 0$ sur $(\mathcal{C} \setminus 0)^k$ est égal au volume mixte de Minkovski des polyèdres $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ multipliés par $k!$ ($\text{char } \mathcal{C} = 0$).

Rappelons que les ensembles compacts convexes de l'espace \mathbb{R}^k forment un semi-groupe pour l'opération d'addition: $X_1 + X_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ et que l'on appelle *volume mixte de Minkovski* l'application symétrique k -linéaire de ce semi-groupe dans \mathbb{R} si cette application coïncide avec le volume usuel sur la diagonale.

La démonstration de D. N. Bernstein est basée sur la considération d'une famille de systèmes d'équations à un paramètre et sur l'étude des propriétés asymptotiques des solutions à l'aide des séries de Puiseux. La démonstration du théorème 1.29 peut également être obtenue par réduction au théorème III'.

D'autres démonstrations du théorème 1.29 ont été données par A. G. Hovanski et l'auteur. Ces démonstrations sont basées sur le plongement de la variété affine $\text{Spec } \mathcal{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}]$ dans une T -variété (dans le sens de [6]), construit à l'aide de polyèdres $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, et sur l'application du théorème de Besout sur cette variété.

§ 2. Début de la démonstration du théorème I

2.1. Désignons plus brièvement l'anneau $\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ par \mathcal{A} . Fixons une série formelle commode $f \in \mathcal{A}$. Désignons la frontière de Newton $\Gamma(f)$ de la série f par Γ . Construisons à l'aide de Γ une filtration décroissante $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \supset \mathcal{A}_1 \supset \dots$ de l'anneau \mathcal{A} . Pour cela, construisons tout d'abord une application homogène de degré 1 $h: \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui satisfait à la condition $h(\Gamma) = 1$. On voit facilement qu'il existe un nombre naturel $M > 0$ tel que $h(\mathbb{N}^k) \subset \frac{1}{M}\mathbb{N}$. Prenons le nombre M minimal qui satisfait à cette condition et définissons l'application $\phi: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ par l'égalité $\phi = M(h|\mathbb{N}^k)$. Posons maintenant pour tout $q \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{A}_q = \{g \in \mathcal{A} : \text{supp } g \subset \phi^{-1}(q + \mathbb{N})\}.$$

On voit facilement que l'application ϕ est «convexe»: $\phi(a+b) \geq \phi(a) + \phi(b)$, d'où l'on peut déduire que $\mathcal{A}_{q_1} \cdot \mathcal{A}_{q_2} \subset \mathcal{A}_{q_1+q_2}$, i.e. la filtration construite est bien une filtration d'anneaux. Il est clair que $\bigcap_{q \geq 0} \mathcal{A}_q = 0$ et que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe un tel $q = q(n) \in \mathbb{N}$ que $\mathfrak{M}^n \subset \mathcal{A}_q$, où \mathfrak{M} est le seul idéal maximal de l'anneau \mathcal{A} . Nous appellerons la filtration construite de l'anneau \mathcal{A} *filtration de Newton*.

Clairement, $f \in \mathcal{A}_M \setminus \mathcal{A}_{M+1}$ et la classe de f dans $\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_{M+1}$ ne dépend que de la partie principale f_0 de la série f à l'origine. Les dérivées de la série f sont fort mal liées à la filtration de Newton dans le cas général. Les séries $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$ sont bien mieux liées à cette filtration: chaque série $x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ se trouve dans \mathcal{A}_M , tandis que sa forme initiale, i.e. la classe de $x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ dans $\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_{M+1}$, dépend seulement de f_0 .

2.2. **Théorème AI.** Si $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ est une série formelle commode à partie principale newtonienne non-dégénérée à l'origine, alors

$$\dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]] \Big/ \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = k! V_k$$

où V_k est le volume de dimension k du polyèdre $\Gamma_-(f)$.

L'assertion (ii) du théorème **I** pour les séries commodes se déduit facilement du théorème **AI** par récurrence sur le nombre des variables (voir § 3). La démonstration du théorème **AI** emploie essentiellement la filtration de Newton et se décompose en deux parties totalement différentes: le théorème **BI** et le théorème **CI**.

Théorème BI. Sous les conditions du théorème **AI** la codimension de l'idéal engendré dans l'anneau gradué associé $A = \text{gr } \mathcal{A} = \bigoplus_{q \geq 0} (\mathcal{A}_q / \mathcal{A}_{q+1})$ par les formes initiales des séries $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$ est égale à $k! V_k$.

Théorème CI. Sous les conditions du théorème **AI**, la codimension de l'idéal par les séries $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$ dans \mathcal{A} est égale à la codimension de l'idéal engendré par les formes initiales de ces séries dans l'anneau gradué associé $A = \text{gr } \mathcal{A}$.

La démonstration du théorème **CI** se déduit des résultats obtenus en démontrant le théorème **BI** et des résultats du § 4, tandis que la démonstration du théorème **BI** est la difficulté majeure; cette démonstration est basée sur l'étude de l'anneau gradué associé $A = \text{gr } \mathcal{A}$.

Décrivons cet anneau (plus exactement, cette \mathcal{C} -algèbre) en plus de détails (section 2.3–2.6).

2.3. Désignons la forme initiale du monôme $x^n \in \mathcal{A}$ par δ_n

$$(\delta_n = x^n + \mathcal{A}_{\phi(n)+1} \in \mathcal{A}_{\phi(n)} / \mathcal{A}_{\phi(n)+1} = A_{\phi(n)})$$

et appelons l'élément δ_n de l'anneau A monôme de A . Considérée comme espace vectoriel, la \mathcal{C} -algèbre A est isomorphe à l'anneau des polynômes en x_1, \dots, x_k , car elle est engendrée par les monômes. Pour décrire la multiplication dans A , il suffit d'indiquer le produit des monômes. Rappelons que dans 1.20 nous avons lié à chaque face Δ de la frontière de Newton Γ un semi-groupe $P(\Delta)$. De la définition de la filtration de Newton et de la définition de la multiplication dans l'anneau gradué associé on déduit facilement la formule

$$\delta_{n_1} \cdot \delta_{n_2} = \begin{cases} \delta_{n_1+n_2}, & \text{s'il existe une face } \Delta \subset \Gamma \text{ telle que } n_1 \in P(\Delta), n_2 \in P(\Delta), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6)$$

Démonstration de la formule (6). Si l'on a $n_1 \in P(\Delta)$, $n_2 \in P(\Delta)$, alors $\phi(n_1+n_2) = \phi(n_1) + \phi(n_2)$ et donc

$$\delta_{n_1} \cdot \delta_{n_2} = x^{n_1} \cdot x^{n_2} + \mathcal{A}_{\phi(n_1)+\phi(n_2)+1} = x^{n_1+n_2} + \mathcal{A}_{\phi(n_1+n_2)+1} = \delta_{n_1+n_2}.$$

Si la face indiquée n'existe pas, on a $\phi(n_1 + n_2) > \phi(n_1) + \phi(n_2)$ et, par conséquent,

$$\delta_{n_1} \cdot \delta_{n_2} = x^{n_1} \cdot x^{n_2} + \mathcal{A}_{\phi(n_1) + \phi(n_2) + 1} = 0 + \mathcal{A}_{\phi(n_1) + \phi(n_2) + 1}. \quad \square$$

Pour chaque face Δ de la frontière de Newton Γ désignons l'anneau $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ défini dans 1.20 par A_Δ . Il est évident que A_Δ peut être identifié à un sous-anneau de A , et donc A_Δ possède une graduation induite.

2.4. Proposition. *Pour chaque face $\Delta \subset \Gamma$ il existe un épimorphisme qui respecte la graduation des \mathcal{C} algèbres $\pi_\Delta: A \rightarrow A_\Delta$ et pour chaque paire $\Delta_1 \subset \Delta$ il existe un homomorphisme de \mathcal{C} -algèbres $\pi_{\Delta, \Delta_1}: A_\Delta \rightarrow A_{\Delta_1}$ qui respecte la graduation et pour lequel on a $\pi_{\Delta_1} = \pi_{\Delta, \Delta_1} \circ \pi_\Delta$.*

Démonstration. Posons $J_\Delta = \bigoplus_{n \in P(\Delta)} \mathcal{C} \cdot \delta_n$. Il découle de (6) que J_Δ est un idéal de A . Il est clair que le quotient A/J_Δ est isomorphe à A_Δ . Désignons la projection naturelle $A \rightarrow A/J_\Delta \approx A_\Delta$ par π_Δ . Il est clair que π_Δ respecte la graduation. D'une manière analogue on construit les épimorphismes π_{Δ, Δ_1} . La formule $\pi_{\Delta_1} = \pi_{\Delta, \Delta_1} \circ \pi_\Delta$ est évidente. \square

2.5. Désignons par F_1, \dots, F_k les formes initiales des séries $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$ respectivement $\left(F_i = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mathcal{A}_{M+1} \in A_M \right)$. La condition de non-dégénérescence 1.20 est équivalente à la condition suivante: pour chaque face $\Delta \subset \Gamma$ les éléments homogènes $\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k$ de l'anneau gradué A_Δ engendrent dans A_Δ un idéal de codimension finie. L'existence d'une structure de A -module sur A_Δ nous permet de travailler avec les anneaux A_Δ à la place de l'anneau A . Désignons par I l'ensemble des faces de plus grande dimension de la frontière de Newton Γ . La formule (6) nous indique que l'anneau A doit être très ressemblant à la somme directe $\bigoplus_{\Delta \in I} A_\Delta$. En effet, l'application

$$A \xrightarrow{\bigoplus_{\Delta \in I} \pi_\Delta} \bigoplus_{\Delta \in I} A_\Delta$$

est injective (puisque $\bigcup_{\Delta \in I} P(\Delta) = \mathbb{N}^k$). La proposition suivante met en évidence le peu qui manque à cette application, que nous désignerons par d_k , pour être un isomorphisme.

