Numer. Math. 47, 535–543 (1985)

Numerische Mathematik

Fehlerabschätzungen für nichtsymmetrische Gauß-Quadraturformeln

G. Akrivis* und A. Burgstaller

Mathematisches Institut der Ludwig-Maximilians-Universität, Theresienstr. 39, D-8000 München 2, Bundesrepublik Deutschland

Error Estimates for Nonsymmetric Gaussian Quadrature Formulae

Summary. We consider Gaussian quadrature formulae Q_n, $n \in \mathbb{N}$, approximating the integral $I(f) := \int_{-1}^{1} w(x) f(x)\,dx$, where w is a weight function. In certain spaces of analytic functions the error functional $R_n := I - Q_n$ is continuous. Previously one of the authors deduced estimates for $\|R_n\|$ for symmetric Gaussian quadrature formulae. In this paper we extend these results to nonsymmetric Gaussian formulae using a recent result of Gautschi concerning the sign of $R_n(q_\kappa)$, $q_\kappa(x) := x^\kappa$, for a wide class of weight functions including the Jacobi weights.

Subject Classifications: AMS(MOS) 65D30; CR G1.4.

1. Einleitung

In dieser Arbeit wird das Integral I,

$$I(f) = \int_{-1}^{1} w(x) f(x)\,dx,$$

durch die Gauß-Quadraturformel Q_n,

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$

approximiert. Für die Gewichtsfunktion w, $w \geqq 0$, $\|w\|_1 > 0$ gelte

$$\frac{w(s)}{w(-s)} \leqq \frac{w(t)}{w(-t)} \qquad \text{für } s < t. \tag{1.1}$$

* Neue Anschrift: University of Crete, Department of Mathematics, Iraklion Crete, P.O. Box 470, Greece

Für das Fehlerfunktional $R_n := I - Q_n$ gilt bekanntlich

$$\bigwedge_{f \in C^{2n}[-1,1]} \bigvee_{\xi \in (-1,1)} R_n(f) = \frac{1}{(2n)!\,\alpha_n^2} f^{(2n)}(\xi), \tag{1.2}$$

siehe etwa [5; S. 75]. Dabei ist $\alpha_n > 0$ der Höchstkoeffizient desjenigen Polynoms p_n n-ten Grades, welches bezüglich $(\cdot,\cdot)_w$, $(f,g)_w := \int_{-1}^{1} w(x) f(x) g(x)\, dx$, normiert ist und orthogonal auf $\mathbb{P}_{n-1}$, dem Raum der Polynome vom Höchstgrad $n-1$, steht. Aus (1.2) ergibt sich die Abschätzung

$$|R_n(f)| \leqq \frac{1}{(2n)!\,\alpha_n^2} \|f^{(2n)}\|_\infty. \tag{1.3}$$

Diese Abschätzung ist in vielen Fällen unbefriedigend, da sie die Berechnung hoher Ableitungen erfordert und überdies für wachsende Stützstellenzahl neu berechnet werden muß. Für die obengenannte Klasse von Gewichtsfunktionen leiten wir ableitungsfreie Fehlerabschätzungen her (für Gewichtsfunktionen w mit $\frac{w(s)}{w(-s)} \geqq \frac{w(t)}{w(-t)}$ für $s < t$ siehe Schlußbemerkung 1).

Sei $q_\kappa(x) := x^\kappa$, $\kappa \in \mathbb{N}_0$, $r > 1$ und $K_r := \{z \in \mathbb{C}: |z| < r\}$. Für eine in K_r holomorphe Funktion f mit

$$f(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa^f z^\kappa, \qquad z \in K_r, \tag{1.4}$$

sei

$$|f|_r := \sup\{|\alpha_\kappa^f|\, r^\kappa : \kappa \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad R_n(q_\kappa) \neq 0\}. \tag{1.5}$$

Auf dem Raum

$$X_r := \{f : f \text{ holomorph in } K_r \text{ und } |f|_r < \infty\}$$

ist $|\cdot|_r$ eine Seminorm, bezüglich der das Fehlerfunktional R_n stetig ist, $|R_n(f)| \leqq \|R_n\|\,|f|_r$. Für die durch $|\cdot|_r$ induzierte Norm von R_n gilt

$$\|R_n\| = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{|R_n(q_\kappa)|}{r^\kappa}. \tag{1.6}$$

Die Seminorm $|\cdot|_r$ wurde erstmals von Hämmerlin verwendet, um Fehlerabschätzungen für die Gewichtsfunktion $w(x) = 1$ herzuleiten. Die Beziehung (1.6) wird für spezielle Gewichtsfunktionen in [8] und [2], und allgemein in [1] bewiesen.