2.6. Proposition. *Il existe une suite exacte d'homomorphismes de A -module gradués (qui respecte les graduations)*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{d_k} \bigoplus_{\Delta \in I} A_\Delta \rightarrow C_{k-2} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0 \quad (7)$$

où, pour $0 \leq q \leq k-1$, nous désignons par C_q la somme directe des A -module A_Δ sur toutes les faces de dimension q de la frontière de Newton Γ non situées dans la réunion des plans des coordonnées.

La démonstration sera donnée dans 2.11.

2.7. Pour calculer l'anneau-quotient $A/(F_1, \dots, F_k)$, il est naturel d'écrire la suite exacte

$$A^k \xrightarrow{\partial_1} A \xrightarrow{\pi} A/(F_1, \dots, F_k) \rightarrow 0$$

où π est la projection naturelle, tandis que $\partial_1(a_1, \dots, a_k) = a_1 F_1 + \dots + a_k F_k$. Etendons cette suite exacte à une suite semi-exacte obtenue du complexe de Koszul des éléments F_1, \dots, F_k de l'anneau A en ajoutant l'épimorphisme π :

$$0 \rightarrow A^{\binom{k}{k}} \xrightarrow{\partial_k} A^{\binom{k}{k-1}} \rightarrow \dots \rightarrow A^{\binom{k}{2}} \xrightarrow{\partial_2} A^{\binom{k}{1}} \xrightarrow{\partial_1} A \xrightarrow{\pi} A/(F). \quad (8)$$

De la définition du complexe de Koszul (voir, par exemple, [11]), on peut déduire que tous les homomorphismes augmentent la graduation de M .

2.8. **Théorème.** *Dans les conditions du théorème AI, le complexe de Koszul des éléments F_1, \dots, F_k de l'anneau A est acyclique en dimensions positives (et la suite (8) est donc exacte).*

Le théorème 2.8 sera démontré ci-dessous dans 2.12 à l'aide de la proposition 2.6 et du théorème de M. Hochster (voir 5.6), qui affirme que les anneaux A_Δ sont des anneaux de Cohen-Macaulay. Maintenant, nous déduirons le théorème **BI** du théorème 2.8 et de la proposition 2.6.

Désignons par $p_A(t)$ la série de Poincaré du \mathcal{C} -module gradué A : $p_A(t) = \sum_{q=0}^{\infty} (\dim_{\mathcal{C}} A_q) \cdot t^q$ et par $p_{A_\Delta}(t)$ la série de Poincaré du \mathcal{C} -module gradué A_Δ .

2.9. **Lemme.** (i) $p_{A_\Delta}(t)$ est une fonction rationnelle en t et le point $t=1$ est un pôle d'ordre $\dim \Delta + 1$.

(ii) Si $\dim \Delta = k-1$, alors $p_{A_\Delta}(t)(1-t^M)^k|_{t=1} = k! V_{k,\Delta}$ où $V_{k,\Delta}$ est le k -volume de la pyramide de sommet 0 et de base Δ .

Ce lemme sera également démontré plus loin dans 2.13.

2.10. Il découle de l'exactitude de la suite (8) que

$$p_{A/(F_1, \dots, F_k)}(t) = p_A(t)(1-t^M)^k.$$

Par conséquent,

$$\dim_{\mathcal{C}} A/(F_1, \dots, F_k) = p_A(t)(1-t^M)^k|_{t=1}.$$

La série de Poincaré du \mathcal{C} -module A s'obtient de (7):

$$p_A(t) = \sum_{\Delta \in I} p_{A_\Delta}(t) + R(t)$$

où $R(t)$ est somme alternée des séries de Poincaré des modules A_Δ où $\dim \Delta \leq k-2$. D'après 2.9(i), $R(t)$ est une fonction rationnelle en t avec pôle d'ordre $\leq k-1$ au point $t=1$. On a donc $R(t)(1-t^M)^k|_{t=1} = 0$ et, par conséquent

$$\dim_{\mathcal{C}} A/(F_1, \dots, F_k) = p_A(t)(1-t^M)^k|_{t=1} = \sum_{\Delta \in I} p_{A_\Delta}(t)(1-t^M)^k|_{t=1}.$$

D'après 2.9(ii), cette dernière somme est égale à $k! \sum_{\Delta \in I} V_{k,\Delta} = k! V_k$, ce qui termine la démonstration du théorème **BI**. \square

2.11. *Démonstration de la proposition 2.6.* Construisons une suite d'applications de A -modules gradués qui respectent les graduations

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{d_k} C_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} C_{k-2} \xrightarrow{d_{k-2}} \dots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \rightarrow 0 \quad (9)$$

de la manière suivante. Désignons par I_q l'ensemble des faces de Γ de dimension q non-situées dans la réunion des plans des coordonnées. Pour connaître d_q , il suffit de se donner pour tous les $\Delta \in I_q$, $\Delta_1 \in I_{q-1}$ un homomorphisme $d_{\Delta, \Delta_1}: A_\Delta \rightarrow A_{\Delta_1}$. Nous poserons $d_{\Delta, \Delta_1} = \sigma(\Delta, \Delta_1) \pi_{\Delta, \Delta_1}$, où $\sigma(\Delta, \Delta_1) = \pm 1$ si $\Delta_1 \subset \Delta$ et $\sigma(\Delta, \Delta_1) = 0$ dans le cas contraire. Le signe « + » ou « - » est choisi de la manière suivante. Prenons une certaine orientation de Γ , les orientations induites sur les faces $\Delta \subset \Gamma$ et des orientations quelconques sur les autres faces. Si $\Delta \in I_q$, $\Delta_1 \in I_{q-1}$, $\Delta_1 \subset \partial \Delta$ posons $\sigma(\Delta, \Delta_1) = 1$ lorsque l'orientation induite sur Δ_1 coïncide avec l'orientation de Δ_1 et $\sigma(\Delta, \Delta_1) = -1$ dans le cas contraire. Il découle de la proposition 2.4 que d_q est un homomorphisme de A -modules gradués qui respecte la graduation. Oublions maintenant la structure de A -module sur C_q et démontrons que la suite de \mathcal{C} -modules (9) est exacte. Pour chaque $m \in \mathbb{N}^k$ posons $A(m) = \mathcal{C}$ et pour $\Delta \subset \Gamma$ posons

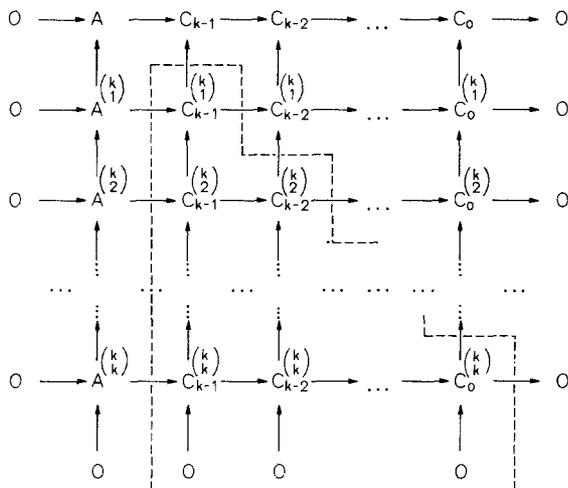
$$A_\Delta(m) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{si } m \in P(\Delta), \\ 0, & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Il est évident que $A = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} A(m)$ et $A_\Delta = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} A_\Delta(m)$. Ainsi, nous avons introduit une \mathbb{N}^k -graduation sur les modules A et A_Δ . Nous obtenons de cette manière une graduation sur $C_q: C_q = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} C_q(m)$. On voit facilement que tous les homomorphismes d_q respectent cette \mathbb{N}^k -graduation. Pour démontrer l'exactitude de (9), il suffit donc de montrer que pour chaque $m \in \mathbb{N}^k$ la suite

$$0 \rightarrow A(m) \xrightarrow{d_k(m)} C_{k-1}(m) \xrightarrow{d_{k-1}(m)} C_{k-2}(m) \rightarrow \dots \rightarrow C_1(m) \xrightarrow{d_1(m)} C_0(m) \rightarrow 0 \quad (10)$$

est exacte. Posons $X(m) = \bigcup_{P(\Delta) \ni m} \Delta$. Considérons la décomposition cellulaire de la variété topologique Γ en celules correspondantes aux faces et la décomposition induite des espaces $X(m)$. On voit facilement que la suite (10) (sans le membre $A(m)$) est isomorphe au complexe des chaînes cellulaires de la paire $(X(m), \partial X(m))$ à coefficients dans \mathcal{C} . Il découle de la convexité de Γ que la paire $(X(m), \partial X(m))$ est homotopiquement équivalente à la paire (disque, frontière du disque), et donc seules les homologies de dimension maximale sont non-nulles, et elles sont isomorphes à $\mathcal{C} = A(m)$. Ainsi, la suite (10), et donc la suite (9), est exacte. \square

2.12. *Démonstration du théorème 2.8.* Construisons les complexes de Koszul des éléments F_1, \dots, F_k de l'anneau A à coefficients dans les A -modules de la résolvante (9). Nous obtenons le diagramme suivant



dans lequel toutes les lignes sont exactes (la première ligne est la résolvante de (9), la deuxième ligne est la somme de $\binom{k}{1}$ exemplaire de la résolvante de (9), etc. Ce diagramme est commutatif, puisque les homomorphismes de la résolvante de (9) sont des homomorphismes de A -modules. Si nous montrons que les colonnes sont exactes dans tous les termes situés plus bas que la ligne pointillée, alors une étude du diagramme, laissée au lecteur, donne l'exactitude de la colonne extrême gauche dans tous ses termes, ce qu'il fallait démontrer. Le complexe de Koszul des éléments F_1, \dots, F_k de l'anneau A à coefficient dans le A -module C_q est isomorphe à la somme directe des complexes de Koszul à coefficient dans A_Δ où $\Delta \in I_q$. Chacun de ces complexes est à son tour isomorphe (comme complexe de \mathcal{C} -modules) au complexe de Koszul des éléments $\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k$ de l'anneau A_Δ , puisque A_Δ est une A -algèbre.