Nach Gautschi [6] gilt für Gewichtsfunktionen, die (1.1) erfüllen, $R_n(q_\kappa) \geqq 0$, $\kappa \in \mathbb{N}_0$. Damit erhält man aus (1.6)

$$\|R_n\| = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{R_n(q_\kappa)}{r^\kappa} = R_n\left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{q_\kappa}{r^\kappa}\right),$$

also

$$\|R_n\| = r R_n(\varphi) \quad \text{mit} \quad \varphi(x) := 1/(r-x), \tag{1.7}$$

(vgl. [2]). Aus (1.7) folgt auch eine Integraldarstellung für die Norm des Fehlerfunktionals

$$\|R_n\| = \frac{r}{\Pi_n(r)} \int_{-1}^{1} w(x) \frac{\Pi_n(x)}{r-x} dx \quad \text{mit} \quad \Pi_n(x) := \prod_{i=1}^{n} (x - x_i), \tag{1.8}$$

siehe [2].

Bemerkung. Für eine gerade Gewichtsfunktion läßt sich $|f|_r$ auch in der Form $|f|_r = \sup_{\kappa \geqq n} \{|\alpha_{2\kappa}^f| r^{2\kappa}\}$ schreiben (siehe [2]). Ist $w(\cdot)/w(-\cdot)$ streng monoton, so gilt $|f|_r = \sup_{\kappa \geqq 2n} \{|\alpha_\kappa^f| r^\kappa\}$, da $R_n(q_\kappa) \neq 0$ für $\kappa \geqq 2n$ gilt (siehe [6]).

In [2] wurden für gerade Gewichtsfunktionen Abschätzungen für $\|R_n\|$ angegeben. In dieser Arbeit leiten wir aus den Darstellungen (1.7), (1.8) für die durch (1.1) bestimmte, umfassendere Klasse von Gewichtsfunktionen analoge Schranken her. Hierzu gehören auch die Gauß-Jacobi-Quadraturformeln zu den Gewichtsfunktionen $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ mit $\beta \geqq \alpha$. Im Fall $\beta = -\alpha = \frac{1}{2}$ berechnen wir zusätzlich einen einfachen, geschlossenen Ausdruck für $\|R_n\|$.

2. Abschätzung von $\|R_n\|$ mit Hilfe des Minimalabstandes der Funktion φ von P_{2n-1}

Der Minimalabstand der Funktion φ von P_{2n-1} wird in Rivlin [9] angegeben. Es gilt

Lemma (siehe [9]). *Seien* $a, b \in \mathbb{C}$, $-1 < c < 1$, $\mu \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{N}_0$. *f besitze die Entwicklung*

$$f = b + a \sum_{j=0}^{\infty} c^j T_{\mu j + \nu} \quad \text{in} \quad (C[-1,1], \|\cdot\|_\infty) \tag{2.1}$$

nach Tschebyscheff-Polynomen erster Art. Dann gilt

$$f = \frac{b(1+c^2) - 2bcT_\mu + aT_\nu - acT_{|\mu-\nu|}}{1 + c^2 - 2cT_\mu}. \tag{2.2}$$

Ist $q_d^* \in \mathsf{P}_d$ die beste Tschebyscheff-Approximierende an f und $\mu\kappa + \nu \leqq d < \mu(\kappa+1) + \nu$, so gilt für den Minimalabstand

$$E_d(f) := \|f - q_d^*\|_\infty = |a|\,|c|^{\kappa+1}/(1-c^2). \tag{2.3}$$

Sei $\tau := r - \sqrt{r^2 - 1}$, $r > 1$. Mit $c := \tau$ und $\mu := 1$, $\nu := 0$, $a := 4\tau/(1-\tau^2)$ und $b := -a/2$ ergibt sich aus (2.2) $f(x) = 1/(r-x)$, also $f = \varphi$. Aus dem Lemma folgt nun mit $d = \kappa = 2n-1$