Commençons par le cas d'une face Δ de dimension maximale $\Delta \in I = I_{k-1}$. Dans ce cas, l'anneau A_Δ est de dimension k et les éléments $\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k$ engendrent dans A_Δ un idéal de codimension finie (d'après la condition de non-dégénérescence). Puisque, selon le théorème de M. Hochster [5] (voir 5.6), l'anneau A_Δ est un anneau de Cohen-Macaulay, la suite $\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k$ est régulière d'après une propriété bien connue des anneaux de Cohen-Macaulay (voir, par exemple, [11]). On sait que le complexe de Koszul d'éléments qui forment une suite régulière est acyclique dans les dimensions positives (voir, par exemple, [11]). On a donc démontré que la deuxième colonne à partir de la gauche est acyclique.

Dans le cas $\Delta \in I_q$ $0 \leq q \leq k-2$, nous remarquerons d'abord que parmi les éléments $\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k$ il ne peut y avoir plus de $\dim A_\Delta$ qui sont linéairement indépendants sur \mathcal{C} . En effet, parmi les restrictions des dérivations $x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ sur l'anneau $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ pas plus de $\dim \text{Cône}(\Delta)$ sont linéairement indépendantes. Supposons que $\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_{q+1}$ sont déjà linéairement indépendantes. Puisque

leur nombre est égal à $\dim A_\Delta$, et elles engendrent un idéal de codimension finie d'après la condition de non-dégénérescence, le théorème de M. Hochster implique que le complexe de Koszul des éléments $\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_{q+1}$ est acyclique en dimensions positives. La suite exacte de la paire nous montre que si le complexe de Koszul des éléments g_1, \dots, g_i d'un certain anneau est acyclique en dimensions plus grandes que j , alors pour chaque g_{i+1} le complexe de Koszul des éléments g_1, \dots, g_i, g_{i+1} est acyclique en dimensions plus grandes que $j+1$. Appliquant successivement cette assertion $k-q+1$ fois, nous voyons que le complexe de Koszul des éléments $\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k$ est acyclique en dimensions plus grandes que $k-q+1$, ce qui restait à démontrer. \square

2.13. *Démonstration du lemme 2.9.* L'assertion (i) est évidente, puisque l'anneau A_Δ est noethérien (voir 4.4). Si le cône $\text{Cône}(\Delta)$ est représenté sous forme de réunion de deux cônes convexes $\text{Cône}(\Delta) = K_1 \cup K_2$ qui se coupent par un cône de plus petite dimension K_{12} , alors

$$p_{A_\Delta}(t) = p_{\mathcal{C}[P_1]}(t) + p_{\mathcal{C}[P_2]}(t) - p_{\mathcal{C}[P_{12}]}(t),$$

où

$$P_1 = \mathbb{N}^k \cap K_1, \quad P_2 = \mathbb{N}^k \cap K_2, \quad P_{12} = \mathbb{N}^k \cap K_{12}.$$

Il découle de 2.9 (i) que

$$p_{A_\Delta}(t)(1-t^M)^k|_{t=1} = (p_{\mathcal{C}[P_1]}(t) + p_{\mathcal{C}[P_2]}(t))(1-t^M)^k|_{t=1}.$$

Il est facile de décomposer la face Δ en simplexes dont les sommets sont les sommets de Δ . Décomposons le cône $\text{Cône}(\Delta)$ dans les cônes correspondants. D'après la formule précédente, il suffit de démontrer (ii) pour chacun de ces cônes simpliciaux, i.e. on peut supposer que la face Δ est un simplexe. Soient m_1, \dots, m_k les sommets de ce simplexe. On a évidemment

$$\begin{aligned} p_{A_\Delta}(t)(1-t^M)^k|_{t=1} &= \left(\text{nombre de points dans l'ensemble } P(\Delta) \setminus \bigcup_{q=1}^k (m_q + P(\Delta)) \right) \\ &= \text{nombre de points dans le groupe quotient} \\ &\quad \mathbb{Z}^k / (\text{sous-groupe engendré par } m_1, \dots, m_k) \\ &= |\det(m_1, \dots, m_k)| = k! V_{k\Delta}. \quad \square \end{aligned}$$

§ 3. Démonstration des assertions (i) et (ii) du théorème I

3.1. **Proposition.** *Le théorème AI implique l'assertion (ii) du théorème I pour les séries commodées à parties principales newtoniennes non-dégénérée à l'origine, i.e. implique la formule (4).*

Démontrons d'abord deux lemmes.

3.2. **Lemme.** *Si $g', g'', g_2, \dots, g_k \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ et $g_1 = g' \cdot g''$, alors*

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]] / (g_1, g_2, \dots, g_k) &= \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]] / (g', g_2, \dots, g_k) \\ &\quad + \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]] / (g'', g_2, \dots, g_k). \end{aligned}$$

Démonstration. L'index d'intersection des diviseurs sur une variété algébrique non singulière est additif (voir, par exemple, [12] chapitre 2, § 1). \square

Appliquant successivement ce lemme, nous voyons que le nombre

$$\dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]] / \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)$$

est égal à une somme de 2^k termes. Pour exprimer cette somme, introduisons les notations suivantes. Soit I un sous-ensemble propre de l'ensemble $\{1, 2, \dots, k\}$. Désignons par $|I|$ le nombre d'éléments dans I . Posons

$$\mathbb{R}_{+I} = \{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}_+^k : \forall \alpha \in I, t_\alpha = 0\}$$

et $\mathbb{N}_I = \mathbb{N}^k \cap \mathbb{R}_{+I}$. Pour $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n$ posons $f_I = \sum_{n \in \mathbb{N}_I} a_n x^n$ et considérons f_I comme étant une série formelle de $k - |I|$ variables. Désignons le nombre de Milnor de la série f_I par μ_I . Posons $\mu_\emptyset = \mu(f)$ et $\mu_{\{1, \dots, k\}} = 1$. Avec ces notations

$$\dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]] / \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \sum_{I \in 2^{\{1, \dots, k\}}} \mu_I. \quad (11)$$

3.3 Lemme. Soit $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ une série formelle commode à partie principale newtonienne non-dégénérée à l'origine. Soit I un sous-ensemble propre de l'ensemble $\{1, \dots, k\}$. Alors

- (i) la série f_I est une série formelle commode à partie principale newtonienne non-dégénérée à l'origine,
- (ii) $\Gamma_-(f_I) = \Gamma_-(f) \cap \mathbb{R}_{+I}$.

La démonstration est évidente. \square

3.4. Démonstration de la proposition 3.1. Soit I un sous-ensemble propre de l'ensemble $\{1, \dots, k\}$. Désignons par w_I le volume de dimension $(k - |I|)$ du polyèdre $\Gamma_-(f_I)$ multiplié par $(k - |I|)!$. Posons $w_{\{1, \dots, k\}} = 1$, $w_\emptyset = k!$ V_k où V_k est le volume de dimension k de $\Gamma_-(f)$. Soit f une série commode à partie principale non-dégénérée à l'origine. D'après 3.3 (i), on peut appliquer le théorème **AI** à chacune des séries f_I . En se servant de la formule (11) pour f_I nous obtenons

$$w_I = \sum \mu_{I_1}, \quad \text{où } I \subseteq I_1 \subseteq \{1, \dots, k\}. \quad (12)$$

D'après 3.3(ii), la formule (4) qu'il s'agit de démontrer peut être réécrite sous la forme suivante

$$\mu(f) = \sum (-1)^{|I|} w_I, \quad \text{où } I \in 2^{\{1, \dots, k\}}. \quad (13)$$

Calculons le deuxième membre de (13) en se servant de (12).

$$\sum_I (-1)^{|I|} w_I = \sum_I (-1)^{|I|} \sum_{I \subseteq I_1 \subseteq \{1, \dots, k\}} \mu_{I_1} = \sum_{I_1 \subseteq \{1, \dots, k\}} \left(\sum_{I \subseteq I_1} (-1)^{|I|} \right) \mu_{I_1}. \quad (14)$$

Le coefficient de μ_\emptyset dans le deuxième membre de (14) est égal à 1, tandis que le coefficient de μ_{I_1} (pour $I_1 \neq \emptyset$) est égal à

$$\left(\sum_{0 \leq i \leq |I_1|} (-1)^i \binom{|I_1|}{i} \right) = 0. \quad \square$$

Passons à la démonstration de l'assertion (ii) du théorème I pour les séries non-commodes. Nous devons nous servir des deux propositions suivantes. Désignons par \mathfrak{m} l'idéal maximal de l'anneau $\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]] = \mathcal{C}[[x]]$.

3.5. Lemme (voir [13]). Soit J un idéal de l'anneau $\mathcal{C}[[x]]$ qui satisfait pour un certain entier $l > 0$ à la condition

$$\dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[x]] / (J + \mathfrak{m}^{l+1}) \leq l.$$

Alors $J \supset \mathfrak{m}^l$. \square

3.6. Proposition. Soient $f, f_1 \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$, $\mu(f) = l < \infty$ et soit $f_1 - f \in \mathfrak{m}^{l+2}$. Alors $\mu(f_1) = \mu(f)$.

Démonstration. Désignons par J l'idéal

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)$$

et par J_1 l'idéal

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \right).$$

D'après le lemme 3.5 $J \supset \mathfrak{m}^{l+1}$. Donc $l = \mu(f) = \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[x]] / (J + \mathfrak{m}^{l+1})$. Puisque $\frac{\partial}{\partial x_i} (f_1 - f) \in \mathfrak{m}^{l+1}$ on a $J + \mathfrak{m}^{l+1} = J_1 + \mathfrak{m}^{l+1}$. Par conséquent, d'après le lemme 3.5, $J_1 = J + \mathfrak{m}^{l+1}$, $\mu(f_1) = l$. \square

3.7. Théorème. Soit $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ une série non-commode ne contenant pas de monôme de la forme $x_i^{n_i}$ pour $i = 1, \dots, q$ et contenant des monômes de cette forme pour les autres variables. Supposons que $\text{char } \mathcal{C} = 0$. Désignons par $g = g_{\alpha, m}$ la série $f + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^m$ ($\alpha_i \in \mathcal{C}$). Alors

(i) il existe un m_0 tel que pour $m \geq m_0$ et $\alpha_i \neq 0$ la partie principale newtonienne g_0 de la série g à l'origine est égale à $f_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^m$, tout en étant non-dégénérée pour presque tous les α ,

(ii) si $\dim \Gamma(f) = k - 1$, alors dans (i) on peut prendre le nombre $(d(f))^k + 1$ dans le rôle de m_0 (voir 1.11),

(iii) il existe un polynôme $p(m)$ dont le terme de degré nul est égal à $v(\Gamma_-(f))$, tel que pour un nombre infini de valeurs de m on a $v(g_{\alpha, m}) = p(m)$.

Démonstration. La première partie de l'assertion (i) s'obtient par des considérations géométriques très simples. La non-dégénérescence de g se démontre par les mêmes raisonnements que l'assertion (iii) du théorème I (voir §6). L'assertion (ii) découle du fait que les hyperplans des faces de dimension $k - 1$ de la frontière $\Gamma(f)$ coupent les axes en des points situés à une distance de l'origine inférieure ou égale à $(d(f))^k$ (définition de $d(f)$ + règle de Kramer). L'assertion (iii) se démontre de la manière suivante. Il découle de (i) que pour $m \geq m_0$ la frontière $\Gamma(g)$ possède un nombre de sommets constant. Il n'existe qu'un nombre

fini de types combinatoires distincts de frontière à nombre de sommets donné. Pour un type de $\Gamma(g)$ fixe, le nombre $v(\Gamma(g))$ est un polynôme dépendant des coordonnées des sommets de $\Gamma(g)$, i.e. un polynôme en m . Pour chaque $m \geq m_0$ le nombre $v(\Gamma(g_{\alpha, m}))$ s'obtient par une des formules d'une liste finie, et donc pour un nombre infini de valeurs de m le nombre $v(\Gamma(g_{\alpha, m}))$ s'obtient par une de ces formules, mettons $p(m)$. Il est évident géométriquement que le terme constant de ce polynôme $p(m)$ est égal à $v(\Gamma_-(f))$. \square

3.8. Démonstration de l'assertion (ii) du théorème I et de la proposition 1.12.

Supposons que, dans les conditions du théorème 3.7, on a $v(f) < \infty$. Alors, d'après 3.7(i), la définition de $v(f)$ et la formule (4), on a $\mu(g) = v(g) = v(f)$ pour des m suffisamment grands. Puisque $g_{\alpha, m} - f \in \mathfrak{m}^m$, en supposant en outre que $m \geq v(f) + 2$, nous pouvons appliquer 3.6 pour obtenir $\mu(f) = \mu(g_{\alpha, m}) = v(g_{\alpha, m}) = v(f)$. Supposons maintenant que $v(f) = \infty$ et réduisons à l'absurde l'hypothèse $\mu(f) < \infty$. Si $\mu(f) < \infty$, alors, d'après 3.6, on a $\mu(g_{\alpha, m}) = \mu(f)$ pour tous les m suffisamment grands. Mais la série $g_{\alpha, m}$ est commode et non-dégénérée d'après 3.7(i); donc, d'après la formule (4), $\mu(g_{\alpha, m}) = v(g_{\alpha, m})$ et, par conséquent, $v(f) = \sup_{m \in \mathbb{N}} v(g_{\alpha, m}) < \infty$. Démontrons maintenant 1.12(i). Considérons le polynôme $p(m)$ dont l'existence est affirmée par 3.7(iii). Si $p(m)$ n'est pas une constante, on a $v(f) = \infty$. Par contre, si $p(m) \equiv v(\Gamma_-(f))$, on peut trouver un $m \geq v(\Gamma_-(f)) + 2$ tel que $v(g_{\alpha, m}) = p(m) = v(\Gamma_-(f))$ et donc $\mu(g_{\alpha, m}) = v(\Gamma_-(f))$; et enfin, d'après 3.6, $\mu(f) = \mu(g_{\alpha, m}) = v(\Gamma_-(f))$.

Démontrons maintenant 1.12(ii). Si l'on a $\mu(f) < \infty$ alors, d'après 3.6 pour un m suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned} \mu(f) &= \mu(g_{\alpha, m}) = v(g_{\alpha, m}) \\ &= v(\text{partie principale newtonienne de } g_{\alpha, m}) \\ &= v\left(f_0 + \sum_{i=1}^q x_i^m\right) = \mu\left(f_0 + \sum_{i=1}^q x_i^m\right). \end{aligned}$$

D'après 3.6, ce dernier nombre est égal à $\mu(f_0)$. La série f_0 est un polynôme de degré $d(f)$. On sait que le nombre de Milnor d'un point isolé singulier d'un polynôme de degré d en k variables est inférieur ou égal à $(d-1)^k$ («théorème de Bésout»). Ainsi, $\mu(f) = \mu(f_0) \leq (d(f)-1)^k$. Par conséquent, d'après 3.6,

$$\mu(f) = \mu\left(f + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^{(d(f))^k+1}\right) = v\left(f + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^{(d(f))^k+1}\right)$$

et donc

$$v\left(f + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^{(d(f))^k+1}\right) \leq (d(f)-1)^k.$$

Supposons maintenant que

$$v\left(f + \sum_{i=1}^q x_i^{(d(f))^k+1}\right) \leq (d(f)-1)^k,$$

alors

$$\mu \left(f + \sum_{i=1}^q x_i^{(d(f))^k + 1} \right) \leq (d(f) - 1)^k$$

et puisque $(d(f))^k + 1 \geq (d(f) - 1)^k + 2$ on a, d'après 3.6 $\mu(f) < \infty$. \square

3.9. Démonstration de l'assertion (i) du théorème I. Soit $\text{char } \mathcal{C} = 0$. Etant donné une série formelle f , on peut, d'après I(iii) trouver une approximation de f consistant d'une famille de séries non-dégénérées à un paramètre, avec la même frontière de Newton $\Gamma = \Gamma(f)$ pour chaque série. D'après I(ii), le nombre de Milnor de chacune de ces séries est égal au nombre de Newton et il suffit donc d'appliquer la semi-continuité des nombre de Milnor. Considérons maintenant le cas $\text{char } \mathcal{C} \neq 0$.

Il découle de l'assertion (i) du théorème I pour le cas de caractéristique nulle et de la proposition 3.6 qu'il nous suffit de démontrer pour chaque sous-ensemble $\mathcal{M} \subset \mathbb{N}^k$ et pour chaque v naturel l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned} & \inf_{\substack{f \in \mathcal{C}[[x]] \\ \text{supp } f \subset \mathcal{M}}} \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[x]] / \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \mathfrak{m}_{\mathcal{C}}^v \right) \\ & \geq \inf_{\substack{g \in \mathbb{C}[[x]] \\ \text{supp } g \subset \mathcal{M}}} \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x]] / \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) + \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^v \right) \end{aligned}$$

(où $\mathfrak{m}_{\mathcal{C}}$ et $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ sont des idéaux maximaux des anneaux $\mathcal{C}[[x]]$ et $\mathbb{C}[[x]]$ respectivement). Posons $f = \sum_{m \in \mathcal{M}} u_m x^m$, $g = \sum_{m \in \mathcal{M}} v_m x^m$. Désignons par H un des corps \mathcal{C} et \mathbb{C} , par h une des fonctions f et g . Le nombre

$$\dim_H H[[x]] / \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) + \mathfrak{m}_H^v \right)$$

se calcule à l'aide du rang de l'application linéaire des espaces vectoriels sur H :

$$\begin{aligned} & (H[[x]]/\mathfrak{m}_H^v)^k \rightarrow H[[x]]/\mathfrak{m}_H^v \\ & (a_1 + \mathfrak{m}_H^v, \dots, a_k + \mathfrak{m}_H^v) \rightarrow a_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + \dots + a_k \frac{\partial h}{\partial x_k} + \mathfrak{m}_H^v. \end{aligned}$$

Ecrivons la matrice de cette application dans la base monômiale. Dans le cas $H = \mathbb{C}$, $h = g$ les coefficients de la matrice obtenue sont des polynômes d'un nombre fini de variables v_m à coefficients entiers. Pour obtenir un élément de cette matrice dans le cas $H = \mathcal{C}$, $h = f$ il faut, dans l'élément correspondant de la matrice précédente, remplacer v_m par u_m , et les coefficients entiers par leurs valeurs modulo $\text{char } \mathcal{C}$; (15) est démontré. \square

§ 4. Démonstration du théorème CI

Dans ce paragraphe, le mot filtration signifie \mathbb{Z} -filtration décroissante. Rappelons qu'une application $\partial: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ de \mathcal{C} -modules filtrés s'appelle stricte si $\forall q \in \mathbb{Z}$ on a

$\partial \mathcal{X}_q = \partial \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_q$. Soit \mathcal{A} une \mathcal{C} -algèbre filtrée qui satisfait à la condition $\mathcal{A} = \bigcup_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_q$. Désignons $\text{gr } \mathcal{A} = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_q / \mathcal{A}_{q+1}$ par $A = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} A_q$. Soit $f_i \in A_{d_i}$,

$$F_i = f_i + \mathcal{A}_{d_i+1} \in A_{d_i} \quad (1 \leq i \leq k).$$

4.1. Théorème. *Supposons que le complexe de Koszul des éléments F_1, \dots, F_k de la \mathcal{C} -algèbre A est acyclique en dimension 1; alors:*

(i) *on a l'isomorphisme de \mathcal{C} -modules*

$$\text{gr}(\mathcal{A}/(f_1, \dots, f_k)) \cong A/(F_1, \dots, F_k) \quad (16)$$

(ii) *le morphisme $\partial_1: \mathcal{A}^k \rightarrow \mathcal{A}$ qui envoie (g_1, \dots, g_k) dans $g_1 f_1 + \dots + g_k f_k$ est strict pour le choix suivant de la filtration dans \mathcal{A}^k :*

la filtration de $(0, \dots, g_i, \dots, 0)$ dans \mathcal{A}^k est égale à la filtration de g_i dans \mathcal{A} moins d_i .