$$E_{2n-1}(\varphi) = 4\tau^{2n+1}/(1-\tau^2)^2. \tag{2.4}$$

Wegen $R_n(p) = 0$ für $p \in \mathsf{P}_{2n-1}$ und (1.7) gilt

$$\begin{aligned}\|R_n\| &= rR_n(\varphi - p)\\ &\leqq r\left\{\int_{-1}^{1} w(x)|\varphi(x)-p(x)|\,dx + \sum_{i=1}^{n} w_i|\varphi(x_i)-p(x_i)|\right\}\\ &\leqq 2r\|w\|_1\|\varphi - p\|_\infty,\end{aligned}$$

also auch

$$\|R_n\| \leqq 2r\|w\|_1 E_{2n-1}(\varphi)$$

und schließlich

$$\|R_n\| \leqq 2r\|w\|_1 \tau^{2n-1}/(r^2-1) =: \sigma_n^A(r). \tag{2.5}$$

3. Abschätzung von $\|R_n\|$ durch Entwicklung von φ nach Orthogonalpolynomen

In diesem Abschnitt leiten wir aus der Darstellung (1.7) Schranken für $\|R_n\|$ her, indem wir φ nach Tschebyscheff-Polynomen und nach den Jacobi-Polynomen $P_j^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ und $P_j^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}$ entwickeln.

Aus dem Lemma erhält man (mit $\tau = r - \sqrt{r^2-1}$)

$$\varphi = \frac{2}{\sqrt{r^2-1}}\left(\frac{1}{2}T_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \tau^j T_j\right) \quad \text{in} \quad (C[-1,1], \|\cdot\|_\infty). \tag{3.1}$$

R_n ist stetig in $(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ und verschwindet auf P_{2n-1}. Damit ergibt sich aus (1.7) und (3.1)

$$\|R_n\| = \frac{2r}{\sqrt{r^2-1}} \sum_{j=2n}^{\infty} \tau^j R_n(T_j). \tag{3.2}$$

Durch Berechnung von $R_n(T_{2n})$ und $R_n(T_{2n+1})$ und Abschätzung von $R_n(T_j)$ für $j \geqq 2n+2$ gewinnen wir im folgenden aus (3.2) Schranken für $\|R_n\|$. Aus (1.2) und $T_k(x) = 2^{k-1}x^k - k2^{k-3}x^{k-2} + \ldots$, $k \in \mathbb{N}_0$, (siehe [5; S. 28]) folgt

$$R_n(T_{2n}) = 2^{2n-1}/\alpha_n^2. \tag{3.3}$$

Zur Bestimmung von $R_n(T_{2n+1})$ berechnen wir zunächst $R_n(q_{2n+1})$, analog zum Vorgehen in [3; S. 157]. Seien p_k, $k \in \mathbb{N}_0$,

$$p_k(x) = \alpha_k x^k + \beta_k x^{k-1} + \ldots, \qquad \alpha_k > 0,$$

die Orthonormalpolynome zum Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_w$. Unter Beachtung von $R_n(p_{n+1}p_n) = 0$ ergibt sich

$$R_n(q_{2n+1}) = C_n R_n(q_{2n}) \quad \text{mit} \quad C_n := -\beta_n/\alpha_n - \beta_{n+1}/\alpha_{n+1}.$$

Aus $R_n(T_{2n+1}) = 2^{2n} R_n(q_{2n+1}) = 2^{2n} C_n R_n(q_{2n})$ erhält man somit

$$R_n(T_{2n+1}) = 2^{2n} C_n/\alpha_n^2. \tag{3.4}$$

Mit (3.3), (3.4) und $|R_n(T_j)| \leqq 2\|w\|_1$, $j \geqq 2n+2$, ergibt sich dann aus (3.2) die Abschätzung

$$\|R_n\| \leqq \frac{2r\tau^{2n}}{\sqrt{r^2-1}} \left\{ \frac{2^{2n-1}}{\alpha_n^2} |1+2\tau C_n| + \frac{2\tau^2}{1-\tau} \|w\|_1 \right\} =: \sigma_n^T(r). \tag{3.5}$$

Aus der Entwicklung der Funktion φ nach Tschebyscheff-Polynomen zweiter Art, d.h. aus

$$\varphi = 2\tau \sum_{j=0}^{\infty} \tau^j U_j, \tag{3.6}$$

erhält man analog mit $|R_n(U_j)| \leqq 2(j+1)\|w\|_1$, $j \geqq 2n+2$, die Abschätzung

$$\|R_n\| \leqq 2r\tau^{2n+1} \left\{ \frac{2^{2n}}{\alpha_n^2} |1+2\tau C_n| + \|w\|_1 \tau \frac{(2n+3)-(2n+2)\tau}{r-1} \right\} =: \sigma_n^U(r). \tag{3.7}$$

Für die Jacobi-Polynome $P_j^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ gilt

$$P_j^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x) = \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2} \frac{T_j(x)+T_{j+1}(x)}{1+x}$$

(vgl. [10; S. 58f]). Damit ergibt sich

$$\varphi = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{2^{2j}(j!)^2}{\pi(2j)!} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{T_j(x)+T_{j+1}(x)}{1+x} \frac{1}{r-x} dx \right\} P_j^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})},$$

also

$$\varphi = \left(\sqrt{\frac{r+1}{r-1}} - 1 \right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{2j}(j!)^2}{(2j)!} \tau^j P_j^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \quad \text{in } (C[-1,1], \|\cdot\|_\infty) \tag{3.8}$$

(vgl. [10; S. 237ff] und [2]). Mit $P_j^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x) = \frac{1}{2^j}\binom{2j}{j} x^j - \frac{1}{2^j}\binom{2j-1}{j-1} x^{j-1} + \dots$ und $\|P_j^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}\|_\infty = \binom{j+\frac{1}{2}}{j}$, $j \geqq 2n+2$, erhält man analog zur Herleitung von (3.5)

$$\begin{aligned} \|R_n\| \leqq r \left(\sqrt{\frac{r+1}{r-1}} - 1 \right) \tau^{2n} \Bigg\{ & \frac{2^{2n}}{\alpha_n^2} |1+\tau(2C_n-1)| \\ & + \frac{2\|w\|_1 \tau^2}{(1-\tau)^2} [(4n+5)-(4n+3)\tau] \Bigg\} =: \sigma_n^{J_1}(r). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Entsprechend erhält man durch Entwicklung der Funktion φ nach den Jacobi-Polynomen $P_j^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|R_n\| \leqq r \left(1 - \sqrt{\frac{r-1}{r+1}} \right) \tau^{2n} \Bigg\{ & \frac{2^{2n}}{\alpha_n^2} |1+\tau(2C_n+1)| \\ & + \frac{2\|w\|_1 \tau^2}{(1-\tau)^2} [(4n+5)-(4n+3)\tau] \Bigg\} =: \sigma_n^{J_2}(r). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Im Spezialfall der Gauß-Jacobi-Quadraturformeln, also für $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $\beta \geqq \alpha > -1$, gilt in den Abschätzungen (3.5), (3.7), (3.9) und (3.10)

$$\frac{1}{\alpha_n^2}=\frac{2^{2n+\alpha+\beta+1}\,\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\,n!}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)}$$

$$C_n=(\beta-\alpha)\left(\frac{n+1}{2n+\alpha+\beta+2}+\frac{n}{2n+\alpha+\beta}\right)$$

und

$$\|w\|_1=2^{\alpha+\beta+1}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}.$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Gauß-Formeln zu den Gewichtsfunktionen $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ und $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ zueinander symmetrisch sind und

$$P^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x)=(-1)^j P_j^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(-x)$$

gilt, schreibt sich ein Ergebnis von Chawla [4] als

$$R_n(P_j^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})})=\begin{cases}\gamma_j, & j=(2n+1)m \text{ oder } j=(2n+1)m-1, \quad m=1,3,\ldots\\ -\gamma_j, & j=(2n+1)m \text{ oder } j=(2n+1)m-1, \quad m=2,4,\ldots\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

für $w(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ mit $\gamma_j:=\frac{\pi(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}$. Damit ergibt sich aus (1.7) und (3.8)

$$\|R_n\|=\frac{\pi(1+\tau)^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\frac{r\,\tau^{2n}}{1+\tau^{2n+1}} \qquad \text{für } w(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \tag{3.11}$$