4.2. Déduisons le théorème CI de 4.1(i). Posons

$$f_i = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{A}_M$$

pour $1 \leq i \leq k$. Des conditions du théorème CI, compte tenu du théorème 2.8, on peut déduire que le complexe de Koszul des éléments F_1, \dots, F_k est acyclique en dimensions positives. Ainsi, les conditions du théorème 4.1 sont satisfaites et on a donc (16). Il reste à démontrer que $\dim_{\mathcal{C}} \text{gr}(\mathcal{A}/(f_1, \dots, f_k)) = \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{A}/(f_1, \dots, f_k)$. Désignons l'idéal (f_1, \dots, f_k) par \mathcal{I} , \mathcal{A}/\mathcal{I} par \mathcal{X} et $\text{gr } \mathcal{X}$ par X . D'après le théorème BI, $\dim_{\mathcal{C}} X < \infty$ et il existe donc un $r \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{X}_r = \mathcal{X}_{r+1} = \dots$ i.e. $\mathcal{I} + \mathcal{A}_r = \mathcal{I} + \mathcal{A}_{r+1} = \dots$. Il découle de la définition de la filtration de Newton (voir 2.1), qu'il existe de telles $n, l \in \mathbb{N}$ que $n > r$ et l'on a

$$\mathcal{A}_r \supset \mathfrak{m}^l \supset \mathfrak{m}^{l+1} \supset \mathcal{A}_n.$$

Puisque $\mathcal{I} + \mathcal{A}_r = \mathcal{I} + \mathcal{A}_n$, on a $\mathcal{I} + \mathfrak{m}^l \subset \mathcal{I} + \mathfrak{m}^{l+1}$. D'après le lemme de Nakayama $\mathcal{I} \supset \mathfrak{m}^l \supset \mathcal{A}_n$, on a donc $\mathcal{X}_n = 0$. Ainsi, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 / \mathcal{X}_n$ et donc

$$\dim_{\mathcal{C}} \mathcal{X} = \sum_{q=0}^{n-1} \dim_{\mathcal{C}} (\mathcal{X}_q / \mathcal{X}_{q+1}) = \sum_{q=0}^{n-1} \dim_{\mathcal{C}} X_q = \dim_{\mathcal{C}} X.$$

La démonstration du théorème 4.1 est basée sur deux lemmes.

4.3. Lemme. *Soit*

$$\mathcal{K} \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{B} \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{A}$$

un complexe de \mathcal{C} -modules filtrés, ∂_1 et ∂_2 respectant la filtration. Désignons $\text{gr } \mathcal{K}$, $\text{gr } \mathcal{B}$, $\text{gr } \mathcal{A}$, $\text{gr } \partial_2$, $\text{gr } \partial_1$ par K, B, A, d_2, d_1 respectivement. Supposons que $\mathcal{B} = \bigcup_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_q$ et la suite

$$K \xrightarrow{d_2} B \xrightarrow{d_1} A \quad (17)$$

est exacte. Alors, $\forall q \in \mathbb{Z}$ on a $\partial_1(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A}_q = \partial_1(\mathcal{B}_q)$, c'est-à-dire que le morphisme ∂_1 est strict.

Démonstration de 4.3. Soit $\partial_1 b = a \in \mathcal{A}_q$. Posons $q_1 = \max \{n : n \leq q, a \in \partial(\mathcal{B}_n)\}$. Puisque $\mathcal{B} = \bigcup_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_q$ l'ensemble entre les crochets est non-vide et q_1 est correctement défini. Montrons que $q_1 = q$. Supposons que $q_1 < q$. On peut trouver un $b_1 \in \mathcal{B}_{q_1}$ pour lequel $\partial_1 b_1 = a$. Donc, $\partial_1(b_1 + \mathcal{B}_{q_1+1}) \subseteq a + \mathcal{A}_{q_1+1} \subseteq \mathcal{A}_{q_1}$. De l'exactitude de (17), on déduit l'existence d'un tel $x \in \mathcal{K}_{q_1}$ que $\partial_2(x + \mathcal{K}_{q_1+1}) \subseteq b_1 + \mathcal{B}_{q_1+1}$. Par conséquent, $b_1 - \partial_2 x \in \mathcal{B}_{q_1+1}$ et $\partial_1(b_1 - \partial_2 x) = \partial_1 b_1 = a$ ce qui contredit à la définition de q_1 . \square

4.4. Lemme. Soit $\partial : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ un morphisme strict de \mathcal{C} -modules filtrés, i.e.

$$\forall q \in \mathbb{Z} \quad \partial(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A}_q = \partial(\mathcal{B}_q).$$

On a alors l'isomorphisme de \mathcal{C} -modules

$$\text{gr}(\mathcal{A}/\partial(\mathcal{B})) \cong \text{gr } \mathcal{A} / \text{gr}(\partial)(\text{gr } \mathcal{B}).$$

4.5. La démonstration s'obtient facilement du fait que $(\mathcal{A}/\partial(\mathcal{B}))_i = \mathcal{A}_i/\partial(\mathcal{B}_i)$. \square

4.6. *Démonstration du théorème 4.1.* Considérons un morceau du complexe de Koszul des éléments $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \binom{k}{2} \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{A} \binom{k}{1} \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{A}$$

où la filtration dans $\mathcal{A} \binom{k}{2}$ est introduite de la même manière que la filtration dans $\mathcal{A} \binom{k}{1}$ dans le théorème 4.1. Il est clair que la suite de gr-objets correspondants

$$A \binom{k}{2} \xrightarrow{d_2} A \binom{k}{1} \xrightarrow{d_1} A$$

est un morceau du complexe de Koszul des éléments F_1, \dots, F_k de l'anneau $A = \text{gr } \mathcal{A}$. D'après le lemme 4.3, le morphisme ∂_1 est strict, ce qui démontre (ii). Puisque $(f_1, \dots, f_k) = \text{Im}(\partial_1)$ et $(F_1, \dots, F_k) = \text{Im}(d_1)$ d'après le lemme 4.4, (ii) implique (i). \square

4.7. *Remarque.* Les résultats de ce paragraphe donnent une certaine information sur l'anneau local de la fonction f et sur les déformations de f qui ne changent pas la frontière de Newton. Nous avons calculé la série de Poincaré de l'anneau

$\text{gr} \left(\mathcal{A} / \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right)$ ce qui s'avère utile pour le calcul de la série de

Poincaré sur l'anneau $\text{gr} \left(\mathcal{A} / \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right)$. En répétant les raisonnements de V.I.

Arnold [4, 7.2], on peut démontrer (en se servant du fait que ∂_1 est strict) que chaque série commode f à partie principale newtonienne non-dégénérée f_0 est équivalente à la série $f_0 + \sum \lambda_i e_i$ où e_i sont des représentants d'une base quelconque de l'espace de dimension finie $\bigoplus_{q > M} A_q / (A_q \cap (F_1, \dots, F_k))$ et $\lambda_i \in \mathcal{C}$. (Voit aussi § 7.)

§ 5. Semi-groupes coniques et anneaux coniques. Filtration de Newton d'un anneau conique. Sur la démonstration des théorèmes II, III

Considérons le group \mathbb{Z}^k et un ensemble fini I d'homomorphismes $\varphi: \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}$. Considérons l'ensemble

$$P = \{m \in \mathbb{Z}^k: \forall \varphi \in I \varphi(m) \geq 0\}. \quad (18)$$

Il est évident que P est un semi-groupe.

5.1. *Définition.* Appelons un tel P *semi-groupe quasi conique*. Nous dirons que P est de dimension d si P engendre dans \mathbb{Z}^k un groupe de rang d , ou, ce qui est équivalent, le groupe de Grothendieck du semi-groupe P est isomorphe à \mathbb{Z}^d . Un semi-groupe quasi conique P sera appelé *conique* si P ne contient pas de sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z} .

Considérons les injections naturelles $\mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ et prolongeons par linéarité chaque homomorphisme qui définit le semi-groupe P à un homomorphisme $\varphi': \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. L'ensemble

$$P' = \{t \in \mathbb{R}^k: \forall \varphi \in I \varphi'(t) \geq 0\}$$

est évidemment un cône convexe de dimension d dans \mathbb{R}^k et on a $P = P' \cap \mathbb{Z}^k$.

5.2. *Définition.* Le sous-semi-groupe P_1 d'un semi-groupe conique sera appelé *sous-semi-groupe frontière*, s'il existe un sous ensemble $I_1 \subset I$ tel que

$$P_1 = \{m \in P: \forall \varphi \in I_1 \varphi(m) = 0\}. \quad \square$$

Chaque sous-semi-groupe frontière d'un semi-groupe conique est lui-même un semi-groupe conique et la relation: « A est un sous-semi-groupe frontière dans B » est transitive dans un sens évident. Du point de vue géométrique, chaque sous-semi-groupe frontière de P peut être décrit comme étant l'intersection de P avec une face de dimension q du cône P' .

Soit P un semi-groupe, $f: P \rightarrow \mathcal{C}$ une fonction sur P à valeurs dans \mathcal{C} . Posons $\text{supp } f = \{n \in P: f(n) \neq 0\}$. La fonction f s'appelle *finie*, si l'ensemble $\text{supp } f$ est fini. Désignons par $\mathcal{C}[P]$ l'anneau de semi-groupe (la \mathcal{C} -algèbre) du semi-groupe P , i.e. la \mathcal{C} -algèbre de toutes les fonctions finies sur P à valeurs dans \mathcal{C} , avec les opérations d'addition, de convolution et de multiplication par les éléments de \mathcal{C} . Si dans le semi-groupe P l'équation $m = x + y$ pour chaque $m \in P$ ne possède qu'un nombre fini de solutions, on peut définir la convolution de deux fonctions quelconques sur P à valeurs dans \mathcal{C} . Dans ce cas, toutes les fonctions sur P à valeurs dans \mathcal{C} forment une \mathcal{C} -algèbre que nous désignerons par $\mathcal{C}[[P]]$. On voit facilement qu'une telle \mathcal{C} -algèbre est définie pour chaque semi-groupe conique.

5.3. *Définition.* Les anneaux $\mathcal{C}[P]$, où P est un semi-groupe quasi conique, et $\mathcal{C}[[P]]$, où P est un semi-groupe conique, seront appelés anneaux coniques du semi-groupe P (sur le corps \mathcal{C}).

5.4. **Proposition.** *Les anneaux coniques sont Noetheriens.*

Démonstration. On voit facilement qu'un semi-groupe quasi-conique possède un nombre fini de générateurs. Par conséquent, l'anneau conique est un anneau quotient soit de l'anneau des polynômes, soit de l'anneau des séries formelles sur d'un nombre fini de variables. \square

5.5. *Remarque.* Evidemment, si le semi-groupe P est donné par la formule (18), alors on a

$$\mathcal{C}[P] \cong \{f \in \mathcal{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}] : \text{supp } f \subset P\}. \quad \square$$

5.6. **Théorème** (M. Hohster [5]). *Les anneaux coniques sont des anneaux de Cohen-Macaulay.*

Limitons-nous aux anneaux de la forme $\mathcal{C}[P]$ où P est un semi-groupe conique. Soit $\psi: P \rightarrow \mathbb{N}$ un homomorphisme non-trivial. Prenons dans l'anneau $\mathcal{C}[P]$ une \mathbb{N} -graduation en posant

$$(\mathcal{C}[P])_q = \{f \in \mathcal{C}[P] : \text{supp } f \subset \psi^{-1}(q)\}.$$

D'après des théorèmes bien connus d'algèbre locale (voir, par exemple, [11]), la démonstration de 5.6 découle de l'assertion suivante

5.7. **Théorème.** *Il existe $k = \dim P$ éléments homogènes f_1, \dots, f_k de l'anneau $\mathcal{C}[P]$ de degrés d'homogénéité positifs, dont le complexe de Koszul est acyclique en dimensions positives.*

La définition de la filtration de Newton ci-dessus, qui contient, comme cas particulier, la définition donnée dans le § 2, nous permet d'employer (avec des modifications peu importantes), la démonstration du théorème **AI** pour obtenir celle des théorèmes **II** et **III** et celle du théorème 5.7.

Soit P un semi-groupe quasi-conique, I_0 un nombre fini d'homomorphismes $\psi: P \rightarrow \mathbb{Z}$. Définissons l'application $\phi: P \rightarrow \mathbb{Z}$ par l'égalité.

$$\phi(m) = \min_{\varphi \in I_0} \varphi(m) \quad (m \in P). \quad (19)$$

Supposons que \mathcal{A} est un anneau conique du semi-groupe P sur le corps \mathcal{C} i.e. soit l'anneau $\mathcal{C}[P]$, soit l'anneau $\mathcal{C}[[P]]$.

5.8. *Définition.* (Comparer à [4, 9.1].) Définissons la filtration de Newton $\dots \mathcal{A}_q \supset \mathcal{A}_{q+1} \supset \dots$ ($q \in \mathbb{Z}$) de l'anneau conique \mathcal{A} (correspondante à l'application ϕ) par la formule

$$\mathcal{A}_q = \{f \in \mathcal{A} : \text{supp } f \subset \phi^{-1}(q + \mathbb{N})\}. \quad \square$$

Les trois exemples de filtrations de Newton ci-dessus serviront à la démonstration des théorèmes **II** et **III** et du théorème 5.7.

5.9. Construisons la filtration de Newton de l'anneau $\mathcal{C}[x_1, \dots, x_k]$ liée à la frontière de Newton d'un polynôme commode $f \in \mathcal{C}[x_1, \dots, x_k]$. Construisons d'abord une application $h: \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}$ homogène au degré 1 qui satisfait à la condition $h(\tilde{F}(f)) = -1$. On voit facilement qu'il existe un entier naturel $M > 0$ tel que $h(\mathbb{N}^k) \subset \frac{1}{M} \mathbb{Z}$. Prenons un M minimal qui satisfait à cette condition et définissons

l'application $\phi: \mathbb{N}^k \rightarrow (\text{ensemble des entiers non-positifs})$ par l'égalité $\phi = M(h|\mathbb{N}^k)$. Il est clair que ϕ peut s'écrire sous la forme (19). Notons que dans cet exemple $M > 0$, $f \in \mathcal{A}_{-M}$, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{C}$. \square

5.10. Soit $f \in \mathcal{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}] \cong \mathcal{C}[\mathbb{Z}^k]$ un polynôme de Laurent qui satisfait à la condition $0 \in (\text{intérieur de } \Gamma^*(f))$. En commençant par une application homogène $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait à la condition $h(\Gamma^*(f)) = -1$, nous pouvons construire une filtration de Newton de l'anneau $\mathcal{C}[\mathbb{Z}^k]$ d'une manière tout à fait analogue à 5.9.

5.11. Soit P un semi-groupe conique de dimension k déterminé par la formule (18). Supposons que le cône correspondant $P' \subset \mathbb{R}^k$ n'est pas simplicial, c'est-à-dire que P' possède plus que k arêtes de dimension 1. Il existe alors une arête, mettons γ , qui n'est pas contenue dans au moins deux faces de dimension $k-1$ du cône P' . Désignons l'ensemble de toutes ces faces par I_0 . Soit m un certain point de $(\gamma \cap P) \setminus 0$. Pour chaque face $\Delta \in I_0$ il existe une application linéaire unique $h_\Delta: P' \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant à la condition $h_\Delta(\Delta) = 0$, $h_\Delta(m) = 1$. Posons $h = \min_{\Delta \in I_0} h_\Delta$. On voit facilement qu'il existe un entier $M > 0$ tel que $h(P) \subset \frac{1}{M} \mathbb{N}$. Prenons le M minimal qui satisfait à cette condition et posons $\phi = M(h|P)$. Remarquons que contrairement au cas précédent, $\phi^{-1}(0) \neq 0$ et $\dim_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_0 / \mathcal{A}_1 = \infty$. \square

Si \mathcal{A} est un anneau conique muni d'une filtration de Newton dans le sens de 5.8, alors l'anneau gradué associé possède essentiellement toutes les propriétés décrites dans le § 2 pour le cas particulier $\mathcal{A} = \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$. Par conséquent, la démonstration du théorème II répète presque mot par mot la démonstration du théorème I (le théorème analogue à AI dans le cas II doit être démontré à l'aide de la filtration 5.9). La même remarque se rapporte au théorème III dans le cas où $0 \in (\text{intérieur de } \Gamma^*(f))$. Lorsque $0 \notin \Gamma^*(f)$ le théorème III se démontre de la manière suivante. Trouvons un semi-groupe quasi conique minimal P contenant l'ensemble $\mathbb{Z}^k \cap \Gamma^*(f)$. Il découle de la condition $0 \notin \Gamma^*(f)$ que le semi-groupe P sera conique. Désignons par P' l'enveloppe convexe de P dans \mathbb{R}^k . Supposons que $g \in \mathcal{C}[[P]]$ se définit par l'égalité $g = f|P$ et que $\tilde{g} \in \mathcal{C}[P]$ se définit par l'égalité $\tilde{g} = f|P$. Toutes les définitions et les énoncés du § 1 qui se rapportent au cas I et II se ramènent facilement au cas du semi-groupe P . (Par exemple, $\Gamma_+(g) = (\text{enveloppe convexe dans } P' \text{ de l'ensemble } \bigcup (n+P) \text{ où } n \in \text{supp } g) \text{ etc.})$

De la commodité de f et de la condition de non-dégénérescence on obtient:

$$\mu^*(f) = \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[P] / \left(x_1 \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_k} \right) - \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{C}[[P]] / \left(x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial g}{\partial x_k} \right)$$

et les analogues des théorèmes I et II pour le semi-groupe P affirment que la dernière différence est égale à $\nu^*(f)$.

5.12. *Esquisse de la démonstration du théorème 5.7.* Si le nombre des arêtes de dimension un du cône P' est égal à k , alors pour f_i ($1 \leq i \leq k$) on peut choisir une fonction qui diffère de 0 seulement dans un point de l'arête de numéro i . Par conséquent, le théorème peut être démontré par une double récurrence sur la dimension et le nombre d'arêtes de dimension un du cône P' . Supposons que le cône P' n'est pas simplicial et soit m un élément défini dans 5.11. Cherchons une suite f_1, \dots, f_k qui satisfait à la conclusion du théorème 5.7 et pour laquelle $\text{supp } f_k = m$. Introduisons dans l'anneau $\mathcal{C}[P]$ la filtration de Newton décrite dans 5.11 et passons à l'anneau gradué associé A . L'anneau A est une «amalgame»

des anneaux des semi-groupes coniques contenant moins d'arêtes ou étant de plus petites dimensions. Ces anneaux sont des anneaux de Cohen-Macaulay par hypothèse de récurrence. Dans chacun de ces anneaux coniques les images des formes initiales des éléments f_1, \dots, f_k engendrent un idéal de codimension finie pour presque tous les f_1, \dots, f_{k-1} , ce qui permet d'appliquer les raisonnements du § 2. \square

§ 6. Démonstration du fait que l'ensemble des parties principales non-dégénérées est dense (pour la topologie de Zariski)

Sans perte de généralité, on peut supposer que le corps \mathcal{C} est algébriquement clos. Nous nous servirons ci-dessous des notations de 1.19 et de 1.20. Soit S un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^k . Posons $\mathcal{C}[S] = \{f \in \mathcal{C}[\mathbb{Z}^k] : \text{supp } f \subset S\}$.

Les assertions I(ii), II(iii) et III(iii), ainsi que l'équivalence des définitions 1.19 et 1.20 découlent directement des deux théorèmes suivants.