4. Asymptotisches Verhalten von $\|R_n\|$ für $r\to 1+$

Da die Knoten der Gauß-Quadraturformel im Inneren des Integrationsintervalls liegen, ergibt sich aus (1.7)

$$\|R_n\|\sim\int_{-1}^{1}\frac{w(x)}{r-x}\,dx \qquad \text{für } r\to 1+, \tag{4.1}$$

d.h. $\lim\limits_{r\to 1+}\|R_n\|\Big/\int_{-1}^{1}\frac{w(x)}{r-x}\,dx=\delta_n\neq 0$. Falls $\int_{-1}^{1}\frac{w(x)}{r-x}\,dx$ für $r\to 1+$ nicht beschränkt bleibt, gilt sogar genauer $\|R_n\|\cong\int_{-1}^{1}\frac{w(x)}{r-x}\,dx$, d.h.

$$\lim_{r\to 1+}\|R_n\|\Big/\int_{-1}^{1}\frac{w(x)}{r-x}\,dx=1.$$

Im folgenden wird dieses Verhalten für Jacobi-Gewichtsfunktionen weiter untersucht. Im Fall $\beta \geqq \alpha > 0$ leiten wir eine Abschätzung her, die für $r \to 1+$ asymptotisch gleich $\|R_n\|$ ist.

Stützstellen der Gauß-Formel Q_n zur Gewichtsfunktion $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $\beta \geqq \alpha > -1$, sind die Nullstellen des Jacobi-Polynoms $P_n^{(\alpha,\beta)}$. In diesem Fall hat also (1.8) die Form

$$\|R_n\| = \frac{r}{P_n^{(\alpha,\beta)}(r)} \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{r-x} dx. \tag{4.2}$$

Mit der Jacobi-Funktion zweiter Art $Q_n^{(\alpha,\beta)}$,

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(r) := \frac{1}{2}(r-1)^{-\alpha}(r+1)^{-\beta} \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{r-x} dx$$

(siehe [10; S. 73ff]), schreibt sich (4.2) als

$$\|R_n\| = 2r(r-1)^\alpha (r+1)^\beta Q_n^{(\alpha,\beta)}(r)/P_n^{(\alpha,\beta)}(r). \tag{4.3}$$

Für $r \to 1+$ gilt (siehe [10; S. 77])

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(r) \begin{cases} \cong -[\ln(r-1)]/2 & \text{für } \alpha = 0 \\ \cong 2^{\alpha-1} \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+2\alpha+1)} & \text{für } \alpha > 0. \\ \sim 1 & \text{für } \alpha < 0 \end{cases}$$

Damit ergibt sich wegen $P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$

$$\|R_n\| \begin{cases} \cong -2^\beta \ln(r-1) & \text{für } \alpha = 0 \\ \cong 2^{\alpha+\beta} \alpha \dfrac{[\Gamma(\alpha)]^2 n!}{\Gamma(n+2\alpha+1)} & \text{für } \alpha > 0 \\ \sim (r-1)^\alpha & \text{für } \alpha < 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

für $r \to 1+$.

Bemerkung. Für $\alpha > 0$ strebt $\|R_n\|$ für $r \to 1+$ gegen einen endlichen Wert. Das bedeutet, daß das Fehlerfunktional einer Gauß-Jacobi-Formel für $\beta \geqq \alpha > 0$ auf $(\tilde{X}_1, |\cdot|_1)$ stetig ist. Dabei ist $|f|_1 := \sup\{|\alpha_\kappa^f|: R_n(q_\kappa) \neq 0\}$ und $\tilde{X}_1 := \{f: f$ holomorph in K_1 und $|f|_1 < \infty\}$. Insbesondere gilt für $r=1$ $\|R_n\| = \sum_{\kappa=2n}^{\infty} R_n(q_\kappa)$.