6.1. Théorème. *Supposons que $\text{char } \mathcal{C} = 0$. Pour chaque polyèdre $\Delta \subset \mathbb{R}^k$ qui satisfait aux hypothèses de 1.20, il existe un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{C}[\Delta]$ ouvert et dense pour la topologie de Zariski, qui consiste de tous les polynômes de Laurent $f \in \mathcal{C}[\Delta]$ tels que les polynômes de Laurent $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$ ne s'annulent pas en même temps sur $(\mathcal{C} \setminus 0)^k$.*

6.2. Théorème. *Pour chaque polyèdre $\Delta \subset \mathbb{R}^k$ qui satisfait aux hypothèses de 1.20 et pour chaque $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{C}[\Delta]$, les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *les éléments f_1, \dots, f_k de l'anneau $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ engendrent dans $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ un idéal de codimension finie,*
- (ii) *pour chaque face $\Delta_1 \subseteq \Delta$ du polyèdre Δ les polynômes de Laurent $f_{1, \Delta_1}, \dots, f_{k, \Delta_1}$ ne s'annulent pas en même temps sur $(\mathcal{C} \setminus 0)^k$.*

6.3. Démonstration de 6.1. On voit facilement que pour chaque $f \in \mathcal{C}[\mathbb{Z}^k]$ l'idéal $\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ ne dépend pas du choix de la base dans \mathbb{Z}^k . En choisissant, au cas échéant, une nouvelle base dans \mathbb{Z}^k , on peut supposer que pour un certain $i > 0$ on a $\Delta \subset \{t \in \mathbb{R}^k : t_k = i\}$. En remplaçant x_i par x_i^d ($i \leq k-1$) pour un $d \in \mathbb{N}$ convenable on peut supposer que pour un $f \in \mathcal{C}[\Delta]$ on a $\text{supp } f \ni (0, \dots, 0, i)$. Alors

$$f(x_1, \dots, x_k) = x_k^i g(x_1, \dots, x_{k-1})$$

où $g(x_1, \dots, x_{k-1})$ est un polynôme de Laurent en x_1, \dots, x_{k-1} . En même temps, si $x_k^i g \in \mathcal{C}[\Delta]$, alors pour chaque $\alpha \in \mathcal{C}$ on a $x_k^i (g - \alpha) \in \mathcal{C}[\Delta]$. En calculant les dérivées on voit que si

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (x_k^i (g - \alpha)), \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k} (x_k^i (g - \alpha))$$

s'annulent en même temps sur $(\mathcal{C} \setminus 0)^k$, alors α est une valeur critique du polynôme de Laurent $g(x_1, \dots, x_{k-1})$. Mais, d'après le théorème de Sard-Bertini, g ne possède qu'un nombre fini de valeurs critiques. Ainsi, pour chaque $f \in \mathcal{C}[\Delta]$ et pour presque tous les $\alpha \in \mathcal{C}$ les polynômes

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (f - \alpha x_k^i), \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k} (f - \alpha x_k^i)$$

ne peuvent s'annuler en même temps sur $(\mathcal{C} \setminus 0)^k$. Puisque pour chaque $\alpha \in \mathcal{C}$ et chaque $f \in \mathcal{C}[\Delta]$, on a $f - \alpha x_k^i \in \mathcal{C}[\Delta]$ la phrase précédente implique 6.1. \square

6.4. *Démonstration de 6.2.* Posons $m_+ = \{f \in \mathcal{C}[P(\Delta)] : 0 \notin \text{supp} f\}$ et $J = f_1 \mathcal{C}[P(\Delta)] + \dots + f_k \mathcal{C}[P(\Delta)]$. Il découle des propriétés de Δ que $J \subset m_+$ et qu'il existe une graduation de l'anneau $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ relativement à laquelle f_1, \dots, f_k sont homogènes de degré positif. Puisque (i) équivaut au fait que m_+ est l'unique idéal maximal de l'anneau $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ contenant J (d'après le théorème de Hilbert sur les zéros). Supposons que (i) n'est pas satisfait, c'est-à-dire qu'il existe un idéal maximal m de l'anneau $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ différent de m_+ et contenant J . Construisons à l'aide de l'idéal m un homomorphisme $\psi: P(\Delta) \rightarrow \{0, 1\}$, où $\{0, 1\}$ est un semi-groupe pour l'opération de multiplication:

$$\psi(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } x^n \in m, \\ 1, & \text{si } x^n \notin m. \end{cases}$$

L'ensemble $\psi^{-1}(1)$ est évidemment un sous semi-groupe de $P(\Delta)$. Il est facile de démontrer que ce semi-groupe est un sous semi-groupe frontière de $P(\Delta)$. Si ce sous semi-groupe consiste seulement de l'élément zéro, alors $m = m_+$. Ainsi, on peut trouver une face $\Delta_1 \subseteq \Delta$ du polyèdre Δ telle que $\psi^{-1}(1) = P(\Delta_1)$. Pour chaque $n \in P(\Delta_1)$ on a $x^n \notin m$. Posons $\varphi_1(n) = x^n + m \in \mathcal{C}[P(\Delta)]/m \cong \mathcal{C}$. Nous obtenons l'application $\varphi_1: P(\Delta_1) \rightarrow \mathcal{C} \setminus 0$. Il est facile de prolonger cette application à un homomorphisme de groupes $\varphi: \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathcal{C} \setminus 0$ (groupe $\mathcal{C} \setminus 0$ multiplicatif). Construisons à l'aide de φ un homomorphisme d'anneaux $\pi_\varphi: \mathcal{C}[\mathbb{Z}^k] \rightarrow \mathcal{C}$ en posant $\sum a_n x^n \rightarrow \sum a_n \varphi(n) \in \mathcal{C}$. Puisque $f_1, \dots, f_k \in m$, on a pour n'importe quel choix de φ la relation $f_{1, \Delta_1}, \dots, f_{k, \Delta_1} \in \ker \pi_\varphi$ i.e. les $f_{1, \Delta_1}, \dots, f_{k, \Delta_1}$ s'annulent au point de $(\mathcal{C} \setminus 0)^k$ qui correspond à l'idéal $\ker \pi_\varphi$. La démonstration de (i) \Rightarrow (ii) est analogue. \square

6.5. Nous dirons que la série (le polynôme, le polynôme de Laurent) est *non-dégénéré sur la face Δ* de la frontière de Newton, si les polynômes de Laurent

$x_1 \frac{\partial f_\Delta}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f_\Delta}{\partial x_k}$ ne s'annulent pas en même temps sur $(\mathcal{C} \setminus 0)^k$. Si $\dim \Delta = q$ et le nombre de points de l'ensemble $\text{supp} f_\Delta$ est égal à $q + 1$, alors la face Δ est un simplexe et f est la somme des monômes (à coefficients non-nuls) qui correspondent au sommet de ce simplexe, et cette somme est non-dégénérée sur Δ pour des valeurs quelconques non-nulles des coefficients de f . *Nous écrivons maintenant explicitement la condition de non-dégénérescence dans le cas où $\dim \Delta = q$ et le nombre de points de l'ensemble $\text{supp} f_\Delta$ est égal à $q + 2$.*

Soit $f_\Delta = \alpha_0 x^{m_0} + \dots + \alpha_{q+1} x^{m_{q+1}}$. Sans perte de généralité on peut admettre que $\dim \Delta = q = k - 1$. Ainsi, $f_\Delta = \alpha_0 x^{m_0} + \dots + \alpha_k x^{m_k}$ où $\alpha_0, \dots, \alpha_k \in \mathcal{C}$, $m_0, \dots, m_k \in \mathbb{Z}^k$. Il existe une suite (d_0, \dots, d_k) de nombres entiers sans diviseur commun, unique au signe près, qui satisfait au système de k équations à $k + 1$ variables $d_0 m_0 + \dots + d_k m_k = 0$. Posons: $z_0 = x^{m_0}, \dots, z_k = x^{m_k}$. Alors évidemment

$$\mathcal{C}[z_0, z_0^{-1}, \dots, z_k, z_k^{-1}] / (1 - z_0^{d_0} \dots z_k^{d_k}) \cong \mathcal{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}].$$

Par conséquent, f possède un point critique sur $(\mathcal{C} \setminus 0)^k$ si, et seulement si les restrictions d'une fonction $\alpha_0 z_0 + \dots + \alpha_k z_k$ sur la variété différentiable $\{z \in \mathcal{C}^{k+1} : 1 = z_0^{d_0} \dots z_k^{d_k}\}$ possède un point critique. Ecrivons la fonction de Lagrange $L(z, \lambda) = \alpha_0 z_0 + \dots + \alpha_k z_k + \lambda(1 - z_0^{d_0} \dots z_k^{d_k})$. La fonction f_Δ est dégénérée sur Δ si, et seulement si le système $\frac{\partial L}{\partial z} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ possède une solution. Ecrivons ce système.

$$\begin{aligned} \alpha_0 z_0 &= \lambda d_0, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \alpha_k z_k &= \lambda d_k, \\ z_0^{d_0} \dots z_k^{d_k} &= 1. \end{aligned} \tag{20}$$

Le système n'a pas de solution, si au moins un des nombres d_i est nul, i.e. si m_0, \dots, m_k ne sont pas en position générale. Mais lorsque tous les d_i sont non-nuls, alors, pour que le système (20) possède une solution, il faut et il suffit que l'on ait

$$\left(\frac{\alpha_0}{d_0}\right)^{d_0} \dots \left(\frac{\alpha_k}{d_k}\right)^{d_k} = 1. \quad \square \tag{21}$$

6.6. Du point de vue pratique, il est utile de savoir que la condition de non-dégénérescence est un invariant affine dans le sens suivant. Soit Δ une face de dimension q de la frontière de Newton d'une série (d'un polynôme, d'un polynôme de Laurent) f . On peut se représenter le polynôme de Laurent f_Δ comme une application finie de l'ensemble du polyèdre convexe $\Delta \subset \mathbb{R}^k$ dans \mathcal{C} (qui envoie tout le polyèdre, sauf un ensemble fini dans zéro). On voit facilement que la dégénérescence ou la non-dégénérescence de f sur Δ se détermine par le type réel affine de cette application. \square

§ 7. Formule pour la modalité d'une fonction de deux variables à partie principale non-dégénérée à l'origine

7.1. Soit $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$ une série commode à partie principale newtonienne non-dégénérée à l'origine. Désignons $\mathbb{C}[[x, y]]$ par \mathcal{A} . Introduisons dans \mathcal{A} une filtration de Newton (voir § 2) et désignons $\text{gr } \mathcal{A}$ par A ; nous supposons que $f \in \mathcal{A}_M \setminus \mathcal{A}_{M+1}$. Désignons l'idéal $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ par J .