Aus (4.4) und obiger Bemerkung folgt nun für $\alpha > 0$

$$\sum_{\kappa=2n}^{\infty} R_n(q_\kappa) = 2^{\alpha+\beta} \alpha [\Gamma(\alpha)]^2 n!/\Gamma(n+2\alpha+1).$$

Wegen

$$\begin{aligned} \|R_n\| &= \frac{R_n(q_{2n})}{r^{2n}} \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \frac{R_n(q_{2n})}{r^{2n+1}} + \sum_{\kappa=2n+1}^{\infty} \frac{R_n(q_\kappa)}{r^\kappa} \\ &\leqq \frac{R_n(q_{2n})}{r^{2n}} \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r^{2n+1}} \sum_{\kappa=2n}^{\infty} R_n(q_\kappa) \end{aligned}$$

ergibt sich damit

$$\|R_n\| \leqq \frac{1}{\alpha_n^2 r^{2n}} \left(1-\frac{1}{r}\right) + \frac{2^{\alpha+\beta}\alpha[\Gamma(\alpha)]^2 n!}{\Gamma(n+2\alpha+1)} \frac{1}{r^{2n+1}} =: \sigma_n^Q(r). \tag{4.5}$$

Bemerkung. Stützstellen der Gauß-Quadraturformel Q_n zur Gewichtsfunktion $w(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ sind die Nullstellen von W_n, $W_n(x):=\frac{T_n(x)+T_{n+1}(x)}{1+x}$. Nach (1.8) gilt also

$$\|R_n\| = \frac{r(r+1)}{T_n(r)+T_{n+1}(r)} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{T_n(x)+T_{n+1}(x)}{1+x} \frac{1}{r-x} dx.$$

Hieraus ergibt sich nochmals (3.11), vgl. [2].

Beispiel. Sei $f(x)=\sum_{\kappa=2}^{\infty}\left(\frac{x^2}{4}\right)^{\kappa}$ mit der holomorphen Ergänzung $f(z)=\frac{z^4}{4(4-z^2)}$, $f\in X_r$ für $r\in(1,2)$. Der exakte Fehler bei der Approximation des Integrals $\int_{-1}^{1}(1+x)f(x)\,dx$ mit der Gauß-Quadraturformel Q_2 zur Gewichtsfunktion $w(x)=1+x$ ist $9.78\cdot 10^{-3}$. Die herkömmliche Abschätzung (1.3) liefert als Fehlerschranke $1.07\cdot 10^{-1}$.

$|f|_r$, $r\in(1,2)$ läßt sich durch

$$\|f\|_{2,r} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\Big(\int_{|z|=r} |f(z)|^2 |dz|\Big)^{1/2} = \left[\sum_{\kappa=2}^{\infty}\left(\frac{r^4}{16}\right)^{\kappa}\right]^{1/2} = \frac{r^4}{4\sqrt{16-r^4}}$$

und durch $\max_{|z|=r}|f(z)|=r^4/(16-4r^2)$ abschätzen (siehe [8]).

Aus $|R_2(f)|\leqq \inf_{1<r<2}(\|R_2\|\,|f|_r)$ erhält man folgende Fehlerschranken (das Minimum wird jeweils für $r=r_0$ angenommen), wenn $\|R_2\|$ durch σ_2^A, σ_2^T, σ_2^U, $\sigma_2^{J_1}$ oder $\sigma_2^{J_2}$ und $|f|_r$ durch $\|f\|_{2,r}$ oder $\max_{|z|=r}|f(z)|$ abgeschätzt wird.

Tabelle 1

$\|R_2\|\leqq$ / $\|f\|_r\leqq$	σ_2^A	σ_2^T	σ_2^U	$\sigma_2^{J_1}$	$\sigma_2^{J_2}$
$\|f\|_r$	$5.16\cdot 10^{-2}$ $r_0=1.99$	$1.95\cdot 10^{-2}$ $r_0=1.99$	$2.99\cdot 10^{-2}$ $r_0=1.99$	$5.67\cdot 10^{-2}$ $r_0=1.99$	$3.67\cdot 10^{-2}$ $r_0=1.99$
$\\|f\\|_{2,r}$	$9.31\cdot 10^{-2}$ $r_0=1.67$	$4.03\cdot 10^{-2}$ $r_0=1.74$	$6.67\cdot 10^{-2}$ $r_0=1.77$	$1.39\cdot 10^{-1}$ $r_0=1.80$	$8.21\cdot 10^{-2}$ $r_0=1.77$
$\max_{\|z\|=r}\|f(z)\|$	$1.93\cdot 10^{-1}$ $r_0=1.50$	$9.32\cdot 10^{-2}$ $r_0=1.58$	$1.63\cdot 10^{-1}$ $r_0=1.62$	$3.71\cdot 10^{-1}$ $r_0=1.67$	$2.01\cdot 10^{-1}$ $r_0=1.61$