V.I. Arnold appelle *base correcte de l'anneau \mathcal{A}/J* une telle suite d'éléments e_1, \dots, e_q de l'anneau \mathcal{A} , que pour chaque $n \geq 0$ les images des éléments de l'ensemble $\{e_1, \dots, e_q\} \cap (\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_{n+1})$ forment une base de $\mathcal{A}_n / ((\mathcal{A}_n \cap J) + \mathcal{A}_{n+1}) \cong (\mathcal{A}/J)_n$. V.I. Arnold appelle *modalité intérieure* de la série f le nombre d'éléments d'une base correcte situées dans \mathcal{A}_M . La définition de la *modalité* d'une série f est la démonstration du fait que la modalité de f est égale à la dimension diminuée de 1 du strate $\mu \equiv \text{const}$ dans la déformation miniverselle de f peuvent être trouvés dans [14].

Nous démontrerons dans ce paragraphe la proposition suivante trouvée expérimentalement par V.I. Arnold ([4, 9.9]).

7.2. Proposition. *Construisons deux demi-droites issues du point $(2, 2) \in \mathbb{R}_+^2$, parallèlement aux axes de coordonnées et désignons par D le polygone fermé limité par ses segments et par un morceau de la frontière de Newton. Désignons par $m(D)$ le nombre de points de \mathbb{N}^2 intérieurs de D ou situés sur la frontière de D . Alors on a : (modalité de f) = (modalité intérieure de f) = $m(D)$.*

Démonstration. Comme m'a indiqué A. Vartchenko, chaque série proche de f et possédant le même nombre de Milnor est difféomorphe à une série avec la même frontière de Newton que f . Cette assertion découle de l'invariance des coefficients de Puiseux le long du strate $\mu \equiv \text{const}$ (Lê [15]); on en déduit, à l'aide du théorème I, que la modalité de f est égale à la modalité intérieure. Démontrons maintenant que la modalité intérieure est égale à $m(D)$.

Désignons par μ_1 le nombre d'éléments d'une base correcte qui n'appartiennent pas à \mathcal{A}_M . La modalité intérieure de f est par définition égale à $\mu(f) - \mu_1$ et il suffit donc de démontrer que $\mu_1 + m(D) = \mu(f)$.

Calculons μ_1 . On a clairement $\mu_1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} / (\mathcal{A}_M + J)$. Posons :

$$k = \left(\text{minimum de tous les } i \in \mathbb{N} \text{ tels que } y^i \frac{\partial f}{\partial x} \in \mathcal{A}_M \right),$$

$$l = \left(\text{minimum de tous les } i \in \mathbb{N} \text{ tels que } x^i \frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{A}_M \right).$$

Désignons par V l'espace linéaire engendré par les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x}, y \frac{\partial f}{\partial x}, \dots, y^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}, x \frac{\partial f}{\partial y}, \dots, x^{l-1} \frac{\partial f}{\partial y}$ dans le \mathcal{C} -module \mathcal{A} . Puisque $x \frac{\partial f}{\partial x} \in \mathcal{A}_M, y \frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{A}_M$, on a $\mu_1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} / (\mathcal{A}_M + V)$. De la convexité de la frontière de Newton on déduit facilement que l'application naturelle $V \rightarrow \mathcal{A} / \mathcal{A}_M$ est injective. En effet, supposons que la frontière de Newton a pour extrémités les points $(a, 0), (0, b)$ et contient des côtes d'extrémités $(a, 0), (a_1, b_1)$ et d'extrémités $(a_2, b_2), (0, b)$. Alors le monôme de filtration minimale qui figure dans $y^i \frac{\partial f}{\partial x}$ est $x^{a_2-1} y^{b_2+i}$ et le monôme de filtration minimale qui figure dans $x^j \frac{\partial f}{\partial y}$ est $x^{a_1+j} y^{b_1-1}$. Pour $i=0, \dots, k-1, j=0, \dots, l-1$, les monômes indiqués diffèrent deux à deux et n'appartiennent pas à \mathcal{A}_M et donc les « images » dans $\text{gr}(\mathcal{A} / \mathcal{A}_M)$ des vecteurs qui engendrent V sont linéairement indépendantes. Ainsi, $\mu_1 = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{A} / \mathcal{A}_M) - \dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{A} / \mathcal{A}_M) - k - l$. Remarquons que k est le nombre de points entiers de la forme $(a_2 - 1, b_2 + i)$ situés en-dessous de la frontière de Newton (pour $i \geq 0$); le nombre l peut être décrit d'une manière analogue.

Calculons maintenant $m(D)$. Désignons par k_1 le nombre de points entiers de la forme $(1, 1 + i)$, où $i \geq 0$, non-situés au dessus de la frontière de Newton, et par l_1 le nombre de points entiers de la forme $(1 + j, 1)$, où $j \geq 0$, non-situés au-dessus de la frontière de Newton. On a clairement

$$\begin{aligned} m(D) &= \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{A} / \mathcal{A}_{M+1}) - (a+1) - (b+1) + 1 - k_1 - l_1 + 1 \\ &= \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{A} / \mathcal{A}_{M+1}) - a - b - k_1 - l_1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mu_1 + m(D) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}/\mathcal{A}_M) + \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}/\mathcal{A}_{M+1}) - a - b - (k + k_1) - (l + l_1).$$

Un calcul direct des points entiers nous montre que

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}/\mathcal{A}_M) + \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}/\mathcal{A}_{M+1}) = 2S + a + b + 1,$$

où S est la surface en-dessous de la frontière de Newton. D'après le théorème I(ii), $\mu(f) = 2S - a - b + 1$. Ainsi

$$\mu(f) - \mu_1 - m(D) = (k + k_1 - b) + (l + l_1 - a).$$

Des définitions de k, k_1, l, l_1 on voit clairement que $k + k_1 = b$ et $l + l_1 = a$. \square

Bibliographie

1. Milnor, J.: Singular points of complex hypersurfaces. Ann. Math. Stud. n° 61, Princeton N.J. Univ. Press 1968
2. Palamodov, V.P.: On the multiplicity of a holomorphic mapping. Funct. Anal. i ego pril., **1**, 54–65 (1967)
3. Lê Dung Trång, Ramanujam, C.P.: The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type. Ecole Polytechnique Paris 1973
4. Arnold, V.I.: The normal forms of functions in a neighbourhood of degenerate singular points. Uspehi Mat. Nauk. **XXIX**, 11–49 (1974)
5. Hochster, M.: Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes. Ann. of Math. **96**, 318–337 (1972)
6. Kempf, G., Knudsen, F., Mumford, D., Saint-Donat, B.: Toroidal Embeddings, Lecture Notes in Math. **339**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
7. Brüno, A.D.: The power asymptotics for the solutions of non-linear systems, Izv. AN SSSR, ser. matem. **29**, 329–364 (1965)
8. Brüno, A.D.: Elements of the non-linear analysis, Samarkand: 1973
9. Kouchnirenko, A.G.: The Newton polytop and the Milnor numbers. Funct. Anal. i ego pril. **8**, 74–75 (1975)
10. Kouchnirenko, A.G.: The Newton polytop and the number of solutions of a system of k equations with k indeterminates. Uspehi mat. nauk. **XXX**, 302–303 (1975)
11. Serre, J.-P.: Algèbre locale. Multiplicités, Lecture Notes in Math. **11**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1965
12. Shafarevich, I.R.: The foundations of the algebraic geometry. Moscow: Nauka 1972
13. Mather, J.N.: Stability of C^∞ mappings III. Publ. Sc. IHES **35**, 127–156 (1969)
14. Gabrielov, A.M.: Bifurcations, Dynkin diagrams, and modality of isolated singularities. Funct. Anal i ego pril. **8**, 7–12 (1974)
15. Lê Dung Trång: Thèse de Doctorat, Paris VII, Déc. 1971

Reçu le 20 Juin 1975

Janvier 1976. J'ai déduit du théorème III le résultat suivant:

Théorème IV. *Pour presque tous les polynômes de Laurent $f: (\mathbb{C} \setminus 0)^k \rightarrow \mathbb{C}$, qui satisfont à la condition $\text{supp } f \subset \Gamma$, la caractéristique d'Euler $\chi(f^{-1}(0))$ est égal à $(-1)^{k-1} k! V_k(\Gamma)$.*

En même temps D.N. Bernstein et A.G. Hovanski ont démontré la formule la plus générale pour $\chi(f_1^{-1}(0) \cap \dots \cap f_m^{-1}(0))$, où $f_i \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^k]$ et $\text{supp } f_i \subset \Gamma_i$, $1 \leq i \leq m$.

En utilisant la formule pour $\chi(f^{-1}(0))$ A.N. Vartchenko a démontré la formule pour la ζ -fonction de la monodromie d'une fonction analytique à polyèdre de Newton donné. Ce résultat donne une réponse partielle au problème 1.23. A.N. Vartchenko a démontré également la hypothèse 1.13(iii).

J'ai déduit aussi du théorème II le résultat suivant :

Théorème V. *Soit $f: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme commode, la partie principale newtonienne \tilde{f}_0 de polynôme f étant non-dégénérée dans le sens de 1.19. Soit λ une valeur régulière de f . Alors la variété $f^{-1}(\lambda)$ a le type d'homotopie d'un bouquet de $\tilde{\nu}(f)$ sphères de dimension $k-1$.*

Je suis très reconnaissant à A.B. Sossinsky pour la traduction de l'article présent.

A. G. Kouchnirenko
 Department of Mathematics
 University of Moscow
 Moscow 117234
 USSR