Schlußbemerkungen

1. Für die Gewichtsfunktion w gelte $\frac{w(s)}{w(-s)} \geqq \frac{w(t)}{w(-t)}$ für $s<t$. Dann erfüllt $w(-\cdot)$ die Bedingung (1.1). Die Gauß-Formeln Q_n und $\tilde{Q}_n$ zu w bzw. $w(-\cdot)$ sind symmetrisch zueinander. Folglich gilt für die entsprechenden Restfunktionale $\tilde{R}_n(q_\kappa)=(-1)^\kappa R_n(q_\kappa)$, und damit nach (1.6) $\|\tilde{R}_n\|=\|R_n\|$. Unsere Ergebnisse gelten also auch für solche Gewichtsfunktionen, insbesondere für $w(x)=(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ mit $\alpha>\beta$.

2. Für $r\to\infty$ ist σ_n^A asymptotisch proportional zu $\|R_n\|$, alle anderen Schranken sind asymptotisch gleich $\|R_n\|$. Für $r\to 1+$ ist σ_n^Q asymptotisch gleich $\|R_n\|$, $\sigma_n^{J_1}$ asymptotisch proportional zu $(r-1)^{-3/2}$, σ_n^A, σ_n^T, σ_n^U und $\sigma_n^{J_2}$ verhalten sich wie $1/(r-1)$.

3. Für gerade Gewichtsfunktionen sind die entsprechenden Abschätzungen in [2] genauer. Dort wurde nämlich berücksichtigt, daß die ungeraden Funktionen in diesem Fall durch die Quadraturformel exakt integriert werden.

4. Gautschi und Varga zeigen in [7] für $w(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$$\sum_{\kappa=2n}^{\infty} \frac{|R_n(q_\kappa)|}{r^\kappa}=\frac{\pi r}{\sqrt{r^2-1}}\,\frac{\tau^{2n}(1+\tau)^2}{1+\tau^{2n+1}}.$$

Implizit ist also (3.11) in [7] enthalten.

5. Die Abschätzung (3.4) in [7], d.h.

$$|R_n(f)| \leqq \|R_n\| \sup_{|z|=r} |f(z)|,$$

folgt unmittelbar aus $|R_n(f)| \leqq \|R_n\|\,|f|_r$, da $|f|_r \leqq \sup_{|z|=r} |f(z)|$ gilt.

Danksagung. Die Autoren bedanken sich bei Prof. Dr. G. Hämmerlin für seine Unterstützung.

Literatur

1. Akrivis, G.: Fehlerabschätzungen bei der numerischen Integration in einer und mehreren Dimensionen. Dissertation, Universität München (1983)
2. Akrivis, G.: Fehlerabschätzungen für Gauß-Quadraturformeln. Numer. Math. **44**, 261–278 (1984)
3. Braß, H.: Quadraturverfahren. Göttingen, Zürich: Vandenhoeck und Ruprecht 1977
4. Chawla, M.M.: Hilbert spaces for estimating errors of quadratures for analytic functions. BIT **10**, 145–155 (1970)
5. Davis, P.J., Rabinowitz, P.: Methods of numerical integration. New York, San Francisco, London: Academic Press 1975
6. Gautschi, W.: On Padé approximants associated with Hamburger series. Calcolo **20**, 111–127 (1983)
7. Gautschi, W., Varga, R.S.: Error bounds for Gaussian quadrature of analytic functions. SIAM J. Numer. Anal. **20**, 1170–1186 (1983)
8. Hämmerlin, G.: Fehlerabschätzungen bei numerischer Integration nach Gauß. In: Methoden und Verfahren der mathematischen Physik, Bd. 6, (Hrsg. B. Brosowski, E. Martensen), S. 153–163. Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut 1972
9. Rivlin, T.J.: Polynomials of best uniform approximation to certain rational functions. Numer. Math. **4**, 345–349 (1962)
10. Szegö, G.: Orthogonal polynomials. New York: Amer. Math. Soc. 1939

Eingegangen am 16. April 1984/16. Dezember 1984